

УДК 551.517

## ВИХРИ И ТОРНАДО В МЕЗОМАСШТАБНОЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ: ТРЕХМЕРНАЯ ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТОРНАДО<sup>1</sup>

© 2014 г. В.Н. Николаевский, А.Ю. Губарь

*Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия*

Концепция однородной турбулентности распространяется на случай постоянства градиента средней скорости, что применимо к стратифицированной атмосфере и дифференциальным объемам в любой модели континуума. Такой подход позволяет освежить в памяти основные идеи А.Н. Колмогорова и показать, что они находятся в полном соответствии с возможностью представления псевдовектора угловой скорости в качестве внутреннего параметра для термодинамически открытой турбулентной системы, если масштаб дифференциальной сетки превышает размер мезовихрей.

Описание континуума формулируется в стандартном представлении Коши о тензоре напряжений, усредненных по сечениям представительной пространственной ячейки; возможность асимметрии тензора является следствием баланса углового момента мезовихрей. В результате получена нелинейная система трехмерных уравнений мезомасштабной турбулентности, численное решение которой отвечает процессу образования торнадо из начального облака мезовихрей. Зависимость коэффициентов турбулентной вращательной вязкости от спина мезовихрей в силу эффекта нелинейной диффузии позволяет локализовать течение в торнадоподобный макровихрь.

Численные расчеты производились на различных кластерах с помощью среды параллельного программирования *Parjava*. Представлены графические материалы, демонстрирующие рост типичных структур торнадо, включая вторичные мезовихри, вращающиеся внутри стены глаза торнадо. Выполнено сравнение этих структур с мезовихрями глаза урагана Изабель 12–13.09.2003 г.

**Ключевые слова:** торнадо, вихри, турбулентность, угловой момент, скейлинг.

### Введение

Важный вклад в теорию турбулентности Тейлора [1935] был внесен А.Н. Колмогоровым [1985], предложившим, во-первых, отказаться от изотропии пульсаций поля скорости, но сохранив ее для пульсаций градиентов. Введение им в 1941 г. понятия локальной изотропии стало прорывом на пути к изучению полей скорости, отличных от поля с постоянством средней скорости. Во-вторых, было предложено считать поток энергии основным параметром в процессе каскада передачи энергии в движения микромасштабного уровня, что совпало с принципом Шрёдингера [1947] для термодинамически открытых систем. В-третьих, А.Н. Колмогоров предложил использовать частоту вращения вихрей как дополнительный кинематический параметр.

Как и в континууме Коссера [Cosserrat, 1909], избыточный спин турбулентных мезовихрей фактически следует рассматривать как вектор их собственной угловой скорости. Такое рассмотрение связывает асимметрию турбулентного потока с градиентом средней скорости, что типично для стратифицированной атмосферы, исследованной самим А.Н. Колмогоровым. При этом для представительного описания турбулентного континуума следует, помимо балансов масс и импульса, рассматривать и баланс углового момента в ячейке осреднения.

<sup>1</sup> Статья основана на лекции авторов в Российском новом университете на симпозиуме “Современные проблемы математики. В память об Андрее Николаевиче Колмогорове” 13–14 сентября 2011 г.

Ниже показано, что эти предположения достаточны для построения теории мезомасштабной турбулентности, эффективной для описания процесса образования торнадо; другие приложения мезомасштабной теории турбулентности приведены в монографиях [Nikolaevskiy, 2003; Арсеньев и др., 2010]; о турбулентности в трубах и каналах см. также работы [Бабкин, Николаевский, 2011; Бабкин, 2013].

### О симметрии тензора напряжений

Все теории турбулентности предполагают справедливость уравнений Навье–Стокса для описания полей в микромасштабе в каждый данный момент. Построение уравнений, описывающих процесс в макромасштабе, должно предполагать, что шкала осреднения больше характерных размеров турбулентных мезовихрей. Практически имеются две различные шкалы для эффективного описания турбулентности. Во-первых, существует элемент дифференциального микрообъема  $dx^3$ , удельный момент инерции которого ничтожен из-за малости его размера по сравнению с квадратом мезомасштаба:  $I/dx^3 \sim dx^2 \ll \lambda^2$ . Во-вторых, есть элементарный дифференциальный объем макромасштаба  $\Delta X^3$ , содержащий, по крайней мере, один мезовихрь масштаба  $\lambda$ . И, поскольку в развитой турбулентности такие мезовихри обладают достаточно большим угловым моментом, нельзя исключать как уравнения баланса момента инерции масс, так и уравнения моментов количества движения мезомасштаба.

Поскольку элементарный дифференциальный макрообъем  $\Delta X^3$  выбирается, естественно, гораздо меньшим, чем внешняя шкала краевой задачи макромасштаба  $L$ , в нем должны отражаться градиенты переменных макромасштаба – от средней скорости до напряжений Рейнольдса, – что и требует рассмотрения при осреднении всех балансов, включая балансы момента инерции и углового момента.

Таким образом, адекватное статистическое описание должно быть однородным по градиентам осредненных (наблюдаемых) переменных. Поэтому случайное поле скоростей  $w_i$  должно зависеть, по крайней мере, от одного макровектора. Далее, поскольку расстояние  $r$  между двумя точками также является вектором, то соответствующий корреляционный тензор, имеющий вид  $C_{ij}(\vec{X}, \vec{r}) = \langle w_i(\vec{X}) w_j(\vec{X} + \vec{r}) \rangle$ , где  $w_i = u_i - U_i$  и  $\langle f(\vec{X}) \rangle = 1/\Delta X^3 \iiint_{\Delta X^3} f(\vec{X} + \vec{\xi}) d^3 \xi$ , также, в общем случае, не симметричен, являясь функцией угла между  $\mathbf{r}$  и флуктуацией скорости. Впервые это обстоятельство было отмечено в книге [Nikolaevskiy, 2003], где однородная турбулентность определялась в смысле однородности градиента средней скорости. В силу существования градиента средней скорости зеркальное отражение изменяется и при введении статистических средних. Именно поэтому введение спина мезовихря  $\omega$  (как и других псевдовекторов) в качестве дополнительной кинематической переменной вполне допустимо при построении мезомасштабной теории турбулентности.

Тензор напряжений Рейнольдса  $R_{ji} = \langle \rho w_j w_i \rangle$  необходимо представлять только с помощью исходного для механики метода Коши как передачу пульсации импульса  $\rho w_j$  с пульсационной скоростью  $w_i$  через площадку, ориентированную по нормали  $\vec{e}_i$ :

$\langle f(\vec{X}) \rangle_i = 1/\Delta X^2 \int_{-\Delta X/2}^{\Delta X/2} \int_{-\Delta X/2}^{\Delta X/2} f(\vec{X} + x_j \vec{e}_j + x_k \vec{e}_k) dx_j dx_k$ , где  $(i, j, k)$  – четная перестановка  $(1, 2, 3)$ ;  $\vec{X} \equiv \{X_1, X_2, X_3\} \equiv \{X, Y, Z\}$  – переменные макромасштаба;  $x_m$  – переменные микромасштаба, суммирования по повторяющимся индексам здесь нет.

Важным моментом является конечность масштаба осреднения  $\Delta X$  (при существенной малости отношения дифференциала макромасштаба к внешнему размеру задачи  $L$ :  $\Delta X/L \ll 1$ ). Чаще всего тензор напряжений  $R_{ij}$  при  $r \rightarrow 0$  идентифицируется со статистически осредненной передачей импульса  $t_{ij}$  через дифференциальную (в пределе – бесконечно малую) площадку  $dx^2$ . Однако результаты обоих осреднений могли бы совпадать только при эквивалентности статистики масштабов  $dx^2$  и  $\Delta X^2$ . Но при этом предельный переход  $r \rightarrow 0$  исключает зависимости любого тензора  $\rho C_{ij}$  от спина  $\omega$ , поскольку означает и обращение в нуль плеча углового момента, иначе и потенциальную неэквивалентность тензора напряжений в этих двух случаях.

### Осредненные уравнения

Уравнения балансов массы, импульса и момента для масштаба ячеек  $\Delta X$  больше, чем размер турбулентных вихрей шкалы  $\lambda$ , выводятся с помощью пространственного осреднения уравнений Навье–Стокса, справедливых для мезомасштабов  $dx$ , меньших  $\lambda$  [Николаевский, 1969; Nikolaevskiy, 2003]:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \rho \rangle + \partial_j \langle \rho u_j \rangle &= 0, \quad \partial_j = \partial / \partial x_j, \\ \partial_t \langle \rho u_i \rangle + \partial_j \langle \rho u_i u_j \rangle &= \partial_j \langle t_{ij} \rangle, \\ \partial_t \langle \varepsilon_{ilk} \rho \xi_l u_k \rangle + \partial_j \langle \varepsilon_{ilk} \rho \xi_l u_k u_j \rangle &= \partial_j \langle \varepsilon_{ilk} \xi_l t_{kj} \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Все функции под знаками осреднения в (1) пространственно стохастичны; тензор напряжений  $t_{ij}$  предполагается симметричным в масштабе  $dx$ ;  $\varepsilon_{ijk}$  – тензор Леви-Чевиты;  $\xi_i = x_i - X_i$ ;  $\langle \rho \xi_i \rangle = 0$ .

Результирующие уравнения для средних полей скорости  $U_i$ , углового момента  $M_i$  и давления  $P$  содержат<sup>1</sup> тензор напряжений Рейнольдса  $R_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_j \rho U_j &= 0, \quad \rho D_t U_i = \partial_j (R_{ij} - \delta_{ij} P), \\ \rho D_t M_i &= \partial_j \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} R_{kj}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\mu_{ij}$  – тензор моментных напряжений (*couple tensor*);  $M_i = J_{ij} F_j$  – удельный суммарный угловой момент;  $J_{ij}$  – тензор инерции мезовихрей<sup>2</sup>;  $F_i = \Omega_i + \omega_i$ ,  $\Omega_i = 0.5 \varepsilon_{ijk} \partial_j U_k$ , и  $\omega_i = 0.5 \varepsilon_{ikj} \langle \rho \delta w_j / \partial \xi_k \rangle / \rho$  – вектора суммарной, макро- и мезозавихренностей, соответственно<sup>3</sup>. Традиционные законы замыкания теперь связывают антисимметричную часть тензора Рейнольдса с внутренним спином (мезозавихренностью), а моментные напряжения – с градиентом углового момента:

$$\begin{aligned} 1/2 \cdot (R_{ij} + R_{ji}) &= \rho K_1 (\partial_j U_i + \partial_i U_j), \\ 1/2 \cdot (R_{ij} - R_{ji}) &= \rho K_2 \varepsilon_{ijk} \omega_k, \\ \mu_{ij} &= \rho K_3 \partial_j M_i. \end{aligned} \quad (3)$$

Было построено [Nikolaevskiy, 2003] эволюционное уравнение для модифицированного момента инерции  $\tilde{J}_{ij} = \langle \rho \xi_i \xi_j \rangle / \rho$ :

<sup>1</sup> Уравнения для углового баланса в континуальной форме впервые представлено в [Cosserat E. et F., 1909]; его неосознанное приложение к турбулентности осуществлено в [Mattioli, 1937]. Однако собственная “завихренность” (спина) турбулизованного флюида внесена в схему 1937 г. в работе [Ferrari, 1972].

<sup>2</sup> Понятие тензора инерции вихря впервые обсуждалось в [Poincare, 1893], а затем использовалось авторами работы [Eringen, Chang, 1970], а также в [Бэтчелор, 1973; Arnold, Khesin, 1998].

<sup>3</sup> Здесь и далее  $\rho$  означает  $\langle \rho \rangle$ , если плотность стоит вне скобок осреднения.

$$\rho D_t \tilde{J}_{ij} = N_{ij} + N_{ji} + \tilde{q}_{ij}, \quad (4)$$

где  $N_{ij} = \rho \tilde{J}_{ik} U_{jk}$ ;  $\rho U_{ij} = \rho \partial_j U_i + \langle \rho \partial_i \bar{w}_j / \partial \bar{x}_j \rangle$ ;  $\tilde{q}_{ij} = \langle \rho \tilde{J}_{ik}^* U_{jk}^* \rangle - \partial_k \langle \rho \tilde{J}_{ij}^* w_k \rangle$ ; звездочками отмечены флуктуации, например:  $U_{ij}^* = \partial u_i / \partial x_j - U_{ij}$ . Уравнение для традиционного момента инерции  $J_{ij} = \delta_{ij} \tilde{J}_{ss} - \tilde{J}_{ij}$  соответственно имеет вид

$$\begin{aligned} \rho D_t J_{ij} &= \rho (B_{ij} + B_{ji}) + q_{ij}, \quad q_{ij} = \delta_{ij} \tilde{q}_{ss} - \tilde{q}_{ij}, \\ B_{ij} &= J_{ik} U_{jk} - 0.5 J_{pp} U_{ji} + \delta_{ij} (0.5 J_{pp} U_{ss} - J_{ps} U_{ps}). \end{aligned} \quad (5)$$

Необходимо отметить, что уравнения гидродинамики с антисимметричной частью тензора турбулентных напряжений позже были получены в теории вращательно-анизотропной турбулентности [Хейнлоо, 1984], которая обобщает классическую турбулентную механику на случай выделенной ориентации вихрей. Обобщение основано на включении радиуса кривизны  $R_c$  линий тока возмущений скоростей  $w$  в качестве дополнительного набора аргументов статистической функции распределения турбулентных движений. Такое включение позволяет определить в каждой точке флюида случайное поле  $M' = w \times R_c$ , имеющее физический смысл внутреннего углового момента, или спина турбулентного потока, что, в конечном итоге, также приводит к представлению тензора Рейнольдса в виде суммы симметричных и антисимметричных частей, аналогичному (3) [Heinloo, 2008].

В (3) используются суммарные кинематические коэффициенты вязкости  $K_i = v_i + K_{Ti}$ , включающие молекулярные ( $v_i$ ) и турбулентные ( $K_{Ti}$ ) части. Турбулентные коэффициенты вязкости  $K_{Ti}$ , подробнее обсуждаются в следующем разделе. Они существенно нелинейны, поскольку зависят от скорости диссипации энергии турбулентности.

Именно нелинейность приводит к локализации в атмосфере вихревых образований типа торнадо. Известным аналогом нелинейной локализации является “огненный шар”, образующийся при атомном взрыве в атмосфере, когда проявляется нелинейная зависимость теплопроводности газов от температуры [Brode, 1968].

### Уравнения для вращающейся сжимаемой сухоадиабатической атмосферы

При дальнейшем выводе используются три следующих предположения.

1. Турбулентные моли и их пульсации обладают сферической симметрией ( $J_{ik} = \delta_{ik} J$ ,  $J_{ik}^* = \delta_{ik} J^*$ ). Асимметрия привносится спином их вращения.

2. Правая часть уравнения (5) имеет вид дивергенции потока момента инерции (используется  $K$ -гипотеза с кинематическим коэффициентом вихреобмена  $K_4 = K_3$ ).

3. Атмосфера является сухоадиабатической.

При этих предположениях уравнения (2)–(5) во вращающейся атмосфере будут иметь вид [Арсеньев и др., 2010]:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_j \rho U_j &= 0, \\ \rho D_t U_i &= \partial_j (\rho K_1 2e_{ij} - \delta_{ij} P) + \varepsilon_{ijk} \partial_j (\rho K_2 \omega_k) - \rho g \delta_{i3} + 2\varepsilon_{ijk} \rho U_j \Theta_k, \\ \rho D_t J &= \partial_j (\rho K_3 \partial_j J), \\ \rho D_t M_i &= \partial_j (\rho K_3 \partial_j M_i) - 2\rho K_2 \omega_i + \varepsilon_{ijk} \rho M_j \Theta_k, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $e_{ij} = 0.5(\partial_i U_j + \partial_j U_i)$  – тензор скоростей деформации;  $\Theta = \Theta_0 \cdot \{\cos \varphi_0; 0; \sin \varphi_0\}$  – вектор угловой скорости Земли;  $\Theta_0 = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$  – угловая скорость вращения Земли;  $\varphi_0$  – широта. Используется приближение  $\beta$ -плоскости для сил Кориолиса, справедли-

вое для широт выше  $10^\circ$  и макромасштабов, не превышающих 300 км. Оси  $\{x(X_1), y(X_2), z(X_3)\}$  направлены соответственно на юг, восток и в зенит. Атмосфера считается идеальным двухатомным газом; причем уравнения состояния и адиабаты принимаются справедливыми для осредненных термодинамических функций  $P, \rho, T$ . В коэффициентах суммарной вязкости  $K_i = \nu_i + K_{Ti}$ , согласно [Арсеньев, Губарь, Шелковников, 2007],  $\nu_1 = \nu_3$  – кинематический коэффициент молекулярной вязкости (для воздуха  $\nu_1 = 0.15 \text{ см}^2/\text{с}$ );  $\nu_2 = 0$ ; коэффициенты турбулентной вязкости предполагаются значительно большими, чем молекулярные –  $K_{Tk} \gg \nu_k$ .

При адиабатических движениях  $\rho D_t S = 0$  и, следовательно,

$$\rho D_t E_{in} = -P \partial_j U_j, \quad (7)$$

где  $S$  и  $E_{in}$  – удельные энтропия и внутренняя энергия. Общая плотность энергии в единице объема выражается формулой  $E = \rho(E_{macro} + E_{meso} + E_{in})$ , где  $E_{macro} = 0.5U^2$  и  $E_{meso} = 0.5JF^2$  – удельные кинетические энергии макро- и мезомасштабов. Используя (6)–(7), получаем следующее эволюционное уравнение для плотности суммарной энергии:

$$\partial_t E = \partial_j P_j - E_{dis} + W_g, \quad (8)$$

где  $P_j = U_i(R_{ij} - \delta_{ij}(P + E)) + \rho K_3 \partial_j E_{meso}$  – суммарная плотность потока энергии;  $W_g = -\rho g U_3$  – мощность силы тяжести на единицу объема;  $E_{dis} = \rho(2K_1 e_{ij}^2 + 2K_2 \omega^2 + JK_3 (\partial_j F_j)^2)$  – суммарная скорость диссипации энергии ( $\omega^2 = \omega_s^2$ ), положительная по определению, откуда следует и положительность кинематических вязкостей  $K_1, K_2, K_3 > 0$ .

Коэффициенты турбулентных вязкостей  $K_{Tn}$  имеют вид [Арсеньев и др., 2010]

$$K_{T1,3} = C_1 J \omega, \quad K_2 = \alpha_2 K_{T1}, \quad \alpha_2 = C_2 (\Lambda_1 / \Lambda)^p \ll 1, \quad p > 0. \quad (9)$$

Здесь  $\Lambda_1$  – субмезомасштаб  $\lambda_0 \ll \Lambda_1 \ll \lambda \leq \Lambda \ll L$ , где  $\lambda_0 \sim (\nu_1^3 / \varepsilon)^{1/4}$  – внутренний масштаб турбулентности;  $\varepsilon$  – скорость диссипации турбулентной энергии [Обухов, 1988]. Коэффициент  $C_1$  в нашей модели соответствует коэффициенту  $C$  в работе [Iovieno, Tordella, 2002], где предлагается несколько иная модель мезомасштабной турбулентности<sup>1</sup>.

Для скорости диссипации энергии турбулентности используется выражение, приводимое в [Арсеньев и др., 2010]:  $\varepsilon = E_{dis}^{(\Lambda)} = 2K_{2T} \omega^2 = 2C_1 J \omega^3$ , из которого следует, что формулы (9) согласуются с представлением Колмогорова – Обухова [Обухов, 1988]:  $K_T^{(\Lambda)} \sim (E_{dis}^{(\Lambda)} \Lambda^4)^{1/3} \sim J \omega$ .

В работе [Искендеров, Николаевский, 1991] было отмечено, что в атмосфере имеется фоновая мезозавихренность  $\omega_{bk}$ , соответствующая некоторому фоновому мезомасштабу  $\Lambda_{bk} \cong \sqrt{J_{bk}} \ll \Lambda$ . В качестве упрощения в (9) вместо  $J$  мы используем некоторое характерное постоянное значение момента инерции  $\bar{J}_0$  вместо  $J$ ; при этом выражения для суммарных кинематических коэффициентов вязкости принимают вид:

$$K_{1,3} = A f(\omega), \quad K_2 = \alpha_2 K_1, \quad (10)$$

где  $A = C_1 \bar{J}_0 (\omega_0 + \omega_{bk}) = \text{const}$  – значение коэффициента суммарной кинематической вязкости в начальный момент,  $\omega_0 = \|\omega(0, X)\|_C$ ; а безразмерная функция  $f(\omega)$  имеет вид

$$f(\omega) = (\omega + \omega_{bk}) / (\omega_0 + \omega_{bk}). \quad (11)$$

<sup>1</sup> Эти авторы не поняли нашего принципа осреднения и привели его искаженную форму.

### Начально-краевая задача и метод ее численного решения

В используемой модели для атмосферы как идеального двухатомного газа справедливы уравнения адиабаты:  $\ln(\rho / \rho_0) = 2.5 \ln(T / T_0)$ ,  $\ln(P / P_0) = 3.5 \ln(T / T_0)$ , а начальное распределение температуры по высоте является сухоадиабатическим:  $T(x, y, z, 0) = T_a(z) = T_0(1 - \gamma_a z)$ . Здесь нулевые индексы соответствуют значениям стандартной атмосферы на уровне моря;  $T_0 \gamma_a = g / C_p \approx 0.0098 \text{ Км}^{-1}$  – сухоадиабатический градиент температуры;  $C_p \approx 1005 \text{ Дж}\cdot\text{кг}^{-1} \text{ К}^{-1}$  – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении.

Учитывая уравнения адиабаты и вводя новую независимую переменную  $a(x, y, z, t) = \ln(\rho(x, y, z, t) / \rho(x, y, z, 0))$ , уравнения (6) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \partial_t a &= -\hat{D}_j[U_j], \\ \partial_t U_i &= -U_j \partial_j U_i + A \left( f(\Delta U_i + \partial_i \partial_j U_j) + 2e_{ij} \phi_j + \alpha_2 \varepsilon_{ijk} \hat{D}_j[f \omega_k] \right) + \\ &\quad + \delta_{i3} g(\exp(0.4a) - 1) - c^2 \partial_i a + 2\varepsilon_{ijk} U_j \Theta_k, \\ \partial_t J &= -U_j \partial_j J + A(f \Delta J + \phi_j \partial_j J), \\ \partial_t F_i &= -U_j \partial_j F_i + A(f \Delta F_i + \phi_j \partial_j F_i + (2f / J)(\partial_j F_i)(\partial_j J) - \alpha_2 \omega_i) + \varepsilon_{ijk} F_j \Theta_k, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $a_{0z} = \partial_z \ln(\rho(x, y, z, 0) / \rho_0) = -2.5 \gamma_a / (1 - \gamma_a z)$ ;  $\hat{D}_j[B] \equiv \partial_j B + B(\partial_j a + \delta_{j3} a_{0z})$ ;  $\phi_j = \hat{D}_j[f]$ ;  $c^2 = c_0^2(1 - \gamma_a z) \exp(0.4a)$  – квадрат скорости звука;  $c_0^2 = (\partial / \partial \rho_a) P_a = (7 / 5) R_a T_0$  – его значение на уровне моря;  $R_a = 287.04 \text{ Дж}\cdot\text{кг}^{-1} \text{ К}^{-1}$  – стандартное значение газовой постоянной сухого воздуха;  $T_0 = 298 \text{ К}$  – среднегодовое значение температуры воздуха на уровне моря, а функция  $f$  определена в (11).

Уравнения (12) представляют собой систему восьми нелинейных уравнений с частными производными смешанного типа третьего порядка по пространственным переменным (поскольку  $F = \omega + 0.5 \text{rot} U$ ). Задача ставится в прямоугольной области  $D = \{|x|, |y| < L_1, 0 < z < H\}$  с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z = 0: \quad U_i &= 0, \quad \omega_z = 0, \quad -R_{kz} = \rho C_f |V| V_k, \quad (k = x, y), \quad J = J_{bk}, \\ z = H: \quad U_z &= 0, \quad \partial_z U_{x,y} = 0, \quad \omega_{x,y} = 0, \quad \partial_z F_z = 0, \quad \partial_z J = 0, \\ |x|, |y| = L_1: \quad \partial_n U_i &= \partial_n F_i = 0, \quad J = J_{bk}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $\partial_n$  – нормальные производные на соответствующих границах;  $J_{bk}$  – фоновый момент инерции;

$$V_k = \int_0^H U_k(x, y, z) dz / H; \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}; \quad R_{kz} = \rho A f (2e_{kz} + \alpha_2 \varepsilon_{kzj} \omega_j);$$

$$R_{kz} = \rho A f (2e_{kz} + \alpha_2 \varepsilon_{kzj} \omega_j);$$

$$C_f = 0.1375 (z_{rgh} / H)^{0.25},$$

где  $C_f$  – коэффициент трения;  $z_{rgh}$  – высота шероховатости.

Граничные условия по скорости соответствуют стандартным моделям расчетов интенсивных атмосферных вихрей [Хаин, Сутырин, 1983].

Начальные условия в цилиндрической системе координат  $(r, z, \phi)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} U_\phi &= U_0 f_{ur}(r/R_0) f_{uz}(z) \sigma(R_0 - r), \quad U_r = U_z = a = 0, \\ \omega_z &= \omega_0 f_{ur}(r/R_1(z)) f_{uz}(z) \sigma(R_1(z) - r), \quad \omega_r = \omega_\phi = 0, \\ J &= (J_0 - J_{bk})(1 - (r/R_1(z))^2) f_{uz}(z) \sigma(R_1(z) - r) + J_{bk}, \\ R_1(z) &= \sqrt{J_{bk}} + (0.5R_0 - \sqrt{J_{bk}}) \frac{2z}{H} \exp\left(1 - \frac{2z}{H}\right), \\ f_{ur}(\xi) &= 4\xi(1 - \xi), \quad f_{uz}(z) = \frac{\ln(1 + z/z_{rgh})}{\ln(1 + H/z_{rgh})}. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь  $R_0 = L$  – размер начального мезовихревого облака;  $U_0, \omega_0, J_0$  – начальные амплитуды скорости ветра, мезозавихренности и момента инерции;  $\sigma(r)$  – функция Хевисайда.

Начально-краевая задача (12)–(14) решалась численно с помощью модифицированного метода Рунге – Кутты – Адамса, называемого “чехарда” (МРКАч, английское название – *MRKA1*), который детально описан в [Аветисян и др., 2008].

Схема МРКАч условно устойчива и обладает вторым порядком точности по временным и пространственным переменным. Критерий устойчивости этой схемы близок к критерию явной схемы МакКормака [Флетчер, 1991]. Алгоритм в сокращенном виде можно описать следующим образом.

Пусть  $y_X^{(n)} = \{a; \vec{U}; J; \vec{F}\}_X^{(n)}$ ,  $u_X^{(n)} = \{\vec{U}; J; \vec{F}\}_X^{(n)}$  – значения соответствующих переменных в трехмерной сеточной точке  $X$  на временном слое  $t_n = n\tau$  (индекс  $X$  далее опускаем). Полагая известными значения на  $n$ -м и  $(n-1)$ -м слоях и используя простейшую интерполяцию Адамса, можно получить значения на временном подслое  $(n+1/4)$ :

$$y^{(n+1/4)} = 1.25y^n - 0.25y^{(n-1)}. \tag{15}$$

Тогда значения следующего временного слоя –  $(n+1)$ -го – рассчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u^{(n+1/2)} &= u^{(n)} + 0.5\tau\Pi_u[a^{(n+1/4)}; u^{(n+1/4)}], \\ a^{(n+1/2)} &= 0.5(a^{(n-1)} + a^{(n)}) + \tau\Pi_a[a^{(n)}; u^{(n)}], \\ \tilde{a}^{(n)} &= 0.5(a^{(n-1)} + a^{(n)}) + 0.5\tau\Pi_a[a^{(n)}; u^{(n)}], \\ u^{(n+1)} &= u^{(n)} + \tau\Pi_u[a^{(n+1/2)}; u^{(n+1/2)}], \\ a^{(n+1)} &= \tilde{a}^{(n)} + \tau\Pi_a[a^{(n+1/2)}; u^{(n+1/2)}], \end{aligned} \tag{16}$$

где  $\Pi_u, \Pi_a$  – правые части (12), записанные в форме конечных разностей.

Вычисления производились на следующих кластерах: *AMD Athlon XP 1500 + Myrinet* и *Dual-Core Intel® Xeon® 5160 Myrinet 2000* в Институте системного программирования РАН и на кластере *MVS1000M* (процессоры *Power 2.2 GHz, Myrinet, 2 Gbit/s*) в МВЦ РАН (*JSCC RAS*). Реализация вычислений на кластерах различной архитектуры без изменения исходного кода оказалась возможной благодаря использованию среды параллельного программирования *Parjava* [Ivannikov et al., 2003].

Распараллеливание осуществлялось двумерным разбиением расчетной области, что позволило сократить время обмена данными между параллельными вычислительными потоками. Вопросы оптимизации параллельных вычислений в зависимости от способа разбиения расчетной области, размера сеточных матриц и количества процессоров в кластере описаны в [Аветисян et al., 2007].

### Результаты численного моделирования

Далее представлены результаты численного моделирования начально-краевой задачи (12)–(14) при следующих основных размерных данных:  $2L_1=H=1500$  м,  $L=R_0=R_{in}=300$  м,  $U_0=V_{in}=1.5$  м/с,  $A=1000$  м<sup>2</sup>/с,  $z_{rgh}=0.1$  м. Безразмерные параметры счетной задачи имеют значения:  $\alpha_2=0.02$ ,  $\Pi_M=0.5(1+\omega_{rel})J_{rel}=750$ ,  $\Pi_V=0.5\alpha_2(1+\omega_{rel})=120$ , где  $\omega_{rel}=\omega_0R_0/U_0=\omega_0/\Omega_0$  и  $J_{rel}=J_0/R_0^2$ . Использование безразмерных параметров объясняется тем, что, как показано в [Арсеньев, Губарь, Николаевский, 2004; Арсенев и др., 2010], процесс образования торнадо в основном определяется величиной чисел подобия  $\Pi_M$ ,  $\Pi_V$ ,  $\alpha_2$ . Два оставшихся параметра –  $J_{bk}$  и  $\omega_{bk}$  – также заданы в безразмерной форме:  $J_{bkrel}=J_{bk}/J_0=0.05$ ;  $\omega_{bkrel}=\omega_{bk}/\omega_0=0.01$ . Количество узлов сетки –  $N_x=N_y=N_z=80$ ; размер ячейки –  $h=2L_1/N_x=\dots=H/N_z=18.75$  м; шаг по времени –  $\tau\cong 0.35$  с.

В ходе счета сохранялись значения всех восьми функций системы уравнений (12) в трехмерной сеточной области в моменты времени  $t_m=m\tau_{out}$ ,  $\tau_{out}\cong 10.34$  с,  $m=0, 1, 2, \dots, 16$ . Далее будут представлены лишь проекции скорости ветра в различных сечениях в определенные моменты времени, наиболее наглядно отображающие структуру торнадо.

Двумерные поля воздушных течений в центральном вертикальном сечении ( $y=0$  – рис. 1) и в горизонтальных сечениях на трех разных высотах ( $z=187.5$  м – рис. 2;  $z=750$  м – рис. 3;  $z=1125$  м – рис. 4) рассчитаны для последовательных моментов времени и представлены в виде серий на рис. 1–4. Векторные поля на каждом из рисунков нормализованы по максимальному значению в данном сечении в данный момент времени.

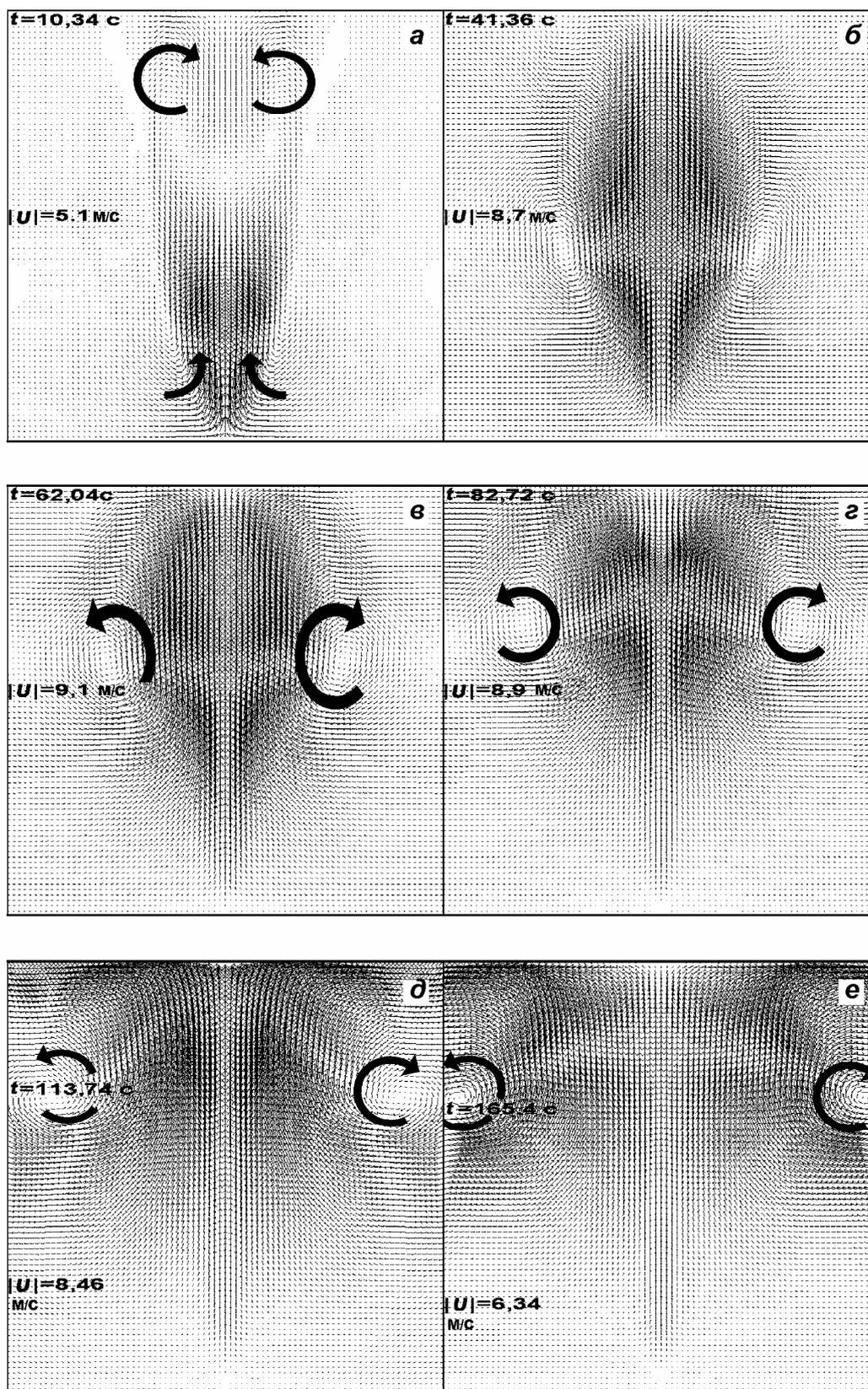
На рис. 1 представлены проекции вектора скорости ветра на плоскость  $XOZ$  –  $\vec{U}_{xz}=\sum_{k=1,3}\vec{e}_kU_k(x,0,z,t_m)$  в квадратной сеточной области  $\{|x|\leq 750$  м;  $0\leq z\leq 1500$  м $\}$  в последовательные моменты времени  $t_m$ :  $t_1=10.34$  с (а);  $t_4=41.36$  с (б);  $t_6=62.94$  с (в);  $t_8=82.72$  с (г);  $t_{11}=113.7$  с (д);  $t_{16}=165.4$  с (е). Для каждого момента времени на рисунке приведены значения среднеквадратичной скорости ветра  $|U|\equiv|U|(t_k)=\|\vec{U}(x,y,z,t_k)\|_{L_2(D)}$ .

Основные мгновенные центры вертикально-радиальной циркуляции на рис. 1 условно обозначены круговыми стрелками. Заметим, что в начальный момент, согласно (14), поле скорости ветра не обладало ни вертикальными, ни радиальными компонентами, а представляло собой циклоническое тангенциальное вращение с амплитудой азимутальной скорости  $U_0=1.5$  м/с.

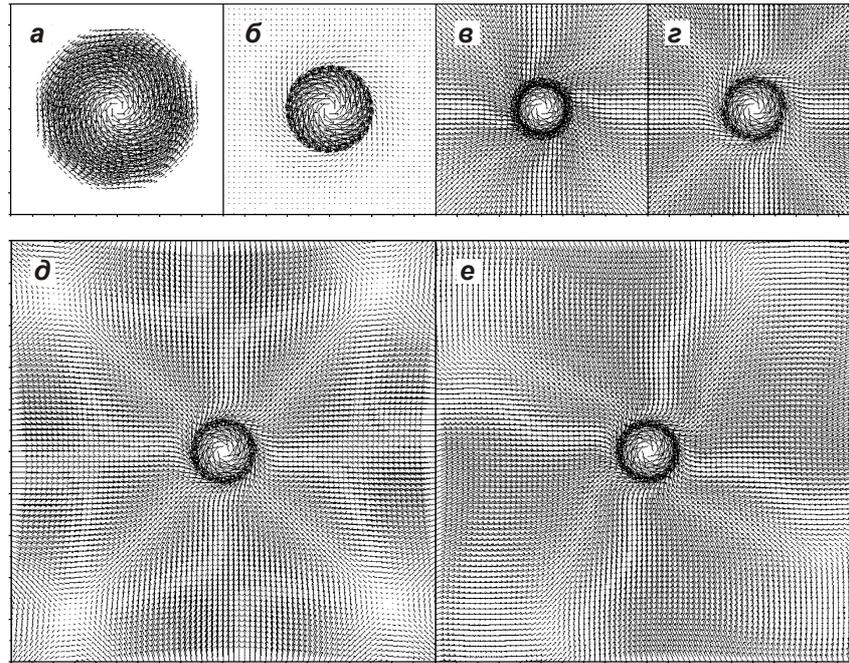
Вертикально-радиальная циркуляция ветра создается благодаря описываемому уравнениями (12) взаимодействию макроскорости (наблюдаемой скорости ветра) с мезовихрями. Энергия мезовихрей падает, питая растущую до определенного предела энергию ветра.

Показанные на рис. 1 основные мгновенные центры вертикально-радиальной циркуляции со временем поднимаются, отклоняясь от вертикальной оси торнадо. Вертикальные и радиальные компоненты ветра быстро растут, достигают максимума, затем, что характерно для торнадо, медленно затухают.

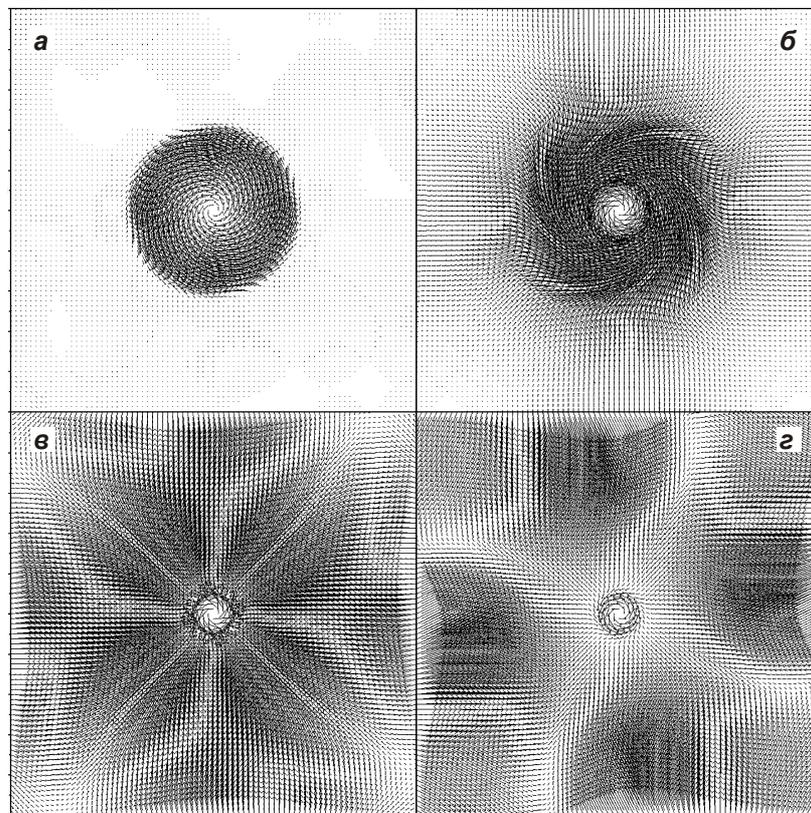
Макродвижения воздуха в целом можно описать как подсос приповерхностных слоев от периферии торнадо к его центру, после чего происходит подъем воздушных масс внутри стены глаза торнадо до высоты около километра, где наблюдается дивергенция и происходит отток воздуха к периферии. Наконец, периферийные верхние слои воздуха опускаются, замыкая тем самым вертикально-радиальную циркуляцию в торнадо.



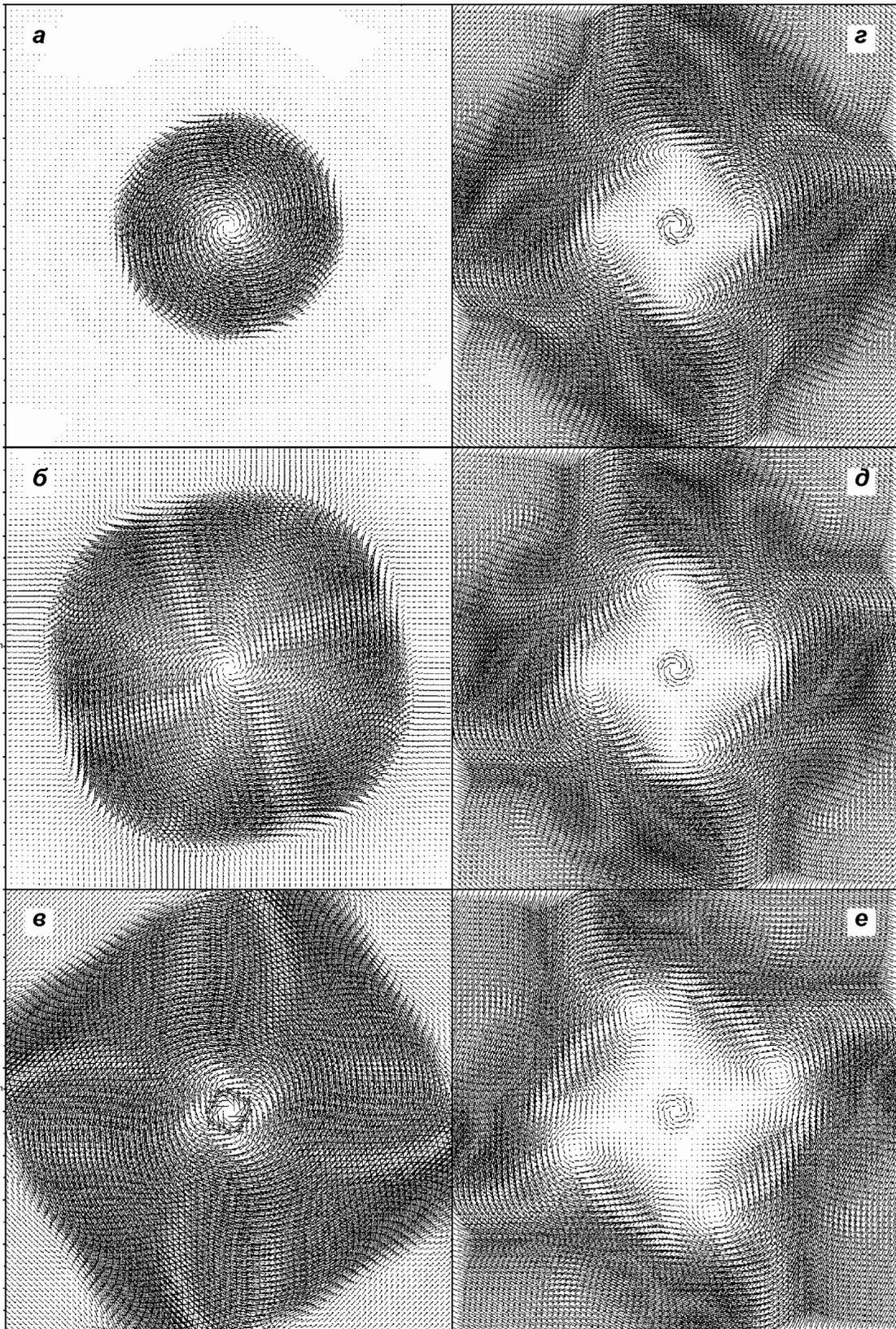
**Рис. 1.** Проекция вектора скорости ветра на плоскость  $X0Z$  в квадратной сеточной области  $\{|x|\leq 750$  м (по горизонтали);  $0\leq z\leq 1500$  м (по вертикали) $\}$  в разные моменты времени  $t_m$ . Описание см. в тексте



**Рис. 2.** Проекция вектора скорости ветра на плоскость  $XOY$  на высоте  $z = 187.5$  м:  $\vec{U}_{xy} \equiv \sum_{k=1,2} \vec{e}_k U_k(x, y, 187.5 \text{ м}, t_m)$  в квадратной сеточной области  $\{|x| \leq 750 \text{ м (по горизонтали); } |y| \leq 750 \text{ м (по вертикали)}\}$  в последовательные моменты времени  $t_m$ :  $t_0=0$  с (а);  $t_1=10.34$  с (б);  $t_4=41.36$  с (в);  $t_8=82.72$  с (г);  $t_{12}=124.1$  с (д);  $t_{16}=165.4$  с (е)



**Рис. 3.** Проекция вектора скорости ветра на плоскость  $XOY$  на высоте  $z = 750$  м:  $\vec{U}_{xy} \equiv \sum_{k=1,2} \vec{e}_k U_k(x, y, 750 \text{ м}, t_m)$  в квадратной сеточной области  $\{|x| \leq 750 \text{ м (по горизонтали); } |y| \leq 750 \text{ м (по вертикали)}\}$  в моменты времени  $t_m$ :  $t_2=20.7$  с (а);  $t_7=72.4$  с (б);  $t_{10}=103.4$  с (в);  $t_{16}=165.4$  с (г)



**Рис. 4.** Проекция вектора скорости ветра на плоскость  $XOY$  на высоте  $z = 1125$  м:  $\vec{U}_{xy} \equiv \sum_{k=1,2} \vec{e}_k U_k(x, y, 1125 \text{ м}, t_m)$  в квадратной сеточной области  $\{|x| \leq 750 \text{ м (по горизонтали); } |y| \leq 750 \text{ м (по вертикали)}\}$  в моменты времени  $t_m$ :  $t_3=31$  с (а);  $t_7=72.4$  с (б);  $t_{10}=103.4$  с (в);  $t_{13}=134.4$  с (з);  $t_{14}=144.8$  с (д);  $t_{16}=165.4$  с (е)

Максимум расчетной вертикальной скорости воздуха  $U_z$  достигался в центре торнадо на высоте  $z \approx 600$  м при  $t = 51.7$  с и составлял 31 м/с. В этот же момент времени максимум радиальной скорости притока составлял около 7 м/с ( $z=500$  м,  $|x|=r=230$  м), а оттока – приблизительно 5 м/с ( $z=1200$  м,  $|x|=r=330$  м).

Характерная грибовидная форма торнадо в данной численной модели формируется примерно за 2–2.5 мин (см. рис. 1, *з, е*).

Для удобства дальнейшего изложения введем определение максимальной горизонтальной скорости ветра на данной высоте в данный момент времени:

$$U_{hor}(z, t) = \max_{|x|, |y| \leq L_1} \sqrt{U_x^2(x, y, z, t) + U_y^2(x, y, z, t)}. \quad (17)$$

Как следует из начальных условий (14), на рис. 2, *а* представлено чисто циклоническое движение с амплитудой тангенциальной скорости  $\|U_\phi\|_C(z, 0) \equiv U_{hor}(z, 0) = 1.2$  м/с

внутри начального радиуса  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_0 = 300$  м. Со временем возникает и растет радиальный поток к стене глаза торнадо. В рассматриваемой расчетной модели торнадо за 10 с горизонтальная скорость ветра увеличивается в 10 раз и достигает 12 м/с. При этом радиус стены глаза торнадо сужается до  $r \leq 153$  м (рис. 2, *б*). В дальнейшем радиус стены глаза торнадо на этой высоте продолжает уменьшаться, приближаясь к значению  $r \approx 110$  м (см. рис. 2, *в–е*). Как внутри, так и снаружи стены, массы воздуха стремятся к стене глаза по циклонической спирали, направленной вверх. Однако на угловых участках расчетной области наблюдаются более сложные течения. Например, в углах рис. 2, *д* видны конгломераты из четырех вихрей разной полярности, напоминающие картину течения при ударе струи в стену. Четыре угловых зоны оттока видны также на рис. 2, *е*, что, скорее всего, объясняется прямоугольной геометрией расчетной области. Максимальная горизонтальная скорость ветра на данной высоте достигает примерно 14 м/с при  $t \approx 12$  с.

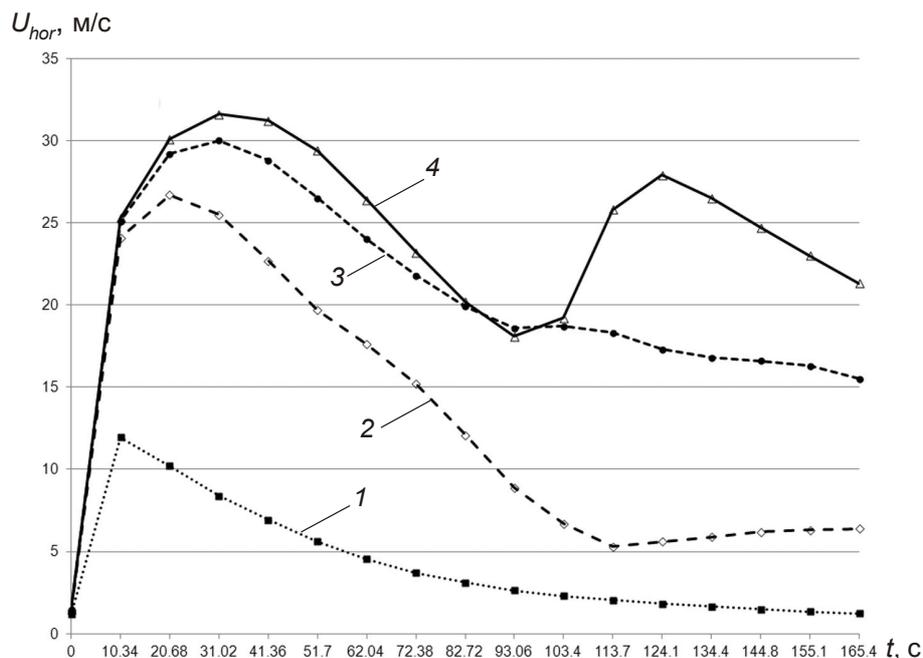
Эволюция горизонтальных потоков, представленных на рис. 3, напоминает картину на рис. 2 при  $z = 187.5$  м. Различия состоят в том, что максимальная горизонтальная скорость ветра на высоте 750 м больше ( $\sim 28$  м/с) и достигается позже (примерно к 22 с). На рис. 3 четко прослеживаются увеличение толщины стены глаза торнадо (рис. 3, *б*) и более интенсивные и сложные по конфигурации горизонтальные течения на периферии (рис. 3, *в, г*). Картина горизонтальных течений в начальный момент аналогична показанным на рис. 2, *а* – это чисто тангенциальное циклоническое вращение, но, согласно (14), имеющее разные амплитуды на разных высотах.

Представленные на рис. 4 проекции вектора скорости ветра на плоскость  $XOY$  рассчитаны для  $z = 1125$  м. На этой высоте максимальная горизонтальная скорость ветра достигается примерно за 31 с и составляет  $\sim 30$  м/с. В этой области и выше уже четко прослеживаются центробежные тенденции – отток воздуха к периферии, растущий со временем (см. рис. 4, *б–д*, рис. 1, *в–е*). Радиус стены глаза достигает 550 м при  $t_7 = 72.4$  с, (рис. 4, *б*); после  $t = t_{10} = 103.4$  с интенсивные горизонтальные течения распространяются на всю область задачи (рис. 4, *в–е*).

При  $t > 100$  с возникают вторичные мезовихри, центры которых располагаются на расстоянии  $r \approx 260$  м (рис. 4, *з–е*).

Система из четырех вторичных мезовихрей относительно стабильна, центры этих вихрей вращаются циклонически (против часовой стрелки) с угловой скоростью  $\omega_{sv} \approx 0.0116$  с<sup>-1</sup> (рис. 4, *з–е*). Подобная структура мезовихрей отмечалась в стене глаза урагана Изабель 12–13.09.2003 г. [Kossin, Schubert, 2004; Aberson, Montgomery, Black, 2004]. Подробнее этот вопрос обсуждается в следующем разделе.

На рис. 5 приведены графики изменения горизонтальной скорости ветра на разных высотах  $z$  в зависимости от времени –  $U_{hor}(z, t)$ .



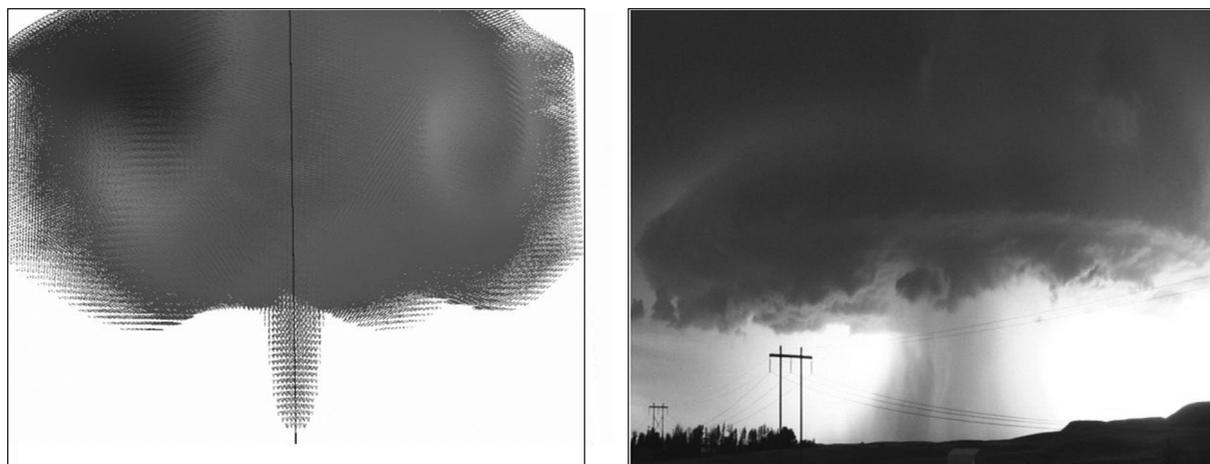
**Рис. 5.** Изменение горизонтальной скорости ветра на разных высотах  $z$  в зависимости от времени

1 –  $z=187.5$  м; 2 –  $z=750$  м; 3 –  $z=1125$  м; 4 –  $z=1481$  м

### Обсуждения и выводы

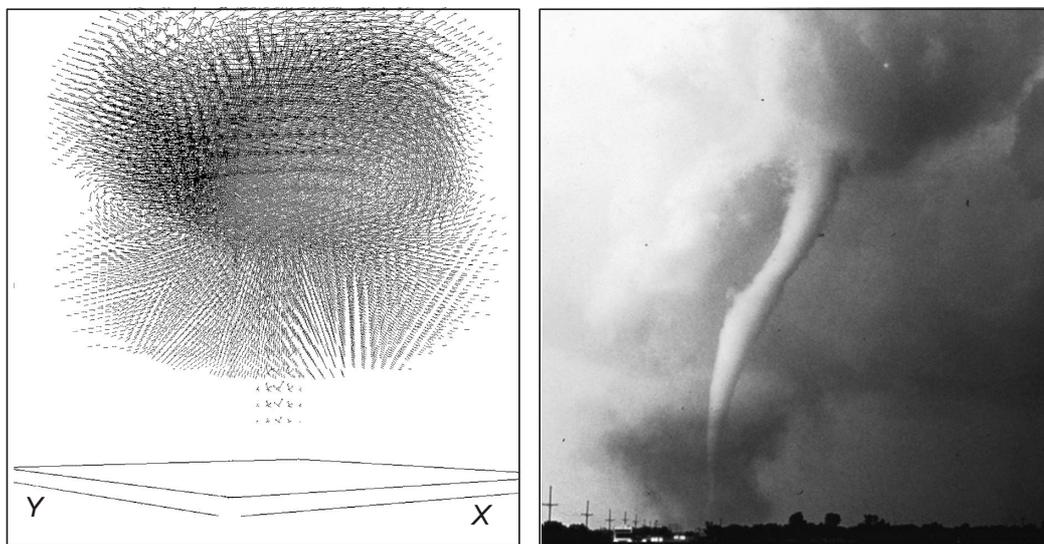
Для сравнения результатов численного моделирования с данными наблюдений ниже приведены расчетная трехмерная структура полей ветра при  $t=165.4$  с (рис. 6, *слева*) и фотография характерного торнадо категории ТЗ, наблюдаемого автором фотографии в августе 2005 г. в штате Монтана, США (рис. 6, *справа*).

Можно видеть, что результаты расчетов по принятой модели для торнадо категории ТЗ достаточно хорошо сходятся с наблюдаемой картиной как по времени, так и по пространству. Большинство известных до настоящего времени реальных торнадо имеют аналогичную структуру, о чем свидетельствует ряд работ (см., например, [Арсеньев и др., 2010]).



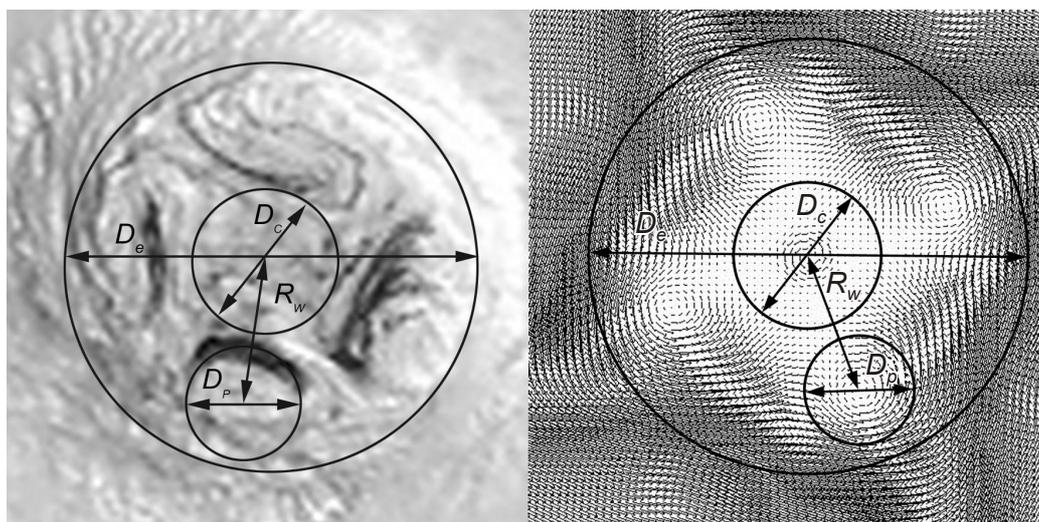
**Рис. 6.** Расчетная трехмерная структура полей ветра при  $t=165.4$  с (*слева*) и фотография торнадо категории ТЗ, наблюдаемого в августе 2005 г. в штате Монтана, США (*справа*, фото А.Б. Паншина)

Еще одно визуальное сравнение трехмерных полей ветра, рассчитанных для нашей модели торнадо, с реальным торнадо представлено на рис. 7, где слева – трехмерная изометрия полей ветра в модели при  $t=93$  с, а справа – снимок торнадо в Юнион Сити (Оклахома, США, 1973 г.)<sup>1</sup>.



**Рис. 7.** Трехмерная изометрия полей ветра в нашей модели при  $t=90.03$  с (слева) и фотография торнадо на ранней стадии формирования в Юнион Сити, Оклахома, США, 1973 г. (справа)

Несомненный интерес вызывает сравнение вторичных мезовихрей в нашей модели (см. рис. 4, *г–е*) со сходным явлением, наблюдавшимся в мощных ураганах. На рис. 8 слева показана фотография урагана Изабель (13.09.2003 г., 18:45 UTC) [Kossin, Schubert, 2004; Aberson, Montgomery, Black, 2004], сделанная спутником GOES-12, а справа – горизонтальное сечение полей ветра в нашей модели (увеличенная часть рис. 4, *е*).



**Рис. 8.** Спутниковый снимок глаза урагана Изабель (GOES-12, 13.09.2003 г., 18:45 UTC, [Kossin, Schubert, 2004; Aberson, Montgomery, Black, 2004]). Справа – увеличенная часть глаза торнадо в нашей модели (см. рис. 4, *е*; расшифровка обозначений указана в тексте)

<sup>1</sup> На снимке показано первое торнадо, обнаруженное на ранней стадии с помощью доплер-радар (National Severe Storms Laboratory Doppler radar; <http://celebrating200years.noaa.gov/breakthroughs/tornado-warnings/>).

В обоих случаях четко видны четыре вторичных мезовихря стены глаза, вращающихся вокруг оси основного вихря.

В таблице приведено сопоставление основных масштабов явления для урагана Изабель и нашей модели: диаметров стены глаза ( $D_e$ ), центральных вихрей ( $D_c$ ), вторичных вихрей ( $D_p$ ) и радиусов орбит вращения центров вторичных вихрей ( $R_w$ )

	$D_e$ , км	$D_c$ , км	$D_p$ , км	$R_w$ , км
Ураган Изабель	70	24.6	19.4	25
Модель торнадо	1.1	0.37	0.27	0.36

Геометрическое подобие обеих систем вихревых течений очевидно, различие проявляется лишь в масштабах явлений.

Для дальнейшего сравнения двух явлений необходимо сделать перемасштабирование наших результатов по времени, пространственным координатам и скорости. Если осреднить максимальные скорости ветра в нашей модели (17) по вертикали, получим скорость максимальных ветров  $U_{MWV}(t)$  (*MWV – Maximal Wind Velocity*):

$$U_{MWV}(t) = \int_0^H U_{hor}(z, t) dz / H .$$

В работе [Bell, Montgomery, 2008] приводится аналогичная величина скорости  $U_{BTV}(t')$  (*BTV – Best-Track Velocity*). При этом рассматриваются разные масштабы времени  $t$  и  $t'$ . Можно нормализовать скорость ветра в нашей модели к скорости ветра на пути следования урагана Изабель:

$$U_{MWVN}(t) = k_U U_{MWV}(t) ,$$

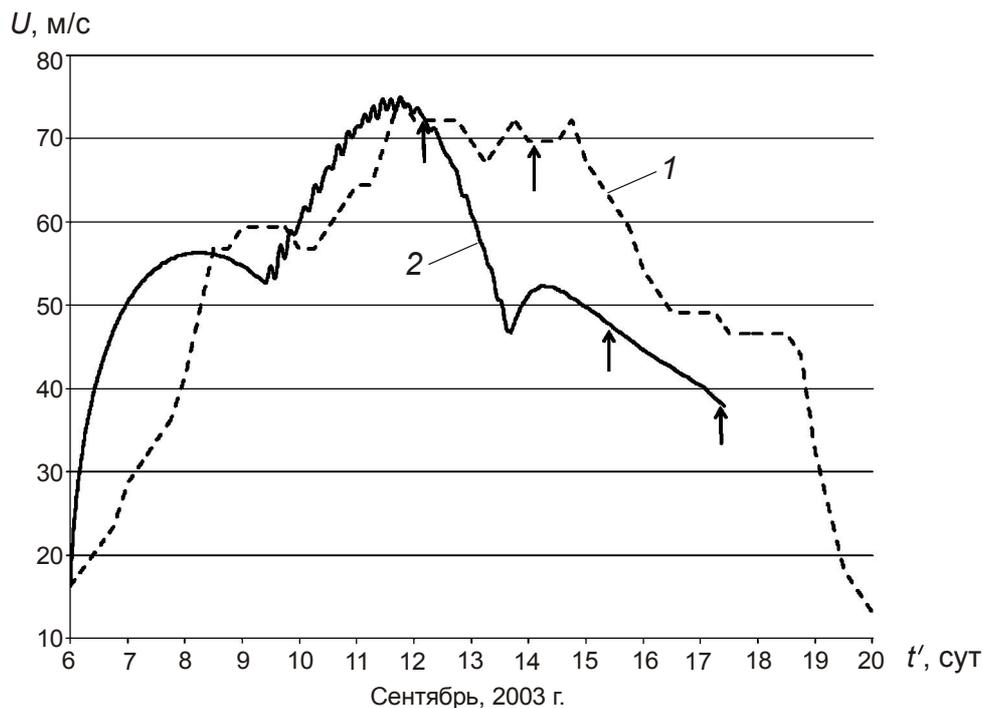
где  $k_U$  – отношение абсолютного максимума скорости в урагане Изабель (74.9 м/с) к абсолютному максимуму скорости в нашей модели (42.11 м/с).

Определим типичный масштаб времени в урагане Изабель  $T_I$  как интервал времени от 00:00 UTC (6.09.2003 г.) до 12:00 UTC (11.09.2003 г.), в течение которого тропическая депрессия с  $U_{BTV}(t')=16.4$  м/с достигла максимального уровня урагана категории V (74.9 м/с).

Аналогично определим типичный масштаб времени в нашей модели  $T_M$  как период времени, в течение которого нормализованная скорость максимальных ветров  $U_{MWVN}(t)$  возросла от 16.4 м/с до своего максимума (74.9 м/с). Перемасштабирав модельное время с множителем  $k_T=T_I/T_M \cong 5233$ , мы можем сравнить эволюцию скорости максимальных ветров в нашей модели  $U_{MWVNT}(t')=U_{MWVN}(t \cdot k_T)$  со скоростью  $U_{BTV}(t')$  в урагане Изабель (рис. 9).

Горизонтальные пространственные координаты в модели необходимо также перемасштабировать, например, с помощью коэффициента  $k_D=D_e/d_e \cong 63.63$ ; при этом в перемасштабированной модели изменится и модуль коэффициента горизонтального турбулентного обмена:  $A \rightarrow A' = Ak_D^2/k_T \cong 774$  м<sup>2</sup>/с. Такое значение хорошо согласуется с данными измерений горизонтального турбообмена в вихрях ураганов [Zhang, Montgomery, 2012].

Интерес к мезовихрям внутри или на границе стены глаза является не только практическим. В ряде работ [Bell, Montgomery, 2008; Rutherford et al., 2010] авторы в основном использовали так называемую “простую двумерную баротропную” модель. Мы придерживаемся взглядов [Kossin, Schubert, 2004; Bell, Montgomery, 2008], когда при моделировании опускаются несущественные слагаемые в уравнениях.



**Рис. 9.** Сопоставление эволюции скорости максимальных ветров на пути следования урагана Изабель  $U_{BTU}(t')$  [Bell, Montgomery, 2008] (кривая 1, м/с) и перемасштабированной максимальной скорости ветра в нашей модели  $U_{MWNТ}(t')$  (кривая 2, м/с). На оси абсцисс время  $t'$  в сутках от 6 до 20 сентября 2003 г. Стрелками отмечены периоды возникновения вторичных мезовихрей

Возможность моделирования динамики ураганов в “простой баротропной модели” [Emanuel, 2003; Kossin, Schubert, 2004; Bell, Montgomery, 2008] была показана еще в работе [Montgomery, Vladimirov, Denissenko, 2002]. Наша мезовихревая модель, не покушаясь на ранее достигнутые результаты [Montgomery, Vladimirov, Denissenko, 2002; Emanuel, 2003; Kossin, Schubert, 2004; Bell, Montgomery, 2008; Rutherford et al., 2010] (а в будущем, возможно, используя их), позволяет моделировать интенсивные атмосферные вихри разной категории, в том числе ураганы категорий I–V.

### Благодарности

Авторы благодарят А.И. Аветисяна, С.С. Гайсаряна, В.В. Бабкову и М.Н. Калугина за реализацию кода в *ParJava* и помощь в трехмерной визуализации результатов, выражают свою признательность В.М. Кривошееву, пригласившему их прочитать лекцию студентам Российского нового университета, и В.М. Тихомирову (редактору трудов А.Н. Колмогорова), просмотревшему данную статью.

### Литература

- Аветисян А.И., Бабкова В.В., Гайсарян С.С., Губарь А.Ю. Разработка параллельного программного обеспечения для решения трехмерной задачи о рождении торнадо по теории Николаевского // Математическое моделирование. 2008. № 8. С.28–40.
- Арсеньев С.А., Бабкин В.А., Губарь А.Ю., Николаевский В.Н. Теория мезомасштабной турбулентности. Вихри атмосферы и океана. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010. 308 с.

- Арсеньев С.А., Губарь А.Ю., Николаевский В.Н.* Самоорганизация торнадо и ураганов в атмосферных течениях с мезо-масштабными вихрями // Докл. РАН. 2004. № 6. С.541–546.
- Арсеньев С.А., Губарь А.Ю., Шелковников Н.К.* Генерация тайфунов и ураганов мезомасштабной турбулентностью // Вестник Моск. ун-та. Сер. 3. Физика и астрономия. 2007. № 2. С.50–54.
- Бабкин В.А.* О движении цилиндрического контейнера в круглой трубе под действием потока жидкости // Инженерно-физический журнал. 2013. Т. 86, № 2. С.416–422.
- Бабкин В.А., Николаевский В.Н.* Турбулентные течения жидкости в круглой трубе и плоском канале – модель мезомасштабной турбулентности // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84, № 2. С.400–408.
- Бэтчелор Дж.К.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
- Губарь А.Ю., Аветисян А.И., Бабкова В.В.* Возникновение торнадо: трехмерная численная модель в мезомасштабной теории турбулентности по Николаевскому // Докл. РАН. 2008. № 4. С.547–552.
- Искендеров Д.Ш., Николаевский В.Н.* Ламинаризация ядер атмосферных турбулентных вихрей // Докл. АН СССР. 1991. № 1. С.124–128.
- Колмогоров А.Н.* Избранные труды. Т. 1. Математика и механика. М.: Наука, 1985. 469 с.
- Николаевский В.Н.* Асимметричная механика континуумов и осредненное описание турбулентных течений // Докл. АН СССР. 1969. № 6. С.1304–1307.
- Обухов А.М.* Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 414 с.
- Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. М.: Мир, 1991. 552 с.
- Хаин А.П., Сутырин Г.Г.* Тропические циклоны и их взаимодействие с океаном. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 272 с.
- Хейнлоо Я.Л.* Феноменологическая механика турбулентных потоков. Таллин: Валгус, 1984.
- Шрёдингер Э.* Что такое жизнь? Физический аспект живой клетки. М.: ГИИЛ, 1947. 146 с.
- Aberson S.D., Montgomery M.T., Black M.L.* A record wind measurement in Hurricane Isabel: Direct evidence of an eyewall mesocyclone? // Preprints, Twenty-sixth Conf. on Hurricanes and Tropical Meteorology: Miami, FL, 2004.
- Arnold V.I., Khesin B.A.* Topological Methods in Hydrodynamics // Series Appl. Math. Sci. V. 125. Berlin: Springer, 1998. 376 p.
- Avetisyan A.I., Babkova V.V., Gaissaryan S.S., Gubar A.Yu.* Intensive Atmospheric Vortices Modeling Using High Performance Cluster Systems // PaCT/LNCS. 2007. V. 4671. P.487–495.
- Bell M.M., Montgomery M.T.* Observed Structure, Evolution, and Potential Intensity of Category 5 Hurricane Isabel (2003) from 12 to 14 September // Month. Weather Rev. 2008. V. 6. P.2023–2046.
- Brode H.L.* Review of Nuclear Weapon Effects // Ann. Rev. Nucl. Sci. 1968. V. 18. P.153–202.
- Cosserat E. et F.* Theorie des Corps Deformable. Paris: Herman, 1909. 226 p.
- Emanuel K.* Tropical Cyclones // Ann. Rev. Earth Planet. Sci. 2003. V. 31. P.75–104.
- Eringen A.C., Chang T.S.* A Micropolar Description of Hydrodynamic Turbulence // Recent Advances in Engineering Science. V. 5, part 2. New York: Gordon & Breach, 1970. P.1–8.
- Ferrari C.* On the differential equations of turbulent flow // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С.555–566.
- Heinloo J.* Setup of turbulence mechanics accounting for a preferred orientation of eddy rotation // Concepts of Physics. 2008. V. 5. P.205–219.
- Iovieno M., Tordella D.* The Angular Momentum Equation for a Finite Element of a Fluid: A New Representation and Application to Turbulent Modeling // Phys. Fluids. 2002. V. 8. P.2673–2682.
- Ivannikov V.P., Gaissaryan S.S., Avetisyan A.I., Padaryan V.A.* Improving Properties of a Parallel Program in ParJava Environment // PaCT/LNCS. 2003. V. 2840. P.491–494.
- Kossin J.P., Schubert W.H.* Mesovortices in Hurricane Isabel // Bull. Amer. Meteorol. Soc. 2004. V. 2. P.151–153.
- Mattioli G.D.* Teoria Dinamica dei Regimi Fluidi Turbolenti. Cedam, Padova. 1937.
- Montgomery M.T., Vladimirov V.A., Denissenko P.V.* An experimental study of hurricane mesovortices // J. Fluid Mech. 2002. V. 471. P.1–32.
- Nikolaevskiy V.N.* Angular Momentum in Geophysical Turbulence: Continuum. Spatial Averaging Method. Kluwer, Dordrecht. 2003.

*Poincare H.* Theorie des Tourbillions. Paris: Carré et Naud, 1893.

*Rutherford B., Dangelmayr G., Persing J., Schubert W.H., Montgomery M.T.* Advective mixing in a nondivergent barotropic hurricane model // *Atmos. Chem. Phys.* 2010. V. 10. P.475–497.

*Taylor G.I.* Statistical Theory of Turbulence // *Proc. R. Soc. London. Ser. A.* 1935. V. 151. P.421–478.

*Zhang, J.A., Montgomery M.T.* Observational estimates of the horizontal eddy diffusivity and mixing length in the low-level region of intense hurricanes // *J. Atmos. Sci.* 2012. V. 69. P.1306–1316.

*Сведения об авторах*

**НИКОЛАЕВСКИЙ Виктор Николаевич** – доктор технических наук, главный научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: 8(499)243-17-50. E-mail: victor.nikolaevskiy2012@yandex.ru

**ГУБАРЬ Александр Юрьевич** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: 8(925)314-33-18. E-mail: parkag@yandex.ru

## VORTICES AND TORNADO IN MESOSCALE TURBULENCE THEORY: A NUMERICAL PATTERN OF 3D TORNADO RISE<sup>1</sup>

V.N. Nikolaevskiy, A.Yu. Gubar

*Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**Abstract.** The concept of homogeneity in turbulence is extended to the case of constant mean velocity gradient. This approach is relevant to a stratified atmosphere and differential volumes in any continuum model. The basic ideas of A.N. Kolmogorov for such a situation are recalled. It is shown that they are in full accordance with the possibility to introduce the angular velocity pseudo-vector as internal parameter for thermodynamically open turbulent system if its scale exceeds mesovortex size.

The continuum description is formulated within the standard Cauchy's approach to the tensor of stresses averaged over cross-sections of the representative space cell. The possible asymmetry of the tensor is a consequence of the angular momentum balance of the mesovortices. As the result, the effective 3D + time nonlinear equation set is developed. The suggested solution describes the tornado generation from a cloud of initial vortices. The dependence of turbulent rotation viscosity on spin vortex velocity permits to localize the tornado body due to the nonlinear diffusion effect.

Numerical calculations were performed at two different clusters using *Parjava* program environment. The growth of a typical tornado structure, including secondary mesovortexes, rotating inside the tornado eye wall, is shown in a sequence of pictures. Their visual comparison with the Isabel hurricane (12–13.09.2003) is represented.

**Keywords:** tornado, vortices, turbulence, angular momentum, scaling.

---

<sup>1</sup> The paper is based on the lecture given at the session “In memory of Andrey N. Kolmogorov” in the New Russian University.