ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2022, том 23, № 1, с.5-19. https://doi.org/10.21455/gr2022.1-1

УДК 550.831

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ ГРАДИЕНТНОГО СПУСКА

© 2022 г. Л.С. Чепиго, И.В. Лыгин, А.А. Булычев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия
Автор для переписки: Л.С. Чепиго (e-mail: lev.chepigo@gmail.com)

Рассматривается подход автоматизированного решения линейной обратной задачи гравиразведки, реализующий построение градиентных по латерали и вертикали плотностных моделей с возможностью выбора преимущественной глубины источников. Обратная задача решается методом градиентного спуска с переменной скоростью. Показано, что если задать возрастающую с глубиной скорость градиентного спуска, то в процесс подбора плотностной модели “включаются” глубокие ячейки. В частности, скорость градиентного спуска может возрастать с глубиной как степенная функция. В общем случае скорость градиентного спуска зависит и от глубины, и от горизонтальных координат и может задаваться функционально или явно.

При наличии априорной информации скорость градиентного спуска может быть выражена более сложным образом в зависимости от глубины и от горизонтальных координат. Максимальные значения скорости градиентного спуска в таком случае должны присваиваться ячейкам, в которых по априорным данным имеются или ожидаются плотностные неоднородности. В качестве таковых могут выступать глубинно-скоростные модели, широко применяемые в сейсморазведке, и открывается путь для комплексирования.

Представлено применение подхода на тестовой модели, которая состоит из двух бесконечных горизонтальных стержней, расположенных на разных глубинах. Оценка качества работы алгоритма с разными значениями степенной функции осуществляется путем сравнения подобранных глубин центров масс с истинными глубинами. Показано, что оптимальные результаты решения обратной задачи для выбранного типа модели достигаются при использовании скорости градиентного спуска, пропорциональной квадрату глубины.

Разработанный алгоритм заложен в основу авторского комплекса программного обеспечения *GravInv* [*Чепиго,* 2019].

Ключевые слова: гравиразведка, обратная задача, метод градиентного спуска, плотностное моделирование.

Введение

В практике современной гравиразведки составление плотностных моделей производится либо в интерактивном (ручном), либо в автоматизированном режиме с минимальным участием интерпретатора. Оба подхода обладают своими достоинствами и недостатками. Но в обоих случаях наиболее востребованным решением является модель, максимально полно удовлетворяющая априорной информации и физически реализуемая. Под физически реализуемой моделью будем понимать кусочно-гладкую среду, в которой присутствует градиентная по плотности неоднородность толщ (латеральная и глубинная), а также возможны скачки плотности на границах раздела плотностных блоков.

При интерактивном плотностном моделировании чаще всего подбор выполняется с использованием блочных моделей с постоянной плотностью внутри блоков или полиноминальным распределением [*Страхов, Лучицкий,* 1980а,б; *Чепиго, Лыгин, Булычев,* 2019; *Zhou,* 2010; *D’Urso,* 2015; *D’Urso, Trotta,* 2017]. В таких моделях, чтобы учесть изменения плотности с глубиной или по латерали, избежать резких скачков плотности на границе блоков, обеспечивая при этом наилучшую детальность, приходится усложнять модель введением большого количества блоков. При указанном подходе ручное управление моделью (её редактирование) становится достаточно сложной задачей.

Вопрос создания подходов к автоматизированному решению обратной задачи гравиразведки как с учетом априорной информации, так и без неё активно затрагивался в исследованиях в 70–80-х гг. прошлого столетия. В настоящее время эта задача попрежнему остается актуальной. Ей посвящены работы таких ученых, как В.Н. Страхов [*Страхов, Лучицкий,* 1980а,б], В.И. Старостенко [*Старостенко и др.,* 2015], В.Р. Мелихов [*Мелихов, Булычев, Састри,* 1979], А.И. Кобрунов [*Кобрунов, Варфоломеев,* 1981; *Кобрунов,* 2007], Ю.И. Блох [2009], А.М. Петрищевский [2021], П.С. Мартышко [*Мартышко, Акимова, Мисилов,* 2016], П.И. Балк, А.С. Долгаль [*Балк, Долгаль,* 2018] и др. На сегодняшний день большинство алгоритмов используют сеточные модели, т.е. модели, разбитые на множество ячеек с одинаковой геометрией. Рядовыми являются расчёты с размерностью сеточной модели от нескольких сотен ячеек вдоль каждой координатной оси.

Основной недостаток алгоритмов автоматизированного решения обратной задачи – низкая чувствительность к глубоким ячейкам, вследствие чего подбираются плотностные модели, ярко контрастные только в верхней части разреза. Получаемые в результате решения модели практически не годятся для геологической интерпретации, поскольку фактически отражают лишь латеральное распределение источников аномалий гравитационного поля.

Таким образом, возникает проблема развития подходов к решению обратных задач для сред с переменной плотностью, позволяющих подбирать плотностные модели с распределёнными по глубине неоднородностями.

Математические основы решения обратной задачи гравиразведки для сеточных моделей

Рассмотрим классический подход к решению обратной задачи гравиразведки для сеточных моделей в двумерном случае. Пусть сеточная модель разбивается по вертикали на M элементарных слоёв и по горизонтали на N ячеек в каждом слое. В таком случае распределение плотности в модели можно записать в виде матрицы, состоящей из M строк и N столбцов. Для дальнейших преобразований ее следует развернуть в вектор-столбец из MN элементов:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}\ \sigma_{12} \dots \sigma_{1N} \\ \sigma_{21}\ \sigma_{22} \dots \sigma_{2N} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sigma_{M1}\ \sigma_{M2} \dots \sigma_{MN} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \dots \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \dots \\ \sigma_{ij} \\ \dots \\ \sigma_{MN} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

в котором σ_{ij} – значение плотности *ij*-й ячейки плотностной модели, стоящей на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца таблицы.

Обратную задачу гравиразведки для плотностного грида можно представить в виде решения недоопределённой системы линейных алгебраических уравнений относительно плотностей σ_{ij}:

$$\begin{cases} \Delta g_1 = \Delta g_{111}\sigma_{11} + \Delta g_{112}\sigma_{12} + \ldots + \Delta g_{1jk}\sigma_{jk} + \ldots + \Delta g_{1MN}\sigma_{MN} \\ \Delta g_2 = \Delta g_{211}\sigma_{11} + \Delta g_{212}\sigma_{12} + \ldots + \Delta g_{2jk}\sigma_{jk} + \ldots + \Delta g_{2MN}\sigma_{MN} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta g_i = \Delta g_{i11}\sigma_{11} + \Delta g_{i12}\sigma_{12} + \ldots + \Delta g_{ijk}\sigma_{jk} + \ldots + \Delta g_{iMN}\sigma_{MN} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta g_N = \Delta g_{N11}\sigma_{11} + \Delta g_{N12}\sigma_{12} + \ldots + \Delta g_{Njk}\sigma_{jk} + \ldots + \Delta g_{NMN}\sigma_{MN} \end{cases}. \quad (2)$$

Здесь Δg_i – наблюдённое значение аномалии силы тяжести в *i*-й точке расчёта; Δg_{ijk} – значение аномалии силы тяжести, создаваемой *jk*-й ячейкой с единичной плотностью в *i*-й точке.

Систему уравнений (2) можно записать в матричном виде

$$A\sigma = \Delta g,$$

$$A = \begin{pmatrix} \Delta g_{111}\ \Delta g_{112} \ldots \Delta g_{1jk} \ldots \Delta g_{1NM} \\ \Delta g_{211}\ \Delta g_{212} \ldots \Delta g_{2jk} \ldots \Delta g_{2NM} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta g_{i11}\ \Delta g_{i12} \ldots \Delta g_{ijk} \ldots \Delta g_{iNM} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta g_{N11}\ \Delta g_{N12} \ldots \Delta g_{Njk} \ldots \Delta g_{NNM} \end{pmatrix}, \quad \Delta g = \begin{pmatrix} \Delta g_1 \\ \Delta g_2 \\ \ldots \\ \Delta g_i \\ \ldots \\ \Delta g_N \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где A – матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений; σ – вектор неизвестных системы (распределение плотностей); Δg – вектор значений поля (свободные члены).

Будем искать решение системы, соответствующее условию минимума функционала невязки L:

$$L = \| A\sigma - \Delta g \|^2 \to \min. \quad (4)$$

Минимум функционала L достигается в точке, в которой его градиент ∇L равен нулю:

$$\nabla L = 2A^T(A\sigma - \Delta g) = 0. \quad (5)$$

Отметим, что в скобках выражения (5) находится вектор-столбец разностного гравитационного поля, а в каждой строке матрицы A^T записываются гравитационные эффекты одной ячейки во всех расчётных точках. Таким образом, значение градиента функционала невязки по плотности каждой ячейки определяется как скалярное произведение вектора разностного поля на вектор гравитационного эффекта ячейки с единичной плотностью. Аналитическое решение системы уравнений (2) с условием (4) имеет следующий вид:

$$\sigma = (A^T A)^{-1} A^T \Delta g. \quad (6)$$

Вычисление обратной матрицы имеет кубическую временную сложность [*Cormen et al.,* 2009; *Sipser,* 2006], т.е. при увеличении количества элементов матрицы в k раз, длительность вычисления обратной матрицы возрастает в k^3 раз, и, таким образом, требует значительных временных затрат при большом количестве элементов разбиения модели.

Снизить временную сложность алгоритма решения обратной задачи можно с помощью применения методов оптимизации [*Гребенникова,* 2017], к числу которых относится метод градиентного спуска.

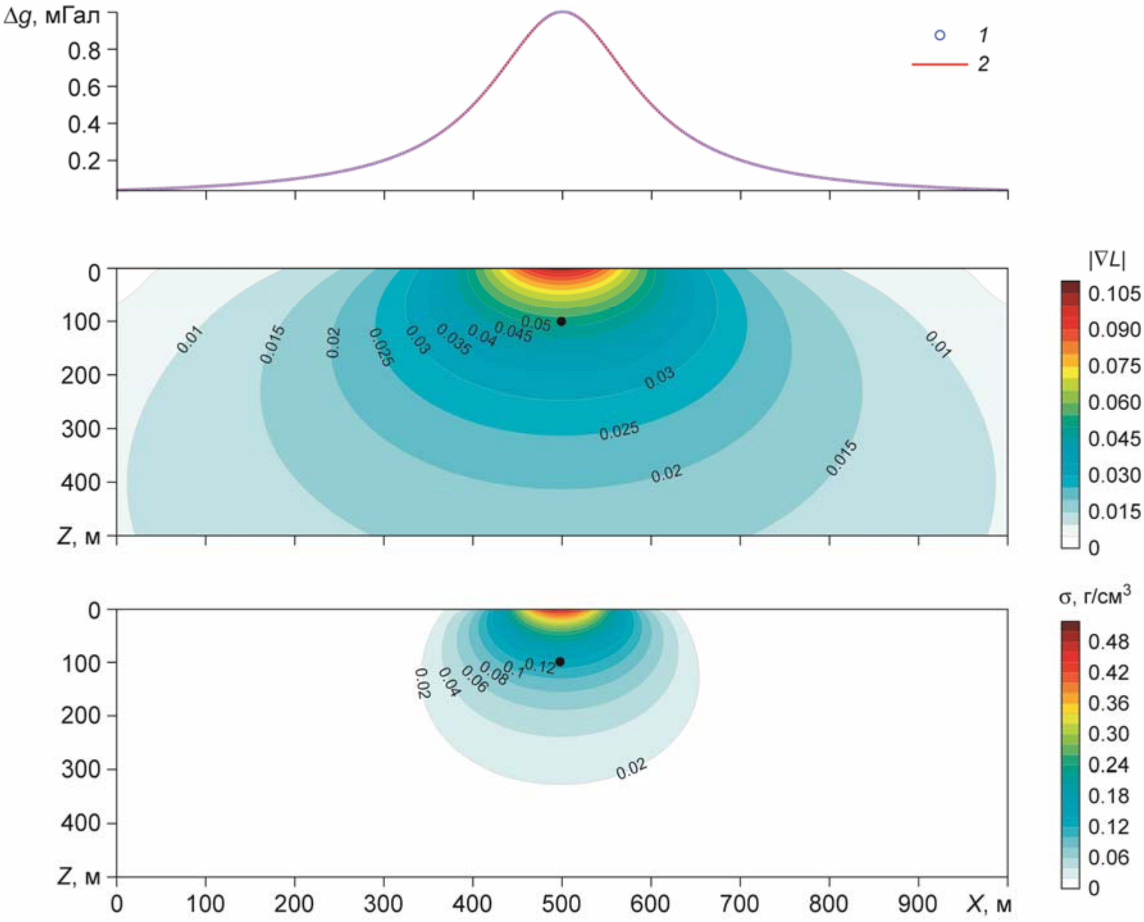
Рассмотрим решение системы уравнений (2) с помощью упомянутого метода. При таком подходе подбор распределения плотности осуществляется итерационно и изменение плотности на каждой итерации происходит в направлении, противоположном градиенту (антиградиент):

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} - \alpha \nabla L(\sigma_{n-1}), \tag{7}$$

где σ_n – плотностной грид на n-м шаге; α – числовой параметр (скорость градиентного спуска), постоянный в пределах одной итерации.

Система (2) является недоопределенной и имеет бесконечное число решений, т.е. одному распределению аномалий гравитационного поля может соответствовать бесконечное множество эквивалентных плотностных моделей [*Кобрунов,* 2007].

В случае отсутствия априорных сведений о распределении плотности по разрезу возникает следующая проблема: максимальные значения градиента функционала невязки, а значит и наибольшие изменения плотности на каждом шаге, соответствуют приповерхностным ячейкам (рис. 1, *по центру*). Вследствие уменьшения градиента функционала невязки с глубиной наибольшие значения избыточной плотности в таком случае при подборе концентрируются в верхней части разреза (рис. 1, *внизу*).



При наличии достоверной априорной плотностной модели к выражению (4) добавляется стабилизирущий (регуляризирующий) функционал – слагаемое, отвечающее за отклонение от априорных данных ($L2$-регуляризация, [*Тихонов, Арсенин,* 1979]):

$$L_R = \| A\sigma - \Delta g \|^2 + c \| \sigma - \sigma_A \|^2 \to \min , \tag{8}$$

где σ_A – априорные значения плотности; c – коэффициент регуляризации.

Тогда выражение для градиента и плотностного грида на n-м шаге записывается следующим образом:

$$\begin{gathered} \nabla L_R = 2A^T(A\sigma - \Delta g) + 2c(\sigma - \sigma_A), \\ \sigma_n = \sigma_{n-1} - \alpha \nabla L_R(\sigma_{n-1}). \end{gathered} \tag{9}$$

Но и в случае решения обратной задачи с $L2$-регуляризацией по формулам (8)–(9) остаются проблемы, связанные с концентрацией плотности в верхней части разреза.

Решим обратную задачу по гравитационному эффекту от прямоугольной призмы размером 50×50 м с избыточной плотностью 2 г/см^3 и глубиной до верхней кромки 75 м (рис. 2, II). В априорную модель добавим в контуре истинного положения призмы постоянную плотность 1.9 г/см^3 (рис. 2, III), рассчитывая, что при подборе априорная плотность примет значение истинной. В процессе решения обратной задачи с $L2$-регуляризацией минимизация отклонения итоговой плотностной модели от априорной совместно с минимизацией невязки достигается, в первую очередь, путём добавления малых значений плотности в верхней части разреза (рис. 2, IV, V). Таким образом, при решении обратной задачи гравиразведки для сеточных моделей подбирается плотностная модель с контрастным приповерхностным слоем, а глубокие ячейки практически не участвуют в процессе подбора модели. $L2$-регуляризация также не позволяет добиться качественного результата.

Стоит отметить, что описанный выше подход к решению обратной задачи имеет важное преимущество – скорость вычислений. Решение прямой задачи, необходимое для вычисления шага градиентного спуска, для каждого элементарного слоя может быть выражено в виде свертки функции, описывающей зависимость плотности от координаты (или координат в случае трёхмерной задачи), с силой притяжения ячейки с единичной плотностью. В таком случае решение прямой задачи может осуществляться в частотной области, что существенно уменьшает временные затраты [*Мелихов, Бычев, Састри,* 1979].

Рис. 1. Результат подбора плотностной модели по полю неоднородности в виде бесконечного горизонтального стержня, расположенного на глубине 100 м, без априорной информации

Вверху: график вертикальной составляющей силы притяжения (Δg, мГал) неоднородности (*1* – Δg наблюдённое; *2* – Δg подобранной модели); *по центру*: модуль градиента функционала невязки (∇L) при решении обратной задачи с нулевой начальной моделью (1-я итерация); *внизу*: результат подбора плотностной модели по формуле (6); черным кружком обозначено положение стержня

Fig. 1. The result of the density model selection for the inhomogeneity field in the form of an infinite horizontal rod located at the depth of 100 m, without a priori information

Above: plot of the vertical component of the attractive force (Δg, mGal) of the inhomogeneity (*1* – Δg observed; *2* – Δg of the selected model); *in the center*: residual functional gradient modulus (∇L) when solving the inverse problem with a zero initial model (1st iteration); *below*: the result of the density model selection according to formula (6); the black circle indicates the position of the rod

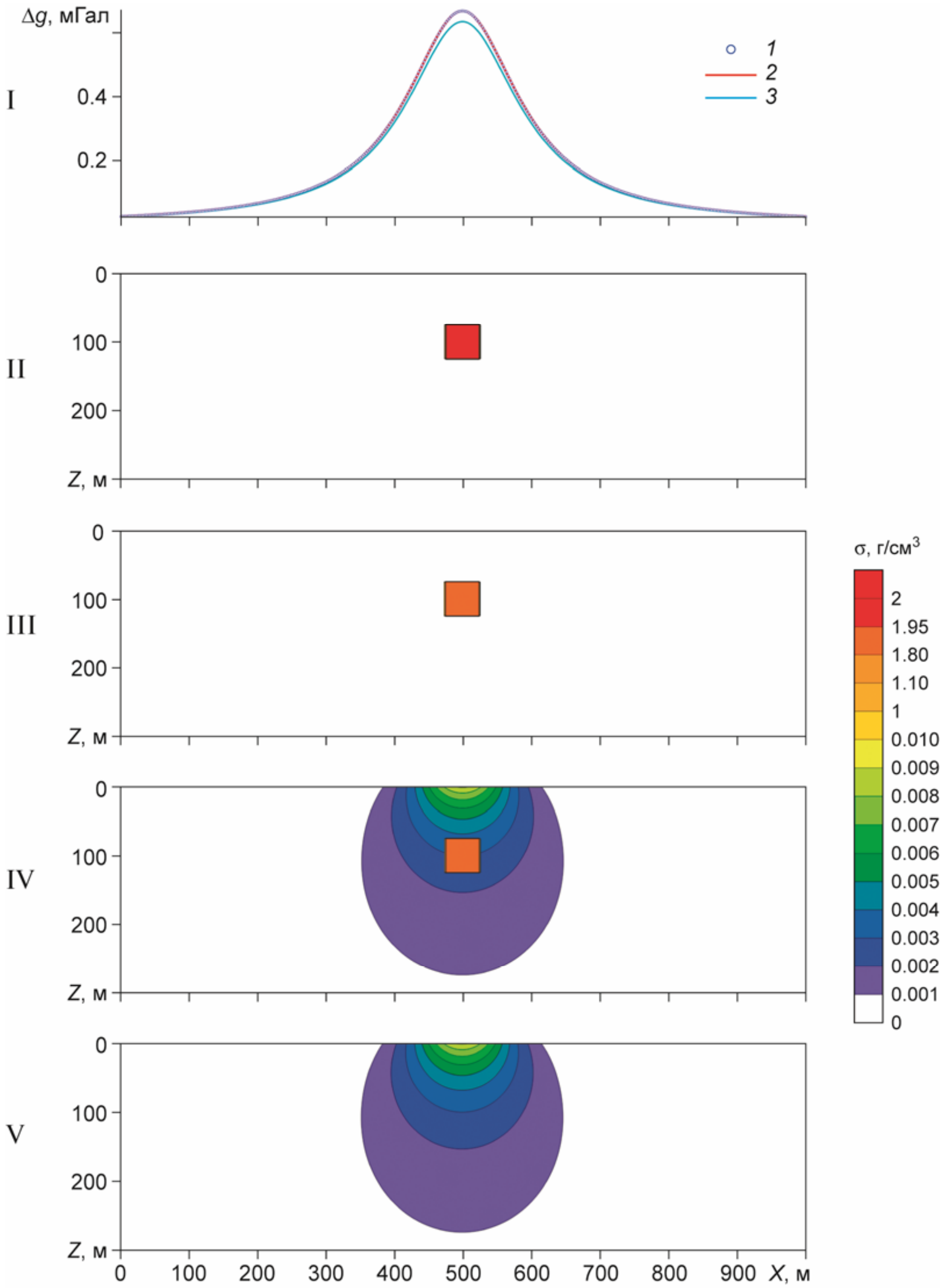


Рис. 2. Результат подбора плотностной модели с априорной информацией. I – график вертикальной составляющей силы притяжения (Δg, мГал) прямоугольной призмы (*1* – Δg наблюдённое; *2* – Δg подобранной модели; *3* – Δg начальной модели); II – истинная плотностная модель; III – априорная плотностная модель; IV – подобранная плотностная модель; V – разность между подобранной и априорной моделями

Fig. 2. The result of the density model selection with a priori information. I – plot of the vertical component of the attractive force (Δg, mGal) of a rectangular prism (*1* – Δg observed; *2* – Δg of the selected model; *3* – Δg of the initial model); II – true density model; III – a priori density model; IV – selected density model; V – difference between selected and a priori models

В результате, возникает необходимость модификации описываемого в работе подхода, сохраняющей скорость работы алгоритма и позволяющей включать в процесс подбора глубокие ячейки, а также учитывать априорные данные.

Решение обратной задачи гравиразведки методом градиентного спуска с применением переменной скорости градиентного спуска в зависимости от глубины

Рассмотрим зависимость градиента функционала невязки (5) от глубины для поля бесконечного горизонтального тонкого стержня с линейной плотностью σ_L, расположенного в точке с координатами (0; z_0). В качестве элементов разбиения сеточной модели для простоты также будем использовать тонкий стержень. Выражение для вертикальной составляющей силы притяжения данного элемента разбиения записывается в виде формулы [*Булычев и др.,* 2019]

$$\Delta g(x,z) = 2G\sigma_L \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}, \tag{10}$$

в которой G – гравитационная постоянная; (x, z) – декартовы координаты точек расчёта; (ξ, ζ) – декартовы координаты центра масс стержня.

Ранее было отмечено, что градиент функционала невязки по плотности в каждой ячейке определяется как скалярное произведение разностного гравитационного поля и гравитационного эффекта ячейки с единичной плотностью в каждой точке расчёта (5). При нулевой начальной модели разностное поле совпадает по модулю с наблюдённым полем и противоположно ему по знаку. Выражение для градиента функционала невязки (5) для элементов, расположенных на оси $0Z$ (т.е. под центром аномалии), в двумерном случае определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla L(0,z) &= 2\int_{-\infty}^{+\infty} -\Delta g(x,z_0)\Delta g(x,z)dx = -8G^2\sigma_L \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{z_0 z}{(x^2+z_0^2)(x^2+z^2)} \right) dx = \\ &= -8G^2\sigma_L \frac{z_0 z}{z^2 - z_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+z_0^2} - \frac{1}{x^2+z^2} \right) dx = \\ &= -8G^2\sigma_L \frac{z_0 z}{z^2 - z_0^2} \left(\frac{1}{z_0}\operatorname{arctg}\frac{x}{z_0} - \frac{1}{z}\operatorname{arctg}\frac{x}{z} \right) \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= -8G^2\sigma_L \left. \frac{z\operatorname{arctg}\dfrac{x}{z_0} - z_0\operatorname{arctg}\dfrac{x}{z}}{z^2 - z_0^2} \right|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{8\pi G^2\sigma_L}{z + z_0}. \end{aligned} \tag{11}$$

Аналогичным способом рассмотрим выражение для градиента функционала невязки в трёхмерном случае. Для простоты в качестве элементов разбиения будем использовать точечные источники, а в качестве наблюдённого поля – поле точечного источника, расположенного в точке с координатами (0, 0, z_0).

Выражение для вертикальной составляющей силы притяжения точечного источника принимает вид [*Булычев и др.,* 2019]:

$$\Delta g = G \frac{M(\zeta - z)}{\left((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right)^{3/2}}, \tag{12}$$

где M – масса точечного источника; (x, y, z) – декартовы координаты точек расчёта, (ξ, η, ζ) – декартовы координаты источника поля.

Выражение для градиента функционала невязки для ряда элементов, расположенных под точкой экстремума поля в трёхмерном случае принимает следующий вид:

$$\nabla L(0,0,z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} -\Delta g(x,y,z_0)\Delta g(x,y,z)dxdy =$$
$$= G^2 M\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{z_0 z}{\left((x^2+y^2+z_0^2)(x^2+y^2+z^2)\right)^{\frac{3}{2}}}dxdy = -\frac{2\pi G^2 M}{(z+z_0)^2}. \tag{13}$$

Из выражений (11) и (13) следует, что градиент функционала невязки для ряда элементов, расположенных под точкой экстремума поля, имеет степенную зависимость от глубины: для линейных источников – первой степени, для точечных источников – второй степени.

Зависимость показателя степенной функции от формы неоднородности отмечена ранее в ряде формальных алгоритмов решения обратной задачи, например, в деконволюции Эйлера [*Reid et al.,* 1990], вейвлет-анализе на основе вейвлетов Пуассона [*Кузнецов, Булычев,* 2017] и др.

Аналогичные оценки для степени затухания чувствительности функционала невязки с глубиной для трёхмерных моделей были получены численно и описаны в статьях [*Li, Oldenburg,* 1996, 1998]. Авторы указанных работ предложили использовать глубинную весовую функцию для учёта низкой чувствительности алгоритма к глубоким ячейкам. Вместо постоянного регуляризирующего коэффициента c в выражении (8) вводится весовой регуляризирующий функционал $w(z)$, “штрафующий” модель за высокие значения избыточной плотности в верхней части разреза:

$$L = \|A\sigma - \Delta g\|^2 + w(z)\|\sigma - \sigma_A\|^2 \to \min,$$
$$w(z) \sim \frac{1}{(z+z_0)^2}. \tag{14}$$

Авторы настоящей статьи в качестве альтернативы и развития вышеописанного подхода [*Li, Oldenburg,* 1996, 1998] предлагают для учёта затухания функционала невязки использовать скорость градиентного спуска, зависящую от глубины по степенному закону. В этом случае задача (8)–(9) будет переписана в следующем виде:

$$\begin{gathered} L_R = \| A\sigma - \Delta g \|^2 + c \| \sigma - \sigma_A \|^2 \to \min, \\ \nabla L_R = 2A^T(A\sigma - \Delta g) + 2c(\sigma - \sigma_A), \\ \sigma_n = \sigma_{n-1} - \alpha(z)\nabla L_R(\sigma_{n-1}), \\ \alpha(z) = \alpha_0 z^n, \end{gathered} \tag{15}$$

где n – вещественное число (глубинный индекс).

Предложенный подход позволяет искусственно увеличить шаг градиентного спуска для глубоких ячеек и включить их в процесс подбора плотностной модели. При увеличении показателя степени n будет увеличиваться глубина подобранных плотностных неоднородностей. Использование в качестве параметра α степенной функции может применяться для первичной оценки характеристик (глубины до центра масс) неоднородностей.

На основе априорных данных могут строиться более сложные распределения параметра α, зависящие не только от глубины, но и от горизонтальных координат. Максимальные значения параметра α в таком случае должны присваиваться ячейкам, в которых по априорным данным располагаются или ожидаются плотностные неоднородности. При привязке плотностных неоднородностей к определённым интервалам глубин параметр α может быть выражен любой функцией, имеющей экстремум на заданной глубине (в частности, Гауссовой функцией).

Тестовые расчёты

Для тестирования описанного алгоритма рассчитана вертикальная составляющая силы притяжения двумерной плотностной модели, состоящей из двух неоднородностей одинаковой формы – бесконечных тонких горизонтальных стержней. Центр масс первого стержня с линейной плотностью $3.75{\cdot}10^5$ г/см расположен на расстоянии 200 м от начала профиля на глубине 50 м. Центр масс второго стержня с линейной плотностью $7.5{\cdot}10^5$ г/см находится на расстоянии 1000 м от начала профиля на глубине 100 м. Линейные плотности стержней подобраны таким образом, чтобы амплитуды аномалий гравитационного поля составили 1 мГал (рис. 3). Длина профиля 1500 м, шаг между точками расчёта 3 м. Вычисления проводились в авторском комплексе программного обеспечения “*GravInv2D*” [*Чепиго,* 2019].

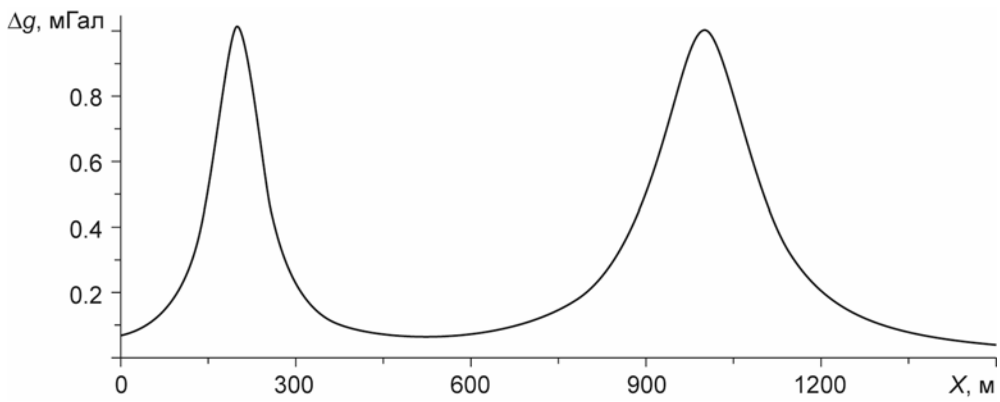
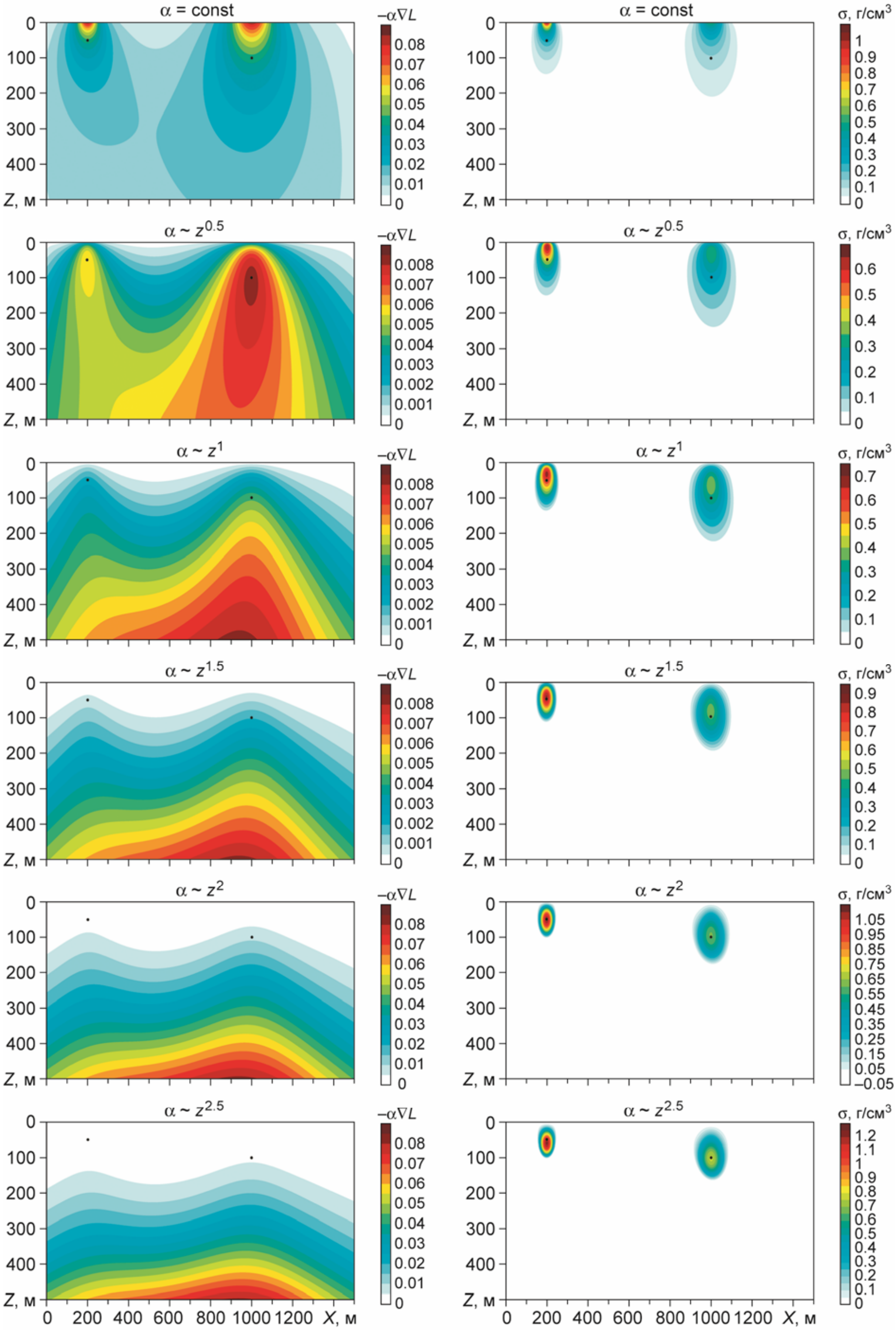


Рис. 3. Вертикальная составляющая силы притяжения (Δ*g*, мГал) тестовой модели

Fig. 3. Vertical component of the attractive force (Δ*g*, mGal) of the test model

По гравитационному полю тестовой модели выполнен автоматический подбор плотностной модели, разбитой на ячейки с шагом 3 м по горизонтали и 1 м по вертикали, со следующими значениями степени возрастания параметра α: 0, 0.5, 1, 1.5, 2 и 2.5. В качестве начальной модели использована плотностная модель, заполненная нулевыми плотностями. Подбор осуществлялся итерационно до достижения среднеквадратического отклонения между рассчитанным и наблюдённым полями менее ±5 мкГал. В результате, было подобрано шесть плотностных моделей (рис. 4), очевидное различие между которыми заключается в глубине до экстремума плотности, изменяющейся в зависимости от значения степени возрастания параметра α.

Глубины центров масс стержней, которые определялись по положению экстремума распределения плотности на подобранных разрезах, и отклонение (абсолютная погрешность) от истинной глубины залегания приведены в таблице. Результаты теста показывают, что использование переменной скорости градиентного спуска позволяет регулировать распределение плотностных неоднородностей по глубине – при увеличении показателя степени происходит увеличение глубины центра масс плотностной неоднородности в подобранной модели. Минимальное отклонение глубины центра масс от истинного положения для обоих стержней достигается при значении степени n=2.


α = const
α ~ $z^{0.5}$
α ~ z^{1}
α ~ $z^{1.5}$
α ~ z^{2}
α ~ $z^{2.5}$
−α∇L
σ, г/см³
Z, м
X, м

Сравнение результатов оценки глубин центров масс модельных источников

Степень возрастания α	Первый стержень (истинная глубина центра масс 50 м)		Второй стержень (истинная глубина центра масс 100 м)	
	Глубина центра масс при решении обратной задачи (м)	Абсолютная погрешность определения глубины (м)	Глубина центра масс при решении обратной задачи (м)	Абсолютная погрешность определения глубины (м)
0	0	50	0	100
0.5	16	34	30	70
1	32	18	61	39
1.5	44	6	84	16
2	51	1	98	2
2.5	61	11	103	3

Заключение

Разработан подход к решению обратной задачи гравиразведки для сеточных моделей, который позволяет включать в процесс подбора плотностной модели глубокие ячейки с помощью скорости градиентного спуска, зависящей от глубины по степенному закону. Показатель степени подбирается итерационно, исходя либо из ожидаемой глубины неоднородностей, либо из формы ожидаемых неоднородностей, поскольку изменение формы аномалиеобразующих объектов приводит к изменению зависимости градиента функционала невязки по плотности ячеек от глубины.

Зависимость показателя *n* от формы неоднородности указывает на схожесть данного подхода с деконволюцией Эйлера [*Reid et al.,* 1990], однако, в отличие от последней, в результате применения рассматриваемого алгоритма подбирается модель распределения плотности.

На основе априорных данных могут строиться более сложные распределения скорости градиентного спуска, зависящие не только от глубины, но и от горизонтальных координат. При этом на эффективность разработанного подхода не влияют масштаб исследуемой области и размерности пространства, в котором строятся плотностные модели.

Финансирование

Исследование выполнено в рамках проекта “Геофизические исследования и разработка новых геофизических технологий при решении фундаментальных и прикладных задач геологии, геоэкологии и геоэнергетики”, договор № 5-15-2021, номер в Центре информационных технологий и систем органов исполнительной власти 121042200088-6.

Рис. 4. Результаты подбора плотностных моделей с различными значениями степени возрастания α

Слева: разрезы произведений градиента функционала невязки на распределение параметра α на первой итерации; *справа*: подобранные разрезы плотности. Черными точками отмечено истинное положение двух бесконечно тонких горизонтальных стержней

Fig. 4. Results of the selection of density models with different values of α increase degree

On the left: cuts of the products of the residual functional gradient and the distribution of the parameter α at the first iteration; *on the right*: selected density sections. Black dots mark the true position of two infinitely thin horizontal rods

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

Балк П.И., Долгаль А.С. Обобщенные решения обратной задачи и новые технологии количественной интерпретации гравитационных аномалий // Физика Земли. 2018. № 2. С.189–204.

Блох Ю.И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. Учебное пособие. М.: МГГА, 2009. 232 с. (www.sigma3d.com/pdf/books/blokh-interp.pdf).

Булычев А.А., Лыгин И.В., Соколова Т.Б., Кузнецов К.М. Прямая задача гравиразведки и магниторазведки (конспект лекций). М.: “Университетская книга”, 2019. 176 с. DOI: 10.31453/kdu.ru.91304.0040

Гребенникова И.В. Методы оптимизации: учебное пособие. Екатеринбург: УрФУ, 2017. 148 с.

Кобрунов А.И. Математические основы теории интерпретации геофизических данных: учеб. пособие. Ухта: УГТУ, 2008. 288 с.

Кобрунов А.И., Варфоломеев В.А. Об одном методе ε-эквивалентных перераспределений и его использовании при интерпретации гравитационных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1981. № 10. С.25–44.

Кузнецов К.М., Булычев А.А. Анализ площадных потенциальных полей на основе вейвлетов Пуассона // Геофизика. 2017. № 6. С.25–32.

Мартышко П.С., Акимова Е.Н., Мисилов В.Е. О решении структурной обратной задачи гравиметрии модифицированными методами градиентного типа // Физика Земли. 2016. № 5. С.82–86.

Мелихов В.Р., Булычев А.А., Састри Р.Г. Решение прямой задачи гравиразведки с помощью быстрого преобразования Фурье // Материалы 6-й конференции аспирантов и молодых ученых, секция “Геофизика”, МГУ. М.: ВИНИТИ РАН, 1979. С.97–108.

Петрищевский А.М. Геологические задачи, решаемые при вероятностно-детерминированном подходе к интерпретации гравитационных аномалий // Геофизика. 2021. № 2. С.89–99.

Старостенко В.И., Легостаева О.В., Макаренко И.Б., Савченко А.С. Комплекс автоматизированной интерпретации данных потенциальных полей (GMT-Auto) // Геофизический журнал. 2015. Т. 37, № 1. С.42–52.

Страхов В.Н., Лучицкий А.И. О решении прямых двумерных задач гравиметрии и магнитометрии // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980а. № 8. С.65–83.

Страхов В.Н., Лучицкий А.И. Решение прямой задачи гравиметрии и магнитометрии для некоторых классов распределения масс // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980б. № 10. С.48–64.

Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 283 с.

Чепиго Л.С. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019662512 GravInv2D, выдано 25.09.2019.

Чепиго Л.С., Лыгин И.В., Булычев А.А. Прямая двумерная задача гравиразведки от многоугольника с параболической плотностью // Вестник Московского университета. Сер. 4. Геология. 2019. № 4. С.89–93.

Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C. Introduction to Algorithms, 3rd Edition. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 2009. 1292 p. ISBN 0-262-03384-4.

D’Urso M.G. The Gravity Anomaly of a 2D polygonal body having density contrast given by polynomial functions // Surv. Geophys. 2015. V. 36, N 3. P.391–425.

D’Urso M.G., Trotta S. Gravity Anomaly of a polyhedral bodies having a polynomial density contrast // Surv. Geophys. 2017. V. 38, N 4. P.781–832.

Li Y., Oldenburg W. 3-D inversion of magnetic data // Geophysics. 1996. V. 61, N 2. P.394–408.

Li Y., Oldenburg W. 3-D inversion of gravity data // Geophysics. 1998. V. 63, N 1. P.109–119.

Reid A.B., Allsop J.M., Granser H., Millett A.J., Somerton I.W. Magnetic interpretation in three dimensions using Euler Deconvolution // Geophysics. 1990. V. 55. P.80–91.

Sipser M. Introduction to the Theory of Computation. Course Technology Inc, 2006. ISBN 0-619-21764-2.

Zhou X. Analytic solution of the gravity anomaly of irregular 2D masses with density contrast varying as a 2D polynomial function // Geophysics. 2010. V. 75, N 2. P.I11–I19.

Сведения об авторах

ЧЕПИГО Лев Станиславович – аспирант, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. 119991, ГСП-1, Москва, ул. Ленинские горы, д. 1. Тел.: +7(495) 939-30-13. E-mail: lev.chepigo@gmail.com

ЛЫГИН Иван Владимирович – доцент, кандидат геолого-минералогических наук, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. 119991, ГСП-1, Москва, ул. Ленинские горы, д. 1. Тел.: +7(495) 939-30-13. E-mail: ivanlygin@mail.ru

БУЛЫЧЕВ Андрей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. 119991, ГСП-1, Москва, ул. Ленинские горы, д. 1. Тел.: +7(495) 939-57-66. E-mail: aabul@geophys.geol.msu.ru

GRAVITY INVERSE PROBLEM SOLUTION WITH VARIABLE RATE OF GRADIENT DESCENT

L.S. Chepigo, I.V. Lygin, A.A. Bulychev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Corresponding author: L.S. Chepigo (e-mail: lev.chepigo@gmail.com)

Abstract. The article describes an approach to the automated solution of a linear inverse problem of gravity, which implements the construction of lateral and vertical gradient density models with the possibility to select the preferred depth of sources. The inverse problem is solved using the gradient descent method with variable rate. It is shown that if the gradient descent rate is increasing with depth, then deep cells are “included” in the process of selecting the density model. In particular, the rate of gradient descent can increase with depth as a power function. In general, the gradient descent rate depends on both depth and horizontal coordinates, and it can be specified functionally or explicitly. In the presence of a prior information, the gradient descent rate can be expressed in a more complex way, depending on the depth and on the horizontal coordinates. In this case, the maximum values of the gradient descent rate should be assigned to the cells in which, according to a prior data, density inhomogeneities are located or expected. These can be depth-velocity models, widely used in seismic exploration, so it opens the way for integration.

The article shows the application of the approach on a test model consisting of two infinite horizontal rods located at different depths. The performance of the algorithm with different values of the power function is assessed by comparing the selected depths of the centers of mass with the true depths. It is shown that the optimal results of solving the inverse problem for the selected type of model are achieved using the gradient descent rate proportional to the square of the depth.

The developed algorithm forms the basis of the author's software package *GravInv* [*Chepigo,* 2019].

Keywords: gravity exploration, inverse problem, gradient descent method, density modeling.

Funding

The research was carried out within the framework of project “Geophysical research and development of new geophysical technologies in solving fundamental and applied problems of geology, geoecology and geoenergy”, contract no. 5-15-2021, no. 121042200088-6 in the Centre of Information Technologies and Systems of Executive State Authorities.

Conflict of interest

The authors declare they have no conflict of interest.

References

Balk P.I., Dolgal A.S., Generalized solutions of the inverse problem and new technologies for the quantitative interpretation of gravitational anomalies, *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 372-387.

Blokh Y.I., *Interpretatsiya gravitatsionnykh i magnitnykh anomalii. Uchebnoe posobie* (Interpretation of gravity and magnetic anomalies. Lecture notes), Moscow: MGGA, 2009, 232 p. [In Russian]. www.sigma3d.com/pdf/books/blokh-interp.pdf

Bulychev A.A., Lygin I.V., Sokolova T.B., Kuznetsov K.M., *Pryamaya zadacha gravirazvedki i magnetorazvedki (konspekt lektsii)* (Forward gravimetry and magnetometry problem (lecture notes)), Moscow: "Universitetskaya kniga", 2019, 176 p. [In Russian]. doi: 10.31453/kdu.ru.91304.0040

Chepigo L.S., *Svidetel'stvo o gosudarstvennoi registratsii programmy dlya EVM № 2019662512 GravInv2D*, vydano 25.09.2019. [In Russian].

Chepigo L.S., Lygin I.V., Bulychev A.A., A 2D forward gravimetry problem for a polygon with parabolic density, *Moscow University Geology Bulletin*, 2019, vol. 74, no. 5, pp. 516-520.

Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C., *Introduction to Algorithms, 3rd Edition*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 2009, 1292 p. ISBN 0-262-03384-4.

D'Urso M.G., The Gravity Anomaly of a 2D polygonal body having density contrast given by polynomial functions, *Surv. Geophys.*, 2015, vol. 36, no. 3, pp. 391-425.

D'Urso M.G., Trotta S., Gravity Anomaly of a polyhedral bodies having a polynomial density contrast, *Surv. Geophys.*, 2017, vol. 38, no. 4, pp. 781-832.

Grebennikova I.V., *Metody optimizatsii: uchebnoe posobie* (Optimization methods: manual for graduate students), Yekaterinburg: UrFU, 2017, 148 p. [In Russian].

Kobrunov A.I., *Matematicheskie osnovy teorii interpretatsii geofizicheskikh dannykh: ucheb. posobie* (Mathematical foundations of the theory of interpretation of geophysical data: lecture notes), Ukhta: UGTU, 2007, 288 p. [In Russian].

Kobrunov A.I., Varfolomeev V.A., On one method of ε-equivalent redistributions and its use in the interpretation of gravitational fields, *Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli* (Izvestia of the Academy of Sciences of the USSR. Physics of the Earth), 1981, no. 10, pp. 25-44. [In Russian].

Kuznetsov K.M., Bulychev A.A., Analysis of areal potential fields based on Poisson wavelets, *Geofizika* (Geophysics), 2017, no. 6, pp. 25-32. [In Russian].

Li Y., Oldenburg W., 3-D inversion of magnetic data, *Geophysics*, 1996, vol. 61, no. 2, pp. 394-408.

Li Y., Oldenburg W., 3-D inversion of gravity data, *Geophysics*, 1998, vol. 63, no. 1, pp. 109-119.

Martyshko P.S., Akimova E.N., Misilov V.E., Solving the Structural Inverse Gravity Problem by the Modified Gradient Methods, *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, 2016, vol. 52, no. 5, pp. 704-708.

Melikhov V.R., Bulychev A.A., Sastri R.G., Solving the forward gravity problem using the fast Fourier transform, in *Materialy 6-i konferentsii aspirantov i molodykh uchenykh, sektsiya "Geofizika", MGU* (Materials of the 6th conference of graduate students and young scientists, section "Geophysics", MSU), Moscow: VINITI RAN, 1979, pp. 97-108. [In Russian].

Petrishchevsky A.M., Geological problems solved with a probabilistic-deterministic approach to the interpretation of gravity anomalies, *Geofizika* (Geophysics), 2021, no. 2, pp. 89-99. [In Russian].

Reid A.B., Allsop J.M., Granser H., Millett A.J., Somerton I.W., Magnetic interpretation in three dimensions using Euler Deconvolution, *Geophysics*, 1990, vol. 55, pp. 80-91.

Sipser M., *Introduction to the Theory of Computation*, Course Technology Inc, 2006. ISBN 0-619-21764-2.

Starostenko V.I., Legostaeva O.V., Makarenko I.B., Savchenko A.S., Complex for automated interpretation of potential field data (GMT-Auto), *Geofizicheskii zhurnal* (Geophysical journal), 2015, vol. 37, no. 1, pp. 42-52. [In Russian].

Strakhov V.N., Luchitskii A.I., On solving the forward 2D gravimetry and magnetometry problems, *Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli* (Izvestia of the Academy of Sciences of the USSR. Physics of the Earth), 1980a, no. 8, pp. 65-83. [In Russian].

Strakhov V.N., Luchitskii A.I., Solution of forward problem of gravimetry and magnetometry for some classes of mass distribution, *Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli* (Izvestia of the Academy of Sciences of the USSR. Physics of the Earth), 1980b, no. 10, pp. 48-64. [In Russian].

Tikhonov A.N., Arsenin V.Y., *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* (Methods for solving ill-posed problems), Moscow: Nauka, 1979, 283 p. [In Russian].

Zhou X., Analytic solution of the gravity anomaly of irregular 2D masses with density contrast varying as a 2D polynomial function, *Geophysics*, 2010, vol. 75, no. 2, pp. I11-I19.

About the authors

CHEPIGO Lev Stanislavovich – Post-graduate student, Lomonosov Moscow State University. 1, Leninskie gory str., GSP-1, Moscow, 119991, Russia. Ph.: +7(495) 939-30-13. E-mail: lev.chepigo@gmail.com

LYGIN Ivan Vladimirovich – Cand. Sci. (Geol.-Miner.), Associate professor, Lomonosov Moscow State University. 1, Leninskie gory str., GSP-1, Moscow, 119991, Russia. Ph.: +7(495) 939-30-13. E-mail: ivanlygin@mail.ru

BULYCHEV Andrey Alexandrovich – Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor, Head of the Department, Lomonosov Moscow State University. 1, Leninskie gory str., GSP-1, Moscow, 119991, Russia. Ph.: +7(495) 939-57-66. E-mail: aabul735@gmail.com