

УДК 550.334

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ ЛЭНГА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА

© 2016 г. Е.А. Родионов

*Российский государственный геологоразведочный университет им. С. Орджоникидзе,
г. Москва, Россия*

Исследуется возможность применения для анализа данных геофизического мониторинга вейвлетов Лэнга, представляющих собой ортогональные вейвлеты с компактными носителями на положительной полупрямой \mathbb{R}_+ , масками которых являются полиномы Уолша. Вейвлеты Лэнга имеют мультифрактальную структуру и порождают безусловные базисы в L^p -пространствах на \mathbb{R}_+ для $1 < p < +\infty$. Ранее они и их модификации для биортогонального, нестационарного и периодического случаев применялись для обработки изображений, сжатия фрактальных сигналов и для оценки гладкости волновых форм шума геофизических сигналов.

По данным геофизического мониторинга с использованием вейвлетов Лэнга построены вейвлет-агрегированные сигналы (ВАС), которые сравниваются с аналогичными сигналами, построенными по тем же данным с помощью вейвлетов Хаара и Добеши.

Анализируются эффекты, которые могут рассматриваться как предвестники землетрясений, произошедших в России на п-ове Камчатка и в Северо-Восточном Китае. Результаты вычислительных экспериментов показывают, что предвестниковый эффект лучше прослеживается при использовании вейвлетов Лэнга, нежели вейвлетов Хаара и Добеши.

Представлены также вейвлетные меры когерентности (ВМК), рассчитанные на основе вейвлетов Лэнга и Хаара по данным мониторинга скоростей ветра над Атлантическим побережьем США.

Ключевые слова: геофизические сигналы, вейвлет-агрегированный сигнал, вейвлетная мера когерентности, вейвлеты Лэнга, предвестники землетрясений.

Введение

Вейвлет-агрегированные сигналы (ВАС) применительно к геофизическим временным рядам рассматривались в ряде работ А.А. Любушина (см., например, [Lyubushin, 1999; Любушин, 2000, 2002]) и подробно описаны в Главе 2 монографии того же автора [2007]. Эти сигналы являются скалярными и в максимальной степени вбирают в себя наиболее общие вариации, присущие сразу всем анализируемым процессам; при этом составляющие, характерные только для одного временного ряда, подавляются. На первом этапе построения ВАС для каждого временного ряда вычисляются канонические вейвлет-коэффициенты, сохраняющие общие сигналы и освобожденные от локальных. Собственно ВАС получаются в результате построения первой главной компоненты канонических вейвлет-коэффициентов.

В данной работе ВАС построены по данным мониторинга гидрогеохимических параметров в скважинах Петропавловск-Камчатского полигона Института вулканологии ДВО РАН и по данным геофизического мониторинга в Северо-Восточном Китае с целью обнаружения предвестниковых эффектов перед сильными землетрясениями.

Другим инструментом анализа может служить вейвлетная мера когерентности (ВМК) [Любушин, 2007, § 2.4], которая с качественной точки зрения является

множественным коэффициентом корреляции между вейвлет-коэффициентами на разных уровнях детальности. Приводимые в настоящей работе ВМК построены с использованием вейвлетов Лэнга по данным мониторинга скоростей ветра над Атлантическим побережьем США.

Результаты, полученные при помощи вейвлетов Лэнга, сравниваются с аналогичными результатами, полученными на основе вейвлетов Добеши и Хаара.

Вейвлеты Лэнга

В работе [Lang, 1996] приведены графики построенных автором масштабирующихся функций и вейвлетов (подробное описание их свойств см. в [Протасов, Фарков, 2006; Farkov, 2015]). Некоторые преимущества вейвлетов Лэнга в задачах обработки сигналов отмечались в [Farkov, Maximov, Stroganov, 2011; Farkov, Stroganov, 2011; Farkov, Rodionov, 2012]. В работе [Строганов, 2012] вейвлеты Лэнга применялись для оценки гладкости шумовой составляющей данных сейсмических наблюдений сети *F-Net*, расположенной на Японских островах.

Пусть $\mathbb{Z}_+ = [0, +\infty)$ – положительная полупрямая, \mathbb{Z}_+ – множество целых неотрицательных чисел. Рассмотрим на полуинтервале $[0, 1)$ функцию

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0, 1/2), \\ -1, & \text{если } x \in [1/2, 1), \end{cases}$$

продолжая ее периодически на всю полупрямую: $r_0(x+1) = r_0(x)$.

Система функций Уолша $\{w_k(x) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ на \mathbb{Z}_+ определяется равенствами

$$w_0(x) \equiv 1, \quad w_k(x) = \prod_{j=0}^k (r_0(2^j x))^{\mu_j}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

где μ_j берутся из двоичного разложения числа k –

$$k = \sum_{j=0}^{n(k)} \mu_j 2^j, \quad \mu_j \in \{0, 1\}, \quad \mu_{n(k)} \neq 0.$$

Для каждого $x \in \mathbb{Z}_+$ и любого натурального j определим числа $x_j, x_{-j} \in \{0, 1\}$, являющиеся цифрами двоичного разложения числа x :

$$x_j = [2^j x] \pmod{2}, \quad x_{-j} = [2^{1-j} x] \pmod{2}, \quad \text{где } [a] \text{ – целая часть числа } a.$$

Для любых $x, y \in \mathbb{Z}_+$ полагают

$$x \oplus y = \sum_{j<0} |x_j - y_j| 2^{-j-1} + \sum_{j>0} |x_j - y_j| 2^{-j}.$$

При построении ортогональных вейвлетов и фреймов с помощью функций Уолша (см. [Протасов, Фарков, 2006, Farkov, 2012]) параметры $b_k, 0 \leq k \leq 2^n - 1$ выбираются такими, что

$$|b_l|^2 + |b_{l+2^{n-1}}|^2 = 1, \quad 0 \leq l \leq 2^{n-1} - 1. \tag{1}$$

По этим параметрам вычисляются коэффициенты $c_k = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=1}^{2^n-1} b_l w_l(k 2^{-n}), 0 \leq k \leq 2^n - 1$ масштабирующего уравнения (2):

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k \varphi(2x \oplus k), \quad x \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

В отличие от масштабирующих функций Добеши, масштабирующие функции φ имеют сколь угодно высокую гладкость на отрезке фиксированной длины и допускают аналитическое представление на своем носителе. С помощью решения уравнения (2) определяется вейвлет Лэнга

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \bar{g}_k \varphi(2x \oplus k), \quad x \in \mathbb{I}_+, \quad (3)$$

где $g_k = (-1)^k c_{k \oplus 1}$.

С использованием коэффициентов уравнений (2) и (3) определяются прямое и обратное дискретные вейвлет-преобразования

$$a_{j-1,k} = \sum_{l \in \mathbb{I}_+} \bar{c}_{l \oplus 2k} a_{j,l}, \quad d_{j-1,k} = \sum_{l \in \mathbb{I}_+} \bar{g}_{l \oplus 2k} a_{j,l},$$

$$a_{j,l} = \sum_{k \in \mathbb{I}_+} c_{l \oplus 2k} a_{j-1,k} + g_{l \oplus 2k} d_{j-1,k}.$$

В дальнейшем для параметров, входящих в (1), будет использована следующая параметризация:

$$b_0 = \cos \xi_0, \quad b_1 = \cos \xi_1, \quad \dots, \quad b_{2^{n-1}-1} = \cos \xi_{2^{n-1}-1},$$

$$b_{2^{n-1}} = \sin \xi_0, \quad b_{2^{n-1}+1} = \sin \xi_1, \quad \dots, \quad b_{2^n-1} = \sin \xi_{2^{n-1}-1},$$

где $\xi_i \in [0, 2\pi)$.

В приводимых ниже примерах рассматриваются случаи, когда масштабирующее уравнение (2) имеет 4 коэффициента ($n=2$) и 8 коэффициентов ($n=3$)

Используемые данные

Использованные в данной работе данные геофизического мониторинга, проводимого на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне Института вулканологии ДВО РАН, представлены набором из 17 временных рядов, отражающих изменение концентрации и интенсивности эманации различных химических соединений в разных скважинах и самоизливающихся источниках. В частности, рассматривались ряды концентрации в подземных водах ионов Cl^- , HCO_3^- и кремниевой кислоты H_4SiO_4 , а также интенсивности эманации He , CH_4 , Ar , N_2 . Измерения охватывают период с 3.01.1986 г. по 28.09.1992 г., в течение которого в окрестностях полигона произошло два сильных землетрясения – 06.10.1987 г. ($M=6.6$) и 02.03.1992 г. ($M=7.1$). В большинстве рядов не наблюдается резких изменений (скачков) параметров перед землетрясениями и, следовательно, нельзя говорить о наличии предвестниковых эффектов.

Данные геофизического мониторинга в Северо-Восточном Китае представлены десятью временными рядами синхронизированных записей электросопротивления горных пород, наклонов земной поверхности и вариаций уровня подземных вод в скважинах. Измерения с шагом 1 сут были выполнены Центром анализа и прогноза землетрясений Китая в период с 01.01.1972 г. по 31.12.1979 г., включающий катастрофическое Тангшанское землетрясение, которое произошло 28.07.1976 г. с $M=7.8$ и унесло жизни почти 250 тыс. человек. И в этом случае нет оснований говорить о существовании в рядах разных параметров эффектов, которые можно было бы отнести к предвестникам землетрясения.

Выше уже упоминалось, что для анализа вейвлетной меры когерентности (ВМК) автором использовались ряды скоростей ветра над Атлантическим побережьем США. Записи 15 метеорологических станций за период с начала 1990 по конец 1995 гг. –

часть базы данных метеорологических параметров США, регистрируемых на 262 метеостанциях. После усреднения и прореживания в 6 раз длина использованных временных рядов составила 8763 отсчета при шаге дискретизации, равном 6 ч. В этих рядах не удастся визуально проследить сезонную периодичность, которая становится очевидной после построения графиков ВМК.

Перечисленные данные были любезно предоставлены автору сотрудником ИФЗ РАН доктором физико-математических наук А.А. Любушиным.

Вейвлет-агрегированный сигнал и вейвлетная мера когерентности

Обозначим через $X_k(t)$ значение k -го временного ряда в точке t после удаления линейного тренда и перехода к приращениям в исходных временных рядах. Пусть q – число временных рядов, а 2^m – число отсчетов в этих рядах. Последнее достигается дополнением исходных данных нулями до ближайшей степени двойки. В вычислениях мы не будем учитывать коэффициенты, которые получились в результате этого дополнения.

Для каждого ряда X_k проводится процедура нормализации в скользящем временном окне длины L (окно адаптации). Для начального положения окна адаптации все значения временного ряда делятся на диапазон их изменения в этом окне; для последующих положений нормализация осуществляется только для значения, соответствующего правому концу временного окна. Дальнейшие операции будем проводить в окне адаптации аналогично тому, как это делалось в процедуре нормализации.

Пусть $d_{j,l}^k$ – детализирующие коэффициенты j -го уровня после применения к ряду $X_k(t)$ дискретного вейвлет-преобразования, $l = 1, \dots, 2^{m-j}$, $j = 1, \dots, m_1$, $m_1 \leq m$. Если $r = m - m_1$, то число оставшихся аппроксимирующих коэффициентов равно 2^r .

Для уровня детальности j и положения левого конца окна адаптации t определим множество $M_t^j = \{t, t+1, \dots, t+L/2^j-1\}$. Для каждого $s = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, m_1$, и $t = 0, 1, \dots, 2^{m-j} - L/2^j$, найдем коэффициенты $\gamma_{j,k}^s$, $k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, q$ из условий

$$d_{j,l}^s = \sum_{k=1, k \neq s}^q \gamma_{j,k}^s d_{j,l}^k + e_{j,l}^s, \quad l \in M_t^j, \quad \sum_{l \in M_t^j} (e_{j,l}^s)^2 \rightarrow \min.$$

Эту задачу можно решить при помощи метода наименьших квадратов. Канонические вейвлет-коэффициенты s -го временного ряда на j -м уровне детальности вычисляются по формуле $h_{j,l}^s = \sum_{k=1, k \neq s}^q \gamma_{j,k}^s d_{j,l}^k$, $l \in M_t^j$. Так как среднее значение вейвлет-коэффициентов равно нулю, ковариационная матрица коэффициентов $h_{j,l}^s$ вычисляется как

$$R_{s,k}^j = \frac{2^j}{L} \sum_{l \in M_t^j} h_{j,l}^s h_{j,l}^k, \quad s, k = 1, \dots, q.$$

Обозначим через ζ_j собственный вектор матрицы $\langle R_{s,k}^j \rangle$, соответствующий максимальному собственному значению. Тогда агрегированные вейвлет-коэффициенты j -го уровня детальности для t -го положения окна адаптации вычисляются по формуле

$$a_t^j = \sum_{s=1}^q h_{j,t}^s \zeta_j(s), \quad j = 1, \dots, m_1, \quad l = M_t^j.$$

Как уже отмечалось, при $t > 0$ запоминаются только коэффициенты, у которых индекс l совпадает с последним элементом множества M_i^j . Положив аппроксимирующие коэффициенты равными нулю, применим обратное дискретное вейвлет-преобразование и получим вейвлет-агрегированный сигнал¹.

Пусть $v_{s,j}(\tau)$, $s = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, m_1$ – коэффициенты корреляции между наборами $\{d_{j,l}^s : l = 1, \dots, 2^{m-j}\}$ и $\{h_{j,l}^s : l = 1, \dots, 2^{m-j}\}$, вычисленными в скользящем временном окне с номером τ ; здесь 2^m – длина временного окна после дополнения его нулями до ближайшей степени двойки. В таком случае вейвлетная мера когерентности для j -го уровня детальности и положения скользящего окна τ вычисляется по формуле

$$\theta_{j,\tau}(\tau) = \prod_{k=1}^q |v_{k,j}(\tau)|.$$

Результаты анализа

При анализе данных выполненного на Камчатке геофизического мониторинга было принято, что длина окна адаптации $L=128$ и $r=4$. Графики ВАС, представленные на рис. 1, построены с использованием вейвлета Хаара по первым 214 отсчетам (а), первым 750 отсчетам (б) и по всей выборке (в).

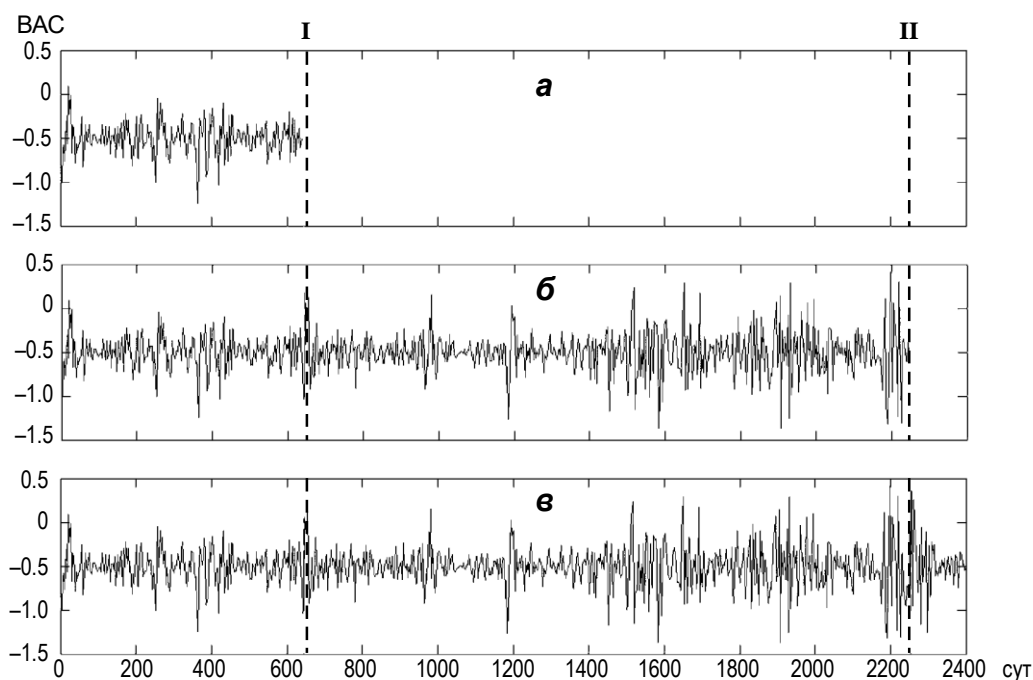


Рис. 1. Графики ВАС для 17 временных рядов мониторинга гидрогеохимических показателей, построенные для разных по длине (в отсчетах) фрагментов записи: а – расчет по первым 214 отсчетам; б – по 750 отсчетам; в – по всей выборке

На горизонтальной оси – время в сутках от начала проведения измерений; 0 соответствует 03.01.1986 г. Пунктирными линиями отмечены моменты двух рассматриваемых в статье землетрясений: I (06.10.1987 г., $M=6.6$), II (02.03.1992 г., $M=7.1$)

¹ Аналогичную конструкцию см. в [Любушин, 2007, § 2.5].

Первый график (рис. 1, *a*) рассчитан по данным мониторинга за период, предшествующий землетрясению I, второй (рис. 1, *б*) – за период, предшествующий землетрясению II, т.е. в обоих случаях ВАС являются левоориентированными и их значения зависят только от фрагмента выборки, расположенного левее интересующего нас момента времени (момента землетрясения).

По тем же рядам с помощью вейвлетов Лэнга при $n=3$ для двух наборов параметра ξ были построены графики ВАС, приведенные на рис. 2.

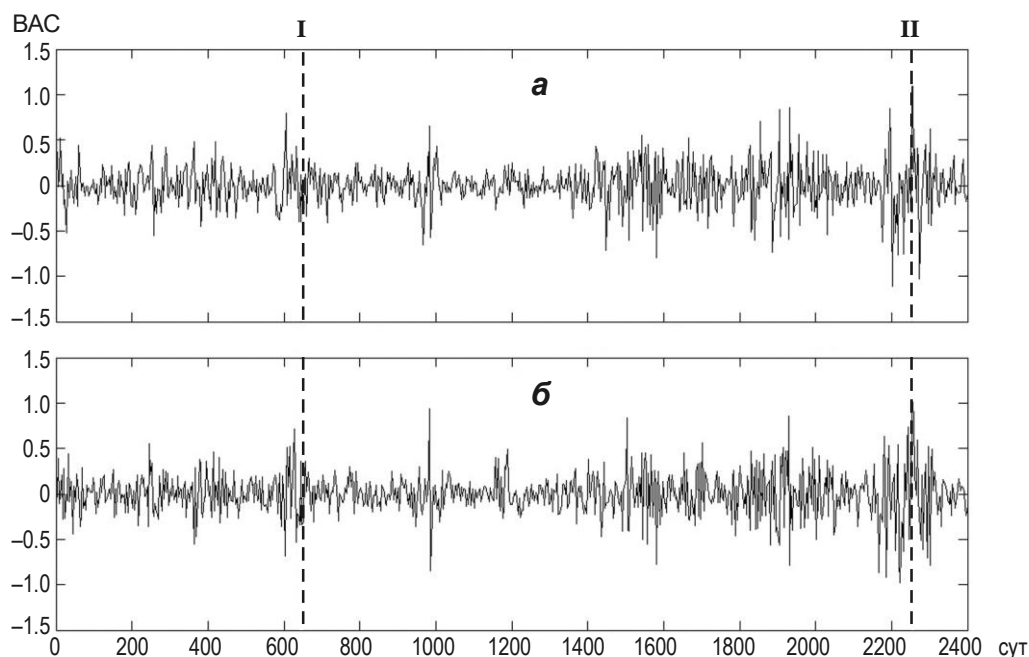


Рис. 2. Графики ВАС, построенные при помощи вейвлетов Лэнга для $n=3$ для двух наборов параметра ξ : *a* – $\xi_0 = 0, \xi_1 = \pi, \xi_2 = 3\pi/2, \xi_3 = 7\pi/4$; *б* – $\xi_0 = 0, \xi_1 = 3\pi/4, \xi_2 = \pi/2, \xi_3 = 5\pi/4$. Используются те же ряды, что и для рис. 1. Условные обозначения см. на рис. 1

На приведенных графиках (см. рис. 2) перед землетрясением I заметны высокоамплитудные всплески, чего не было на рис. 1. Перед землетрясением II графики ВАС, построенные при помощи вейвлетов Хаара и Лэнга, ведут себя схоже.

Для данных геофизического мониторинга в Северо-Восточном Китае процедура нормализации проводилась как деление значений ряда на среднеквадратичное отклонение в пределах окна адаптации. В этом случае длина окна адаптации L была взята равной 700, а $r=4$.

Приводимые на рис. 3 графики ВАС построены при помощи вейвлетов Хаара (*a*), Добеши (*б*) с четырьмя коэффициентами и вейвлетов Лэнга для $n=3$ (*в*). Графики приведены для фрагмента выборки от 1000-го до 1670-го отсчета¹, т.е. до дня, предшествующего моменту Тангшанского землетрясения, произошедшего 28.07.1976 г. с $M=7.8$.

Обращает на себя внимание то, что предвестниковый эффект на рис. 3, *в* (расчеты с использованием вейвлетов Лэнга) начинает проявляться примерно за 130 сут до начала землетрясения, тогда как для вейвлета Хаара он становится заметным за 15, а для Добеши – за 25 сут до этого события.

¹ Один отсчет соответствует одним суткам.

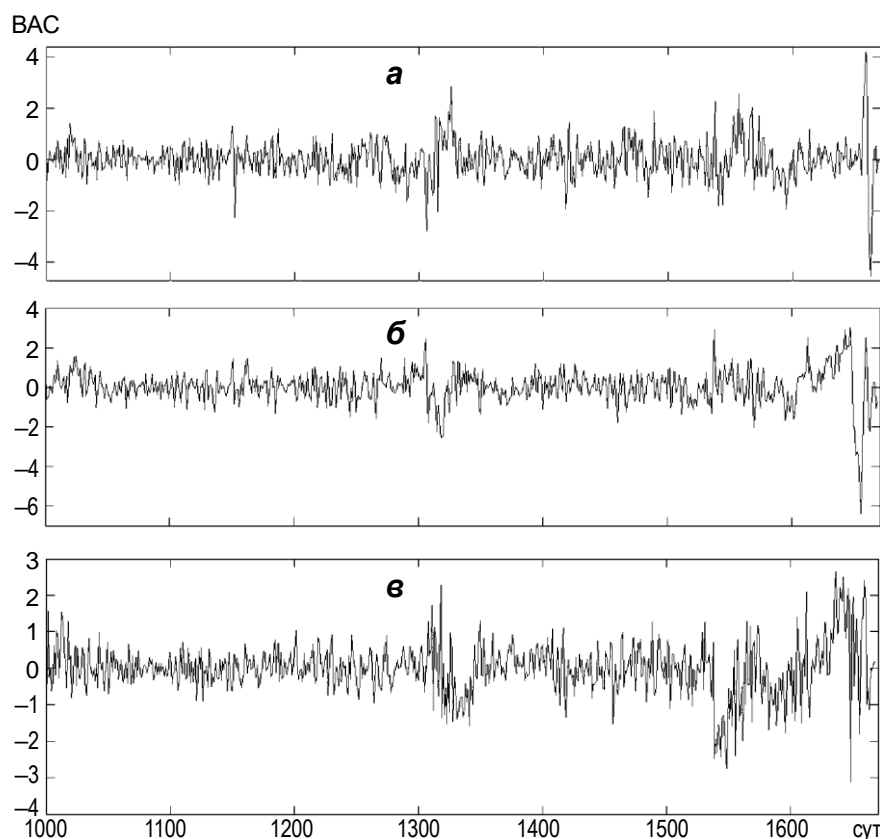


Рис. 3. Графики ВАС 10 временных рядов мониторинга геофизических параметров в Северо-Восточном Китае, построенные для фрагмента выборки с 1000-го до 1670-го отсчета (до дня, предшествовавшего моменту землетрясения) с использованием вейвлетов Хаара (*а*), Добеши (*б*) с четырьмя коэффициентами и Лэнга для $n=3$ и параметров $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = \pi/2$, $\xi_2 = \pi/2$, $\xi_3 = \pi/4$ (*в*). На горизонтальной оси – время в сутках от начала 1972 г.

Приведенные примеры свидетельствуют, что вейвлеты Лэнга дают возможность получать дискретное вейвлет-преобразование, позволяющее обнаружить предвестниковый эффект раньше, чем при использовании вейвлетов Хаара и Добеши. Наиболее явно это проявляется при анализе данных геофизического мониторинга в Северо-Восточном Китае.

Графики ВМК для вейвлетов Хаара (*а*) и Лэнга (*б*) на четырех уровнях детальности, рассчитанные по данным мониторинга скоростей ветра над Атлантическим побережьем США, представлены на рис. 4. Длина временного окна – 365 отсчетов, что при шаге 6 ч соответствует четверти года, т.е. одному сезону (зима, весна, лето, осень). Для всех графиков характерна годовая периодичность.

Первый уровень детальности (рис. 8, *а*₁, *б*₁) соответствует вариациям скорости ветра с периодами 0.5–1 сут. Максимум ВМК на этом уровне в случае использования и вейвлета Хаара, и вейвлета Лэнга приходится на летние месяцы (время летних антициклонов с суточными бризами, направленными с суши на море и обратно).

Для второго уровня детальности (рис. 8, *а*₂, *б*₂) графики носят антикорреляционный характер, что пока не нашло однозначного объяснения.

На третьем (рис. 8, a_3 , b_3) и четвертом (рис. 8, a_4 , b_4) уровнях детальности (периоды вариаций скорости 2–4 и 4–8 суток, соответственно) максимум смещается на зимние

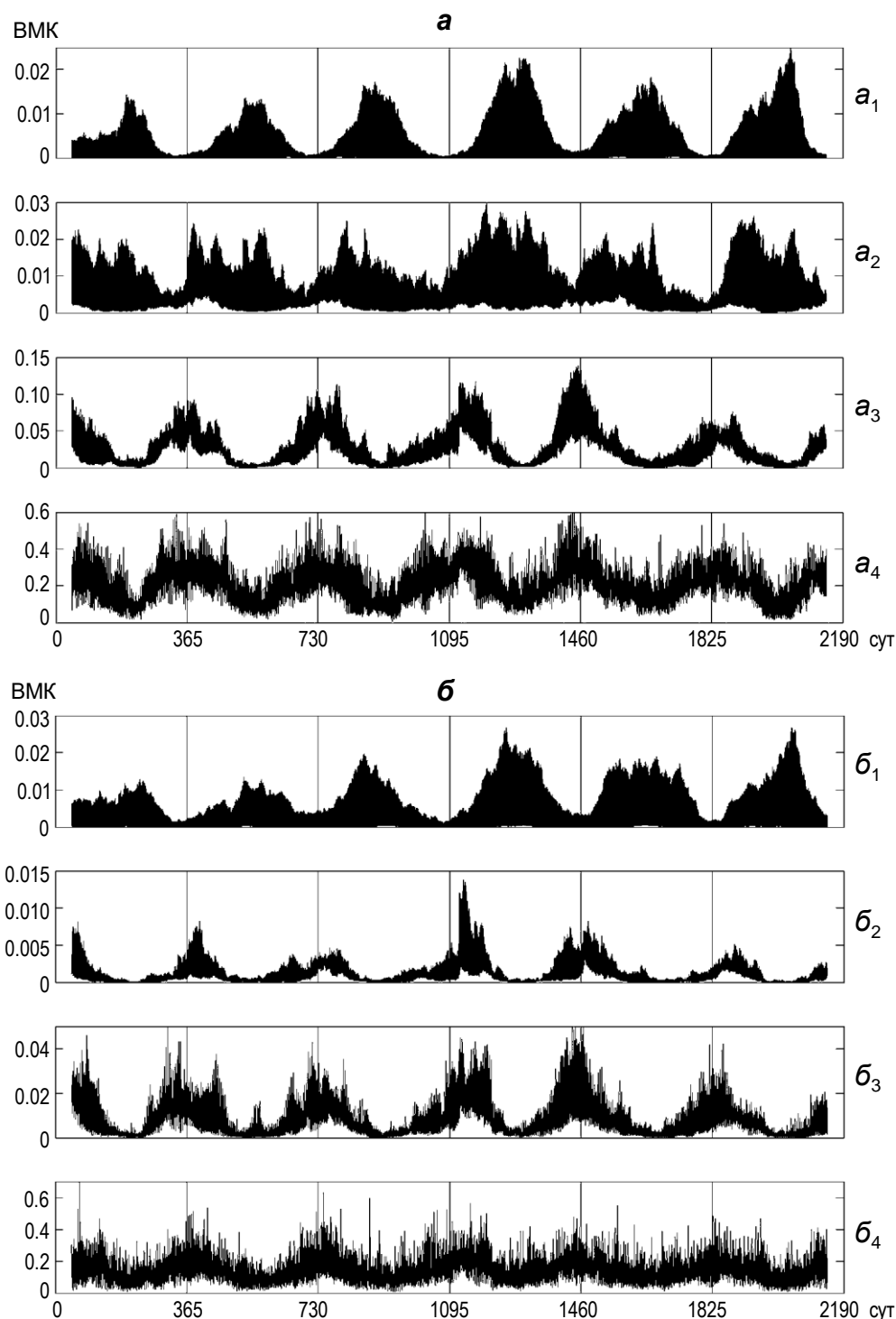


Рис. 4. Графики ВМК, рассчитанные по данным мониторинга скоростей ветра над Атлантическим побережьем США с использованием вейвлетов Хаара (a_1 – a_4) и Лэнга (b_1 – b_4) на четырех уровнях детальности (нижние индексы 1–4)

При использовании вейвлетов Лэнга $n=2$, $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = \pi / 4$. Горизонтальная ось – количество суток от 01.01.1990 г.

месяцы, что связано с возникновением зимних антициклонов, распространяющихся с севера на юг [Любушин, 2007, с. 129].

Выводы

Выполненное сопоставление результатов применения вейвлетов разного типа показывает, что вейвлеты Лэнга не только могут быть использованы при геофизическом мониторинге, но в ряде случаев, например, при предсказании землетрясений, они оказываются более эффективными по сравнению с традиционно применяемыми вейвлетами Хаара и Добеши.

Благодарности

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук А.А. Любушину (ИФЗ РАН) за постановку задачи и доктору физико-математических наук Ю.А. Фаркову (Российская академия народного хозяйства и государственной службы) за полезные замечания в ходе подготовки работы.

Литература

- Любушин А.А. Вейвлет-агрегированный сигнал и синхронные всплески в задачах геофизического мониторинга и прогноза землетрясений // Изв. РАН. Физика Земли. 2000. № 3. С.20–30.
- Любушин А.А. Робастный вейвлет-агрегированный сигнал для задач геофизического мониторинга // Изв. РАН. Физика Земли. 2002. № 9. С.37–48.
- Любушин А.А. Анализ данных систем геофизического и экологического мониторинга. М.: Наука, 2007. 228 с.
- Протасов В.Ю., Фарков Ю.А. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сб. 2006. Т. 197, вып. 10. С.129–160.
- Строганов С.А. Оценка гладкости низкочастотных микросейсмических колебаний с помощью диадических вейвлетов // Геофизические исследования. 2012. Т. 13, № 1. С.17–22.
- Фарков Ю.А., Строганов С.А. О дискретных диадических вейвлетах для обработки изображений // Изв. вузов. Математика. 2011. № 7. С.57–66.
- Farkov Yu.A., Maksimov A.Yu., Stroganov S.A. On biorthogonal wavelets related to the Walsh functions // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2011. V. 9, N 3. P.485–499.
- Farkov Yu.A. Examples of frames on the Cantor dyadic group // Journal of Mathematical Sciences. 2012. V. 187, N 1. P.22–34.
- Farkov Yu.A., Rodionov E.A. Nonstationary wavelets related to the Walsh functions // American Journal of Computational Mathematics. 2012. N 2. P.82–87.
- Farkov Yu.A. Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis // Poincare J. Anal. Appl. 2015. V. 2. Special Issue (IWWFA-II, Delhi). P.13–36.
- Lang W.C. Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group // SIAM J. Math. Anal. January 1996. V. 27, N 1. P.305–312.
- Lyubushin A.A. Wavelet-aggregated signal in earthquake prediction // Earthquake Res. China. Engl. Ed. 1999. V. 13, N 1. P.33–43.

Сведения об авторе

РОДИОНОВ Евгений Анатольевич – аспирант Российского государственного геологоразведочного университета им. С. Орджоникидзе. 117485, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 23. Тел.: +7(905) 774-77-80. E-mail: evgeny_980@list.ru

LANG WAVELETS FOR PROBLEMS OF GEOPHYSICAL MONITORING

E.A. Rodionov

Russian State Geological Prospecting University, Moscow, Russia

Abstract. The orthogonal wavelets with compact support on the positive half-line were defined by W.C. Lang in 1996. Masks of these wavelets are Walsh polynomials. These wavelets have multifractal structure and generate unconditional bases in L^p -spaces for all $1 < p < +\infty$. Lang's wavelets and their modifications for biorthogonal, non-stationary and periodic cases are used for image processing, compression of fractal signals and evaluating the smoothness of geophysical signals. Based on the geophysical monitoring data, the wavelet-aggregated signals constructed using Lang wavelets are compared with similar signals constructed using Haar and Daubechies wavelets.

The analysis is directed on identification the earthquakes precursors that occurred on Kamchatka and in Northeast China. Results of computational experiments show that for the chosen data Lang wavelets reflect earthquakes precursors better than Haar and Daubechies wavelets. In addition, wavelet measures of coherence are calculated using Haar and Lang wavelets for data on monitoring of speed of a wind over the USA Atlantic coast.

Keywords: geophysical signals, wavelet-aggregated signal, wavelet measure of coherence, Lang wavelets, earthquake precursors.

References

- Farkov Yu.A., Maksimov A.Yu., Stroganov S.A. On biorthogonal wavelets related to the Walsh functions, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process*, 2011, vol. 9, no. 3, pp. 485–499.
- Farkov Yu.A., Stroganov S.A. The use of discrete dyadic wavelets in image processing, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2011, no. 7, pp. 57–66
- Farkov Yu.A. Examples of frames on the Cantor dyadic group, *Journal of Mathematical Sciences*, 2012, vol. 187, no. 1, pp. 22–34.
- Farkov Yu.A., Rodionov E.A. Nonstationary wavelets related to the Walsh functions, *American Journal of Computational Mathematics*, 2012, no. 2, pp.82–87.
- Farkov Yu.A. Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis. *Poincare J. Anal. Appl.*, 2015, vol. 2. Special Issue (IWWFA-II, Delhi), pp.13–36.
- Lang W.C. Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group, *SIAM J. Math. Anal.*, January 1996, vol. 27, no 1, pp.305–312.
- Lyubushin A.A. Wavelet-aggregated signal and synchronous peaked fluctuations in problems of geophysical monitoring and earthquake prediction. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2000, vol. 36, no. 3, pp. 204–213.
- Lyubushin A.A. A Robust wavelet-aggregated signal for geophysical monitoring problems. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2002, vol. 38, no. 9, pp. 745–755.
- Lyubushin A.A. *Analiz dannyh sistem geofizicheskogo i ekologicheskogo monitoringa* (Data analysis of geophysical and environmental monitoring systems), Moscow: Nauka, 2007.
- Lyubushin A.A. Wavelet-aggregated signal in earthquake prediction, *Earthquake Res. China. Engl. Ed.*, 1999, vol. 13, no 1, pp.33–43.

- Protasov V.Yu., Farkov Yu.A., Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line. *Sbornik Mathematics*, 2006, vol. 197, no. 10. pp. 1529-1558.
- Stroganov S. A. Dyadic wavelets for estimate of smoothness of low-frequency microseismic Oscillations, *Geophysical Research*, 2012, vol. 13, no.1, pp.60-65.