ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2017, том 18, № 3, с.60-66. DOI: 10.21455/gr2017.3-5

УДК 551.511.3: 551.509.313.11

ГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПОЛЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА АТМОСФЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

© 2017 г. Л.Х. Ингель[1], А.А. Макоско[2]

[1] *ФГБУ "НПО "Тайфун", г. Обнинск, Россия*
[2] *Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, г. Москва, Россия*

Показано, что воздействие на горизонтальный ветер неоднородностей поля силы тяжести в принципе может приводить к генерации внутренних гравитационных волн в атмосфере. Рассмотрена простейшая аналитическая модель и сделаны теоретические оценки характеристик таких волн.

Ключевые слова: неоднородности поля силы тяжести, атмосферные возмущения, аналитическая модель, внутренние гравитационные волны.

В современных исследованиях по геофизической гидродинамике (динамической метеорологии) поле силы тяжести обычно принимается однородным. Между тем, известно, что на среднюю силу тяжести у поверхности Земли накладывается широкий спектр аномалий (неоднородностей) силы тяжести[1] (АСТ). Например, в высокоаномальных регионах горизонтальные (тангенциальные по отношению к общему земному эллипсоиду) составляющие силы тяжести на масштабах порядка 100 км могут превышать значения 100 мГал (10^{-3} м/с^2) [*Цубои,* 1982; *Макоско, Панин*, 2002]. Тем самым, они могут быть сравнимыми по порядку величины с силами градиента давления в циклонах умеренных широт и другими слагаемыми, необходимость учета которых не вызывает сомнений.

По меньшей мере с 1970-х годов в метеорологической литературе неоднократно высказывались предположения о возможности заметного влияния неоднородностей поля силы тяжести на динамику некоторых атмосферных процессов (см., например, [*Макоско, Панин*, 2002; *Макоско и др.,* 2007; *Ярошевич,* 2013; *Макоско, Рубинштейн*, 2014; *Ингель, Макоско,* 2015]). Но теория возмущений такой природы пока разработана мало. В настоящей статье авторами обращается внимание на эффект, ранее не обсуждавшийся в литературе – на генерацию внутренних гравитационных волн в атмосфере.

Хорошо известно, что волны названного типа эффективно генерируются, в частности, при обтекании неоднородностей рельефа поверхности Земли [*Nappo,* 2013; *Fritts, Alexander,* 2003], когда горизонтальный поток воздуха смещается в вертикальном направлении, порождая при устойчивой стратификации колебания и "волны плавучести". Можно предположить, что нечто качественно подобное должно происходить и при прохождении горизонтального течения в области АСТ. Авторы статьи рассматривают простейшую аналитическую модель, относящуюся к этой задаче.

[1] В порядке убывания степени влияния АСТ обусловлены центробежной силой, сплюснутостью Земли, аномалиями расположения масс внутри Земли, приливными явлениями в гидро- и атмосфере, перераспределениями воздушных масс и др. [*Цубои,* 1982]. Учет первых двух факторов обеспечивается выбором подходящей системы отсчета, например, декартовой, связанной с общим земным эллипсоидом [*Макоско, Панин*, 2002]. Принимая во внимание, что влияние аномальных масс на три порядка превышает влияние остальных факторов, ниже АСТ обоснованно считаются обусловленными гравитационными аномалиями Земли.

Ограничимся двумерной задачей, воспользовавшись декартовой системой координат с осью z, направленной вертикально вверх, и осью x, расположенной горизонтально вдоль фонового ветра, скорость которого U предполагается постоянной. Для обобщения стандартных уравнений динамики с учетом неоднородностей поля силы тяжести введем в них помимо обычно рассматриваемой постоянной силы тяжести g дополнительные силы (ускорения) – горизонтальную $g_x(x,z)$ и вертикальную $g_z(x,z)$ составляющие АСТ [*Ингель, Макоско,* 2015]. Из свойств гравитационного потенциала (с учетом вышеделанной сноски, см. с.60) следует соотношение

$$\frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial x}. \tag{1}$$

Ниже будем переходить к системе отсчета, движущейся вместе с горизонтальным течением, в которой величины g_x, g_z зависят и от времени t. С учетом рассматриваемого обобщения в движущейся с потоком системе отсчета исходная линеаризованная двумерная система уравнений гидродинамики ([*Гилл,* 1986], раздел 6.4) имеет вид

$$\begin{gathered}
\bar{\rho}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \bar{\rho} g_x\left(x + Ut, z\right), \\
\bar{\rho}\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g\rho + \bar{\rho} g_z\left(x + Ut, z\right), \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + w\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0.
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь t – время; u, w – возмущения составляющих скорости вдоль осей x и z соответственно; $\bar{\rho}(z)$ – фоновая (невозмущенная) плотность воздуха; ρ, p – возмущения плотности и давления соответственно. Как и в [*Гилл,* 1986], на этой стадии исследования не учитываются кориолисовы ускорения (рассматриваются возмущения не слишком больших горизонтальных масштабов).

На нижней границе z=0 предполагаем выполнение условия непротекания w=0 (над поверхностью воды, как будет показано ниже, вообще говоря, требуется другое условие).

Исключая из системы (2) все неизвестные кроме w, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\rho}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] + N^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{N^2}{g}\frac{\partial^2 g_x\left(x+Ut,z\right)}{\partial x \partial t}, \tag{3}$$

в котором квадрат частоты Брента–Вяйсяля

$$N^2 = -\frac{g}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{dz}. \tag{4}$$

Распределение фоновой плотности аппроксимируем экспонентой $\bar{\rho}\left(z\right) = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$,

откуда получаем

$$N^2 = \frac{g}{H}, \tag{5}$$

где H=const – эффективная толщина среды.

Удобно анализировать модель с синусоидальной зависимостью неоднородностей поля силы тяжести от горизонтальной координаты. В покоящейся системе отсчета

$$g_x = G\exp(-kz)\cos(kx), \;\; g_z = -G\exp(-kz)\sin(kx), \tag{6}$$

где G – амплитуда неоднородности; k^{-1} – ее пространственный масштаб.

В связанной с течением движущейся системе отсчета имеем

$$g_x = G\exp(-kz)\cos\left[k\left(x+Ut\right)\right]. \tag{7}$$

Решение уравнения (3) в этой системе отсчета ищется в виде

$$w = W_1(z)\cos\left[k\left(x+Ut\right)\right] + W_2(z)\sin\left[k\left(x+Ut\right)\right]. \quad (8)$$

Получаем уравнение

$$\frac{d^2W_1}{dz^2} - \frac{1}{H}\frac{dW_1}{dz} + \left[\left(\frac{N}{U}\right)^2 - k^2\right]W_1 = \frac{N^2G}{Ug}\exp(-kz) \quad (9)$$

для амплитуды $W_1(z)$ и аналогичное однородное уравнение для амплитуды $W_2(z)$.

В некоторых случаях бывает удобнее пользоваться переменными

$$\tilde{W}_{1,2}(z) = W_{1,2}(z)\exp\left(-z/2H\right), \quad (10)$$

для которых уравнение (9) имеет вид

$$\frac{d^2\tilde{W}_1}{dz^2} + \frac{\tilde{W}_1}{\lambda^2} = \frac{N^2G}{Ug}\exp\left(-\tilde{k}z\right), \quad (11)$$

в котором $\tilde{k} = k + 1/2H$; λ – вертикальный масштаб, определяемый как

$$\lambda = \left[\left(\frac{N}{U}\right)^2 - \left(\frac{1}{2H}\right)^2 - k^2\right]^{-1/2}. \quad (12)$$

Когда горизонтальные неоднородности силы тяжести характеризуются достаточно малыми масштабами (т.е. при достаточно больших значениях k), выражение в квадратных скобах в (12) отрицательно, что соответствует отрицательным значениям величины λ^2. В этом случае решение экспоненциально затухает с высотой (“захваченные волны”). Но больший интерес представляет случай положительных значений λ^2.

Примем характерные для атмосферы значения N=10^{-2} с$^{-1}$, U=10 м/с. Тогда H=10^5 м, U/N=10^3 м, и при горизонтальных масштабах неоднородностей, много бóльших километра,

$$\lambda \approx U/N. \quad (13)$$

Общее решение уравнения (11) можно записать в виде

$$\tilde{W}_1(z) = C_1\sin\left(\frac{z}{\lambda}\right) + C_2\cos\left(\frac{z}{\lambda}\right) + \frac{\lambda^2N^2G}{Ug\left(1+\left(\lambda\tilde{k}\right)^2\right)}\exp\left(-\tilde{k}z\right);$$

аналогичным образом – $\tilde{W}_2(z) = C_3\sin\left(\frac{z}{\lambda}\right) + C_4\cos\left(\frac{z}{\lambda}\right)$, где C_i – постоянные интегрирования, которые выбираются с учетом краевого условия на поверхности z=0 и условия излучения – групповая скорость должна быть направлена вверх ([*Гилл,* 1986], с.175). Это соответствует направленной вниз фазовой скорости внутренних гравитационных волн [*Гилл,* 1986]. В данном случае получаем C_1=C_4=0, $C_3 = -C_2 = \dfrac{\lambda^2N^2G}{Ug\left[1+\left(\lambda\tilde{k}\right)^2\right]}$.

В итоге выражение для вертикальной скорости приобретает вид

$$w = \frac{\lambda^2N^2G}{Ug\left[1+\left(\lambda\tilde{k}\right)^2\right]}\left\{\exp\left(-kz\right)\cos\left[k\left(x+Ut\right)\right] - \exp\left(\frac{z}{2H}\right)\cos\left[\frac{z}{\lambda} + k\left(x+Ut\right)\right]\right\}. \quad (14)$$

Воспользовавшись уравнением неразрывности, находим выражение для возмущения горизонтальной скорости:

$$
\begin{gathered}
u=\frac{\lambda N^2 G}{Ugk\left[1+\left(\lambda\tilde{k}\right)^2\right]}\left\langle k\lambda e^{-kz}\sin\left[k\left(x+Ut\right)\right]+\right.\\
\left.+\left\{\frac{\lambda}{2H}\sin\left[\frac{z}{\lambda}+k\left(x+Ut\right)\right]+\cos\left[\frac{z}{\lambda}+k\left(x+Ut\right)\right]\right\}e^{z/2H}\right\rangle.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

С учетом этого из первого уравнения (2) находим поле возмущений давления:

$$
\begin{gathered}
p=\bar{\rho}\frac{G}{k}\left\langle\left[1-\frac{k\lambda^2N^2}{g\left(1+\left(\lambda\tilde{k}\right)^2\right)}\right]e^{-kz}\sin\left[k\left(x+Ut\right)\right]-\frac{\lambda N^2}{g\left(1+\left(\lambda\tilde{k}\right)^2\right)}\times\right.\\
\left.\times\left\{\frac{\lambda}{2H}\sin\left[\frac{z}{\lambda}+k\left(x+Ut\right)\right]+\cos\left[\frac{z}{\lambda}+k\left(x+Ut\right)\right]\right\}e^{z/2H}\right\rangle.
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Слагаемые в (14)–(16) могут быть разделены на две категории. Первая из них (с множителем $\exp\left(-kz\right)$) непосредственно описывает обтекание потоком поверхностей равного потенциала. Эти слагаемые не имеют волнового характера (не содержат волн, распространяющихся по вертикали) и медленно затухают с высотой на тех же масштабах k^{-1}, что и аномалия силы тяжести. Остальные слагаемые содержат множители $\sin\left[z/\lambda+k\left(x+Ut\right)\right]$, $\cos\left[z/\lambda+k\left(x+Ut\right)\right]$ и описывают внутренние гравитационные волны, фазовая скорость которых направлена вниз, а групповая – вверх. Амплитуда этих волн в поле скорости растет с высотой как $\exp(z/2H)$; вертикальная составляющая волнового вектора – λ^{-1}, частота – $\omega=kU$, вертикальная фазовая скорость – $k\lambda U$.

Решение зависит от трех пространственных масштабов – k^{-1}, H, U/N. Предполагаем, что порядок первого из них (пространственные масштабы НПСТ) не менее 100 км; второй, видимо, следует считать равным ~10 км, что соответствует порядку толщины тропосферы[1]. Третий масштаб при рассматриваемых значениях параметров не превышает нескольких километров.

Из указанного соотношения масштабов вытекает выражение (13), а также то, что

$$
\begin{gathered}
\lambda \ll H \ll k^{-1},\quad \tilde{k}\approx 1/2H,\quad \lambda\tilde{k}\approx\lambda/2H\approx U/2HN\ll 1,\\
\frac{k\lambda^2N^2}{g\left(1+\left(\lambda\tilde{k}\right)^2\right)}\approx\frac{\lambda^2}{Hk^{-1}}\ll 1,\ \frac{\lambda N^2}{g\left(1+\left(\lambda\tilde{k}\right)^2\right)}\approx\frac{\lambda}{H}\ll 1.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Отсюда следует, что вертикальный масштаб (длина волны) составляет $\sim 2\pi U/N$, а вертикальная фазовая скорость – $k\lambda U\approx kU^2/N$.

Вертикальный поток волновой энергии оценивается по формуле $F_z=\overline{pw}$ [*Гилл*, 1986], где черта означает осреднение по длине волны. Видно, что при таком осреднении ненулевой вклад дает только произведение слагаемых с $\cos\left[z/\lambda+k\left(x+Ut\right)\right]$ в (14) и (16). Нетрудно получить не зависящее от высоты приближенное выражение

$$
F_z\approx\frac{1}{2}\rho_0\frac{NU^2G^2}{g^2k}.
\tag{18}
$$

[1] Отметим, что характерное для атмосферы значение N=10^{-2} с$^{-1}$ получается из (5) при характерном вертикальном масштабе изменения фоновой плотности H порядка 100 км, в то время как в реальной атмосфере H~10 км, что является издержкой используемой модели несжимаемой жидкости.

Этот результат прозрачно интерпретируется. Горизонтальное воздушное течение в неоднородном поле силы тяжести искривляется и имеет тенденцию двигаться вдоль поверхностей равного потенциала [*Ингель, Макоско,* 2015][1]. Это означает появление вертикальной составляющей скорости с амплитудой $w \sim U\dfrac{G}{g}$.

Последнее выражение для w с учетом (13) и (17) приближенно равно амплитуде в выражении (14). Амплитуда вертикального смещения потока воздуха (эквипотенциальных поверхностей) может достигать величины отклонений геоида h, имея порядок G/gk, откуда следует $G/g \sim hk$. Если подставить это в (18), то получится выражение, практически совпадающее (с точностью до обозначений) с формулой (6.8.7) из [*Гилл,* 1986], которая описывает вертикальный поток энергии внутренних гравитационных волн, обусловленный неоднородностями рельефа с амплитудой h. Таким образом, учет воздействия АСТ (искривленные эквипотенциальные поверхности) приводит к эффекту, аналогичному влиянию неоднородностей рельефа той же амплитуды и горизонтальных масштабов.

Если принять амплитуду АСТ G=10^{-3} м/с^2, k=2·10^{-5} м$^{-1}$ (что соответствует длине полуволны около 150 км), U=20 м/с, N=10^{-2} с$^{-1}$, ρ_0=1 кг/м^3, то получим поток энергии около 10^{-3} Вт/м^2. Если G=2·10^{-3} м/с^2, k=4·10^{-5} м$^{-1}$, U=30 м/с, то поток энергии составит ~0.5·10^{-2} Вт/м^2. Такие потоки в некоторых ситуациях, видимо, могут быть значимыми, хотя чаще не могут конкурировать с наиболее эффективными механизмами генерации внутренних гравитационных волн в атмосфере (склоны эквипотенциальных поверхностей по сравнению с рельефом подстилающей поверхности обычно весьма пологи).

Для иллюстрации упомянем, что, согласно [*Jarvis,* 2001], средний поток энергии, поступающий из нижней атмосферы в верхнюю, благодаря волновым возмущениям и приливным колебаниям составляет порядка 2·10^{-4} Вт/м^2. Но говорить о практической значимости рассмотренного выше механизма генерации внутренних гравитационных волн было бы преждевременно. Основные результаты настоящей работы авторы видят в том, что, во-первых, обнаружен неизвестный ранее механизм генерации атмосферных возмущений под влиянием неоднородностей поля силы тяжести; во-вторых, обнаружен не обсуждавшийся ранее механизм генерации рассматриваемых волн в атмосфере.

Отметим, что полученный результат существенно зависит от предполагаемого на нижней границе условия непротекания $w\big|_{z=0} = 0$, справедливого, если подстилающая поверхность представляет собой плоскую горизонтальную поверхность. Ситуация заметно меняется при рассмотрении процессов над поверхностью океана, которая в используемой системе координат в неоднородном поле силы тяжести, вообще говоря, не является горизонтальной плоскостью. В удовлетворительном приближении она совпадает с эквипотенциальной поверхностью, отклонение которой от горизонтали обозначим как $h_0(x) \approx -\Phi(x,0)/g$, где Φ – потенциал силы тяжести. Условие непротекания на этой поверхности в линейном приближении можно записать в виде

$$w \approx U\frac{\partial h_0}{\partial x} \approx U\frac{g_x(x,0)}{g} \quad \text{при } z=0.$$

Очевидно, что в этом случае вид решения существенно упрощается. Краевые условия приближенно удовлетворяются при нулевых значениях всех коэффициентов C_i. Например, приближенное решение для вертикальной скорости имеет вид

[1] Вблизи подстилающей поверхности ситуация сложнее, поскольку условие непротекания исключает возможность составляющей движения, нормальной к этой поверхности.

$$w \approx \frac{\lambda^2 N^2 G}{Ug} \exp(-kz) \cos\left[k\left(x+Ut\right)\right] \approx U\frac{G}{g} \exp(-kz) \cos\left[k\left(x+Ut\right)\right],$$

что означает гладкое обтекание всех эквипотенциальных поверхностей без генерации волн. При G=10^{-3} м/с^2, U=20 м/с вертикальная скорость у подстилающей поверхности составляет около 2·10^{-3} м/с. С высотой она убывает столь медленно (на масштабах порядка k^{-1}), что в тропосфере практически не меняется.

Отклонение давления в той же системе координат имеет вид $p \approx \bar{\rho}\frac{G}{k} e^{-kz} \sin\left[k\left(x+Ut\right)\right]$. При указанных значениях параметров и k=2·10^{-5} м$^{-1}$ амплитуда этого отклонения у поверхности составляет около 0.5 гПа и так же медленно убывает с высотой.

Благодарности

Авторы признательны Г.С. Голицыну за стимулирующее обсуждение публикации на этапе ее подготовки.

Работа выполнена при поддержке Программы № 15 фундаментальных исследований Президиума РАН.

Литература

Гилл А. Динамика атмосферы и океана. Т. 1. М.: Мир, 1986. 396 с.

Ингель Л.Х., Макоско А.А. К теории атмосферных возмущений, вызываемых неоднородностями поля силы тяжести // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2015. Т. 51, № 4. С.448–454.

Макоско А.А., Панин Б.Д. Динамика атмосферы в неоднородном поле силы тяжести. СПб.: РГГМУ, 2002. 246 с.

Макоско А.А., Рубинштейн К.Г. Исследование спиральности азиатского муссона по данным реанализа и результатам численного моделирования циркуляции атмосферы с учетом неоднородности силы тяжести // Докл. РАН. 2014. Т. 459, № 2. С.237–242.

Макоско А.А., Рубинштейн К.Г., Лосев В.М., Боярский Э.А. Математическое моделирование атмосферы в неоднородном поле силы тяжести. М.: Наука, 2007. 58 с.

Цубои Т. Гравитационное поле Земли. М.: Мир, 1982. 286 с.

Ярошевич М.И. Пространственное распределение тропических циклонов и аномалий силы тяжести // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2013. Т. 49, № 3. С.279–284.

Fritts D.C., Alexander M.J. Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere // Reviews of Geophysics. 2003. V. 41, N 1. P.1–64.

Jarvis M.J. Atmospheric science: Bridging the atmospheric divide // Science. 2001. V. 293, N 5538. P.2218–2219.

Nappo C. An Introduction to Atmospheric Gravity Waves. 2nd Edition. Elsevier, 2013. 400 p.

Сведения об авторах

ИНГЕЛЬ Лев Ханаанович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, ФГБУ “НПО “Тайфун”. 249038, г. Обнинск, ул. Победы, д. 4. Тел.: +7(903) 026-62-35. E-mail: lev.ingel@gmail.com

МАКОСКО Александр Аркадьевич – доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией, Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова. 119017, Москва, Пыжевский пер., д. 3. Тел.: +7(499) 237-69-10, +7(499) 237-27-21. E-mail: aamacosco@mail.ru

GENERATION OF ATMOSPHERIC INTERNAL WAVES INDUCED BY INHOMOGENEITIES IN GRAVITY FIELD

L.Kh. Ingel[1], A.A. Makosko[2]

[1] *Research and Production Association "Typhoon", Obninsk, Russia*
[2] *Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Abstract. It is shown that inhomogeneities in gravity field affecting the horizontal wind may cause the generation of internal gravity waves in atmosphere. The simple analytical model is considered and theoretical estimates of characteristics of such wave are obtained.

Keywords: inhomogeneities in gravity field, atmospheric disturbances, analytical model, internal gravity waves.

References

Fritts D.C. and Alexander M.J. Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere, *Reviews of Geophysics*, 2003, vol. 41, no. 1. pp. 1-64.

Gill A.E. *Atmosphere-Ocean Dynamics*, New York: Academic Press, 1982.

Ingel L.Kh. and Makosko A.A. On the theory of atmospheric disturbances induced by gravity-field inhomogeneities, *Izv. Atmos. Ocean. Phys*., 2015, vol. 51, no. 4, pp. 391-396.

Jarvis M.J., Atmospheric science: Bridging the atmospheric divide, *Science*, 2001, vol. 293, no. 5538, pp. 2218-2219.

Makosko A.A. and Panin B.D. *Dynamica atmosfery v neodnorodnom pole sily tyazhesti* (Dynamics of the atmosphere in the inhomogeneous field of gravity), St. Petersburg: RGGMU, 2002.

Makosko A.A. and Rubinshtein K.G. Study of a helical Asian monsoon based on reanalysis of data and the results of numerical modeling of atmospheric circulation with account for the inhomogeneous gravity force, *Dokl. Earth Sci*., 2014, vol. 459, no. 1, pp. 1451-1456.

Makosko A.A., Rubinshtein K.G., Losev V.M., and Boyarskii E.A. *Matematicheskoe modelirovanie atmosfery v neodnorodnom pole sily tyazhesti* (Mathematical modeling of the atmosphere in the inhomogeneous field of gravity), Moscow: Nauka, 2007.

Nappo C. *An Introduction to Atmospheric Gravity Waves*. 2nd Edition, Amsterdam: Elsevier, 2013.

Tsuboi T. *Earth Gravity*, Tokyo: Ivanami Shoten, 1979; Moscow: Mir, 1982.

Yaroshevich M.I. Spatial distributions of tropical cyclones and gravity anomalies, *Izv. Atmos. Ocean. Phys*., 2013, vol. 49, no. 3, pp. 252-257.