

УДК 550.831+838

## МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД S-АППРОКСИМАЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ И ГЕОМОРФОЛОГИИ

© 2016 г. И.Э. Степанова, Д.Н. Раевский, В.Н. Конешов

*Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия*

Рассматриваются вопросы построения аналитических аппроксимаций рельефа местности и геопотенциальных полей на основе модифицированного метода S-аппроксимаций, суть которого состоит в аппроксимации исходного поля суммой потенциалов простого и двойного слоев, распределенных на совокупности носителей, залегающих ниже заданного рельефа. Особое внимание уделяется применению новых, высокоэффективных методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой и сверхбольшой размерности, к которым редуцируются обратные геофизические и геодезические задачи. Для их решения предложен блочный метод контрастирования, заключающийся в разбиении исходной области на наиболее контрастные по характеру подобласти. Для каждой из подобластей СЛАУ решается регуляризованным итерационным трехслойным методом Чебышева.

Приведены результаты математических экспериментов по построению аналитических аппроксимаций рельефа и аномального гравитационного поля. Продемонстрирована эффективность использования модифицированного метода S-аппроксимаций при выявлении разломных структур в региональном варианте по спутниковым гравиметрическим данным на примере Филиппинского моря.

**Ключевые слова:** интерпретация, потенциальное поле, рельеф, гравиметрия, аппроксимация, обратная задача, метод.

### **Введение. Описание методики S-аппроксимаций**

При интерпретации гравиметрических данных, вычислении поправок за рельеф, построении карт уклонов отвесной линии и т.п. возникает необходимость нахождения аналитических аппроксимаций функций, заданных приближенно на нерегулярной сети точек. Для построения аналитических аппроксимаций рельефа местности и геопотенциальных полей можно применить метод S-аппроксимаций, описанный в [Страхов, Степанова, 2002а,б]. Методика построения S-аппроксимаций основана на применении третьей формулы Грина – фундаментальной формулы теории гармонических функций [Кошляков, Глинер, Смирнов, 1962]. В настоящей статье будет рассмотрен локальный вариант с декартовой системой координат и вертикальной осью, направленной вверх.

Если известны компоненты магнитного или гравитационного поля (например, первая производная потенциала по  $x_3$  на некотором рельефе), то можно представить потенциал поля в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев, распределенных на нескольких горизонтальных плоскостях, залегающих ниже заданного рельефа. Выбрав систему координат так, чтобы одна из плоскостей простого и двойного слоев задавалась уравнением  $x_3=0$ , и используя обозначения  $M = (x_1, x_2, x_3)$  – точка измерений,  $\xi_1, \xi_2$  – точки на соответствующих поверхностях,  $H_r$  – глубина залегания  $r$ -ой горизонтальной плоскости (расстояние от точки на плоскости до дневной поверхности) в рамках метода S-аппроксимаций,  $\rho_{1,r}(\xi_1, \xi_2), \rho_{2,r}(\xi_1, \xi_2) \in L_2(-\infty, +\infty)$  – неизвестные функции, подлежащие определению, представим потенциал как

$$V(M) = \sum_{r=1}^R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{1,r}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - H_r)^2}} +$$

$$+ \sum_{r=1}^R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{2,r}(\xi_1, \xi_2)(x_3 - H_r) d\xi_1 d\xi_2}{\left[ \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - H_r)^2} \right]^3}, \quad (1)$$

$$M = (x_1, x_2, x_3).$$

Производная потенциала  $V$  по  $x_3$ , взятая с обратным знаком, будет иметь вид

$$-\frac{\partial V}{\partial x_3}(M) = \sum_{r=1}^R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{1,r}(\hat{\xi})(x_3 - H_r) d\hat{\xi}}{\left[ \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - H_r)^2} \right]^3} +$$

$$+ \sum_{r=1}^R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{2,r}(\hat{\xi}) \left( 2(x_3 - H_r)^2 - (x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2 \right) d\hat{\xi}}{\left[ \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - H_r)^2} \right]^5}, \quad \hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2). \quad (2)$$

Пусть компоненты поля заданы в конечном множестве точек  $M_i$ ,  $M_i = (x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Обозначив подынтегральную функцию в первом слагаемом для  $r$ -го слоя в (2) в точке  $M_i$  как  $Q_{1,r}^{(i)}$ , а во втором слагаемом  $-Q_{2,r}^{(i)}$ , получим:

$$-\frac{\partial V(M_i)}{\partial x_3} \equiv f_i = \sum_{r=1}^R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \rho_{1,r}(\hat{\xi}) Q_{1,r}^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_{2,r}(\hat{\xi}) Q_{2,r}^{(i)}(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi}, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

На практике компоненты поля бывают заданы с некоторой погрешностью  $\delta$ , в связи с чем входной информацией служат значения  $f_{i,\delta}$ . Используя решения вариационной задачи

$$\Omega(\rho) = \sum_{r=1}^R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \rho_{1,r}^2(\hat{\xi}) + \rho_{2,r}^2(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi} = \min_{\rho}, \quad (4)$$

$$f_{i,\delta} - \sum_{r=1}^R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \rho_{1,r}(\hat{\xi}) Q_{1,r}^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_{2,r}(\hat{\xi}) Q_{2,r}^{(i)}(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

получим, что искомые функции должны иметь вид [Лаврентьев, Люстерник, 1950]:

$$\rho_{1,r}^{(a)}(\hat{\xi}) = \tilde{\rho}_{1,r}(\hat{\xi}, \lambda), \quad \rho_{2,r}^{(a)}(\hat{\xi}) = \tilde{\rho}_{2,r}(\hat{\xi}, \lambda), \quad (6)$$

$$\tilde{\rho}_{1,r}(\hat{\xi}, \lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_{1,r}^{(i)}(\hat{\xi}), \quad \tilde{\rho}_{2,r}(\hat{\xi}, \lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_{2,r}^{(i)}(\hat{\xi}), \quad r = 1, 2, \dots, R.$$

Таким образом, приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A\lambda = f_{\delta}, \quad (7)$$

элементы матрицы которой в нашем случае имеют вид

$$a_{ij} = \sum_{r=1}^R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( Q_{1,r}^{(i)}(\hat{\xi}) Q_{1,r}^{(j)}(\hat{\xi}) + Q_{2,r}^{(i)}(\hat{\xi}) Q_{2,r}^{(j)}(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (8)$$

Коэффициенты  $a_{ij}$  матрицы  $A$  могут быть вычислены явно с помощью интеграла Пуассона:

$$a_{ij} = 2\pi \sum_{r=1}^R \left\{ \frac{x_{3,i} + x_{3,j} - 2H_r}{\left( \sqrt{(x_{3,i} + x_{3,j} - 2H_r)^2 + (x_{1,i} - x_{1,j})^2 + (x_{2,i} - x_{2,j})^2} \right)^3} - \frac{(x_{3,i} + x_{3,j} - 2H_r) \left( 9 \left[ (x_{1,i} - x_{1,j})^2 + (x_{2,i} - x_{2,j})^2 \right] - 6(x_{3,i} + x_{3,j} - 2H_r)^2 \right)}{\left( \sqrt{(x_{3,i} + x_{3,j} - 2H_r)^2 + (x_{1,i} - x_{1,j})^2 + (x_{2,i} - x_{2,j})^2} \right)^7} \right\}, \quad (9)$$

$$1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N.$$

По найденным из решения системы (6)–(9) множителям  $\lambda_i, i=1, 2, \dots, N$  можно далее определить величины функционалов  $p_s, s=1, 2, \dots, S$ , описание которых приводятся в [Страхов, Степанова, 1999]. Эти функционалы могут представлять собой высшие производные потенциала, аналитическое продолжение гравитационного поля и т.д.

### Постановка модифицированного метода S-аппроксимаций

При применении “классического” метода S-аппроксимаций теряется существенная часть информации о геометрии носителя масс – о его гладкости, симметрии, приблизительной локализации. Постановка обратной задачи по поиску распределения плотности в классе равномерно непрерывных или равномерно дифференцируемых функций значительно усложняет алгоритм, что приводит к неизбежным ошибкам при его использовании. Поэтому одной из проблем является выбор такой постановки обратной задачи в рамках S-аппроксимации, которая сочетала бы простоту алгоритма и наиболее полный учет априорной информации об исследуемой области. При построении аппроксимационной конструкции поля, заданного в узлах неравномерной сети точек с резкими перепадами высот, обусловленность матрицы СЛАУ (7) сильно возрастает. При решении системы с плохо обусловленной матрицей S-аппроксимации становятся физически неадекватны и приводят к результатам, бессмысленным с геофизической точки зрения.

Один из способов устранения указанных проблем – введение особого функционала, позволяющего уточнять некоторые пробные решения СЛАУ (7) в зависимости от имеющейся априорной информации. Поскольку при этом основная конструкция “классической” S-аппроксимации на начальном этапе сохраняется, назовем такой метод *модифицированным методом S-аппроксимаций* [Раевский, Степанова, 2015а,б].

Не ограничивая общности, рассмотрим локальный вариант S-аппроксимации, когда сферичностью Земли можно пренебречь. Пусть задано  $N$  точек наблюдения  $M_i = (x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}), i=1, 2, \dots, N$ , в которых известны значения некоторого элемента поля  $f_{i,\delta} = f_i + \delta f_i, i=1, 2, \dots, N$ . Если рассматривается вертикальная производная поля, то аппроксимация поля суммой простого и двойного слоев, расположенных на  $R$  уровнях, задается соотношением (2).

Далее ставится следующая вариационная задача:

$$\Omega(\rho) + \mu \Xi(\rho) = \sum_{r=1}^R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \rho_{1,r}^2 \left( \hat{\xi} \right) + \rho_{2,r}^2 \left( \hat{\xi} \right) \right) d \hat{\xi} + \mu \Xi(\rho) = \min_{\rho}, \quad (10)$$

$$f_{i,\delta} - \sum_{r=1}^R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \rho_{1,r} \left( \hat{\xi} \right) Q_{1,r}^{(i)} \left( \hat{\xi} \right) + \rho_{2,r} \left( \hat{\xi} \right) Q_{2,r}^{(i)} \left( \hat{\xi} \right) \right) d \hat{\xi} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где  $\rho = \rho_{k,r}(\hat{\xi})$ ,  $k=1, 2, r=1, 2, \dots, R$  – неизвестные функции;  $\rho_{1,r}(\hat{\xi}) \in L_2(-\infty, +\infty)$  – плотность  $r$ -го простого слоя;  $\rho_{2,r}(\hat{\xi}) \in L_2(-\infty, +\infty)$  – плотность  $r$ -го двойного слоя;  $Q_{1,r}^{(i)}(\hat{\xi})$  и  $Q_{2,r}^{(i)}(\hat{\xi})$  – подынтегральные функции, имеющие тот же вид, что и в (2);  $\Xi(\rho)$  – функционал качества решения;  $\mu$  – параметр регуляризации. Отличие постановки задачи (10) от (4)–(5) состоит в наличии функционала качества решения  $\Xi(\rho)$  и параметра регуляризации  $\mu$ . При  $\mu=0$  приходим к классическому варианту метода S-аппроксимаций. Если же варьировать параметр  $\mu$  от 0 до 1, то получим семейство решений обратной задачи, в котором при разных значениях  $\mu$  учитывается определенная априорная информация об искомых геологических объектах – геометрия источников поля, их примерная локализация, средняя плотность и т.д. Граничные условия для квадрата нормы невязки, соответствующие различным значениям параметра  $\mu$ , запишем в следующем виде:

$$\hat{x}^\mu : (\delta_{\min}^\mu)^2 \leq \left\| A \hat{x}^\mu - f_\delta \right\|_E^2 \leq (\delta_{\max}^\mu)^2, \mu \in [0, 1]. \quad (11)$$

Для каждого значения  $\mu$  находится свое приближенное решение СЛАУ  $\hat{x}^\mu$  (10), для которого выполняется условие (11). Нижнее и верхнее значения квадрата нормы невязки  $(\delta_{\min}^\mu)^2$  и  $(\delta_{\max}^\mu)^2$  корректируются для разных значений  $\mu$ . Это делается, поскольку постановка обратной задачи (10) накладывает определенные ограничения на выбор решения системы. Из теории катастроф известно, что даже незначительное изменение функции ведет к изменению ее особенностей [Постон, Стюарт, 1980; Арнольд, 1990]. С физической точки зрения, это приводит к тому, что меняется поведение всей системы. Поэтому для каждого последующего значения  $\mu$  постоянные  $(\delta_{\min}^\mu)^2$  и  $(\delta_{\max}^\mu)^2$  необходимо корректировать.

На начальном этапе решения принимаем  $\mu=0$  и в этом случае приходим к “классическому” варианту метода S-аппроксимаций с описанием системы соотношениями (6)–(9). Таким образом находится решение  $\hat{x}^0$ , при котором плотности простого и двойного слоев описываются следующими соотношениями:

$$\rho_{k,r}^{(a)}(\hat{\xi}) \approx \tilde{\rho}_{k,r}(\hat{\xi}, \hat{x}^0) = \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^0 Q_{k,r}^{(i)}(\hat{\xi}) = \left( \hat{x}^0, Q_{k,r}(\hat{\xi}) \right), \quad k=1, 2, r=1, 2, \dots, R. \quad (12)$$

Из (12) следует, что аппроксимации функций  $\rho_{k,r}(\hat{\xi})$  зависят от найденного решения системы. Для наиболее быстрого решения с приемлемой точностью, следует выбрать константы  $(\delta_{\min}^0)^2$  и  $(\delta_{\max}^0)^2$  (границы квадрата нормы невязки при  $\mu=0$ ) из следующих соображений:

$$\varepsilon = \frac{\left\| A \hat{x}^0 - f_\delta \right\|_E^2}{\left\| f_\delta \right\|_E^2}, \quad (\delta_{\max}^0)^2 = c\varepsilon, \quad \frac{(\delta_{\max}^0)^2}{(\delta_{\min}^0)^2} = 10 \div 100, \quad (13)$$

где  $f_{\delta}$  – заданные значения поля;  $\hat{x}^0$  – устойчивое приближенное решение при  $\mu=0$ ;  $c$  – задаваемая константа. Таким образом, задавая точность аппроксимации  $\varepsilon$ , определяем значения констант  $(\delta_{\min}^0)^2$  и  $(\delta_{\max}^0)^2$ . Точность аппроксимации задается в зависимости от условий поставленной задачи и уровня помех; константу  $c$  лучше выбирать из отрезка  $[1, 10]$  мГал<sup>2</sup>.

Так как выбор функционала качества решения  $\Xi(\rho)$  зависит от имеющейся априорной информации, то выписать аналитические выражения для безусловной вариационной задачи (10) не представляется возможным. Однако, если известно решение системы (12) при  $\mu=0$ , то, увеличивая параметр регуляризации  $\mu$  постепенно от 0 до 1, можно определенным образом варьировать вектор решения  $\hat{x}^0$  СЛАУ, чтобы аппроксимации искомых функций удовлетворяли поставленным условиям. Не ограничивая общности, будем считать, что значения  $\mu$  меняются по линейному закону:

$$\mu_s = 0.01s, \tag{14}$$

где  $s$  соответствует определенному решению. Так, при  $s=0$  решением задачи (10) являются выражения (12). Аппроксимации искомых функций  $\rho_{k,r}^{(a^{\mu})}(\hat{\xi})$ , соответствующих разным значениям  $\mu$ , можно представить в виде однопараметрического семейства функций

$$\rho_{k,r}^{(a^{\mu})}(\hat{\xi}) = \tilde{\rho}_{k,r}(\hat{\xi}, \hat{x}^{\mu_s}, \mu_s), \quad k = 1, 2, r = 1, 2, \dots, R, \mu_s \in [0, 1]. \tag{15}$$

Как было отмечено, функции  $\tilde{\rho}_{k,r}(\hat{\xi}, \hat{x}^{\mu_s}, \mu_s)$  при разных значениях  $\mu$  могут по-разному отображать физико-геологические параметры среды.

Запишем выражение для  $s$ -й деформации аппроксимированной функции:

$$\tilde{\rho}_{k,r}(\hat{\xi}, \hat{x}^{\mu_s}, \mu_s) = \tilde{\rho}_{k,r}(\hat{\xi}, \hat{x}^{\mu_{s-1}}, \mu_{s-1}) + \varepsilon_{\mu} f_{k,r}(\hat{\xi}, \mu_s), \quad k = 1, 2, r = 1, 2, \dots, R, \tag{16}$$

где  $\varepsilon_{\mu} = \mu_s - \mu_{s-1}$ , а  $f_{k,r}(\hat{\xi}, \mu_s) \in L_2(-\infty, +\infty)$  соответствует  $s$ -й деформационной функции аппроксимации  $\tilde{\rho}_{k,r}(\hat{\xi}, \hat{x}^{\mu_{s-1}}, \mu_{s-1})$ . Согласно (14),  $\varepsilon_{\mu} = 0.01 = \text{const}$ .

Перепишем (16) в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{k,r}(\hat{\xi}, \hat{x}^{\mu_s}, \mu_s) &= \tilde{\rho}_{k,r}(\hat{\xi}, \hat{x}^{\mu_{s-1}}, \mu_{s-1}) + \varepsilon_{\mu} f_{k,r}(\hat{\xi}, \mu_s) = \\ &= \tilde{\rho}_{k,r}(\hat{\xi}, \hat{x}^{\mu_{s-2}}, \mu_{s-2}) + \varepsilon_{\mu} f_{k,r}(\hat{\xi}, \mu_s) + \varepsilon_{\mu} f_{k,r}(\hat{\xi}, \mu_{s-1}) = \dots = \\ &= \tilde{\rho}_{k,r}(\hat{\xi}, \hat{x}^0, 0) + \varepsilon_{\mu} \left( f_{k,r}(\hat{\xi}, \mu_s) + f_{k,r}(\hat{\xi}, \mu_{s-1}) + \dots + f_{k,r}(\hat{\xi}, \mu_1) \right), \quad k = 1, 2, r = 1, 2, \dots, R. \end{aligned} \tag{17}$$

При таком представлении функция  $\tilde{\rho}_{k,r}(\hat{\xi}, \hat{x}^0, 0)$  играет роль нулевого приближения для однопараметрического семейства (15), в котором каждая функция является решением

безусловной вариационной задачи (10). Поэтому под  $s$ -й деформацией функции понимается деформация именно нулевого приближения  $\tilde{\rho}_{k,r} \left( \hat{\xi}, \hat{x}^0, 0 \right)$ ,  $k=1, 2, r=1, 2, \dots, R$ .

Целесообразным представляется выбор такого функционала качества решения, который давал бы наиболее содержательные результаты для поставленной задачи. Например, если требуется построить аналитическое продолжение поля вверх для выделения регионального фона [Мартышко, Пруткин, 2003] вместе с вычислением высших производных поля, то функционал качества решения для каждой из поставленных задач следует выбирать отдельно.

Рассмотрим два варианта задания функционала качества решения – локальный, когда сферичностью Земли можно пренебречь и рассматривать исследуемую область как плоскую, и региональный, когда сферичностью Земли пренебречь нельзя.

*Локальный вариант.* Если требуется найти высшие производные поля, в качестве функционала качества решения, дающего наиболее адекватные результаты, можно выбрать квадрат нормы горизонтальных производных плотностей простого и двойного слоев:

$$\Xi(\rho) = \sum_{r=1}^R \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^2 \left( \left( \frac{\partial \rho_{k,r} \left( \hat{\xi} \right)}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho_{k,r} \left( \hat{\xi} \right)}{\partial \xi_2} \right)^2 \right) d \hat{\xi}. \quad (18)$$

Выбор такого функционала обусловлен тем, что получаемые в этом случае аппроксимации дают наиболее общую картину поведения аномального потенциального поля, а горизонтальные и вертикальные производные, находимые с приемлемой для геофизики точностью, представляют собой функции, более гладкие, чем при решении обычным методом S-аппроксимаций.

Если требуется найти аналитическое продолжение поля в нижнее или верхнее полупространство, то целесообразно дополнительное выделение области  $\tilde{D}$  с наименьшей интенсивностью поля. После такого качественного анализа может быть выбран следующий функционал качества решения:

$$\Xi(\rho) = \sum_{r=1}^R \iint_{\tilde{D}} \left( \rho_{1,r}^2 \left( \hat{\xi} \right) + \rho_{2,r}^2 \left( \hat{\xi} \right) \right) d \hat{\xi}. \quad (19)$$

В таком случае аппроксимации искомых функций будут лучше отображать геометрические формы геологических тел, создающих аномальное поле, и в результате аналитические продолжения полей будут более устойчивы.

*Региональный вариант.* Если для аналитического продолжения полей вверх или вниз определяемый выражением (20) функционал  $\Xi(\rho)$  остается без изменений, то для нахождения требуемых высших производных поля выражение (19) примет вид:

$$\Xi(\rho) = \sum_{r=1}^R \iint_{D_r} \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\left( \frac{\partial \rho_{k,r} \left( \tilde{\varphi}, \tilde{\vartheta} \right)}{\partial \tilde{\vartheta}} \right)^2}{r^2 \sin^2 \tilde{\vartheta}} + \frac{\left( \frac{\partial \rho_{k,r} \left( \tilde{\varphi}, \tilde{\vartheta} \right)}{\partial \tilde{\varphi}} \right)^2}{r^2} \right) d \tilde{\varphi} d \tilde{\vartheta}, \quad (20)$$

где  $D_r$  –  $r$ -я область, представляющая собой сферу определенного радиуса, на которой распределены простой и двойной слои;  $\tilde{\vartheta}$  – ко-широта;  $\tilde{\varphi}$  – долгота.

### Аналитическая аппроксимация рельефа земной поверхности

При решении геодезических и геофизических задач часто необходимо построение именно такой аналитической аппроксимации рельефа поверхности  $D$ , которая будет использована для вычисления значений функции  $g_3(\vec{r}) = -\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x_3}$  (производной потенциала по координате  $x_3$ ) в точках наблюдения  $\vec{r}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\vec{r}_i = (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$ . В рамках модели плоской Земли поверхность  $D$  – функция двух переменных  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Учет топографических масс (редукция силы тяжести) проводится по приближенной формуле

$$g_3(\vec{r}) = \gamma\sigma \iint_{\Sigma} \left( \frac{1}{R(\xi|_D - \vec{r})} - \frac{1}{R(\xi_3^{(0)} - \vec{r})} \right) d\xi_1 d\xi_2, \quad (21)$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная;  $\sigma$  – средняя плотность пород топографии,  $R(\xi - x) = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (\xi_k - x_k)^2}$ ,  $\xi|_D = (\xi_1, \xi_2, \xi_3(\xi_1, \xi_2))$ , плоскость  $\xi_3^{(0)} = \text{const}$  задается с учетом двух условий: во-первых, для всех  $\vec{r}^{(i)}$  можно использовать с требуемой точностью приближенную формулу (21), где  $\Sigma$  – конечная односвязная область в плоскости переменных  $(\xi_1, \xi_2)$ ; во-вторых, для всех  $(\xi_1, \xi_2) \in \Sigma$  –

$$\xi_3^{(0)} - \xi_3(\xi_1, \xi_2) < 0. \quad (22)$$

Введем функцию

$$\Delta\xi_3(\xi_1, \xi_2) = \xi_3(\xi_1, \xi_2) - \xi_3^{(0)}. \quad (23)$$

Основная вычислительная процедура состоит в построении аналитической аппроксимации функции  $\Delta\xi_3(\xi_1, \xi_2)$ , справедливой во всей области интегрирования  $\Sigma$ , которая строится в совокупности точек  $(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)})$ ,  $k=1, 2, \dots, K$ . Ясно, что в силу (22) имеем  $\Delta\xi_3(\xi_1, \xi_2) > 0$  – для всех  $(\xi_1, \xi_2) \in \Sigma$ .

Аналитическая аппроксимация  $\Delta\xi_3(\xi_1, \xi_2)$  может быть выполнена с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций, являющегося одним из вариантов метода линейных интегральных представлений, разработанного в общем виде В.Н. Страховым ([Страхов, 1999; Страхов, Степанова, 1999; Страхов, Керимов, Страхов, 1999; Страхов, Керимов, Степанова, 2001; Степанова, 2011]), исходя из следующего фундаментального факта: функция, непрерывная<sup>1</sup> на произвольной горизонтальной плоскости (плоскости переменных  $(\xi_1, \xi_2)$ ) может рассматриваться как предельные значения некоторой функции трех переменных  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , гармонической в полупространстве  $\xi_3 > 0$ , верхнем к заданной горизонтальной плоскости. Для построения аналитической аппроксимации используются значения  $\Delta\xi_3(\xi_1, \xi_2)$  непосредственно в точках наблюдения; в определенной совокупности точек топографических карт соответствующего масштаба (например, в случае гравиметрических съемок масштаба 1:25 000 желательнее

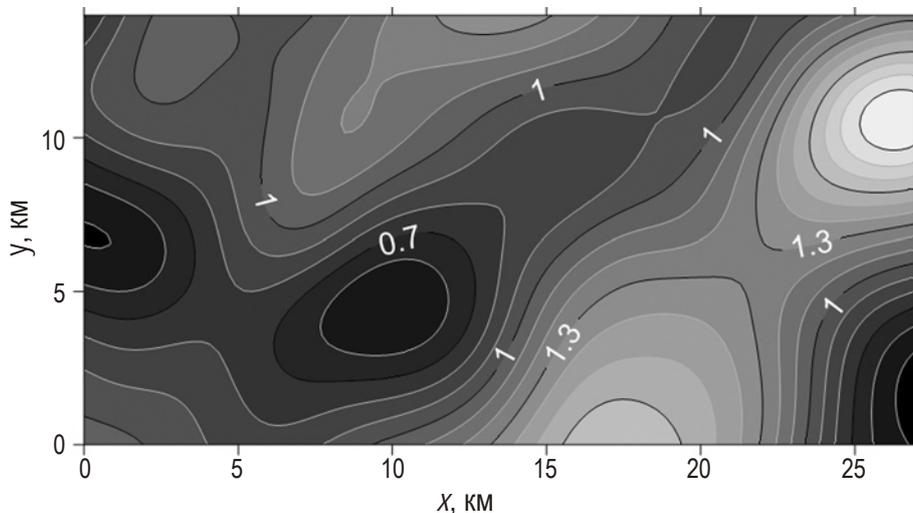
<sup>1</sup> Либо даже из более общего класса  $L_2(-\infty, +\infty)$  функций, с суммируемым квадратом на плоскости переменных  $(\xi_1, \xi_2)$ .

использовать топографические карты масштаба 1:10 000); в определенной совокупности характерных точек рельефа, которые должны быть получены в процессе проведения гравиметрических съемок.

Непрерывную функцию  $\Delta\xi_3(\xi_1, \xi_2)$ , описывающую рельеф земной поверхности, можно рассматривать как значения на некоторой поверхности, например, на горизонтальной плоскости, некоторого элемента гравитационного поля, создаваемого группой рудных тел. Для аппроксимации рельефа можно применить метод S-аппроксимаций, описанный в [Страхов, Степанова, 2002а,б]. Методика построения S-аппроксимаций основана на применении фундаментальной формулы теории гармонических функций (третьей формулы Грина) [Кошляков, Глинер, Смирнов, 1962]. Представим функцию, описывающую рельеф, в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев, распределенных на некоторой совокупности плоскостей, и рассмотрим модельный пример, демонстрирующий эффективность построения S-аппроксимации рельефа.

#### Модельный пример № 1

Рассматривается область, простирающаяся на 14 км по оси  $OY$  и на 27 км по оси  $OX$  (рис. 1). Функция  $\Delta\xi_3(\xi_1, \xi_2)$ , описывающая рельеф земной поверхности, представляет значения вертикальной производной гравитационного потенциала большой группы (2000) точечных источников разной плотности, залегающих ниже дневного рельефа на глубине от 3.7 до 5.7 км, в точках горизонтальной плоскости  $x_3 = 0$  км на равномерной сети точек  $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ ,  $1 \leq i \leq N$ .



**Рис. 1.** Модельный пример № 1. Карта изолиний рельефа. Сечение изолиний – 0.1 км

Общее количество точек измерений  $N=9656$ , сеть нерегулярная, масштаб 1:200000. Благодаря большому количеству точечных источников смоделированный рельеф напоминает реальный в горной местности.

Представим функцию, описывающую рельеф, в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев, распределенных лишь на одной плоскости  $x_3 = -H = -1.5$  км.

Для оценки качества аппроксимации рельефа применяется способ трехступенчатого контроля, предложенный В.Н. Страховым, который заключается в следующем. На первом шаге из исходных пунктов исключается около 20 % пунктов, имеющих

минимальное по модулю значения аномального поля, которые включаются в число контрольных, а оставшиеся 80 % пунктов используются для построения аппроксимационной конструкции. На втором шаге из контрольных пунктов выделяется половина, имеющие максимальные по модулю отклонения от исходного поля и они добавляются к числу пунктов, используемых для построения аппроксимации. Контроль точности производится по оставшимся контрольным пунктам (10 %). На третьем шаге для построения аппроксимации используются все исходные пункты.

Система линейных алгебраических уравнений решалась при помощи регуляризованного метода Холецкого (M1) и регуляризованного трехслойного итерационного метода Чебышева (CH). Все вычисления проводились на компьютере с процессором *Intel Core i7-4700HQ* и частотой 2.4 ГГц. Функционал качества решения  $\Xi(\rho)$  задается формулой (19). Результаты модифицированной S-аппроксимации рельефа приводятся в табл. 1 (обычный шрифт).

Аналогичные расчеты были выполнены для модели, в рамках которой поле аппроксимировалось суммой простого и двойного слоев, распределенных на плоскостях, залегающих ниже дневного рельефа на глубине 0.4 и 2.4 км. Результаты этих расчетов выделены в табл. 1 утолщенным шрифтом.

**Таблица 1.** Модельный пример № 1. Результаты S-аппроксимации рельефа с одной плоскостью (обычный шрифт) и с двумя (утолщенный шрифт)

$\sigma_{\min}, \text{M}$	$\sigma_{\max}, \text{M}$	Метод	$\sigma_0, \text{M}$	$\sigma_1, \text{M}$	$\sigma_2, \text{M}$	Максимальное расхождение, м	$\frac{\Delta}{t}$
				$\sigma_{\text{кТI}}, \text{M}$	$\sigma_{\text{кТII}}, \text{M}$		
0.0322	0.4071	M1	0.22	0.3978	0.3445	2.5528	$2.0607 \cdot 10^{-4}$
				0.4767	0.3985		05:10:35
			<b>0.238</b>	<b>0.401</b>	<b>0.3823</b>		<b><math>2.2293 \cdot 10^{-4}</math></b>
			<b>0.4633</b>	<b>0.4438</b>	<b>02:15:42</b>		
		CH	0.401	0.535	0.4918	4.0573	$3.7339 \cdot 10^{-4}$
				0.5746	0.5218		08:16:09
<b>0.3218</b>	<b>0.499</b>		<b>0.4536</b>	<b><math>3.0143 \cdot 10^{-4}</math></b>			
		<b>0.5437</b>	<b>0.4983</b>	<b>00:49:17</b>			

Нами приняты обозначения:  $N$  – число исходных точек (9656),  $N_1$  – число точек без контрольных точек типа I (7832),  $N_2$  – число точек без контрольных точек типа II (8600);

$\sigma_{\min} = \sqrt{\frac{\delta_{\min}^2}{N}}$ ,  $\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{\delta_{\max}^2}{N}}$  – заданные границы для среднеквадратического отклонения;

$\sigma_0 = \frac{\|Ax - f_{\delta}\|_E}{\sqrt{N}}$  – среднеквадратическое отклонение;  $\sigma_1$  – среднеквадратичное отклонение, полученное с помощью аппроксимации по точкам рельефа без контрольных точек типа I,  $\sigma_{\text{кТI}}$  – среднеквадратичное отклонение, полученное в контрольных точках типа I,  $\sigma_2$  – среднеквадратичное отклонение, полученное с помощью аппроксимации по точкам рельефа без контрольных точек типа II,  $\sigma_{\text{кТII}}$  – среднеквадратичное отклонение, полученное в контрольных точках типа II;

$\Delta = \frac{\|Ax - f_{\delta}\|_E}{\|f_{\delta}\|_E}$  – показатель

качества решения;  $t$  – время решения СЛАУ (чч:мин мин:сс). Количество пробных решений  $n=10$ .

В случае одной плоскости время решения СЛАУ методом М1 более чем на 3 часа меньше времени решения методом СН (см. табл. 1), что связано с параметрами выбранной модели. Результаты, полученные при аппроксимации поля суммой простого и двойного слоев, показывают, что время, затрачиваемое на решение СЛАУ методом СН, уменьшается почти в 10 раз по сравнению с использованием метода М1; при этом уменьшается и среднеквадратическая ошибка  $\sigma_0$ .

В случае двух плоскостей время решения СЛАУ методом СН уменьшилось чуть более чем в 2 раза, среднеквадратическая ошибка немного увеличилась по сравнению с методом М1.

Из проведенного анализа следует, что итерационные методы решения СЛАУ более чувствительны к параметрам выбранной модели, чем прямые методы.

### **Блочный метод контрастирования при интерпретации данных гравиразведки с помощью модифицированного метода s-аппроксимаций**

Одним из основных и наиболее информативных методов разведочной геофизики является сейсморазведка. Однако в последнее время все чаще требуется плотное комплексирование геофизических методов по следующим причинам:

- 1) возрастание объема данных, подлежащих интерпретации;
- 2) увеличение глубинности геологических исследований, так как запасы легко добываемых месторождений, находящихся в верхней коре, почти исчерпаны;
- 3) повышение требований к точности и разрешающей способности геологических исследований;
- 4) появление новых инженерно-эксплуатационных, экономических и экологических проблем.

Как известно, большинство обратных задач геофизики являются некорректно поставленными [Тихонов, Арсенин, 1986], поэтому при решении более сложных геофизических задач, результаты содержат большую неопределенность, и только плотное комплексирование методов полевой физики позволяет достоверно решить современные геологические задачи.

При интерпретации данных высокоточной гравиразведки, число гравиметрических пунктов может превышать  $10^5$ . Такая ситуация может возникать, например, при глобальном изучении строения земной коры и верхней части мантии или при определении геометрии залегающего месторождения, осложненного другими геологическими объектами, не представляющими интереса для изучения. Тогда количество элементов матрицы превышает  $10^{10}$ , а так как число обусловленности матрицы  $A$  системы (7) катастрофически растет, то система будет сильно плохо обусловленной. В этом случае ранг матрицы может быть значительно меньше, чем размерность самой матрицы  $A$ , и применять прямые методы решения СЛАУ не имеет смысла: полученные решения будут неустойчивыми. Поэтому целесообразней применять итерационные методы решения СЛАУ.

Рассмотрим вместо (7) регуляризованную систему

$$(A + \alpha S)x = f_s, \quad (24)$$

где  $\alpha > 0$  – параметр регуляризации;  $S = S^T > 0$  – невырожденная  $N \times N$ -матрица. В этом случае  $\Omega(x) = (Sx, x)$  задает отношение предпочтения на множестве приближенных решений.

В настоящее время широко используются итерационные методы решения СЛАУ с использованием многочленов Чебышева первого рода. Их применение обуславливается замечательным свойством – полиномы Чебышева наименее отклоняются от нуля на отрезке  $[-1, 1]$ . СЛАУ (24) решается при помощи трехслойного итерационного метода Чебышева, реализующего следующий основной алгоритм:

$$x^{i+1} = \beta_{i+1} (E - \tau(A + \alpha S))x^i + (1 - \beta_{i+1})x^{i-1} + \beta_{i+1} \tau f_{\delta}, \quad (25)$$

$$x^1 = (E - \tau(A + \alpha S))x^0 + \tau f_{\delta}, \quad i = 1, \dots,$$

$$\tau = \frac{2}{l_{\alpha} + L_{\alpha}}, \quad \beta_1 = 2, \quad \beta_{i+1} = \frac{4}{4 - \rho^2 \beta_i}, \quad \rho = \frac{L_{\alpha} - l_{\alpha}}{L_{\alpha} + l_{\alpha}}, \quad (26)$$

где  $L_{\alpha}$  и  $l_{\alpha}$  – максимальное и минимальное собственные значения матрицы  $A + \alpha S$ .

На практике важную роль играет выбор начального приближения  $x^0$ . Если его задавать произвольно, например, выбирать в качестве начального приближения нуль-вектор или вектор правой части, умноженной на произвольную константу, то решение СЛАУ (25) требует большого количества времени. Так, уже при  $N=10^4$  для решения такой задачи на компьютере с процессором *Intel Core i5-4570* 3.2 ГГц необходимо более часа. Поскольку с ростом  $N$  количество вычислений растет по нелинейному закону, то уже при решении системы с  $N=10^5$  затрачиваемое время может стать огромным, а получаемые результаты не обязательно будут устойчивыми. В связи с этим возникает необходимость модификации итерационного метода решения СЛАУ с выбором такого начального приближения  $x^0$ , чтобы для сходимости требовалось гораздо меньшее число шагов итерационного процесса по сравнению с произвольным его выбором.

Предлагается разбить исследуемую область на блоки таким образом, чтобы начальное приближение было согласовано с физическими свойствами исследуемого поля. Затем для каждого из блоков решается своя СЛАУ и в качестве нулевого приближения выбирается объединение всех полученных решений. Однако, разбивать область на блоки, не опираясь на сами данные, например, на  $R$  блоков одинакового размера, не имеет смысла, так как в этом случае каждое полученное решение будет физически адекватным только для своей области, но результирующее решение для всей исследуемой области может быть совсем другим. По этой причине блочное разбиение должно быть согласовано со свойствами исследуемого поля.

Не ограничивая общности, рассмотрим локальный вариант. Реальное исследуемое поле характеризуется большим числом неоднородностей, залегающих ниже рельефа, тектоническими особенностями осадочного чехла земной коры и глубинным строением Земли и верхней мантии, поэтому оно всегда характеризуется большим количеством аномалий, который накладываются друг на друга. На практике наблюдаемое поле имеет достаточное количество ( $\geq 5$ ) ярко выраженных экстремумов, обусловленных геолого-физическими особенностями исследуемой территории. Так как имеется ограниченное количество данных, и решается конечномерная задача, то экстремумы определяются по формуле

$$u(x_r, y_r, z_r) \leq u(x, y, z), \quad \rho_r(x, y, z) \leq \rho_N, \quad (27)$$

$$u(x_r, y_r, z_r) \geq u(x, y, z), \quad \rho_r(x, y, z) \leq \rho_N, \quad (28)$$

где  $u(x, y, z)$  – потенциальное поле;  $(x_r, y_r, z_r)$  – наиболее близкая к центру аномалии точка наблюдения;  $\rho_r(x, y, z) = \sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2 + (z - z_r)^2}$ , а  $\rho_N$  – характерный размер исследуемой области:

$$\rho_N = \frac{\sqrt{(x_{\max} - x_{\min})^2 + (y_{\max} - y_{\min})^2 + (z_{\max} - z_{\min})^2}}{\sqrt{N}}, \quad (29)$$

где  $(x_{\max}, y_{\max}, z_{\max})$  и  $(x_{\min}, y_{\min}, z_{\min})$  – координаты наиболее удаленных друг от друга пунктов измерений. Условие (27) соответствует локальному минимуму, а условие (28) – локальному максимуму. Однако, в соответствии с априорной информацией (11), входные данные заданы с некоторой погрешностью, и условия (27)–(28) могут не выполняться в связи с наличием погрешности. Тогда эти условия следует переписать в следующем виде:

$$u(x_r, y_r, z_r) - \sqrt{\frac{\delta_{\min}^2 + \delta_{\max}^2}{2N}} \leq u(x, y, z), \quad \rho_r(x, y, z) \leq \rho_N, \quad (30)$$

$$u(x_r, y_r, z_r) + \sqrt{\frac{\delta_{\max}^2 + \delta_{\min}^2}{2N}} \geq u(x, y, z), \quad \rho_r(x, y, z) \leq \rho_N. \quad (31)$$

В этом случае “теоретических центров” аномалий  $(x_r, y_r, z_r)$  может быть найдено достаточно большое количество. Тогда точки, расстояние между которыми меньше, чем характерный размер области, исключаются по следующему принципу: если найден локальный максимум, то среди всех “теоретических центров” выбирается тот, в которой достигается максимальное значение поля, и она принимается за центр аномалии, если же найден локальным минимум, то среди всех “теоретических центров” выбирается минимальное значение.

Допустим, таким образом всего найдено  $R$  локальных аномалий, удовлетворяющих условию (30)–(31). Далее для каждой аномалии оценивается ее интенсивность по оси  $OX$  и  $OY$ :

$$u_r^x = \max_x \frac{|u(M_r) - u(M_{r,x})|}{\rho(M_r, M_{r,x})}, \quad (32)$$

$$u_r^y = \max_y \frac{|u(M_r) - u(M_{r,y})|}{\rho(M_r, M_{r,y})}. \quad (33)$$

Здесь  $M_r = (x_r, y_r, z_r)$  – координаты центра аномалии  $r$ ;  $M_{r,x}$  – ближайшие по оси  $OX$  точка к  $M_r$ , а  $M_{r,y}$  – ближайшая по оси  $OY$  точка к  $M_r$ . Определим критерий, по которому рассматриваемая точка наблюдения войдет в блок  $r$ : точка  $M_s = (x_s, y_s, z_s)$  принадлежит блоку с аномалией с центром  $M_r = (x_r, y_r, z_r)$ , если выполнено следующее условие:

$$|u(M_s) - u(M_r)| \leq u_r^x \cdot \rho_x(M_s, M_r) + u_r^y \cdot \rho_y(M_s, M_r), \quad \rho_r(x, y, z) \leq \rho_R, \quad (34)$$

где

$$\rho_x = \sqrt{(x_s - x_r)^2 + (z_s - z_r)^2}, \quad \rho_y = \sqrt{(y_s - y_r)^2 + (z_s - z_r)^2}, \quad (35)$$

$$\rho_R = \frac{\sqrt{(x_{\max} - x_{\min})^2 + (y_{\max} - y_{\min})^2 + (z_{\max} - z_{\min})^2}}{\sqrt{R}}.$$

Если размер рассматриваемого блока относительно мал по сравнению с общим количеством точек измерений

$$N_r \leq 10\sqrt{N}, \quad (36)$$

то этот блок следует объединить с тем блоком, расстояние между центрами которых наименьшее.

Далее для каждого из блоков решается СЛАУ априорная информация (15) переписывается в следующем виде:

$$\frac{0.9 \cdot \delta_{\min}^2 \cdot N_r}{N} \leq \|\delta f_r\|_E^2 \leq \frac{1.1 \cdot \delta_{\max}^2 \cdot N_r}{N}. \quad (37)$$

Здесь  $N_r$  – общее количество точек в блоке  $r$ ;  $\|\delta f_r\|_E^2$  – квадрат нормы ошибки в блоке  $r$ . Так как помеха – величина случайная, то для каждого блока нельзя оценить квадрат нормы ошибки умножением  $\delta_{\min}^2$  и  $\delta_{\max}^2$  на  $N_r / N$  для  $r$ -го блока. Поэтому в формуле (37) нижняя граница оценки квадрата нормы ошибки занижена, а верхняя завышена.

Построение метода разделения на блоки в региональном случае не имеет существенного отличия. В географических координатах  $(r, \lambda, \varphi)$  ( $r = R + h$ , где  $R$  – радиус Земли,  $h$  – высота над уровнем моря,  $\lambda$  – долгота,  $\varphi$  – широта) изменится только формула для расстояния между двумя точками  $(r_1, \lambda_1, \varphi_1)$  и  $(r_2, \lambda_2, \varphi_2)$

$$\rho_{geogr} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2))}, \quad (38)$$

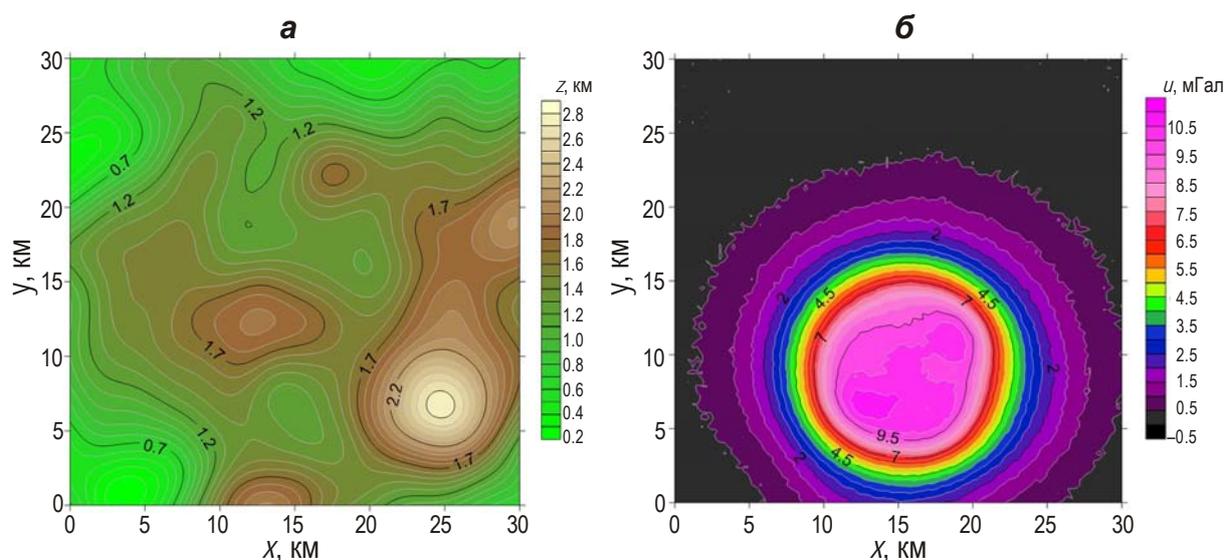
во всем остальном методика остается такой же.

### Построение линейных трансформаций поля в рамках метода S-аппроксимаций с применением блочного метода контрастирования

Для оценки качества и эффективности использования блочного метода контрастирования рассмотрим два различных по конфигурации модельных примера.

#### Модельный пример № 2

Рассматривается область размером 30×30 км с рельефом, изолинии которого представлены на рис. 2, а. Аномальное гравитационное поле (рис. 2, б) создается совокупностью трех тел (колец), залегающими на глубине 1.5 км (параметры колец приведены в табл. 2).



**Рис. 2.** Модельный пример № 2. Карты изолиний рельефа (а) и аномального гравитационного поля, создаваемого совокупностью трех тел (колец) (б)

**Таблица 2.** Модельный пример № 2. Параметры тел (колец), создающих аномальное гравитационное поле

№ тела (кольца)	Координаты центра, км		Радиус образующей окружности, км	Расстояние от центра кольца до центра образующей окружности, км	Глубина залегания, км
	$X_c$	$Y_c$	$R$	$Z_c$	$Z$
1	13.0	9.0	0.3	2.25	1.5
2	18.1	9.0	0.3	2.25	1.5
3	15.5	9.0	0.5	5.1	1.5

Избыточная плотность всего полученного аномального тела, состоящего из двух соприкасающихся колец (кольца 1, 2), которые входят в третье (кольцо 3), задавалась формулой  $\rho = 0.23 + rand[-0.005, 0.005]$  г/см<sup>3</sup>, где  $rand[-0.005, 0.005]$  – случайная величина, равномерно распределенная на указанном отрезке.

К вычисленному полю  $f_i$  в заданных пунктах рельефа искусственно вводилась помеха  $\delta f_i$  таким образом, что  $\|\delta f\|_E / \|f\|_E = 0.0174$ . Рельеф моделировался более резкий, разность между минимальной и максимальной отметками составляет 2.4 км. Из-за наличия такой ошибки, имитирующей аппаратно-методическую помеху, и рельефа, результирующее поле сильно искажалось. Общее число гравиметрических пунктов  $N=22801$ , сеть нерегулярная, масштаб 1:20000.

В рамках метода S-аппроксимации аномальное гравитационное поле аппроксимировалось суммой простого и двойного слоев, распределенных на плоскости  $H= -1$  км. Все вычисления в данном модельном примере выполнены с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ им. М.В. Ломоносова [Воеводин и др., 2012]. Все программы, используемые при вычислении в модельном примере № 2, не распараллеливались и были идентичны программам, разработанным для персонального компьютера. Результаты выполненной S-аппроксимации представлены в табл. 3.

**Таблица 3.** Модельный пример № 2. Результаты S-аппроксимации аномального гравитационного поля суммой простого и двойного полей

Метод	$\sigma_{\min}$ , мГал	$\sigma_{\max}$ , мГал	$\sigma_0$ , мГал	$\frac{\Delta}{t}$	$\alpha$	$\nu$
<i>CH</i>	0.0513	0.0784	0.0671	$\frac{1.7616 \cdot 10^{-2}}{56:36}$	$2.5624 \cdot 10^{-3}$	0.976216
<i>CH+BCM</i>	0.0513	0.0784	0.0658	$\frac{1.7293 \cdot 10^{-2}}{51:47}$	$1.4306 \cdot 10^{-3}$	0.987289

При использовании блочного метода контрастирования (*CH+BCM*) область была поделена на четыре блока. Однако, так как наблюдаемое поле близко к полю глубоко залегающего изолированного тела (см. рис. 2, б), использование этого метода оказалось неэффективным – общее время решения сократилось менее чем на 5 мин (см. табл. 3).

Сравнение решений СЛАУ, полученных двумя методами ( $\tilde{x}_1$  получено методом *CH*,  $\tilde{x}_2$  – методом *CH+BCM*) показало, что  $\|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\|_E / (\|\tilde{x}_1\|_E + \|\tilde{x}_2\|_E) = 0.098$  и  $\|\tilde{x}_1\|_E / \|\tilde{x}_2\|_E = 0.85$ , т.е. эти решения мало отличаются друг от друга.

Сравним качество линейных трансформант поля между вычисленными по теоретически заданной модели в рамках решения прямой задачи и полученными в рамках построенной аппроксимационной конструкции. Для оценки точности полученных в рамках модифицированного метода S-аппроксимаций линейных трансформант использовалась следующая формула:

$$\theta = \frac{\|u_{theor} - u_{appr}\|_E}{\|u_{theor}\|_E + \|u_{appr}\|_E}, \quad (39)$$

где  $u_{theor}$  – элемент поля, вычисленный по теоретически заданной модели;  $u_{appr}$  – тот же элемент поля, полученный в рамках S-аппроксимации. Таким образом, коэффициент  $\theta$ , значения которого для двух методов приведены в табл. 4, определяет меру близости между  $u_{theor}$  и  $u_{appr}$ .

**Таблица 4.** Модельный пример № 2: аналитическое продолжение поля

№	H, км	$\theta$	
		CH	CH+BCM
1	0.0	0.536003	0.552945
2	2.0	0.460749	0.452205
3	4.0	0.468291	0.105625
4	7.5	0.475736	0.464842

Аналитические продолжения поля являются не очень устойчивыми в рассматриваемом примере: значения  $\theta$  близки к 0.5 (см. табл. 4). Это обусловлено наличием рельефа с резкими перепадами высот, нерегулярностью сети наблюдений и осложнением поля помехой случайного характера.

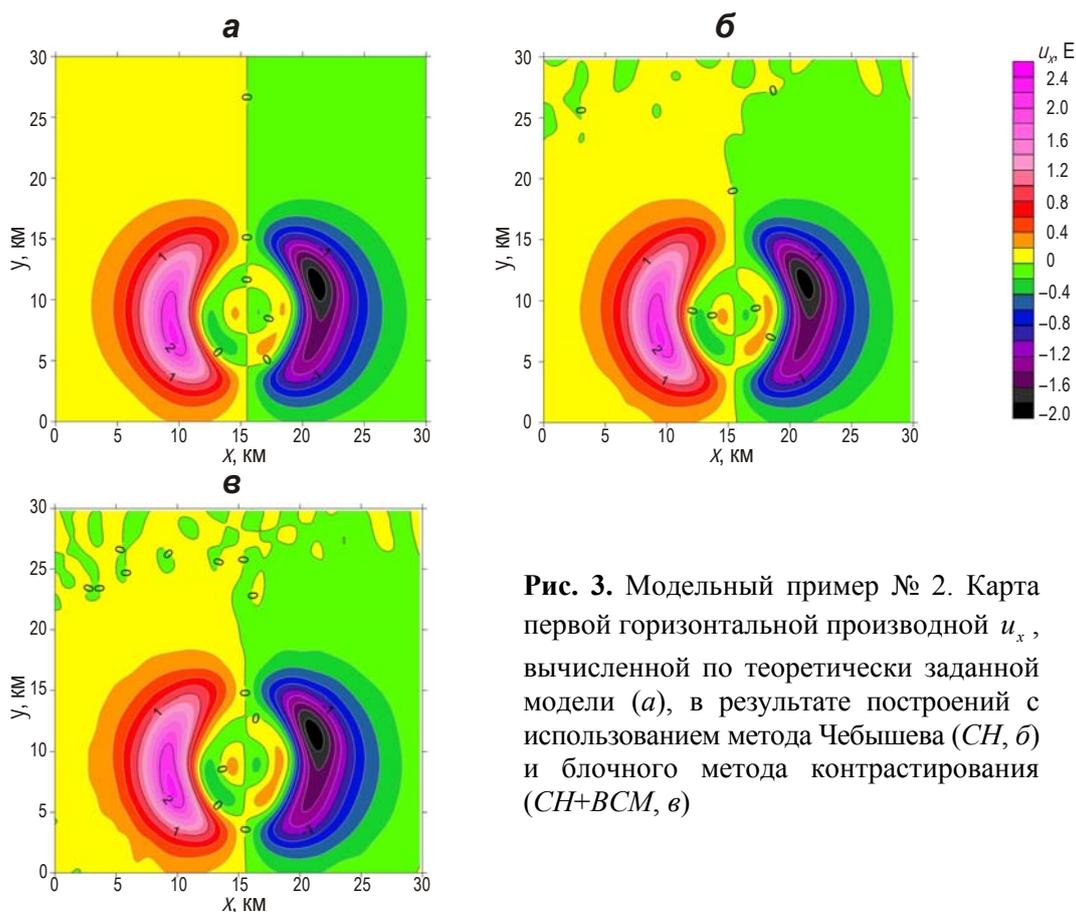
Первые производные поля были восстановлены с высокой степенью точности, в то время как вторая вертикальная производная восстановлена с гораздо большей погрешностью (табл. 5).

**Таблица 5.** Модельный пример № 2: аппроксимация высших производных гравитационного поля

№	Элемент поля	$\theta$	
		CH	CH+BCM
1	$u_x$	0.015862	0.013611
2	$u_y$	0.018466	0.013091
3	$u_z$	0.017405	0.013059
4	$u_{zz}$	0.355826	0.448144

Карта изолиний первой горизонтальной производной исходного аномального гравитационного поля  $u_x$  представлена на рис. 3.

Далее рассматривается практический пример применения модифицированного метода S-аппроксимаций для интерпретации гравиметрических данных с использованием блочного метода контрастирования по выявлению разломных структур.



**Рис. 3.** Модельный пример № 2. Карта первой горизонтальной производной  $u_x$ , вычисленной по теоретически заданной модели (а), в результате построений с использованием метода Чебышева (CH, б) и блочного метода контрастирования (CH+BCM, в)

### Применение модифицированного метода S-аппроксимаций при выявлении депрессий рельефа Филиппинского моря по гравиметрическим данным

Исследование региональных тектонических структур океана и морей до сих пор является актуальной задачей: разломные структуры акватории нашей планеты позволят лучше понять тепловую и тектоническую историю Земли, что позволит в большей степени пролить свет на ее происхождение в целом. Особенно примечательной территорией для исследования депрессий рельефа является Филиппинское море. Филиппинское море находится на стыке множества литосферных плит различного размера – Тихоокеанская, Евразийская, Филиппинская, Охотская, Каролинская, Окинавская, Марианская, Сундская, Амурская и Янцзы [Bird, 2003]. Поэтому Филиппинское море характеризуется высокой активностью магматических и тектонических процессов, в результате действия которых образуется большое количество геоморфологических объектов, приуроченных как к поднятиям, так и к депрессиям.

Высокоточная глобальная гравитационная модель акватории Земли была построена группой зарубежных ученых (см. [Sandwell et al., 2013, 2014]) путем объединения модели EGM2008 [Pavlis et al., 2012] и измерений с нескольких искусственных спутников – CryoSat-2 и Envisat, запущенных ESA (European Space Agency), и Jason-1, запущенного NASA. Полученные гравиметрические данные находятся в свободном доступе в сети интернет<sup>1</sup>. Чтобы получить данные по необходимому для исследования региону, достаточно лишь ввести начальные и конечные долготу и широту. Данные пред-

<sup>1</sup> [http://topex.ucsd.edu/cgi-bin/get\\_data.cgi](http://topex.ucsd.edu/cgi-bin/get_data.cgi)

ставляются в виде таблицы, в каждой строке которой расположены три значения: географическая долгота, географическая широта и значение аномального гравитационного поля в данной точке. Шаг сетки составляет  $1 \times 1'$ , поэтому территории большой площади (свыше 1 млн. км<sup>2</sup>) содержат более  $10^5$  точек измерений.

Аналитические аппроксимации аномального гравитационного поля по большому числу измерений позволяет выявлять различные геологические и геоморфологические структуры исследуемой территории. Особенно примечательным по выявлению геоморфологических особенностей региона является метод полного горизонтального градиента [Edwards, Lyatsky, Brown, 1996; Кадиров, 2000]. Метод полного горизонтального градиента состоит в анализе следующих компонент поля:

$$|\Gamma| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{g_y}{g_x}\right), \quad (40)$$

где  $g_x$  – первая горизонтальная производная по восточному направлению;  $g_y$  – первая горизонтальная производная по северному направлению;  $|\Gamma|$  – модуль полного горизонтального градиента;  $\alpha$  – угол направления полного горизонтального градиента.

Исследуемая область Филиппинского моря с координатами  $3^\circ$ – $36^\circ$  с.ш. и  $122^\circ$ – $149^\circ$  в.д. характеризуются сложным строением аномального гравитационного поля. Общее число пунктов измерений в исследуемой области составляет 216804; сетка наблюдений регулярная с шагом  $0.0667^\circ$  (или  $4'$ ).

На представленных далее рисунках рассматриваемые структурные элементы региона обозначены римскими цифрами I–VII: I – поднятия Оки-Дайто (северное и южное), между которыми располагается трог Оки-Дайто; II – провинция разломных зон Паресе Вела; III – разлом Минданао; IV – разлом Окинава-Луссон; V – уступ Минами-Окинава; VI – уступ Оки-Дайто; VII – Центральный разлом.

Все вычисления выполнены с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ им. М.В. Ломоносова [Воеводин и др., 2012]. При вычислениях использовались параллельные алгоритмы программ *P-CH* и *P-CH+BCM*. Общее число процессоров выбрано равным 1000. В рамках модифицированного метода S-аппроксимаций аномальное гравитационное поле аппроксимировалось суммой простого и двойного слоев, распределенных на сферах радиуса  $R_0^1=6370$  и  $R_0^2=6360$  км. Полученная СЛАУ решалась параллельными вариантами регуляризованного итерационного трехслойного метода Чебышева (*P-CH*) и блочным методом контрастирования (*P-CH+BCM*). Качество аппроксимации оценивалось с помощью трехступенчатого контроля Страхова. Выбраны следующие значения для границ среднеквадратического отклонения:  $\sigma_{\min}=0.048$  мГал,  $\sigma_{\max}=0.1358$  мГал. Число точек без контрольных точек I типа  $N_1=175483$ , число точек без контрольных точек II типа  $N_2=195945$ . В рамках блочного метода область была поделена на 21 подобласть.

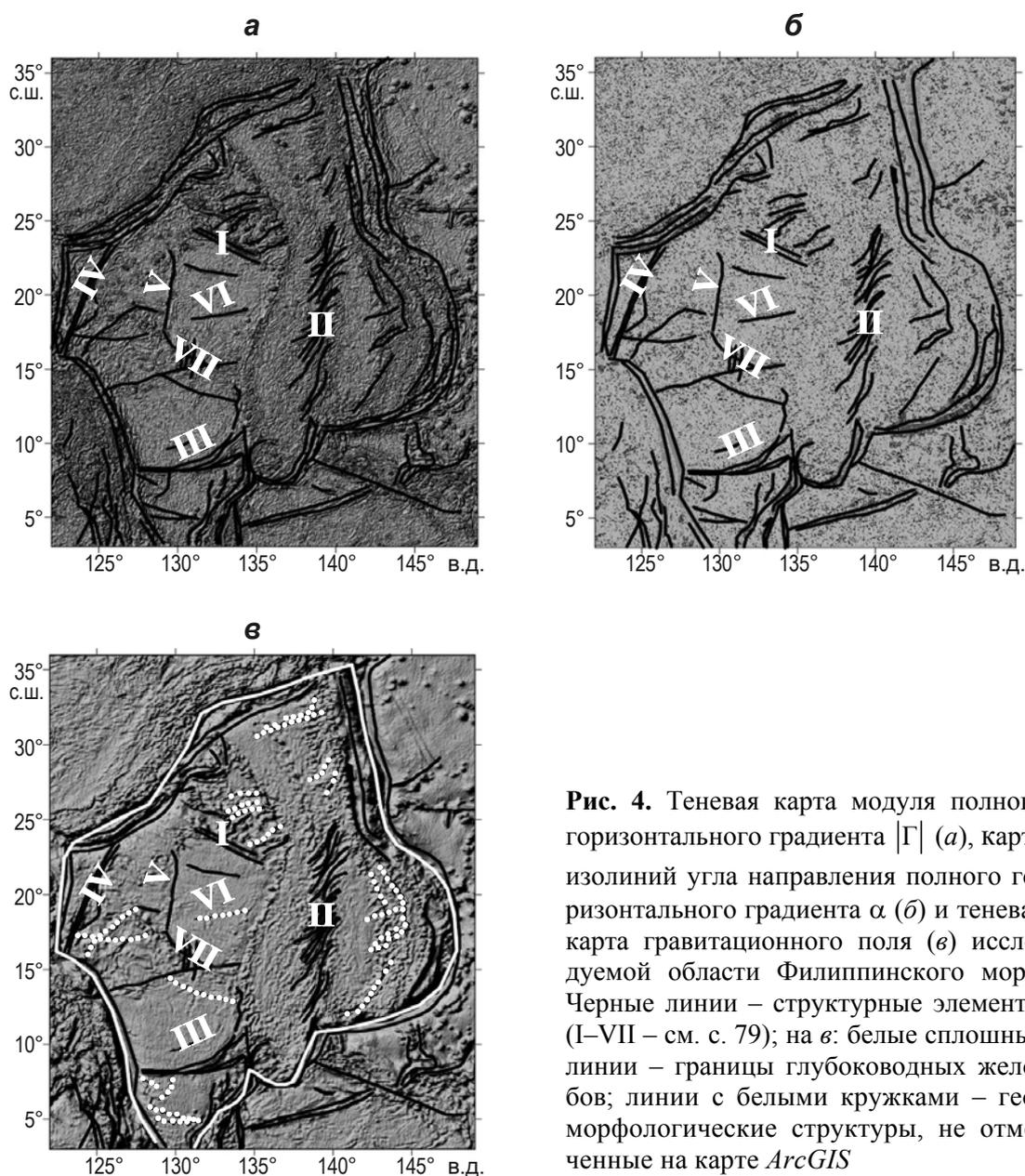
Результаты S-аппроксимации аномального гравитационного поля исследуемой области Филиппинского моря приведены в табл. 6.

Можно видеть, что значения  $\sigma_{\text{ктI}}$  и  $\sigma_{\text{ктII}}$  превышают  $\sigma_0$  более чем в два раза. Это свидетельствует о худшем качестве аппроксимации аномального гравитационного поля Филиппинского моря и связано с “резким” характером поля в исследуемом районе из-за большого наличия геоморфологических объектов различного происхождения. Время вычислений  $t$  при использовании 1000 процессоров методом *P-CH+BCM* почти на 80 мин меньше, чем методом *P-CH* (см. табл. 6).

**Таблица 6.** Результаты S-аппроксимации аномального гравитационного поля Филиппинского моря

Метод	$\sigma_0$ , мГал	$\sigma_0$ , мГал	$\sigma_2$ , мГал	$\Delta$
		$\sigma_{\text{кГП}}$ , мГал	$\sigma_{\text{кГП}}$ , мГал	$t$
<i>P-CH</i>	0.1308	0.2219	0.1948	$2.296 \cdot 10^{-3}$
		0.2817	0.247	04:11:20
<i>P-CH+BCM</i>	0.1286	0.2185	0.19	$2.2574 \cdot 10^{-3}$
		0.2747	0.2411	02:53:58

Выделенные в результате совместного анализа компонент полного горизонтального градиента (рис. 4, а) линейно вытянутые геологические структуры исследуемого региона были наложены на карту аномального гравитационного поля (рис. 4, в).



**Рис. 4.** Теневая карта модуля полного горизонтального градиента  $|\Gamma|$  (а), карта изолиний угла направления полного горизонтального градиента  $\alpha$  (б) и теневая карта гравитационного поля (в) исследуемой области Филиппинского моря. Черные линии – структурные элементы (I–VII – см. с. 79); на в: белые сплошные линии – границы глубоководных желобов; линии с белыми кружками – геоморфологические структуры, не отмеченные на карте *ArcGIS*

Наибольшее скопление аномалий наблюдается в провинции разломных зон Паресе Вела (II на рис. 4, в). Однако эта провинция детально изучена только в центральной ее части, в то время как к северу, ближе к цепи подводных гор Кинан, многие разломы так и не отмечены на карте.

Центральный разлом (VII на рис. 4, в) является спрединговым хребтом с глубоко-водными рифтовыми долинами и пересекающими его депрессиями.

Кроме того, в исследуемом регионе по результатам выполненной модифицированной *S*-аппроксимации аномального гравитационного поля выделяется множество структур, похожих по характеру поля и его компонент на разломные, однако отсутствующие на карте *ArcGIS*<sup>1</sup> (см. рис. 4, в). Происхождение этих структур может быть выяснено при дальнейших исследованиях Филиппинского моря. Большое скопление таких геоморфологических объектов наблюдается в северо-восточной части трога Оки-Дайто, расположенного между северным и южным поднятиями того же названия (I на рис. 4).

Северо-западная часть Филиппинского моря отличается более сложным строением с многочисленными подводными поднятиями, в связи с чем наличие разломных структур в ней представляется достоверным. Под действием тектонических и магматических процессов образование хребтов и подводных гор непременно влечет за собой появление локальных депрессий. Повышенное количество разломно-линейных структур наблюдается также возле Марианского трога, являющегося современной тектонически активной зоной Филиппинского моря [*Родников и др.*, 2007].

### Выводы

1. Построение линейных аппроксимаций рельефа поверхности эффективно при использовании модифицированного метода *S*-аппроксимаций. Результаты математического эксперимента показали, что даже в случае горного рельефа (см. рис. 1) возможно построение аппроксимационной конструкции со среднеквадратическим отклонением около 20–30 см. Однако при сильно расчлененном рельефе следует выбирать модель с несколькими носителями для сокращения времени вычислений (см. табл. 1).

2. Блочный метод контрастирования позволяет найти такое нулевое приближение для СЛАУ, при котором существенно сокращается время решения всей системы (см. табл. 2), если исследуемое поле не характеризуется малым количеством четко выраженных экстремумов. В противном случае заметного улучшения при использовании блочного метода контрастирования не наблюдается (см. табл. 3). Однако на практике исследуемое поле всегда характеризуется достаточным количеством геологических объектов, искажающих поле и усложняющих его картину, так что использование блочного метода оправдано при решении практических примеров.

3. При сложном рельефе земной поверхности и при наличии случайной помехи, а также если геологический объект представляет собой геометрическое тело невыпуклой формы, линейные трансформации поля, построенные при помощи модифицированного метода *S*-аппроксимаций, верно отражают физико-геологические особенности исследуемого поля (см. модельный пример № 2).

4. На примере Филиппинского моря показано, что в региональном варианте при помощи модифицированного метода *S*-аппроксимаций восстанавливаются первые производные аномального гравитационного поля, анализ которых в рамках метода полного горизонтального градиента позволяет выявить депрессии рельефа, вероятно, приуроченные к разломным структурам.

<sup>1</sup> <http://www.ngdc.noaa.gov/gazetteer/>

## Литература

- Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
- Воеводин В.В., Жуматий С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин В.В. Практика суперкомпьютера “Ломоносов” // Открытые системы. 2012. № 7. С.36–39.
- Кадиров Ф.А. Гравитационное поле и модели глубинного строения Азербайджана. Баку: Nafta-Press, 2000. 112 с.
- Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 767 с.
- Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. М.: Гостоптехиздат, 1950. 296 с.
- Мартышко П.С., Пруткин И.Л. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофизический журнал. 2003. Т. 25, № 3. С.159–168.
- Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.
- Раевский Д.Н., Степанова И.Э. О решении обратных задач гравиметрии с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций // Физика Земли. 2015а. № 2. С.44–54.
- Раевский Д.Н., Степанова И.Э. Модифицированный метод S-аппроксимаций. Региональный вариант // Физика Земли. 2015б. № 2. С.55–66.
- Родников А.Г., Забаринская Л.П., Рашидов В.А., Родкин М.В., Сергеева Н.А. Геотраверс Северо-Китайская равнина – Филиппинское море – Магеллановы горы // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. 2007. № 1. С.79–89.
- Степанова И.Э. Аппроксимация рельефа и расчет топопоправок в рамках метода линейных интегральных представлений // Геофизический журнал. 2011. Т. 33, № 3. С.128–139.
- Страхов В.Н. Геофизика и математика. М.: ОИФЗ РАН, 1999. 64 с.
- Страхов В.Н., Степанова И.Э. Аналитические аппроксимации элементов потенциальных полей методом интегральных представлений на основе интегральной формулы теории гармонических функций // Основные проблемы теории интерпретации гравитационных и магнитных полей. М.: ОИФЗ РАН, 1999. С.234–258.
- Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (региональный вариант) // Физика Земли. 2002а. № 7. С.3–12.
- Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // Физика Земли. 2002б. № 2. С.3–19.
- Страхов В.Н., Страхов А.В. Основные методы нахождения устойчивых приближенных решений систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при решении задач гравиметрии и магнитометрии. I. М.: ОИФЗ РАН, 1999. 40 с.
- Страхов В.Н., Керимов И.А., Страхов А.В. Линейные аналитические аппроксимации рельефа поверхности Земли // Геофизика и математика: Материалы 1-й Всероссийской конференции. М.: ОИФЗ РАН, 1999. С.198–212.
- Страхов В.Н., Керимов И.А., Степанова И.Э. Линейные аналитические аппроксимации рельефа поверхности Земли и их использование при вычислении поправок за влияние рельефа местности в гравиметрические наблюдения // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. М.: ОИФЗ РАН, 2001. С.116–118.
- Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решений некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
- Bird P. An updated digital model for plate boundaries // *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 2003. V. 4, N 3. doi: 10.1029/2001GC000252.
- Edwards D.J., Lyatsky H.V., Brown R.J. Interpretation of gravity and magnetic data using the gorizont-al-gradient vector method in the Western Canada Basin // *First Break*. 1996. V. 14, N 6. P.231–246.
- Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008) // *J. Geophys. Res.* 2012. V. 117. doi: 10.1029/2011JB008916.

Sandwell D.T., Garcia E., Sofft K., Wessel P., Smith W.H.F. Towards 1 mGal Global Marine Gravity from CryoSat-2, Envisat, and Jason-1 // *The Leading Edge*. 2013. V. 32, N 8. doi: 10.1190/tle32080892.1.

Sandwell D.T., Müller R.D., Smith W.H.F., Garcia E., Francis R. New global marine gravity model from CryoSat-2 and Jason-1 reveals buried tectonic structure // *Science*. 2014. V. 346, N 6205. doi: 10.1126/science.1258213.

#### Сведения об авторах

**СТЕПАНОВА Инна Эдуардовна** – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123242, Москва, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: +7(499) 254-51-52. E-mail: tet@ifz.ru

**РАЕВСКИЙ Дмитрий Николаевич** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123242, Москва, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: +7(499) 254-53-30. E-mail: nofirma2010@mail.ru

**КОНЕШОВ Вячеслав Николаевич** – доктор технических наук, профессор, заместитель директора, заведующий лабораторией, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123242, Москва, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: +7(499) 254-23-35. E-mail: slavakoneshov@hotmail.com

## MODIFIED S-APPROXIMATION METHOD FOR THE SOLUTION OF INVERSE PROBLEMS IN GEOPHYSICS AND GEOMORPHOLOGY

I.E. Stepanova, D.N. Raevsky, V.N. Koneshov

*Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**Abstract.** On the basis of the modified S-approximation method, the problems of analytical approximation of the terrain relief and geopotential fields are considered. The principle of the method is to approximate the field by a sum of potentials of the simple and double layers distributed on a set of carriers underlying the surface topography. Special attention is given to application of new highly efficient methods for solving systems of the linear algebraic equations (SLAE) of large and extra-large dimensions, to which the inverse problems of geophysics and geodesy are reduced. For their solution, the block contrasting method is proposed based on separating the area investigated into the most intense blocks. The SLAE is solved for the each block using the regularized iterative three-layer Chebyshev method.

The results of numerical calculations of analytical approximations of the relief and anomalous gravity field are presented. The application efficiency of the modified S-approximation method for the indication of regional fault zones according to the satellite gravity data is illustrated on the example of the Philippine Sea.

**Keywords:** interpretation, potential field, relief, gravimetry, approximation, inverse problem, method.

### References

- Arnold V.I., *Theoria katastrof* (Catastrophe theory), Moscow: Nauka, 1990.
- Bird P., An updated digital model for plate boundaries, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 2003, vol. 4, no. 3. doi: 10.1029/2001GC000252.
- Edwards D.J., Lyatsky H.V. and Brown R.J., Interpretation of gravity and magnetic data using the horizontal-gradient vector method in the Western Canada Basin, *First Break*, 1996, vol. 14, no. 6, pp. 231-246.
- Kadirov F.A., *Gravitacionnoe pole i modeli glubinnogo stroeniya Azerbaidjana* (Gravitational field and deep structures models of the Azerbaidjan), Baku: Nafta-Press, 2000.

- Koshlyakov N.S., Gliner E.B. and Smirnov M.M., Differential equations of mathematical physics, North-Holland, 1964.
- Lavrentyev M.A. and Lusternik L.A., *Kurs variacionnogo ischisleniya* (Course of variational calculus), Moscow: Gostoptehizdat, 1950.
- Martyshko P.S. and Prutkin I.L., Technology of depth distribution of gravity field sources, *Geophysical journal*, 2003, vol. 25, no. 3, pp. 159-168.
- Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C. and Factor J.K., The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008), *J. Geophys. Res.*, 2012, vol. 117. doi: 10.1029/2011JB008916.
- Poston T. and Stewart I., Catastrophe theory and its applications, London: Pitman, 1978.
- Raevsky D.N. and Stepanova I.E. The modified method of S-approximation. Regional version, *Izvestiya Physics of the Solid Earth*, 2015a, vol. 51, no. 2, pp. 197-206.
- Raevsky D.N. and Stepanova I.E., On the solution of inverse Problems of gravimetry, *Izvestiya Physics of the Solid Earth*, 2015b, vol. 51, no. 2, pp. 207-218.
- Rodnikov A.G., Zabarinskaya L.P., Rashidov V.A., Rodkin M.V. and Sergeeva N.A., *Geotravers Severo-Kitayskaya ravnina – philipinskoe more – magelanovy gory* (The geotravers of North-China plain – Philippine sea – the mountains of Magellan), *Vestnik "KRAUNTS". Sciences of the Earth series*, 2007, no. 1, pp. 79-89.
- Sandwell D.T., Garcia E., Soofi K., Wessel P. and W.H.F. Smith., Towards 1 mGal Global Marine Gravity from CryoSat-2, Envisat, and Jason-1, *The Leading Edge*, 2013, vol. 32, no. 8. doi: 10.1190/tle32080892.1.
- Sandwell D.T., Müller R.D., Smith W.H.F., Garcia E. and Francis R., New global marine gravity model from CryoSat-2 and Jason-1 reveals buried tectonic structure, *Science*, 2014, vol. 346, no. 6205. doi: 10.1126/science.1258213.
- Stepanova I.E., Relief approximation and calculation of topographic corrections within the boundaries of linear integral concepts, *Geophysical journal*, 2011, vol. 33, no. 3, pp. 128-139.
- Strakhov V.N., *Geophysica I mathematica* (Geophysics and mathematics), Moscow: IPE RAS, 1999.
- Strakhov V.N., Kerimov I.A. and Stepanova I.E., Linear analytical approximations of relief of the Earth surface and its applications on calculations of the topographic corrections in gravity measurements, in *Voprosy teorii i praktici geolocisheskoy interpretacii gravitacionnyh, magnitnyh i electricheskyh poley* (Problems of theory and practice of the interpretation of gravitational, magnetic and electrical fields), Moscow: IPE RAS, 2001, pp. 116-118.
- Strakhov V.N., Kerimov I.A. and Strakhov A.V., Linear analytical approximations of relief of the Earth surface, in *Geophysica and mathematica: materiali I vserosiyskoy konferencii* (Geophysics and mathematics: proceedings of the first national conference), Moscow: IPE RAS, 1999, pp. 198-212.
- Strakhov V.N. and Stepanova I.E., Analytical approximation of the potential fields elements by linear integral representation method based on integral formula of the harmonic functions theory, in *Osnovnie problemy teorii interpretacii gravitacionnyh I magnitnyh poley* (General problems of interpretation theory of the gravitational and magnetic fields), Moscow: IPE RAS, 1999, pp. 234-258.
- Strakhov V.N. and Strakhov A.V., *Osnovnie metody nahojdeniya ustoychivyyh priblijennyh resheniy system lineinykh algebraicheskikh uravneniy, voshikaushih pri reshenii zadach gravimetrii i magnitometrii. I* (General methods of finding the stable approximate solution in solving of systems of linear algebraic equations arising at the solving of problems of the gravimetry and magnetometry. I), Moscow: IPE RAS, 1999.
- Strakhov V.N. and Stepanova I.E., The S-Approximation Method and Its Application to Gravity Problems, *Izvestiya Physics of the Solid Earth*, 2002a, vol. 38, no. 2. pp. 91-107.
- Strakhov V.N. and Stepanova I.E., Solution of Gravity Problems by the S-Approximation Method (Regional Version), *Izvestiya Physics of the Solid Earth*, 2002b, vol. 38, no. 7, pp. 535-544.
- Tikhonov A.N. and Arsening V.Ya., *Methody resheniya neckorecto postavlennykh zadach* (Methods for solving ill-posed problems), Moscow: Nauka, 1986.
- Voevodin V.I., Jumaty S.A., Sobolev S.I., Antonov A.S., Brizgalov P.A., Nikitenko D.A., Stefanov K.S. and Voevodin V.I., Practica supercomputer "Lomonosov" (A practice of the "Lomonosov" supercomputer). *Opened system*, 2012, no. 7, pp. 36-39.