ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2016, том 17, № 3, с.17-31. DOI: 10.21455/gr2016.3-2

УДК 550.831

КРИТЕРИИ СОГЛАСОВАНИЯ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ РУДНОГО ТИПА

© 2016 г. А.С. Долгаль[1,2], П.И. Балк[3], П.Н. Новикова[1,2], А.В. Мичурин[1]

[1] *Горный институт Уральского отделения Российской академии наук, г. Пермь, Россия*
[2] *Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия*
[3] *Берлин, Германия*

Представлен новый подход к определению параметров источников аномалий силы тяжести, который основан на построении репрезентативного множества допустимых решений обратной задачи гравиразведки и выборе “наилучшего” из них с использованием формализованных критериев – критерия минимакса и критерия максимума апостериорной вероятности.

Введены определения скрытой, ложной и потерянной информации, которые могут быть эффективно использованы в технологиях количественной интерпретации геофизических аномалий. Так, критерий минимакса способствует минимизации потерь скрытой информации и позволяет получить оценку меры близости полученного решения к истинному распределению аномалиеобразующих масс. Математическим инструментом для построения приближенных допустимых решений обратной задачи, из которых по тому или иному критерию выбирается оптимальное, служит монтажный метод, использующий конечноэлементное представление изучаемых геоплотностных неоднородностей.

Приводятся результаты модельных расчетов, свидетельствующие о преимуществе рассматриваемого подхода перед подходом, при использовании которого оптимальное решение обратной задачи отвечает минимуму невязки наблюденного и модельного полей.

Представлены результаты решения практической задачи по материалам среднемасштабной гравиметрической съемки, выполненной для Березовской аномальной зоны в Пермском крае.

Внедрение предлагаемого подхода к решению обратной задачи гравиразведки при поисках и разведке рудных месторождений может обеспечить надежный выбор наиболее перспективных гравитационных аномалий для проведения в дальнейшем буровых работ.

Ключевые слова: гравиразведка, интерпретация, обратная задача, множество решений, критерий, информация, геологический объект.

Введение

Приближенные решения обратных задач гравиразведки, выбираемые в качестве итогового варианта количественной интерпретации гравитационных аномалий, принято сопровождать характеристикой “оптимальные” [*Гольдшмидт*, 1984]. Однако большинство используемых признаков оптимальности, как и теоретическая единственность решения обратной задачи (сходимость последовательности приближенных решений к истинному при стремлении нормы помехи в наблюденных значениях поля к нулю), имеет довольно отдаленное отношение к информативности результатов интерпретации. Вселяя уверенность в надежности выполненных построений, они могут создавать опасную иллюзию относительно реальных возможностей геофизического метода в конкретных физико-геологических условиях.

Возьмем для примера алгоритмы решения обратных задач, в которых критерием оптимальности выбора среди имеющихся допустимых вариантов интерпретации (т.е. приближенных решений, удовлетворяющих всем априорным предпосылкам) является

минимум достигнутой невязки наблюденного и модельного полей в одной из метрик [*Булах*, 2010; *Кобрунов*, 2008]. Наблюденное гравитационное поле всегда осложнено помехами различного происхождения; поэтому точно выделить аномальный эффект, обусловленный совокупностью моделируемых источников (истинное поле), практически невозможно. Если даже допустить, что при прочих равных условиях точность результатов интерпретации монотонно зависит от степени близости истинного и модельного полей, то необходимо иметь в виду, что речь идет о близости модельного поля именно к наблюденному, а не к истинному! А это значит, что будь указанное представление о монотонной зависимости справедливым, минимизация невязки имела бы смысл лишь до некоторых пределов, пока сближение модельного поля с наблюденным одновременно ведет к сближению первого с неизвестным истинным полем. Дальнейшая минимизация невязки приводит уже к тому, что модельное поле, продолжая приближаться к наблюденному, одновременно начинает отдаляться от истинного. Более того, весь опыт практической интерпретации гравитационных аномалий говорит о целесообразности использования в целях повышения достоверности интерпретации более грубых моделей, чем природное распределение аномалиеобразующих масс (собственно к этому принуждает дискретный характер гравиметрических измерений).

Такая запутанная и противоречивая ситуация приводит к выводу: чтобы не вводить геофизика в заблуждение, к приближенному решению обратной задачи есть смысл применять термин “оптимальное” лишь тогда, когда его превосходство над другими допустимыми решениями четко выражено в терминах информативности и достоверности, в терминах оценки максимально возможной погрешности этого решения. Если же никаких объективных предпосылок называться оптимальным у приближенного решения обратной задачи нет, то логично, чтобы итоговый результат интерпретации гравитационной аномалии вобрал в себя информацию, содержащуюся во всех равноправных допустимых решениях. В этом случае построение отдельных вариантов интерпретации, удовлетворяющих результатам полевых измерений и имеющейся априорной информации об источниках поля, рассматривается лишь как элемент более общей технологии.

Подобным технологиям созвучна общеметодологическая идея согласования допустимых решений обратной задачи гравиразведки (ОЗГ), сформулированная В.Н. Страховым [2000]. Результаты интерпретации гравитационных аномалий, полученные с помощью таких технологий, не обязательно должны выражаться в терминах какого-то одного, “наилучшего”, допустимого решения обратной задачи. Алгоритмы, при использовании которых результатом интерпретации является совокупность геологически содержательных инвариантов на множестве допустимых решений, были впервые предложены в [*Балк,* 1980] и рассматривались позже в [*Балк, Долгаль*, 2010, 2015; *Балк и др.,* 2012]. Проблема внедрения этих алгоритмов в практику интерпретации гравиметрических данных требует определенной ломки стереотипов – не все геофизики-производственники готовы отказаться от привычных представлений о результатах решения обратных задач.

Впрочем, термин “согласование допустимых решений ОЗГ” можно понимать и более широко, чем это предполагалось в [*Страхов*, 2000]. Например, так: допустимые решения согласуют свои характеристики и дают право одному из них единолично представлять итоговый результат интерпретации. Если так, то можно попытаться реализовать идею согласования, не выходя за рамки привычного понятия результата интерпретации гравитационной аномалии. В настоящей статье предлагается пополнить теорию интерпретации гравитационных аномалий двумя критериями выбора наилучшего варианта решения ОЗГ, которые, с одной стороны, отвечают новым требованиям к понятию “оптимальности”, а с другой, реализуют идею согласования в широком понимании термина.

Базовые положения

Мы ограничимся рассмотрением класса обратных задач гравиразведки рудного типа, в которых оцениваемой является пространственная область $\widehat{S}$, занятая возмущающими массами известной (не обязательно постоянной) избыточной плотности $\widehat{\delta}$. Такую область принято называть носителем источников аномалии. Любая интерпретация предполагает использование модельных представлений. Будем считать, что приближенное решение ОЗГ отбирается из некоторого выбранного интерпретатором конечнопараметрического класса *M* на основании имеющегося объема *G* априорной информации, включающего в себя собственно гравиметрические измерения $\Delta g_i = \Delta g(X_i)$, i=1, 2, …, n, выполненные на земной поверхности в точках X_i. Множество допустимых решений ОЗГ, отвечающих информации *G*, обозначим как *Q*. Не стоит питать иллюзий, что удастся найти конструктивный алгоритм поиска наилучшего решения по критерию оптимальности, который будет основан на совместном анализе всех допустимых решений $S_\alpha \in Q$. Достаточно вспомнить, что при определенных сочетаниях априорных ограничений проблематичной уже является задача построения хотя бы одного допустимого решения ОЗГ без использования элементов метода подбора (как правило, в режиме диалога “интерпретатор – компьютер”). Достаточно продвинутой, по мнению авторов, можно считать постановку ОЗГ, при которой наилучшее решение выбирается из некоторого достаточно мощного конечного подмножества $Q_0 \subset Q$, и при этом имеется алгоритм, способный продуцировать нужное число допустимых решений S_α.

Если основным признаком, по которому можно будет судить об оптимальности некоего критерия выбора, считать информативность приближенного решения ОЗГ, то, прежде всего, необходимо определиться, что понимается под последним термином [*Балк и др.,* 2012], тем более что до сих пор не найдено всеобъемлющего определения понятия “информация”. Многие считают наиболее удачным определение Клода Шеннона: “информация – это снятая неопределенность наших знаний о предмете исследования” [*Стратанович*, 1975]. Придерживаясь этого определения, под информацией, которую содержит в себе носитель $S_\alpha \in Q_0$, будем понимать тот его фрагмент $S_\alpha^{(0)} \subset S_\alpha$, который одновременно является и фрагментом истинного носителя $\widehat{S}$: $S_\alpha^{(0)} = S_\alpha \cap \widehat{S}$. Меру $\mu(S_\alpha^{(0)})$ области $S_\alpha^{(0)}$ логично принять за количество информации, содержащейся в носителе S_α. Эту меру можно использовать и как оценку близости приближенного и точного решений обратной задачи. Но зная меру $\mu(S_\alpha^{(0)})$, невозможно определить, какой именно фрагмент носителя S_α является и фрагментом носителя $\widehat{S}$. Если так, то информацию $S_\alpha^{(0)}$, содержащуюся в решении S_α, логично назвать *скрытой*. Область $S_\alpha^{(1)} = S_\alpha \setminus \widehat{S}$, позиционирующую себя как возможный фрагмент возмущающего объекта, хотя таковым она не является, назовем *ложной* информацией, а фрагмент $S_\alpha^{(2)} = \widehat{S} \setminus S_\alpha$ возмущающего объекта, не нашедший места в решении S_α обратной задачи – *потерянной* информацией. Отчетливо просматриваются аналогии между потерянной информацией $S_\alpha^{(2)}$ и ошибкой I рода, ложной информацией $S_\alpha^{(1)}$ и ошибкой II рода. Однако предлагаемые информационные параметры $S_\alpha^{(0)}$, $S_\alpha^{(1)}$, $S_\alpha^{(2)}$ – чисто детерминистские характеристики в отличие от вероятностных оценок соответствующих ошибок. Используя

предложенную терминологию, можно сказать, что достаточный объем $\mu(S^{opt})$ скрытой информации о возмущающем объекте, содержащейся в допустимом решении $S_\alpha \in Q$, принятом за оптимальное S^{opt}, и есть то главное, что ожидает геофизик от результатов интерпретации. Но приходится констатировать, что называемые оптимальными решения ОЗГ, построенные с помощью известных критериев, основанных на попарном сравнении конкурирующих вариантов интерпретации, не содержат никаких признаков, которые позволили бы говорить об объемах содержащейся в этих решениях достоверной, ложной и скрытой информации (как пространственных областях). Не несут они и никакой информации вероятностного характера о достоверности построений.

Поскольку новые возможности извлечения полезной информации из гравиметрических данных мы связываем с довольно мощными подмножествами Q_0 допустимых решений ОЗГ, подчеркнем следующее. В эпоху применения неформализованного подбора, когда все ограничивалось построением единственного допустимого варианта интерпретации (либо нескольких, числом не более 10), геофизик мог осуществлять выбор наилучшего из них без каких-либо формализованных критериев, основываясь на собственных экспертных оценках. Время использования предлагаемых авторами критериев наступило только сейчас, когда появилась возможность на базе высокопроизводительной компьютерной техники разрабатывать эффективные формализованные технологии построения представительных множеств Q_0 допустимых вариантов решения ОЗГ. В случае рудной ОЗГ большое значение приобретают хорошо опробованные к настоящему моменту модификации монтажного метода построения единичных допустимых решений, предложенного В.Н. Страховым. Их важная особенность – возможность продуцировать не просто допустимые решения, но такие, которые заведомо будут отличаться от уже построенных ранее, вошедших в конструируемое множество Q_0.

Критерий минимакса

В ряде наук, таких как теория игр, экономика, исследование операций, где при выборе той или иной стратегии поведения исход любого выбора априори однозначно предсказать невозможно, широкое распространение получила концепция минимакса. Ее предназначение – гарантировать минимальные потери при самом неблагоприятном развитии ситуации. Суть концепции хорошо видна из примера, в котором требуется дать оценку m^{opt} некоторой скалярной величины $\hat{m}$, когда известно, что значением $\hat{m}$ может (с одной и той же плотностью вероятности) оказаться любое число, принадлежащее отрезку $[m_1, m_2]$. Если потери (в данном случае – ошибку оценки m^* величины $\hat{m}$) определить как $\rho = |m^* - \hat{m}|$, то наилучшей по критерию минимакса будет оценка $m^{opt} = (m_1 + m_2)/2$. Ее погрешность Δ в самом неблагоприятном случае равна $(m_2 - m_1)/2$. При любом другом выборе оценки m^* погрешность последней может превзойти Δ.

Выбор критерия оптимальности – это прерогатива геофизика или заказчика интерпретационных работ. Даже в таком простом примере, как рассмотренный выше, изменение функции потерь ρ сразу же приводит к изменению и оптимального по минимаксу решения. Так, пусть точность приближенного значения m^* величины $\hat{m}$ оценивается с помощью функционала $\rho = \lambda |m^* - \hat{m}|$, где λ – дополнительный штрафной сомножитель.

В случае переоценки истинного значения $\hat{m}$ (т.е. когда $m^{opt} > \hat{m}$) имеем $\lambda = p$, $0 \le p \le 1$, а в случае недооценки ($m^{opt} < \hat{m}$) – $\lambda = 1 - p$. Оптимальной по критерию минимакса является оценка $m^{opt} = (1-p)m_2 + pm_1$. При решении практических задач функция потерь ρ может включать экономическую компоненту и иметь куда более сложную структуру. Это еще один довод в пользу предположения, что минимаксные постановки ОЗГ, рассчитанные на анализ всего множества допустимых решений Q, вряд ли имеют большую перспективу; следует ограничиться изучением возможности оптимизации на некотором конечном подмножестве $Q_0 \subset Q$. Иначе говоря, в теоретическом плане более привлекательной была бы постановка задачи, в которой фигурирует все множество Q в форме системы неравенств-ограничений на параметры модели источников поля. Однако надо понимать, что в вычислительном плане подобная постановка является попросту "неподъемной".

Рассмотренный пример можно интерпретировать в терминах задачи оценки избыточной массы $\hat{m}$ источников гравитационной аномалии, если по совокупной информации G она может лежать в интервале $[m_1, m_2]$.

Сужение, пусть и вынужденное, постановки задачи выбора наилучшего решения всего множества Q до задачи оптимизации выбора на подмножестве $Q_0 \subset Q$ не может обойтись без последствий и требует определенной идеализации. Она заключается в том, что предпосылку о существовании некоего (опорного) допустимого решения $S^\circ \in Q$, близкого к истинному $\hat{S}$ (предпосылка о практической адекватности модельного класса M), требуется перенести на подмножество Q_0: $S^\circ \in Q_0$. Можно было бы избежать этой идеализации, вводя в рассмотрение определенную поправку. Однако, что важно, сути дела это не изменит – оптимальное по минимаксу решение останется тем же, что и при использовании упомянутой идеализации [*Балк, Долгаль,* 2015]. Понятно, что минимаксное решение на подмножестве Q_0 в общем случае будет отличаться от минимаксного решения на всем множестве Q. Однако, – хорошо это или плохо – дефакто более точным может оказаться каждое из них. Здесь мы сталкиваемся с общим для обратных задач удручающим фактом: решение, построенное по математически менее "продвинутому" алгоритму и даже по меньшему объему информации, может оказаться более точным, чем решение, построенное по математически состоятельному алгоритму или по большему объему информации. Другое дело, что гарантированная точность минимаксного решения, построенного по множеству Q, теоретически должна быть ниже, чем предсказанная нами гарантированная точность решения, построенного по имеющемуся в распоряжении интерпретатора множеству Q_0. Но минимаксная стратегия выбора наилучшего решения – это довольно осторожная стратегия, поскольку фактическая точность минимаксного решения, как правило, заметно выше той, что предсказывает гарантированная оценка точности построенного решения. Более того, даже при явно нерепрезентативном подмножестве Q_0 оценка гарантированной точности решения будет ниже фактической точности, т.е. будет актуальна.

Алгоритм выбора из конечного множества Q_0 допустимых решений S_j, j=1, 2, …, m оптимального по критерию минимакса решения S^{opt} довольно прост и состоит в общем случае в обработке квадратной несимметричной матрицы A размерности $m \times m$ с нулевой главной диагональю. Элемент $a_{j,k}$ такой матрицы суть ошибка $\rho(S_j, S_k)$ интерпретации для случая, когда неизвестным истинным решением $\hat{S}$ обратной задачи

окажется носитель S_k, тогда как в качестве оценки носителя S_k будет выбран носитель S_j.

Для каждого допустимого модельного носителя возмущающих масс S_j, $j = 1, 2, ..., m$, претендующего на роль оптимального решения S^{opt}, отыщем ассоциированный с ним носитель $S_k = S_{k(j)} \in Q_0$ такой, что расхождение $\rho(S_j, S^\circ)$ будет наибольшим, если носителем S° окажется носитель $S_{k(j)}$. Для каждой пары $j = j(1)$ и $j = j(2)$ промежуточный вывод состоит в том, что решение $S_{j(1)}$ предпочтительней $S_{j(2)}$, если $\rho(S_{j(1)}, S_{k(1)}) < \rho(S_{j(2)}, S_{k(2)})$, где $S_{k(1)}$ и $S_{k(2)}$ – решения из Q_0, наиболее удаленные по значению функционала ρ от $S_{j(1)}$ и $S_{j(2)}$. Как только для каждого j=1, 2, …, m установлен номер $k(j)$ наиболее удаленного от S_j носителя $S_{k(j)}$ и величина $\rho(S_j, S_{k(j)})$, остается обработать m-мерный вектор расстояний $\rho(S_j, S_{k(j)})$. Минимаксным является решение $S^{opt} \in Q_0$, гарантированная близость

$$\rho^{opt} = \max\left\{\rho(S^{opt}, S_t) : S_t \in Q_0, S_t \neq S^{opt}\right\}$$

которого к неизвестному решению S° является наибольшей по отношению к любому другому выбору итогового варианта интерпретации $S_j \in Q_0$:

$$\rho^{opt} \leq \max\left\{\rho(S_j, S_t) : S_t \in Q_0, S_t \neq S_j\right\}$$

для всех $S_j \in Q_0$, $S_j \neq S^{opt}$.

Как уже отмечалось, допустимые решения S_j предлагается находить с помощью модификаций монтажного метода В.Н. Страхова в сеточных модельных классах M возмущающих масс [*Страхов, Лапина,* 1976; *Балк, Долгаль,* 2009], но проблему репрезентативности построенного подмножества Q_0 на теоретическом уровне мы пока не готовы обсуждать. Сошлемся лишь на достаточно аргументированный способ [*Балк, Долгаль,* 2013] и успешный опыт формирования множества Q_0, достаточного для реализации гарантированного подхода при построении пары областей D_1 и D_2, обеспечивающих включение $D_2 \subset S^\circ \subset D_1$.

Теперь обратимся к структуре функционалов ρ. На взгляд авторов, в теории интерпретации геопотенциальных полей эта проблематика предоставляет широкое поле для деятельности. Начнем с того, что функционалы ρ не обязаны обладать свойством метричности, без которого не обойтись в вопросах сходимости. В известных алгоритмах решения ОЗГ эксплуатируется лишь несколько классических метрик, привязка которых к цели интерпретационного процесса редко обсуждается.

Если оставаться в рамках функционалов ρ, наделенных метрическими свойствами, то в ОЗГ рудного типа, ориентированных на оценку пространственной области, наиболее содержательными, безусловно, являются метрики $\rho(S^{opt}, S_\alpha)$, порожденные мерой таких областей. Можно предложить метрику Штейнхаузера для открытых измеримых множеств из $\mathbf{R}^3$

$$\rho(S_\alpha, S_\beta) = 1 - \frac{\mu(S_\alpha \cap S_\beta)}{\mu(S_\alpha \cup S_\beta)},$$

в структуре которой находят отражение все три введенных ранее вида информации – скрытая, ложная и потерянная. Эта метрика нормирована: $\rho(S_\alpha, S_\beta) = 0$ в случае $S_\alpha = S_\beta$ и $\rho(S_\alpha, S_\beta) = 1$, если множества S_α и S_β не имеют общих точек.

Рассмотрим одну из основных областей применения гравиразведки – поиск месторождений полезных ископаемых, когда итогом интерпретации являются рекомендации для дальнейшего заверочного бурения. Если взять любое приближенное решение S^* обратной задачи и обусловленный этим решением объем потерянной информации $S^{(2)} = \widehat{S} \setminus S^*$, определяемой через меру Лебега μ, то важно понимать, какой фрагмент истинного тела мы заметили – лежащий вблизи дневной поверхности или такой же по мере фрагмент, но залегающий на большей глубине. То же самое относится к ложной $S^{(1)} = S^* \setminus \widehat{S}$ и скрытой достоверной $S^{(0)} = S^* \cap \widehat{S}$ информации – важен не только объем того или иного фрагмента, но и его пространственное положение (в данном случае – глубина залегания). Если же в первом приближении принять, что потери за ложную рекомендацию и, соответственно, выигрыш при правильном ответе, растут с глубиной *z* того фрагмента пространства, о котором сделан вывод на основании построенного решения S^{opt}, то функционал ρ может быть сконструирован следующим образом.

Введем оператор

$$A[S;\varphi] = \iiint_S \varphi(z)dxdydz,$$

определенный на ограниченной замкнутой области *S*, где $\varphi(z)$ – непрерывная функция глубины z. В качестве меры близости приближенного решения S^* и истинного $\widehat{S}$ можно предложить функционал

$$\rho(S^*, \widehat{S}) = \mu(S^{(0)})A\left[S^{(0)};\varphi_0\right] - \left(\mu(S^{(1)})A\left[S^{(1)};\varphi_1\right] + \mu(S^{(2)})A\left[S^{(2)};\varphi_2\right]\right).$$

Здесь $S^{(0)} = S^* \cap \widehat{S}$, $S^{(1)} = S^* \setminus \widehat{S}$, $S^{(2)} = \widehat{S} \setminus S^*$ – соответственно скрытая достоверная, ложная и потерянная информация; φ_0, φ_1 – монотонно возрастающие, φ_2 – монотонно убывающая функции, согласованные с целевой задачей интерпретации.

Модельный пример 1. Суть минимаксного подхода к решению ОЗГ проще всего раскрыть на простейшем модельном примере, когда модель источников аномалии и все другие априорные предпосылки полностью адекватны реалиям. При небольшом числе параметров, описывающих модель источников поля, можно либо построить довольно "плотное" в *Q* подмножество Q_0, либо восстановить множество *Q* целиком. Это позволяет оценить возможности собственно минимаксного подхода без оглядки на проблему репрезентативности используемого подмножества Q_0. В рассматриваемом примере модельный класс *M* – бесконечно протяженные призмы с образующими, параллельными координатной оси *y*. Сечения призм имеют форму треугольников, координаты вершин которых по оси *x* кратны 0.5 км, а по оси *z* – 0.25 км. "Измерения" $\Delta\tilde{g}(x_i)$, обусловленные двумерной модельной призмой $\widehat{S}$ с плотностью $\widehat{\delta}$=0.3 г/см^3 и координатами вершин, имеющими в километрах значения x_1=3.5, z_1=–1; x_2=6.5, z_2=–3.75; x_3=9, z_3=–1.75 (рис. 1), содержат случайные помехи ξ_i, равномерно распределенные на интервале [–1,1]; максимум модуля этих помех равен ε=0.8 мГал.

Имитируя практическую ситуацию, где норма помех точно неизвестна, будем считать, что она не превышает ε_0=1.0 мГал. Для построения подмножества допустимых решений Q_0 использовался циклический перебор всех возможных координат угловых

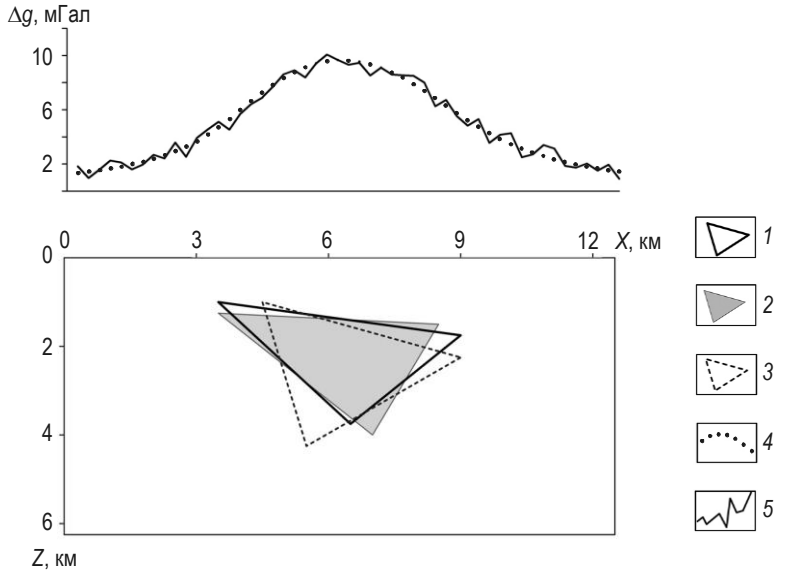

Рис. 1. Модельный пример 1. Гравитационное поле и результаты интерпретации

1 – призма, от которой рассчитана аномалия $\Delta\hat{g}$; *2*, *3* – результаты решения обратной задачи по критерию минимакса (*2*) и минимуму невязки (*3*); *4* – истинное поле $\Delta\hat{g}$; *5* – "наблюденное" поле $\Delta\tilde{g}$

точек призм в плоскости *XOZ*. Таким образом было построено множество Q_0, включающее в себя 3476 возмущающих тел из класса *M*, невязка "наблюденного" и модельного полей для которых не превысила 1.0 мГал; истинный источник поля $\widehat{S}$ вошел в это множество.

Далее проводилось сопоставление всех полученных решений обратной задачи между собой по принципу "каждое со всеми остальными" с использованием описанной выше метрики Штейнхаузера. Например, в цикле 1 решение ОЗГ № 1 сопоставлялось с остальными 3475 решениями №№ 2–3476; в цикле 2 – решение ОЗГ № 2 с решениями №№ 1, 3–3476; в цикле 3 – решение ОЗГ № 3 с решениями №№ 1, 2, 4–3476 и т.д. Для каждого цикла определялось максимальное значение $\rho(S_\alpha, S_\beta)$, а затем из полученных таким образом 3476 значений метрики выбиралось минимальное – $\min\left[\rho(S_\alpha, S_\beta)\right]$.

Призма S_α, отвечающая $\min\left[\rho(S_\alpha, S_\beta)\right]$ и наименее удаленная от всех прочих входящих в множество Q_0 решений ОЗГ, является решением, отвечающим минимаксному критерию, которое обозначим S_1^{opt}. В роли альтернативного "оптимального" решения S_2^{opt} выступает носитель, при котором достигается минимум максимального модуля невязки "наблюденного" и модельного полей в точках измерения. Мы не должны особо обращать внимание на истинное решение $\widehat{S}$ – при решении практических задач оно не известно. Следует исходить из того, что при имеющейся априорной информации истинным решением мог бы оказаться любой из допустимых носителей, составляющих множество Q_0. По результатам расчетов установлено, что ρ_1^{opt}=0.561, ρ_2^{opt}=0.725. Это означает, что, во-первых, даже при наиболее неблагоприятном исходе, когда истинным носителем $\widehat{S}$ окажется самая удаленная от S_1^{opt} призма $\overline{S}_1^{opt} \in Q$, мера (площадь) общего фрагмента сечения минимаксного (S_1^{opt}) и истинного ($\widehat{S} = \overline{S}_1^{opt}$) носителей составит $\mu_1^{opt} = \mu(S_1^{opt} \cap \overline{S}_1^{opt})$=3.7 км^2 (57 % от площади всего сечения истинного носителя

$\mu(\widehat{S})$=6.5 км^2); во-вторых, если же истинным носителем $\widehat{S}$ окажется призма $\overline{S}_2^{opt}$, наиболее удаленная от S_2^{opt}, то мера общего фрагмента носителей S_2^{opt} и $\widehat{S}$ (т.е. гарантированный объем скрытой информации, содержащийся в S_2^{opt}) составит всего лишь $\mu_2^{opt} = \mu(S_2^{opt} \cap \overline{S}_2^{opt})$=2.8 км^2. Иными словами, гарантированный объем достоверной информации, содержащейся в минимаксном решении, на 32 % оказался выше объема достоверной информации, содержащейся в приближенном решении, построенном по одному из традиционных алгоритмов. Объективная информация о носителе $\widehat{S}$, содержащаяся в решениях S_1^{opt} и S_2^{opt}, этим исчерпана.

Практический пример. Рассмотрим результаты применения минимаксного критерия оптимальности при решении практической задачи по изучению природы Березовской аномальной зоны в пределах Юрюзано-Сылвенской депрессии на юго-востоке Пермского края. Выполнена интерпретация данных гравиметрической съемки масштаба 1:200000 по профилю АБ (рис. 2, *слева*) в предположении, что избыточная плотность аномального объекта равна 0.45 г/см^3, а среднеквадратическая величина помехи в измерениях (при амплитуде поля порядка 30 мГал) не превышает 1.7 мГал. Соотношение между протяженностью (свыше 100 км) и шириной (около 20 км) аномальной зоны допускает использование 2D-модели источников (рис. 2, *справа*).

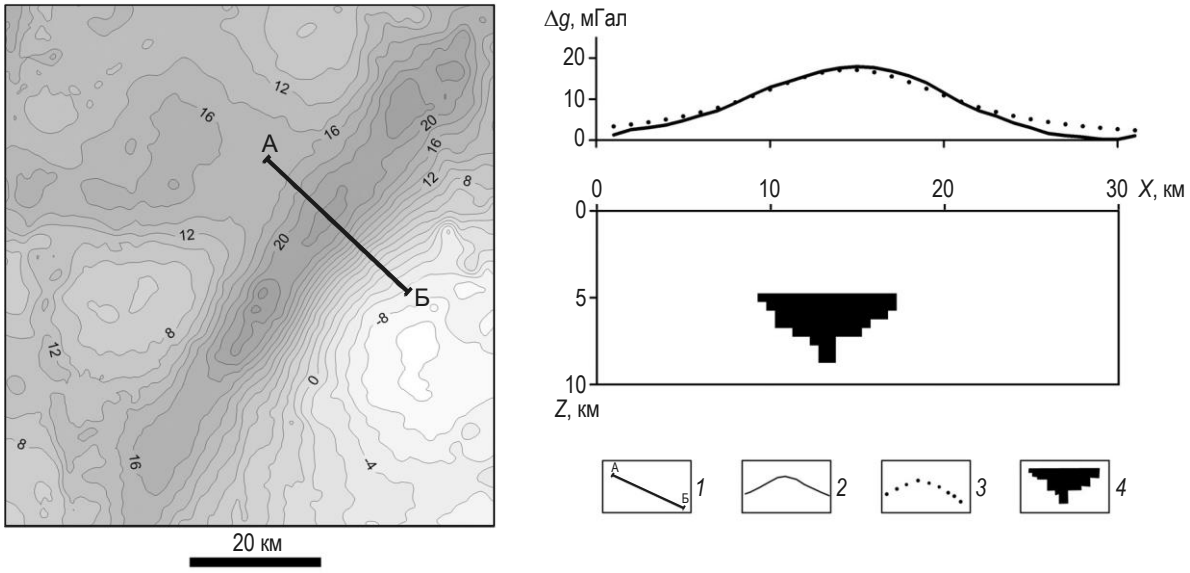

Рис. 2. Карта изоаномал гравитационного поля (*слева*) и результаты количественной интерпретации Березовской аномальной зоны (*справа*): *1* – интерпретационный профиль; *2*, *3* – графики наблюденного (*2*) и модельного (*3*) полей; *4* – модель аномалиеобразующего объекта, отвечающая критерию минимакса. АБ – профиль гравиметрической съемки масштаба 1:200000

В наблюденном поле присутствует линейная фоновая компонента. Используя косвенные данные о возможных значениях вертикальной и горизонтальной мощности аномального тела, а также глубин залегания его верхней и нижней кромок, монтажным методом удалось построить 169 допустимых вариантов решения обратной задачи гравиразведки, из которых было выбрано минимаксное решение S^{opt}. Расчеты показали, что если природный носитель $\widehat{S}$ возмущающих масс с приемлемой точностью можно описать хотя бы одним из найденных 169 решений, то совпадение минимаксного и

точного решения составит не менее 75 %. Есть основания считать, что аномалия Δg обусловлена интрузивным телом ультраосновного состава, обладающим высокой избыточной плотностью и низкой намагниченностью, кровля которого располагается на уровне кристаллического фундамента. Авторы разделяют вывод, сделанный ранее в [*Койфман,* 1982], что в изучаемом районе надинтрузивные осадочные образования могут оказаться перспективными для поисков нефтяных и газовых месторождений.

Критерий максимума апостериорной вероятности

Критерием максимума апостериорной вероятности удобно пользоваться, если решение ОЗГ осуществляется в рамках конечноэлементного представления изучаемой геологической среды и ее плотностных неоднородностей. Такое представление реализуется в форме замощения двух- или трехмерного пространства однородными по физическим характеристикам (бесконечными по оси *y* в двухмерном случае) призмами квадратного сечения (кубиками), образующими плотную пространственную упаковку. Это полностью согласуется с представлением статического геологического пространства [*Косыгин,* 1974; *Граусман, Бакуев, Хафизов*, 2000] как конечного множества точек, каждая из которых обладает определенной совокупностью свойств (в данном случае – некоторым значением плотности). Как уже отмечалось, при конечноэлементном описании источников аномалии эффективным инструментом поиска отдельных допустимых решений обратной задачи, из которых будет сформировано множество Q_0, являются различные модификации монтажного метода (наиболее полную библиографию см. в [*Балк, Долгаль,* 2013]).

Итак, пусть ω_α – элементарные фигуры (кубы, квадраты), образующие замощение $T = \{\omega_\alpha\}$ изучаемой части *D* геологического пространства, и *N* – число допустимых носителей S_j, которые удалось построить интерпретатору за отведенное время.

На декартовом произведении $T \times Q_0$ построим вспомогательную функцию

$$\varphi(\omega_\alpha, S_j) = \begin{cases} 1, & \omega_\alpha \in S_j \\ 0, & \omega_\alpha \notin S_j \end{cases};$$

тогда

$$\psi(\omega_\alpha) = \frac{\sum_{j=1}^{N} \varphi(\omega_\alpha, S_j)}{N}$$

назовем *функцией локализации* с областью значений [0,1]. В содержательном плане значение $\psi(\omega_\alpha)$ – частота, с которой элементарная область пространства ω_α выступает в роли фрагмента допустимого носителя из множества Q_0 [*Долгаль, Шархимуллин,* 2011]. Частоту $\psi(\omega_\alpha)$ можно рассматривать как оценку апостериорной вероятности *P* обнаружения возмущающих масс в объеме ω_α. По аналогии, функцию локализации можно распространить на модели многосвязных распределений источников аномалии с несовпадающими законами распределения плотности масс по парциальным носителям.

Можно предположить, что в статистическом плане наиболее выигрышным является тот из *N* построенных допустимых модельных носителей S_j (число элементов замощения ω_α, составляющих каждый из носителей, обозначим как n_j), который обеспечивает максимум величины

$$\rho_j = \frac{\sum \varphi(\omega_\alpha)}{n_j},$$

где суммирование идет по всем элементам замощения ω_α, составляющим носитель S_j.

Для иллюстрации приведем функцию локализации, построенную по конечному множеству допустимых решений, полученных монтажным методом для следующей модели однородного возмущающего тела (рис. 3).

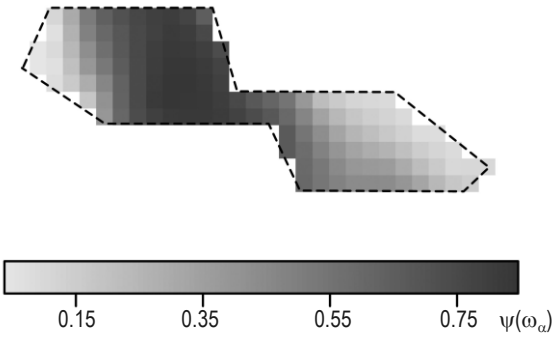

Рис. 3. Распределение значений функции локализации $\psi(\omega_\alpha)$ внутри аномалиеобразующего объекта

Следует отметить, что в отличие от критерия минимакса, оперирующего единичными допустимыми носителями возмущающих масс, функция локализации допускает детальный анализ структуры каждого частного решения ОЗГ. В результатах этого анализа находит отражение, в частности, тот факт, что разные равновеликие фрагменты пространства, занятые аномалиеобразующими массами, могут вносить заметно различный вклад в суммарный гравитационный эффект. Это влечет за собой неравномерное пространственное распределение амплитуд $\psi(\omega_\alpha)$ в пределах носителя аномалиеобразующих масс; по понятным физическим причинам максимальные значения этой функции будут локализованы вблизи центра тяжести масс носителя.

Модельный пример 2. Рассмотрим еще один модельный пример: на профиле длиной 10 км с равномерным шагом задано поле Δg, обусловленное тремя 2D-объектами с избыточной плотностью $\hat{\delta}_1 = 0.15$ г/см^3, $\hat{\delta}_2 = 0.45$ г/см^3, $\hat{\delta}_3 = 0.25$ г/см^3 (слева направо), имеющих общую площадь B сечений 3.11 км^2. Точное гравитационное поле было осложнено нормально распределенной помехой с нулевым средним значением и среднеквадратическим отклонением 0.35 мГал. Решение ОЗГ проводилось монтажным методом. Число локальных источников считалось известным; предполагалось, что их границы достаточно гладкие. На горизонтальные и вертикальные размеры тел вводились ограничения, подбираемые так, чтобы размеры тел могли превышать истинные не более чем в 2 раза. Элементы замощения ω_α – бесконечно протяженные призмы с квадратными сечениями 100×100 м. При поиске каждого очередного допустимого носителя местоположение трех элементов ω_α, служащих начальными приближениями для каждого связного парциального носителя, выбирались случайным образом. При пороговом значении невязки “наблюденного” и модельного полей ε=0.35 мГал было получено 974 допустимых решения ОЗГ. На рис. 4, 5 и в таблице приведены допустимые решения, оптимальные по трем критериям: минимаксному, минимуму невязки, максимуму апостериорной вероятности. Как очевидно, широко используемый при решении обратных задач гравиразведки критерий невязки уступает по эффективности двум новым предлагаемым критериям.

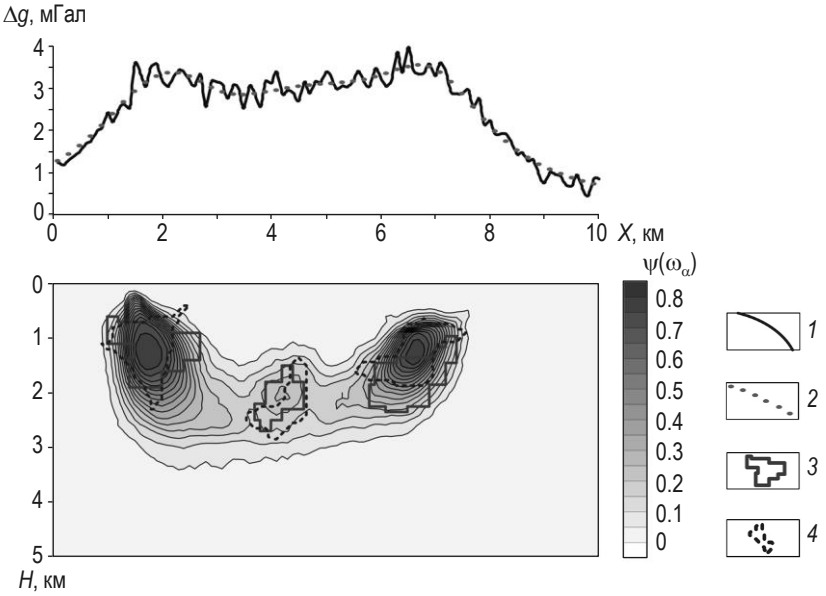

Рис. 4. Модельный пример 2. Вертикальная карта изолиний функции локализации $\psi(\omega_\alpha)$ и решение ОЗГ, полученное с использованием критерия минимакса

1 – "наблюденное" поле; *2* – модельное поле; *3* – источники поля; *4* – подобранные объекты

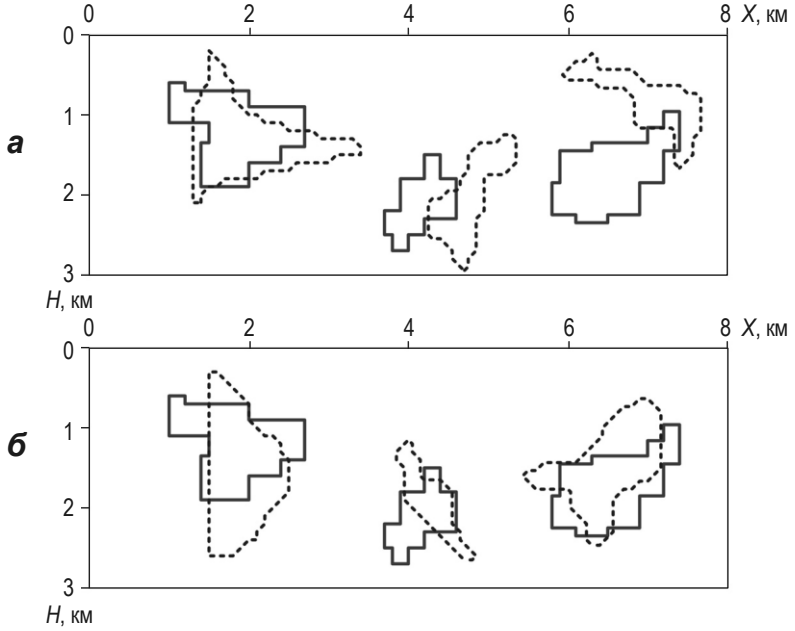

Рис. 5. Решения ОЗГ, отвечающие минимуму невязки полей (*а*) и максимуму апостериорной вероятности (*б*). Сплошные линии – источники поля; штриховые – подобранные объекты

Характеристика решений обратной задачи гравиразведки (ОЗГ), представленных на рис. 4, 5

Критерий выбора решения ОЗГ	Площадь B_p	Площадь $B_p \cap B_s$	Площадь $B_p \cap B_s$
Минимум невязки	2.99 км^2	1.09 км^2	35 %
Минимакс	3.03 км^2	1.71 км^2	55 %
Максимум апостериорной вероятности	3.35 км^2	1.83 км^2	59 %

Примечание: B_p – площадь вертикальных сечений подобранных объектов.

Выводы

1. При всем своем разнообразии традиционные алгоритмы решения ОЗГ, основанные на попарном (не обязательно явном) сравнении альтернативных вариантов интерпретации по значению скалярного критерия F (в частности, методы подбора, в которых роль F играет невязка), не в состоянии уменьшить априорную неопределенность в отношении конфигурации и местоположения источников поля. “Оптимальное” решение, найденное по любому из этих методов, не содержит никаких сведений об объемах достоверной, скрытой, ложной и потерянной информации.

2. Принципиально новые возможности в отношении повышения информативности результатов количественной интерпретации гравиметрических данных открывает подход, предлагаемый в данной статье. Суть его заключается в формировании множества Q_0 допустимых решений ОЗГ с помощью монтажного метода и последующем согласовании этих решений между собой с использованием статистических критериев минимакса или максимума апостериорной вероятности. Представленные процедуры согласования базируются на оценке степени пространственной близости интерпретационных моделей и предполагают равную вероятность соответствия каждой из них реальным источникам поля.

3. Минимаксный подход дает не только решение S^{opt}, для которого (в рамках множества Q_0) гарантированная степень его близости к точному решению максимальна, но также и саму неулучшаемую оценку меры близости этих решений. Следует, однако, отметить, что эта оценка является весьма осторожной (пессимистической).

4. При поисках рудных месторождений, располагая решениями по двум предложенным критериям, можно обеспечить эффективный выбор наиболее перспективных гравитационных аномалий для дальнейшего проведения буровых работ.

5. Список новых критериев выбора оптимальных решений для теории интерпретации гравитационных аномалий в дальнейшем может быть расширен. На очереди исследование возможности использования при решении ОЗГ критерия минимума эмпирического риска.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-05-01823А).

Литература

Балк П.И. О надежности результатов количественной интерпретации гравитационных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 6. С.43–57.

Балк П.И., Долгаль А.С. Трехмерные монтажные технологии интерпретации гравиметрических данных // Докл. РАН. 2009. Т. 427, № 3. С.380–383.

Балк П.И.. Долгаль А.С. Детерминированный подход к проблеме достоверности результатов интерпретации гравиметрических данных // Докл. РАН. 2010. Т. 431, № 1. С.334–338.

Балк П.И., Долгаль А.С. Обратные задачи гравиметрии как задачи извлечения достоверной информации в условиях неопределенности // Физика Земли. 2012. № 5. С.85–101.

Балк П., Долгаль А. Конечноэлементные технологии моделирования в гравиразведке. Монтажный метод и гарантированный подход при решении обратных задач. Saarbrucken: LAPLAMBERT Academic Publishing, 2013. 77 с.

Балк П.И., Долгаль А.С. Минимаксный подход к решению обратных задач гравиразведки и магниторазведки // Докл. РАН. 2015а. Т. 462, № 6. С.706–710.

Балк П.И., Долгаль А.С. Детерминистские модели интерпретации для оптимизации местоположения и глубин заложения скважин при заверке гравитационных аномалий // Физика Земли. 2015б. № 1. С.98–111.

Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Конечноэлементные технологии интерпретации данных гравиразведки. Гарантированный подход // Геофизические исследования. 2012. Т. 13, № 4. С.19–33.

Булах Е.Г. Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. Киев: Наук. думка, 2010. 463 с.

Гольдшмидт В.И. Оптимизация процесса количественной интерпретации данных гравиразведки. М.: Недра, 1984. 184 с.

Граусман А.Л., Бакуев О.В., Хафизов С.Ф. К вопросу построения математических моделей геологических объектов // Геология нефти и газа. 2000. № 4. С.58–63.

Долгаль А.С., Шархимуллин А.Ф. Повышение точности интерпретации моногеничных гравитационных аномалий // Геоинформатика. 2011. № 4. С.49–56.

Кобрунов А.И. Математические основы теории интерпретации геофизических данных: учеб. пособие. М.: ЦентрЛитНефтеГаз, 2008. 288 с.

Койфман Л.И. Опыт объемного плотностного моделирования Березовского гравитационного максимума Предуралья // Региональная, разведочная и промысловая геофизика. 1982. Вып. 16. С.1–9.

Косыгин Ю.А. Основы тектоники. М.: Недра, 1974. 216 с.

Стратанович Р.Л. Теория информации. М.: Сов. Радио, 1975. 424 с.

Страхов В.Н. Разрушение господствующего стереотипа мышления – главнейшая задача в развитии теории и практики интерпретации потенциальных полей (гравитационных и магнитных аномалий) в начале XXI века. М.: ОИФЗ РАН, 2000. 44 с.

Страхов В.Н., Лапина М.И. Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 2. С.344–347.

Сведения об авторах

ДОЛГАЛЬ Александр Сергеевич – главный научный сотрудник, доктор физико-математических наук, профессор, Геологический институт УрО РАН. 614007, г. Пермь, ул. Сибирская, д.78а; профессор, Пермский государственный национальный исследовательский университет. 614990, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15. Тел.: +7(342) 216-10-08. E-mail: dolgal@mi-perm.ru

БАЛК Петр Исаакович – доктор физико-математических наук, профессор. Blasewitzer Ring 46, 13593, Berlin, BRD. E-mail: tatianabalk@mail.ru

НОВИКОВА Полина Николаевна – научный сотрудник, кандидат геолого-минералогических наук, Геологический институт УрО РАН. 614007, г. Пермь, ул. Сибирская, д.78а; доцент, Пермский государственный национальный исследовательский университет. 614990, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15. Тел.: +7(342) 216-10-08. E-mail: polinagfz@gmail.com

МИЧУРИН Антон Владимирович – научный сотрудник, кандидат технических наук, Геологический институт УрО РАН. 614007, г. Пермь, ул. Сибирская, д. 78а. Тел.: +7(342) 216-10-08. E-mail: ami@59.ru

MATCHING CRITERIA OF ACCEPTABLE SOLUTIONS FOR GRAVITY ORE TYPE INVERSE PROBLEM

A.S. Dolgal[1,2], P.I. Balk[3], P.N. Novikova[1,2], A.V. Michurin[1]

[1] *Mining Institute, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russia*
[2] *Perm State University, Perm, Russia*
[3] *Berlin, Germany*

Abstract. A new approach to the characterization of the gravity anomalies sources is presented. It is based on the construction of the representative set of acceptable solutions of the gravity inverse problem. The "best" solution is chosen using the formal criteria, i.e. the minimax criterion and the maximum a posteriori probability criterion.

The proposed definitions of hiding, lost and false information can be effectively applied to the quantitative interpretation of geophysical anomalies. The minimax criterion minimizes the loss of hidden information and provides an estimation of the proximity of the solution obtained to the true distribution of anomalous masses. An effective tool for constructing approximate solutions of the inverse problem is the fitting method that uses finite element representation of the studied density inhomogeneities.

The results of computational experiments indicate the advantages of this approach as compared to the choice of a single optimal solution of the inverse problem corresponding to the minimum residual of observational and modeling fields. The practical problem is solved using the data on the medium-scale gravity survey in the Berezovsky anomalous zone (Perm region).

The application of the approach proposed to the solution of the gravity inverse problem in prospecting and exploration of ore deposits can provide a reliable choice of the most promising gravity anomalies for future drilling operations.

Keywords: gravity prospecting, interpretation, inverse problem, solution set, criterion, information, geological object.

References

Balk P.I. O nadezhnosti rezul'tatov kolichestvennoj interpretacii gravitacionnyh anomalij (On the reliability of the quantitative interpretation results of gravity anomalies), *Izv. AN SSSR. Physics of the Solid Earth*, no.6, 1980, pp. 43–57.

Balk P.I. and Dolgal A.S. Three-Dimensional Assembly Technologies for the Interpretation of Gravimetric Data, *Doklady Akademii nauk*, vol. 427, No.3, 2009, pp. 380-383.

Balk P.I. and Dolgal A.S. Deterministic Approach to the Problem of Reliability in Interpretation Results of Gravimetric Data, *DAN*, vol. 431, no.1, 2010, pp. 334–338.

Balk P.I. and Dolgal A.S. Inverse Problems of Gravimetry as Retrieval of Reliable Information under Uncertainty, *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 441–455

Balk P. and Dolgal A. Konechnojelementnye tehnologii modelirovanija v gravirazvedke. Montazhnyj metod i garantirovannyj podhod pri reshenii obratnyh zadach (Finite element modeling technology in gravity. The fitting method and a guaranteed approach for the inverse problems solution), LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrucken, 2013.

Balk P.I. and Dolgal A.S. A Minimax Approach to the Solution of Inverse Problems of Gravity and Magnetic Prospecting, *Doklady Earth Sciences*, 2015, Vol. 462, Part 2, pp. 648–652.

Balk P.I. and Dolgal A.S. Deterministic Models of Interpretation for Optimizing the Locations and Depths of the Boreholes for Verifying the Anomalies in Gravity, *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2015, vol. 51, no. 1, pp. 95–107

P.I. Balk, A.S. Dolgal', T.V. Balk, and L.A.Christenko. Finite-element technologies of interpretation of gravity data. Guaranteed approach, *Geophysical research*, vol. 13, no. 4, 2012, pp.19–33.

Bulah E.G. Prjamye i obratnye zadachi gravimetrii i magnitometrii (Direct and inverse problems of gravimetry and magnetometry), Kiev: Naukova dumka, 2010.

Dolgal A.S. and Sharhimullin A.F. Povyshenie tochnosti interpretacii monogenichnyh gravitacionnyh anomalij (Accuracy improving of the interpretation of monogenic gravity anomalies), *Geoinformatika*, No.4, 2011, pp. 49–56.

Gol'dshmidt V.I. *Optimizacija processa kolichestvennoj interpretacii dannyh gravirazvedki* (Optimization of quantitative gravity data interpretation), Moscow: Nedra,1984.

Grausman A.L., Bakuev O.V., and Hafizov S.F. K voprosu postroenija matematicheskih modelej geologicheskih ob'ektov (The problem of constructing mathematical models of geological objects), *Oil and gas geology*, no.4, 2000, pp. 58–63.

Kobrunov A.I. *Matematicheskie osnovy teorii interpretacii geofizicheskih dannyh: ucheb. posobie* (Mathematical foundations of the interpretation theory of geophysical data: a tutorial), Moscow: CentrLitNefteGaz, 2008.

Kojfman L. I. Opyt ob'emnogo plotnostnogo modelirovanija Berezovskogo gravitacionnogo maksimuma Predural'ja (Experience of density modeling of Berezovsky gravity maximum, Preduralje), *Regional'naja, razvedochnaja i promyslovaja geofizika*, vol. 16, 1982, pp. 1–9.

Kosygin Ju.A. *Osnovy tektoniki* (Foundations tectonics), Moscow: Nedra, 1974.

Stratanovich R.L. *Teorija informatsii* (Information theory), Moscow: Sovetskoe. Radio,1975.

Strahov V.N. Razrushenie gospodstvujushhego stereotipa myshlenija – glavnejshaja zadacha v razvitii teorii i praktiki interpretacii potencial'nyh polej (gravitacionnyh i magnitnyh anomalij) v nachale XXI veka. (The destruction of the prevailing stereotype thinking - the main task in the development of the theory and practice of potential fields interpretation (gravity and magnetic anomalies) at the beginning of the XXI century), M.: OIFZ RAN, 2000, 44 p.

Strahov V.N. and Lapina M.I. Montazhnyj metod reshenija obratnoj zadachi gravimetrii (Fitting technique for solving the gravimetry inverse problem), *Dokl. AN SSSR*, vol. 227, no.2, 1976, pp. 344–347.