

УДК 550.831.015: 550.831.23: 519.654

## ЛОКАЛЬНОЕ МНОГОМАСШТАБНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ АНОМАЛИИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПО ДАННЫМ АЭРОГРАВИМЕТРИИ

© 2014 г. Ю.В. Болотин, В.С. Вязьмин

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия*

Рассматривается задача оценивания силы тяжести в исследуемом регионе по данным аэрогравиметрии. Решение задачи основано на многомасштабном анализе на сфере с использованием гармонических вейвлетов. Сначала по аэрогравиметрическим данным оцениваются коэффициенты вейвлет-разложения силы тяжести, которые затем уточняются с использованием глобальной модели гравитационного поля Земли. Обсуждаются результаты обработки данных реальных съемок.

**Ключевые слова:** аэрогравиметрия, сферические вейвлеты, оценивание.

### Введение

Аэрогравиметрические съемки предназначены для локального определения аномалии силы тяжести в исследуемом районе с целью разведки полезных ископаемых и в некоторых случаях для уточнения глобальной модели гравитационного поля Земли [Торге, 1999]. Методы уточнения глобальной модели хорошо развиты (интегральные методы [Kern, Schwarz, Sneeuw, 2003], метод коллокаций [Tscherning, 1985]) и основываются, как правило, на представлении поля силы тяжести в виде ряда из сферических (шаровых) функций (например, модель EGM2008 [Pavlis et al., 2012]). Локальное определение силы тяжести, в свою очередь, нуждается в глобальной информации. Причина этого заключается в том, что данная задача часто включает трансформации поля (например, продолжение на поверхность референц-эллипсоида), для которых требуется нелокальная информация о поле силы тяжести. Использование в таком случае глобальной модели в виде гармонического разложения технически сложно и не всегда корректно.

Сравнительно новые подходы к локальному определению силы тяжести основаны на использовании альтернативных разложений, к которым относятся сферическое вейвлет-разложение (см., например, [Freedен, Schneider, 1998]), разложение по сферическим радиальным базисным функциям [Schmidt et al., 2007], двумерным кубическим сплайнам [Боярский и др., 1985] и др.

Цель данной работы – разработка методики построения локальных карт аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии и глобальной модели гравитационного потенциала Земли. Для комбинирования разномасштабных геофизических данных используется сферическое вейвлет-разложение, отличительное свойство которого – возможность многомасштабного анализа, основанного на пространственно-частотной локализации функции, что удобно при работе с локальными аэрогравиметрическими данными. В работе используется сферическое вейвлет-разложение в концепции, представленной научной группой под руководством В. Фредена [Freedен, Schneider, 1998]. Вейвлеты данной концепции являются гармоническими функциями вне сферы и, таким образом, могут использоваться при решении разных задач трансформации.

Разрабатываемая методика комбинирования данных включает три этапа: этап 1 – оценка скейлинг-коэффициентов (СК) аномалии силы тяжести на максимальном уровне детализации по данным аэрогравиметрии; этап 2 – вычисление вейвлет-коэффициентов

(ВК) на разных уровнях детализации по СК, оцененным на этапе 1; этап 3 – совместная оценка ВК данных аэрогравиметрии и глобальной модели.

На этапе 1 используется рекуррентный метод наименьших квадратов с шагом рекурсии по номеру галса, позволяющий учесть специфичность данных аэрогравиметрии, в частности, некоррелированность ошибок измерений на разных галсах съемки. В силу плохой обусловленности задачи первого этапа применена информационная форма метода наименьших квадратов с регуляризацией ее информационной матрицы СК на последнем шаге рекурсии. Комбинирование ВК данных аэрогравиметрии и глобальной модели на последнем этапе методики проводится с помощью алгоритма метода наименьших квадратов.

Проверка алгоритмов была выполнена с использованием результатов аэрогравиметрической съемки в Арктике и данных глобальной модели *EGM2008*.

### Сферическое многомасштабное представление аномалии силы тяжести

Многомасштабное представление функции  $f(x)$  из гильбертова пространства  $L^2(\Omega_R)$ , где  $\Omega_R \subset \mathbf{R}^3$  – сфера радиуса  $R$ , состоит в вейвлет-разложении (вычисление СК и ВК на разных уровнях детализации) и вейвлет-восстановлении (вычисление сглаженной и детальных компонент функции на разных уровнях детализации). По определению, СК уровня детализации  $j$  ( $j$  – целое число) в точке  $y \in \Omega_R$  задается формулой свертки на сфере [Freedен, Schneider, 1998]:

$$a_j(y) = (\Phi_j * f)(y) = \int_{\Omega_R} \Phi_j(y, z) f(z) d\omega(z), \quad (1)$$

где  $z \in \Omega_R$ ;  $d\omega(z)$  – элемент поверхности сферы;  $\Phi_j(y, z)$  – скейлинг-функция уровня  $j$ , имеющая вид

$$\Phi_j(y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} P_n(\xi^T \eta); \quad (2)$$

$\xi = y/R$ ;  $\eta = z/R$ ,  $P_n$  – многочлен Лежандра степени  $n$ ;  $\varphi_j(n)$  – коэффициенты разложения скейлинг-функции  $\Phi_j(y, z)$  в ряд по многочленам Лежандра.

В данной работе используется скейлинг-функция Абеля–Пуассона с  $\varphi_j(n) = \exp(-n/2^j)$ , для которой сумма ряда (2) записывается в виде элементарной функции [Freedен, Schneider, 1998], что уменьшает вычислительную сложность алгоритмов. Кроме того,  $\Phi_j(y, z)$  строго положительна при всех  $y, z \in \Omega_R$  и достаточно быстро убывает с увеличением сферического расстояния между  $y$  и  $z$ .

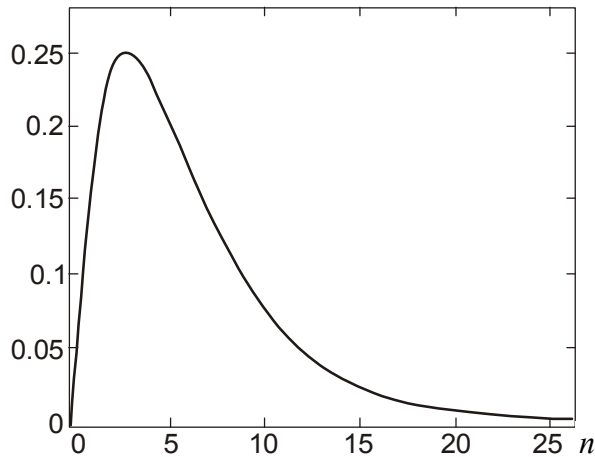
Для определения ВК на разных уровнях детализации по СК некоторого уровня детализации  $J$  используется формула:

$$c_j(y) = (K_j * a_j)(y) = \int_{\Omega_R} K_j(y, z) a_j(z) d\omega(z), j = j_0, \dots, J-1. \quad (3)$$

Ядро преобразования (3)  $K_j(y, z)$  определяется как

$$K_j(y, z) = \int_{\Omega_R} \Psi_j(y, u) \Phi_j(u, z) d\omega(u),$$

где  $\Psi_j(y, u) = \Phi_{j+1}(y, u) - \Phi_j(y, u)$  – вейвлет уровня  $j$ . Коэффициенты разложения вейвлета Абеля–Пуассона в ряд по многочленам Лежандра приведены на рис. 1. Отметим, что в терминах теории фильтров СК и ВК интерпретируются как результаты



**Рис. 1.** Коэффициенты разложения вейвлета Абеля–Пуассона уровня  $j=2$  в ряд по многочленам Лежандра.  $n$  – степень многочлена Лежандра

низкочастотной и полосовой фильтрации соответственно. Вейвлет-восстановление  $f_J(x)$  функции  $f(x)$  определяется формулой [Freeden, Schneider, 1998]:

$$f_J(x) = (\Phi_J * a_J)(x) = f_{j_0}(x) + \sum_{j=j_0}^{J-1} f_j^{\text{detail}}(x) = (\Phi_{j_0} * a_{j_0})(x) + \sum_{j=j_0}^{J-1} (\tilde{\Psi}_j * c_j)(x), \quad (4)$$

где  $\tilde{\Psi}_j(x, y) = \Phi_{j+1}(x, y) + \Phi_j(x, y)$  – двойственный вейвлет уровня  $j$ ;  $f_{j_0}(x)$  – сглаженная компонента  $f(x)$ ;  $f_j^{\text{detail}}(x)$  – детальная компонента  $f(x)$ . При этом результат вейвлет-восстановления  $f_J(x)$  при увеличении  $J$  оказывается сколь угодно близок к  $f(x)$  в метрике  $L^2(\Omega_R)$ .

Скейлинг-функция и вейвлет имеют аналитические продолжения во внешнее пространство сферы  $\Omega_R^{\text{ext}} \subset \mathbf{R}^3$  и являются гармоническими функциями в  $\overline{\Omega_R^{\text{ext}}} = \Omega_R^{\text{ext}} \cup \Omega_R$ . Вместо  $L^2(\Omega_R)$  может рассматриваться гильбертово пространство гармонических в  $\Omega_R^{\text{ext}}$  функций с дополнительным условием на скорость убывания гармонических коэффициентов с ростом степени (аналог пространств Соболева). Тогда по граничным значениям на  $\Omega_R$  функции  $f(x)$ , принадлежащей этому гильбертову пространству, с помощью формул (1), (3) и (4) может быть построено многомасштабное представление  $f_J(x)$  в  $\overline{\Omega_R^{\text{ext}}}$  на уровне детализации  $J$ . Доказывается, что  $f_J(x)$  вместе со своими частными производными вплоть до некоторого порядка равномерно сходится в  $\overline{\Omega_R^{\text{ext}}}$  к  $f(x)$  и ее соответствующим производным [Freeden, Schneider, 1998].

Введем модель аэрогравиметрических измерений на галсе полета:

$$\Delta g'_k(t_{ik}) = \sum_{m=1}^{M_k} h(t_{ik} - t_{mk}) \Delta g(x_k(t_{mk})) + \delta g_k(t_{ik}), \quad i=1, \dots, M_k, \quad k=1, \dots, K. \quad (5)$$

Здесь  $k$  – номер галса;  $K$  – число галсов съемки;  $\Delta g(\cdot)$  – аномалия силы тяжести в свободном воздухе;  $x_k(t_{mk}) \in \mathbf{R}^3$  – точка измерения на  $k$ -м галсе в гринвичской системе координат;  $t_{ik}$  – дискретный момент времени измерения на  $k$ -м галсе;  $M_k$  – количество измерений на галсе;  $h(\cdot)$  – весовая функция гравиметрического фильтра [Bolotin, Yurist, 2011] с разрешающей способностью в пространстве  $L/2$ , где  $L = 2\pi V / \omega_{\text{cut}}$  ( $V$  – скорость летательного аппарата);  $\omega_{\text{cut}}$  – частота среза фильтра во времени. Ошибка измерения на  $k$ -м галсе как функция полетного времени  $\delta g_k(t)$  предполагается случайным процессом с нулевым математическим ожиданием и известной корреляцион-

ной функцией, определяемой погрешностями “сырых” измерений и свойствами гравиметрического фильтра. Ошибки измерения на разных галсах не коррелированы.

Будем предполагать, что  $\Delta g(x)$  принадлежит гильбертову пространству функций, определенных в  $\overline{\Omega_R^{ext}}$ , где центр сферы  $\Omega_R$  совпадает с центром Земли, радиус  $R$  равен минимальному расстоянию до центра Земли  $|x_k(\cdot)|$  по всем точкам измерений на галсах. Предположение допускается в рамках подхода Рунге–Уолша к аппроксимации гравитационного потенциала и его производных [Freeden, Schneider, 1998]. Дополнительно предположим, что  $\Delta g(x)$  – достаточно гладкая функция, так что  $\Delta g(x)$  можно представить в виде свертки скейлинг-функции Абея–Пуассона с СК на некотором подходящем уровне детализации  $J$ . Тогда (5) может быть переписано в виде

$$\Delta g'_k(t_{ik}) = \sum_{m=1}^{M_k} h(t_{ik} - t_{mk}) \int_{\Omega_R} \Phi_J(x_k(t_{mk}), y) a_J(y) d\omega(y) + \delta g_k(t_{ik}), \quad (6)$$

где  $a_J(y)$  – СК аномалии силы тяжести на максимальном уровне детализации  $J$  в точке  $y \in \Omega_R$ . В силу нормировки скейлинг-функции СК имеет размерность аномалии силы тяжести – мГал.

### Оценивание скейлинг-коэффициентов (СК) по данным аэрогравиметрии

Поставим задачу оптимального оценивания СК аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии. Для этого аппроксимируем значения интегральной свертки в (6) с помощью квадратурной формулы

$$\int_{\Omega_R} \Phi_J(x_k(t_{mk}), y) a_J(y) d\omega(y) \approx \sum_{n,s} \omega_{ns} \Phi_J(x_k(t_{mk}), y_{ns}) a_J(y_{ns}), \quad (7)$$

где  $y_{ns}$  – узлы эквиангулярной сетки на сфере;  $y_{ns} = R(\sin \theta_n \cos \lambda_s, \sin \theta_n \sin \lambda_s, \cos \theta_n)^T$ ;  $\theta_n$  – сферическая ко-широта;  $\lambda_s$  – долгота (другие типы сеток приведены в [Schmidt et al., 2007]). Значения шагов по долготе  $\Delta \lambda = \lambda_{s+1} - \lambda_s$  и по ко-широте  $\Delta \theta = \theta_{n+1} - \theta_n$  определим по величине  $\Delta$ , равной минимуму из двух величин – расстояния между галсами и половины разрешающей способности в пространстве  $L/2$  гравиметрического фильтра, а именно, положим  $\Delta \lambda = \Delta/R \cos \theta_{\min}$ ,  $\Delta \theta = \Delta/R$ , где  $\theta_{\min}$  – минимальная сферическая ко-широта на участке съемки. Веса интегрирования  $\omega_{ns}$  зададим формулой  $\omega_{ns} = \Delta \lambda \Delta \theta \sin \theta_n$  [Болотин, Вязьмин, 2012], получаемой в результате дискретизации интеграла в (7) по долготе по формуле трапеций, по ко-широте – по формуле Гаусса–Чебышева [Бахвалов, Жидков, Кобельков, 2001]. В силу пространственной локализации скейлинг-функции суммирование в (7) достаточно проводить по узлам  $y_{ns}$  из некоторой окрестности точки  $x_k(t_{mk})R/|x_k(t_{mk})|$  на сфере. Радиус этой окрестности выберем, минимизируя методическую погрешность “обрезания” суммы в (7) [Болотин, Вязьмин, 2012]. В результате множество узлов  $y_{ns}$ , используемых для вычисления (7) в точках измерений на всех галсах съемки (обозначим его через  $Y$ , количество узлов в нем – через  $N$ ), состоит из узлов внутри участка съемки и узлов вне его на расстоянии, не превышающем радиуса окрестности суммирования, образуя почти равномерную сетку на сфере.

Представим  $Y$  в виде объединения его подмножеств  $Y_k$ , обозначив число элементов в нем через  $N_k$  ( $k=1, \dots, K$ ). Каждое из подмножеств состоит из узлов, определяемых соответствующим галсом. Подмножества  $Y_k$  в силу построения имеют попарные пересечения.

Далее, используя (7), перепишем (6) в матричной форме:

$$\Delta g'_k = H_k a_{kJ} + \delta g_k, \quad k=1, \dots, K, \quad (8)$$

где  $\Delta g'_k = (\Delta g'_k(t_{1k}), \dots, \Delta g'_k(t_{M_k k}))^T$  – вектор измерений на  $k$ -м галсе размерности  $M_k \times 1$ ;  $\delta g_k = (\delta g_k(t_{1k}), \dots, \delta g_k(t_{M_k k}))^T$  – вектор их ошибок измерений на  $k$ -м галсе размерности  $M_k \times 1$ ;  $a_{kJ}$  – вектор размерности  $N_k \times 1$  неизвестных СК  $a_J(\cdot)$  в узлах подмножества  $Y_k$ , определяемого  $k$ -м галсом. Через  $H_k$  обозначена матрица размера  $M_k \times N_k$ , элементами которой являются суммы произведений значений весовой функции гравиметрического фильтра в (6), весов квадратурной формулы и значений скейлинг-функции в узлах  $Y_k$ . Введем матрицу ковариаций ошибок измерений  $R_k = E[\delta g_k \delta g_k^T]$ . Как уже отмечалось выше, ошибки измерений на разных галсах не коррелированы:

$$E[\delta g_k \delta g_m^T] = 0, \quad k \neq m. \quad (9)$$

Теперь поставим задачу оценивания вектора СК в виде

$$\sum_{k=1}^K \|\Delta g'_k - H_k a_{kJ}\|_{R_k^{-1}}^2 \rightarrow \min. \quad (10)$$

Отметим, что (10) часто оказывается задачей неполного ранга и решается с помощью рекуррентного метода наименьших квадратов в информационной форме [Александров и др., 2005]:

$$Q_{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + I_k^T H_k^T R_k^{-1} H_k I_k, \quad k=2, \dots, K, \quad (11)$$

$$b_{(k)} = \begin{bmatrix} b_{(k-1)} \\ 0 \end{bmatrix} + I_k^T H_k^T R_k^{-1} \Delta g'_k \quad (12)$$

с начальными условиями

$$Q_{(1)} = H_1^T R_1^{-1} H_1, \quad (13)$$

$$b_{(1)} = H_1^T R_1^{-1} \Delta g'_1, \quad (14)$$

где  $Q_{(k)}$  – информационная матрица СК;  $b_{(k)}$  – информационная оценка вектора СК, определяемая как  $b_{(k)} = Q_{(k)} a_{(k)}$ ;  $a_{(k)}$  – вектор СК в узлах объединения подмножеств  $Y_1 \cup \dots \cup Y_k$ ;  $I_k$  – матрица оператора, проецирующего вектор  $a_{(k)}$  на множество СК, коррелированных только с  $k$ -ым галсом (то есть определенных в узлах  $Y_k$ ) по формуле  $I_k a_{(k)} = a_{kJ}$ .

По информационной матрице  $Q_{(K)}$  размера  $N \times N$ , полученной на последнем  $K$ -м шаге рекурсии, вычисляется ковариационная матрица ошибок оценки СК. Матрица  $Q_{(K)}$  часто является плохо обусловленной. Для определения ковариационной матрицы сначала проводится редукция  $Q_{(K)}$ , в ходе которой обнуляются ее информационно мало значимые строки и столбцы:  $n$ -я строка и  $n$ -й столбец обнуляются в случае, если все их элементы по модулю меньше  $\varepsilon^2 \sigma_{glob}^{-2}$ , где  $\sigma_{glob}$  – информация о среднеквадратической погрешности данных глобальной модели,  $\varepsilon$  – настроечный безразмерный параметр. Для полученной в результате такой процедуры матрицы проводится регуляризация; обратная к регуляризованной матрице принимается за оценку ковариационной матрицы ошибок оценки СК  $\tilde{P}_{\delta a_J}$ . Таким образом, с точностью до перестановки строк и столбцов оценка ковариационной матрицы имеет вид

$$\tilde{P}_{\delta a_J} = \begin{bmatrix} (\bar{Q}_{(K)} + \mu^2 d_{glob}^{-2} I_1)^{-1} & 0 \\ 0 & \mu^{-2} d_{glob}^2 I_2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где  $\bar{Q}_{(K)}$  – подматрица  $Q_{(K)}$ , строки и столбцы которой содержат хотя бы один элемент, по модулю больший  $\varepsilon^2 \sigma_{glob}^{-2}$ ;  $I_1, I_2$  – единичные матрицы соответствующих размерностей;  $d_{glob}^2$  – вариация СК аномалии силы тяжести в регионе съемки, рассчитываемая по глобальной модели;  $\mu$  – безразмерный параметр регуляризации (выбор  $\mu$  и  $\varepsilon$  обсуждается в разделе, посвященном обработке данных).

Оценка вектора СК (с точностью до перестановки элементов в векторе) определяется выражением

$$\tilde{a}_j = \tilde{P}_{\delta a_j} \begin{bmatrix} \bar{b}_{(K)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{Q}_{(K)} + \mu^2 d_{glob}^{-2} I_1)^{-1} & 0 \\ 0 & \mu^{-2} d_{glob}^2 I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_{(K)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{Q}_{(K)} + \mu^2 d_{glob}^{-2} I_1)^{-1} \bar{b}_{(K)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где  $\bar{b}_{(K)}$  – часть вектора  $b_{(K)}$ , соответствующая подматрице  $\bar{Q}_{(K)}$ .

Поясним геометрический смысл редукции информационной матрицы  $Q_{(K)}$ . Можно показать, что при малых значениях  $\varepsilon^2 \sigma_{glob}^{-2}$  в результате редукции  $Q_{(K)}$  обнуляются СК в узлах, удаленных от участка съемки.

Далее по найденным оценкам вектора СК  $\tilde{a}_j$  и матрицы ковариаций их ошибок  $\tilde{P}_{\delta a_j}$  с помощью дискретного варианта формулы (3) вычисляются векторы ВК  $\tilde{c}_j$  и матрицы ковариаций ошибок  $\tilde{P}_{\delta c_j}$  на уровнях детализации  $j = j_0, \dots, J-1$ . Квадратурная формула, используемая при дискретизации (3), аналогична (7) с теми отличиями, что множество узлов эквиангулярной сетки определено на большем участке (за счет удвоения радиуса окрестности суммирования при уменьшении на единицу уровня детализации) и имеет удвоение шага по сферической ко-широте и долготе при уменьшении на единицу уровня детализации. Схема алгоритмов методики изображена на рис. 2.

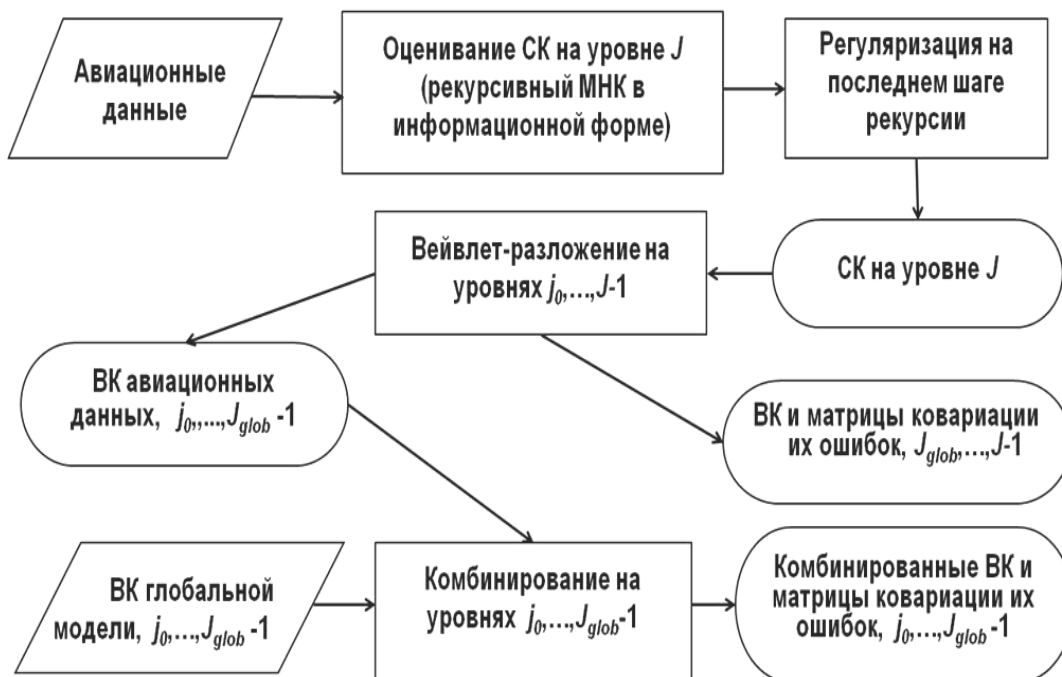


Рис. 2. Схема методики локального уточнения авиационных данных по глобальной модели

### Комбинирование вейвлет-коэффициентов (ВК) данных аэрогравиметрии и глобальной модели

Поставим задачу уточнения ВК данных аэрогравиметрии  $\tilde{c}_j$  по данным глобальной модели гравитационного поля Земли. Будем предполагать, что данные глобальной модели представлены в виде набора ВК  $c_j^{glob}$  (вычисленных на том же множестве узлов, что и  $\tilde{c}_j$ ) и матриц ковариаций их ошибок  $P_{\delta c_j}^{glob}$  на уровнях детализации  $j=j_0, \dots, J_{glob}-1$ . В связи с более высоким пространственным разрешением данных аэрогравиметрии справедливо соотношение  $J_{glob} \leq J$ . Предполагается некоррелированность ошибок ВК как данных аэрогравиметрии, так и глобальных данных на разных уровнях детализации. В таком случае задача оптимального оценивания ВК на общих уровнях детализации может быть поставлена в виде

$$\|\tilde{c}_j - c_j\|_{\tilde{P}_{\delta c_j}^{-1}}^2 + \|c_j^{glob} - c_j\|_{P_{\delta c_j}^{glob}}^2 \rightarrow \min, \quad j=j_0, \dots, J_{glob}-1, \quad (17)$$

где  $c_j$  – вектор искомого ВК. Решение (17) сводится к алгоритму метода наименьших квадратов, задаваемому следующими формулами:

$$\tilde{P}_{\delta c_j}^+ = [\tilde{P}_{\delta c_j}^{-1} + (P_{\delta c_j}^{glob})^{-1}]^{-1}, \quad (18)$$

$$\tilde{c}_j^+ = \tilde{P}_{\delta c_j}^+ [\tilde{P}_{\delta c_j}^{-1} \tilde{c}_j + (P_{\delta c_j}^{glob})^{-1} c_j^{glob}], \quad j=j_0, \dots, J_{glob}-1, \quad (19)$$

где через  $\tilde{c}_j^+$  обозначен результат совместного оценивания ВК данных аэрогравиметрии и глобальной модели;  $\tilde{P}_{\delta c_j}^+$  – матрица ковариаций ошибок оценки. Отметим, что вместо (18), (19) может быть использована ковариационная форма метода наименьших квадратов:

$$\begin{aligned} L_j &= \tilde{P}_{\delta c_j} (\tilde{P}_{\delta c_j} + P_{\delta c_j}^{glob})^{-1}, \\ \tilde{P}_{\delta c_j}^+ &= (I - L_j) \tilde{P}_{\delta c_j}, \\ \tilde{c}_j^+ &= (I - L_j) \tilde{c}_j + L_j c_j^{glob}. \end{aligned} \quad (20)$$

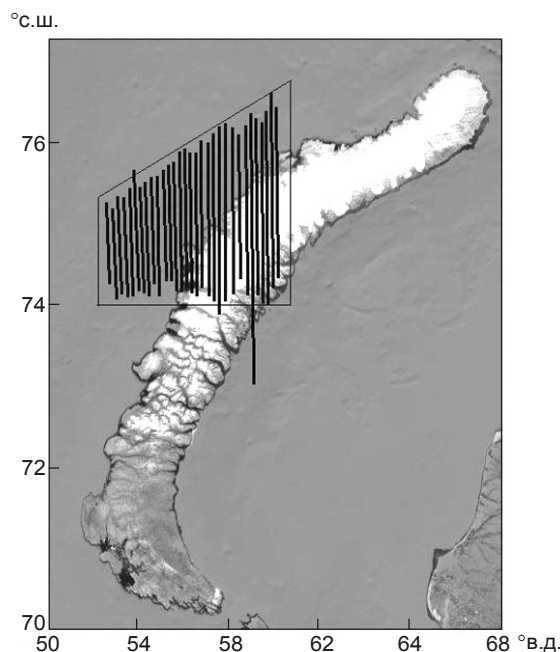
### Результаты обработки реальных данных

С помощью предложенных алгоритмов были обработаны результаты аэрогравиметрических измерений, выполненных в 2010 г. в районе Новой Земли Лабораторией гравиинерциальных измерений<sup>1</sup> Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН [Болотин и др., 2013]. Для измерений использовался гравиметр *GT-1A*; длина волны гравиметрического фильтра –  $L=10$  км; частота его выходных данных – 1 Гц. Ошибки измерений до фильтрации примерно соответствуют модели белого шума на частоте 1 Гц со среднеквадратическим отклонением 50 мГал. При определении аномалии силы тяжести в свободном воздухе нормальная сила тяжести рассчитывалась по формуле Гельмерта с поправкой –14 мГал и с поправкой для высоты  $0.3086h$ , где  $h$  – высота над референц-эллипсоидом.

Измерения проводились по сети параллельных галсов (рис. 3). Для тестирования алгоритмов был выбран 31 галс со следующими характеристиками: географическая широта региона съемки –  $74^\circ-76^\circ$ ; расстояние между галсами – 4 км; максимальное значение аномалии – 82.6 мГал, минимальное – –5.0 мГал; высота полетов самолета – 3500–4700 м (средняя высота – 3900 м); скорость полета – 100 м/с; азимуты полета –  $-5^\circ$  и  $175^\circ$ .

<sup>1</sup> Заведующий лабораторией – д.т.н. В.Н. Конешов.

**Рис. 3.** Схема расположения участка съемки в регионе исследований. Сплошные параллельные линии – галсы



По авиационным данным с помощью алгоритма (11)–(16) проведено оценивание СК на уровне  $J=10$ , соответствующем величине  $\Delta=4$  км (минимум из  $L/2$  и расстояния между галсами). Предварительно из авиационных данных вычиталось методическое смещение, определенное с помощью глобальной модели *EGM2008* и равное  $-17.2$  мГал.

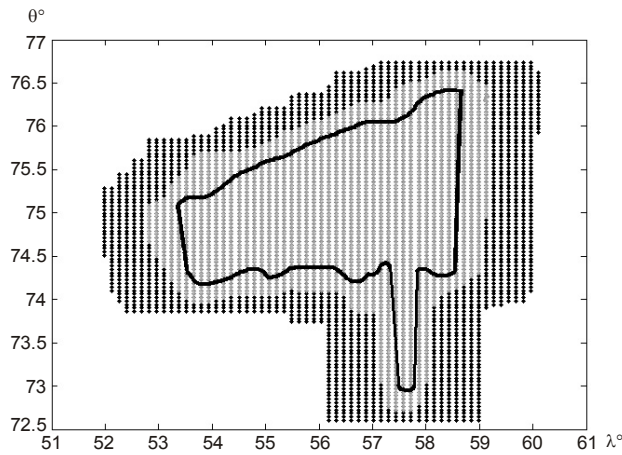
Узлы эквиангулярной сетки определены на сфере  $\Omega_R$  радиуса  $R=6360.8$  км. Шаг сетки по сферической ко-широте  $\Delta\theta=0.045^\circ$ , что эквивалентно половине минимальной длины волны  $L/2$  гравитационной аномалии, определяемой на галсе ( $L/2=5$  км). Шаг по долготе  $\Delta\lambda$ , составляющий  $0.13^\circ$ , эквивалентен расстоянию между галсами (4 км). Окрестность суммирования в (7) выбрана в виде прямоугольной области на плоскости широта–долгота.

Величина порога для редукции информационной матрицы  $Q_{(K)}$  на последнем шаге рекурсии  $K=31$  выбрана в соответствии с информацией о среднеквадратической погрешности  $\sigma_{glob}$  данных глобальной модели *EGM2008*. Значение  $\sigma_{glob}$  на широтах участка съемки порядка 30 мГал (в гармоническом разложении аномалии силы тяжести до степени 1800); настроечный безразмерный параметр  $\varepsilon$  принят равным 1; с учетом этих параметров величина порога  $\varepsilon^2 \sigma_{glob}^{-2}$  составляет  $0.001$  мГал $^{-2}$ .

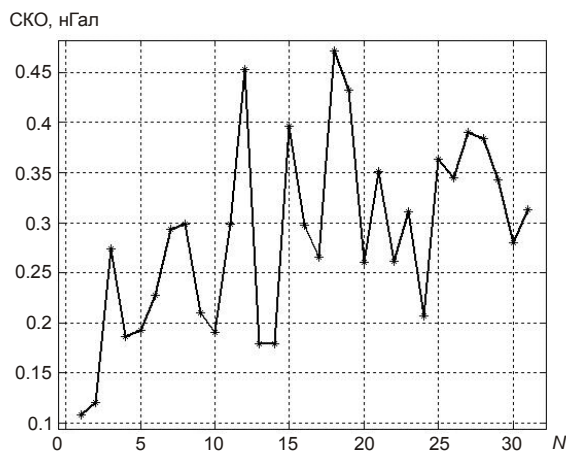
Рассчитанное по глобальной модели значение вариации СК аномалии силы тяжести в регионе съемки  $d_{glob}^2$  равно 140 мГал $^2$ . Параметр регуляризации  $\mu$  принят равным 0.1. Значение  $\mu$  настраивалось так, чтобы уменьшить ошибку восстановления аномалии силы тяжести по оцениваемым СК на галсах, уменьшая в то же время вариацию оцениваемых СК в регионе съемки. Отметим, что регуляризация в форме (15) сохраняет физический смысл ковариационной матрицы ошибки оценки СК (плохо оцениваемые и обнуленные СК имеют большие дисперсии), что важно для корректного комбинирования данных.

На рис. 4 изображено расположение узлов, в которых СК либо оценены (области светлой заливки), либо обнулены в ходе редукции информационной матрицы (области темной заливки). Можно видеть, что как и ожидалось, обнулены лишь СК в удаленных от участка съемки узлах.

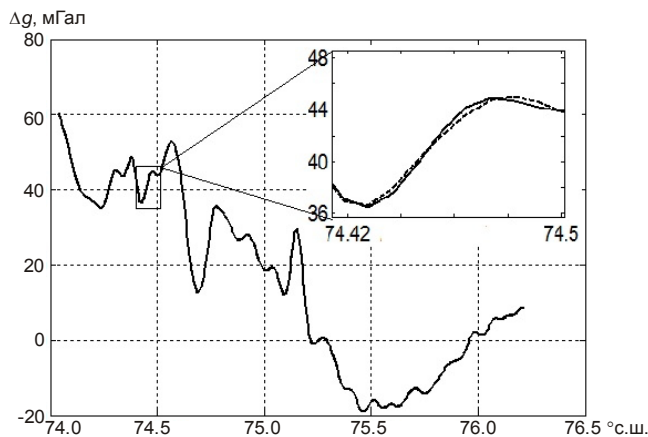




**Рис. 4.** Расположение множества узлов, в которых скейлинг-коэффициенты (СК) оценены (область светлой заливки) и обнулены (область темной заливки). Замкнутый контур – граница участка съемки



**Рис. 5.** График среднеквадратического отклонения ошибки восстановления аномалии силы тяжести на каждом галсе (СКО, мГал).  $N$  – номер галса



**Рис. 6.** Галс 18. Графики аномалии силы тяжести ( $\Delta g$ , мГал) по авиационным измерениям (сплошная линия) и результатам восстановления по оценкам СК (пунктирная линия)

По найденным СК с использованием формулы (4) восстанавливались аномалии силы тяжести на галсах. График среднеквадратического отклонения ошибки восстановления на каждом галсе представлен на рис. 5. Значения СКО составляют порядка 0.1 мГал.

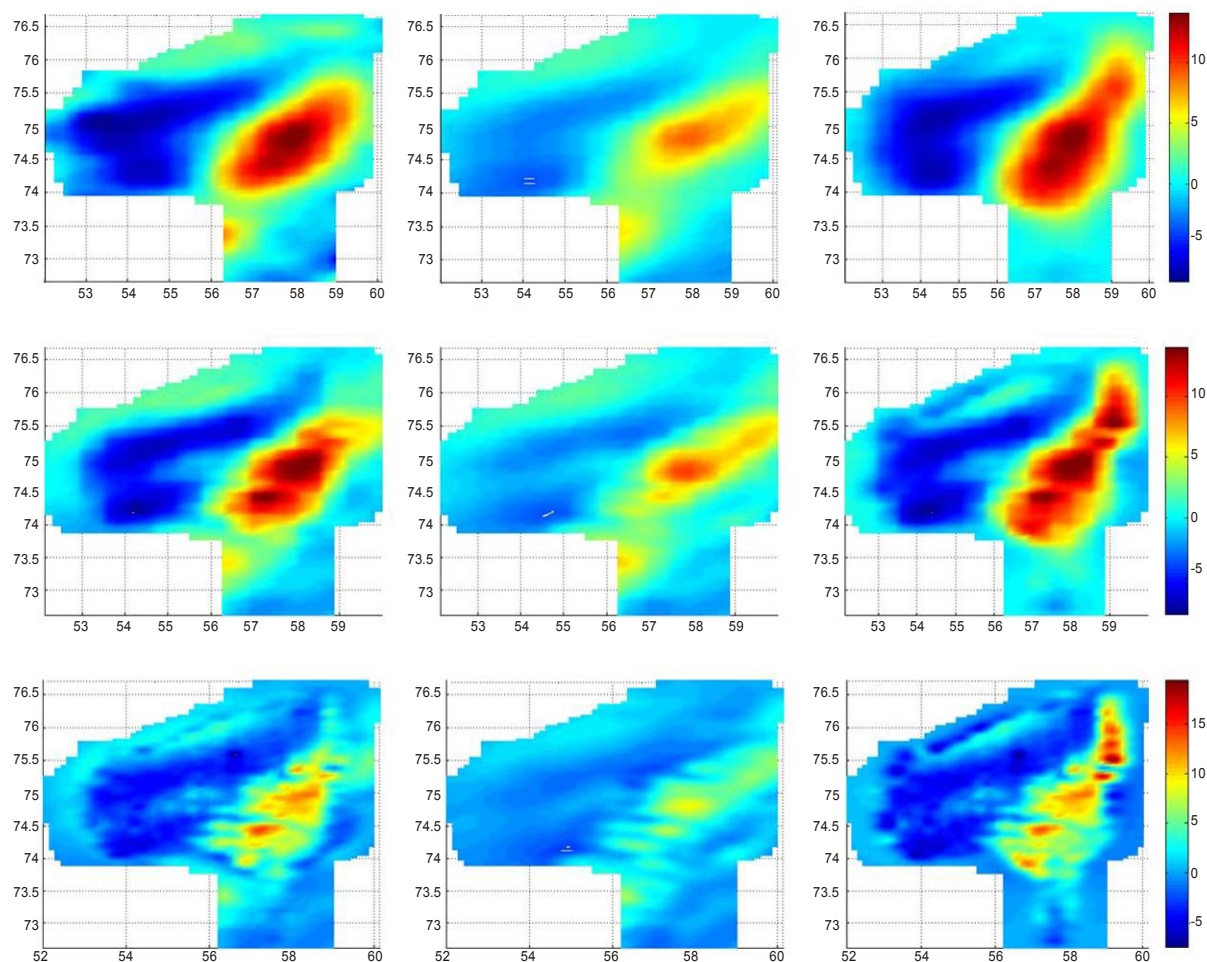
В результатах восстановления практически отсутствуют эффекты Гиббса на краях галсов. Пример восстановления аномалии силы тяжести на галсе 18 приведен на рис. 6.

Далее по найденным СК авиационных данных и матрице ковариаций их ошибок были вычислены ВК аномалии силы тяжести авиационных данных и матрицы ковариаций их ошибок на уровнях  $j=7-9$ .

Для уточнения результатов обработки данных аэрогравиметрии использовалась глобальная модель *EGM2008* (максимальная степень гармоники 2159). ВК глобальной модели рассчитывались на уровнях  $j=7-9$  в тех же узлах, что и ВК авиационных данных. Использовался интегральный метод (3) расчета ВК глобальной модели по значениям аномалии силы тяжести, предварительно вычисленным по гармоническим коэффициентам до степени 1800.

Аномалия рассчитана на сфере  $\Omega_R$  в узлах эквиангулярной сетки, использованной при вычислении СК авиационных данных. Матрица ковариаций ошибок измерения в данных об аномалии силы тяжести глобальной модели рассчитана по дисперсиям ошибок гармонических коэффициентов, которые также предоставлены в *EGM2008*. Затем по этой матрице определены матрицы ковариаций ошибок ВК глобальной модели на уровнях  $j=7-9$ . В расчетах предполагалась некоррелированность ошибок гармонических коэффициентов *EGM2008*.

Комбинирование ВК данных аэрогравиметрии и *EGM2008* на уровнях  $j=7-9$  выполнено с помощью алгоритма (20). Результаты комбинирования приведены на рис. 7 и в таблице.



**Рис. 7.** Графики вейвлет-коэффициентов (ВК, мГал) аномалии силы тяжести на уровнях детализации 7 (верхний ряд), 8 (средний), 9 (нижний). В каждом ряду: результат комбинирования ВК авиационных и глобальных данных (слева), ВК глобальных данных (в центре), ВК авиационных данных (справа). На горизонтальных осях – долгота,  $\lambda^\circ$ ; на вертикальных – сферическая широта,  $\theta^\circ$

## Результаты комбинирования данных

Уровень	Разрешение, км	$S_{glob}$ , мГал	$S_{avia}$ , мГал
7	16	2.3	2.0
8	8	2.3	2.0
9	4	2.0	2.2

*Примечание:*  $S_{glob}$  – СКО разности между комбинированными и глобальными ВК,  $S_{avia}$  – СКО разности между комбинированными и авиационными ВК.

По графикам результатов комбинирования на каждом уровне детализации прослеживается коррекция алгоритмом множества ВК данных аэрогравиметрии на краях области по ВК глобальной модели. Скорректированы также “выбросы”, вызванные регуляризацией.

### Заключение

Авторами предложена методика локального оценивания аномалии силы тяжести по данным аэрогравиметрии и глобальной модели гравитационного поля Земли на основе сферического многомасштабного представления. Алгоритмы методики позволяют корректно обрабатывать данные полетов, проводимых на разных высотах. Наблюдается существенное снижение эффектов Гиббса в результатах оценивания и восстановления аномалии на краях участка съемки.

С помощью предлагаемых алгоритмов выполнено комбинирование аэрогравиметрических данных района Новой Земли и данных модели *EGM2008*. СКО ошибки восстановления аномалии силы тяжести на галсах порядка 0.1 мГал.

Следует отметить, что алгоритмы содержат методическую погрешность, связанную с тем, что на этапе комбинирования вейвлет-коэффициентов данных аэрогравиметрии и глобальной модели вводится предположение о некоррелированности ошибок вейвлет-коэффициентов тех и других данных на разных уровнях детализации, хотя в действительности эти ошибки сильно коррелированы. Оценка величины этой погрешности требует дальнейших исследований.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00604-а).

### Литература

- Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. М.: Физматлит, 2005. 376 с.
- Болотин Ю.В., Вязьмин В.С. Сферический вейвлет-анализ аэрогравиметрических данных // Геофизические исследования. 2012. Т. 13, № 2. С.33–49.
- Болотин Ю.В., Голован А.А., Конешов В.Н., Смоллер Ю.Л., Юрист С.Ш., Федорова И.П., Hewison W., Richter T., Greenbaum J., Young J., Blankenship J. Использование аэрогравиметра GT2A в полярных областях // Труды Симпозиума Международной ассоциации по геодезии (IAG): Наземная, морская и аэрогравиметрия: измерения на неподвижных и подвижных основаниях. Санкт-Петербург, 2013. С.21–23.
- Боярский Э.А., Конешов В.Н., Курмаева А.Ш., Хачиян Т.П. Анализ морских гравиметрических съёмок с помощью двумерных кубических сплайнов // Гравиинерциальные приборы и измерения. М.: ИФЗ АН СССР, 1985. С.72–82.
- Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Физматлит, 2001. 630 с.
- Торге В. Гравиметрия. М.: Мир, 1999. 428 с.

- Bolotin Y.V., Yurist S.S.* Suboptimal smoothing filter for the marine gravimeter GT-2M // *Gyroscopy and Navigation*. 2011. V. 2 (3). P.152–155.
- Freeden W., Schneider F.* Wavelet approximation on closed surfaces and their application to boundary-value problems of potential theory // *Math. Meth. Appl. Sci.* 1998. V. 21. P.129–165.
- Kern M., Schwarz K.P., Sneeuw N.* A study on the combination of satellite, airborne and terrestrial gravity data // *J. Geod.* 2003. V. 77. P.217–225.
- Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K.* The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008) // *J. Geophys. Res.* 2012. V. 117 (B04406). P.1–38.
- Schmidt M., Fengler M., Mayer-Gürr T., Eicker A., Kusche J., Sanchez L., Han S.-C.* Regional gravity modeling in terms of spherical base functions // *J. Geod.* 2007. V. 81. P.17–38.
- Tscherning C.C.* Local approximation of the gravity potential by least squares collocation // *Proceedings of the International Summer School on Local Gravity Field Approximation*. Calgary. 1985. P.277–362.

#### *Сведения об авторах*

**ВЯЗЬМИН Вадим Сергеевич** – научный сотрудник лаборатории управления и навигации механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. 119992, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, уч. корп. 2. Тел.: 8 (495) 939-59-33. E-mail: v.vyazmin@navlab.ru

**БОЛОТИН Юрий Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной механики управления механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. 119992, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, уч. корп. 2. Тел.: +7 (495)939-59-33. E-mail: ybolotin@yandex.ru

## **LOCAL MULTISCALE ESTIMATION OF THE GRAVITY ANOMALY FROM AEROGRAVITY DATA**

Yu.V. Bolotin, V.S. Vyazmin

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

**Abstract.** This paper is focused on the local gravity anomaly estimation from aerogravity data. Multiscale analysis based on the harmonic spherical wavelet transforms is applied while solving the problem. At the beginning coefficients of the gravity wavelet transform were estimated from the aerogravity data. Then the coefficients were refined using the Earth's global gravity field model. The results of the real aerogravity data processing are discussed.

**Keywords:** aerogravity, spherical wavelets, estimation.