

УДК 550.383

## НЕЛИНЕЙНОСТЬ В МОДЕЛИ ДИНАМО ПАРКЕРА

© 2014 г. М.Ю. Решетняк

*Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия*

Рассмотрены различные механизмы подавления магнитным полем  $\alpha$ -эффекта в модели  $\alpha\omega$ -динамо Паркера в жидком ядре Земли. Показано, что случайные возмущения  $\alpha$ -эффекта, приводящие к хаотическим инверсиям геомагнитного поля, вызывают увеличение энергии поля на малых масштабах. Для того, чтобы энергии флуктуаций было достаточно для появления инверсий, магнитная энергия должна увеличиться на порядок относительно режима без флуктуаций.

**Ключевые слова:** геодинамо, спиральность, дифференциальное вращение, инверсии.

### Введение

Геомагнитное поле генерируется движениями проводящей жидкости внутри жидкого ядра Земли. Многие черты наблюдаемого геомагнитного поля удается воспроизвести в рамках теории динамо, описывающей трансформацию кинетической энергии проводящей среды в ядре в энергию магнитного поля [Jones, 2011]. Во многих случаях оказывается полезным рассматривать разложение магнитного поля на две составляющие: полоидальную и тороидальную компоненты [Krause, Rädler, 1980]. Это связано с тем, что в простых, идеализированных моделях геодинамо источники энергии для каждой из компонент различны и уравнения записываются в простой форме. Наиболее ярким примером такой системы является модель Паркера [Parker, 1955], в которой полоидальная компонента магнитного поля генерируется за счет  $\alpha$ -эффекта, а тороидальная – за счет дифференциального вращения. Если  $\alpha$ -эффект связан с превращением кинетической энергии вращающейся турбулентности в энергию магнитного поля, то дифференциальное вращение ( $\omega$ -эффект), вызван сдвиговыми течениями крупномасштабного поля скорости.

Как показывает линейный анализ [Решетняк, 2011, 2012], даже такая простая система динамо, может, в принципе, воспроизводить различные режимы генерации магнитного поля, близкие к наблюдаемым архео- и палеомагнитологами. Так, удается получить переход от режимов с частыми инверсиями к полному их отсутствию. Поскольку в рамках линейного анализа имеют дело с экспоненциально растущим решением, то пределы применимости этих результатов не ясны, и требуется анализ нелинейного решения в котором влияние магнитного поля может свестись к выбору системой решения, имеющего первую растущую моду, поскольку появление следующих мод, предсказываемых линейным анализом, будет блокироваться нелинейностью. В зависимости от строения спектра (близости расположения мод) и вида нелинейности, увеличение критического параметра может длительное время не оказывать существенного влияния на поведение нелинейного решения. В настоящее время существует достаточно большой набор видов нелинейностей, которые можно включить

в модель Паркера, и мы рассмотрим ряд из них, оценив, как они изменяют свойства линейной системы применительно к условиям геодинамо в жидком ядре Земли.

### Модель Паркера

Рассмотрим модель Паркера [Parker, 1955], часто применяемую для описания процессов генерации магнитного поля в различных астрофизических объектах [Moffatt, 1978; Рузмайкин, Соколов, Шужуров, 1988]. Далее будем использовать следующие уравнения в тонкой сферической оболочке:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} &= \alpha \mathcal{B} + \mathcal{A}'' , \\ \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} &= \Omega \mathcal{A}' + \mathcal{B}'' ,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  – азимутальные компоненты векторного потенциала магнитного поля ( $\mathbf{B} = \text{rot} \mathcal{A}$ ) и магнитного поля  $\mathbf{B}$ ;  $\alpha$  и  $\Omega$  зависят от угла  $\theta$  относительно оси вращения. Штрихи соответствуют производной по  $\theta$ . В данном представлении  $\mathcal{A}$  соответствует полоидальному магнитному полю, а  $\mathcal{B}$  – тороидальному.

Прежде чем перейти к анализу решения в сферической геометрии, рассмотрим некоторые полезные свойства системы (1) в бесконечном слое, когда решение зависит от декартовой координаты  $x$  и времени  $t$ , а  $\alpha = \alpha_0$  и  $\Omega = \Omega_0$  – константы. Тогда решение можно представить в виде плоской волны:

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (A, B) e^{\gamma t + i\omega t + kx}\tag{2}$$

с комплексной амплитудой  $(A, B)$ , скоростью роста  $\gamma$ , частотой осцилляций  $\omega$  и пространственным волновым числом  $k$  (все три величины действительны).

Подставляя (2) в (1), получаем:

$$\begin{aligned}(\gamma + i\omega + k^2)A + \alpha_0 B &= 0, \\ -i\alpha_0 \Omega_0 k A + (\gamma + i\omega + k^2)B &= 0,\end{aligned}\tag{3}$$

что приводит к условию разрешимости:

$$\gamma + i\omega = -k^2 \pm \sqrt{-i\alpha_0 \Omega_0 k}.\tag{4}$$

Дисперсионное соотношение (4) дает две встречные волны. Важным является то, что в приближении  $\alpha\omega$ -динамо, где полоидальная ( $A$ ) и тороидальная ( $B$ ) компоненты зависят от своего источника энергии ( $\alpha_0$  и  $\Omega_0$ , соответственно), форма волны зависит от произведения амплитуд  $\alpha_0$  и  $\Omega_0$ . Величина  $\mathcal{D} = \alpha_0 \Omega_0$  получила специальное название: динамо-число, которое и является мерой интенсивности конвекции в жидком ядре Земли.

Возвращаясь к задаче в сфере используем граничные условия на полюсах  $\theta = 0, \pi$ :  $\mathcal{A} = \mathcal{B} = 0$ . Равенство нулю  $\mathcal{B}$  на полюсе следует из условия однозначности поля азимутального поля, а  $\mathcal{A}$  – из условия ограниченности радиальной компоненты, которую можно получить, записав выражение для ротора. Также следует учесть, что  $\alpha$ -эффект меняет знак в экваториальной плоскости:  $\alpha = -\frac{\tau}{3}\chi$  [Krause, Rädler,

1980], где  $\tau$  – характерное время оборота вихря;  $\chi$  – средняя гидродинамическая спиральность:  $\chi = \langle \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \rangle$ , а  $\mathbf{v}$  – скорость вихря. Далее мы будем использовать простые зависимости для  $\alpha_o$  и  $\Omega_o$ :  $\alpha_o = \cos \theta$  и  $\Omega_o = \sin \theta$ .

Оценим величину динамо-числа для жидкого ядра. Для этого следует учесть третий эффект – магнитную диффузию, принятую в (1) равной единице. Можно показать, см., например, [Рузмайкин, Соколов, Шукуров, 1988], что  $\mathcal{D} = \frac{G \alpha R^3}{\eta^2}$ , где

$G = r \frac{d\Omega}{dr}$  – изменение угловой скорости вращения жидкости по радиусу ядра  $r$ ;  $\eta$  – коэффициент магнитной диффузии;  $R$  – радиус жидкого ядра. Тогда, используя стандартную оценку крупномасштабной скорости по скорости западного дрейфа магнитного поля  $V_{wd} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  имеем  $G \sim V_{wd}/R \approx 6 \cdot 10^{-5}/3.2 \cdot 10^6 = 1.875 \cdot 10^{-11} \text{ с}^{-1}$ . Простейшая оценка амплитуды  $\alpha$ -эффекта совпадает с  $V_{wd}$ . Окончательно имеем для  $\eta = 2 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ :  $\mathcal{D} \approx 9200$ , что близко по порядку величины к более сложным оценкам в [Ануфриев, Решетняк, Соколов, 1997], дающим  $\mathcal{D} = (5 - 10) \cdot 10^3$ .

Линейный анализ системы (1) на собственные функции [Решетняк, 2011, 2012] для  $|\mathcal{D}| < 10^3$  дает следующие критические значения  $\mathcal{D}^{cr}$ :  $26^{SQ}$ ,  $178^{OD}$ ,  $492^{OQ}$  и для отрицательных  $\mathcal{D}^{cr}$ :  $-10^{SD}$ ,  $-102^{OQ}$ ,  $-670^{OD}$ , где верхний индекс  $D$  соответствует диполю,  $Q$  – квадруполью,  $O$  – осциллирующему решению,  $S$  – постоянному во времени решению. Как видно из представленных последовательностей, критические значения  $\mathcal{D}^{cr}$  для положительных и отрицательных значений близки по величине. Отличие состоит в смене четности собственного решения (1), поведение же во времени остается тем же. Существует разделение мод по направлению движения волны по  $\theta$  от экватора к полюсу,  $\mathcal{D} > 0$ , и от полюсов к экватору,  $\mathcal{D} < 0$ . Ниже мы рассмотрим нелинейное решение системы (1) с различными формами подавления  $\alpha$  магнитным полем в диапазоне значений  $\mathcal{D}$ , сопоставимом с представлениями об оценках этой величины в земном ядре.

Растущее магнитное поле, когда сила Лоренца становится сопоставимой с другими силами в системе, начинает изменять источники энергии таким образом, что рост поля заканчивается. В этом случае говорят о нелинейности в системе. В зависимости от модели существует различные виды нелинейностей. В известной  $Z$ -модели Брагинского [Брагинский, 1978] магнитное поле оказывало действие на крупномасштабное осесимметричное поле скорости. В модели Паркера обычно используют более простую алгебраическую зависимость вида:

$$\alpha = \frac{\alpha_o}{1 + C_a E_M}, \quad (5)$$

где  $E_M = B_r^2 + \mathcal{B}^2$  – удвоенная магнитная энергия, а  $C_a$  – параметр, определяющий уровень энергии на нелинейном режиме и имеющий размерность обратной энергии. Поскольку кинетическая энергия турбулентности меньше энергии дифференциального вращения, то вероятность влияния магнитного поля на  $\alpha$  оказывается выше, чем на  $\Omega$  в модели  $Z$ .

Исторически сложилось, что в астрофизическом динамо, где роль вращения мала, и предполагается установление равнораспределения между средней кинетической  $E_K$  и магнитной энергиями  $E_M$ , параметр  $C_a$  приобретал вполне конкретное значение:  $C_a = E_K^{-1}$ , см. подробнее об идее равнораспределения для галактического динамо в [Beck et al., 1996]. Если считать, что для установления равнораспределения

важны флуктуации магнитного поля  $\mathbf{b}$ , а не его среднее значение  $\mathbf{B}$ , и принимая во внимание тот факт, что  $\mathbf{b} \sim R_m^{1/2} \mathbf{B}$ , где  $R_m \gg 1$  – магнитное число Рейнольдса, имеем, что для средних полей  $E_M \ll E_K$  [Vainshtein, Cattaneo, 1992]. Данное состояние, получившее название катастрофического квенчинга, стало предметом активных исследований в трехмерных моделях динамо [Brandenburg, Subramanian, 2005]. Однако обнаружение такого состояния в моделях плоского слоя с периодическими граничными условиями было связано с отсутствием потоков магнитной спиральности (в силу периодичности граничных условий). В реальных объектах, где поток магнитной спиральности через границы существует, появление таких состояний менее вероятно.

Для быстровращающихся магнитострофических систем, в которых сила Лоренца сравнима с силой Кориолиса, магнитная энергия может достигать больших значений [Решетняк, Соколов, 2003],  $E_M \gg E_K$ . Далее мы рассмотрим, как изменение  $C_a$  влияет на решение системы уравнений (1), (5).

Но прежде, чем перейти к изучению этого вопроса численно, остановимся на возможностях аналитического решения системы (1), (5). Для стационарных решений задачу (1) можно свести к системе:

$$\begin{aligned} \alpha \mathcal{B} &= -\mathcal{A}'' \\ \mathcal{A}' &= -\frac{\mathcal{B}''}{\mathcal{D} \Omega}. \end{aligned} \quad (6)$$

Дифференцируя второе уравнение по  $\theta$  и подставляя его в первое, имеем:

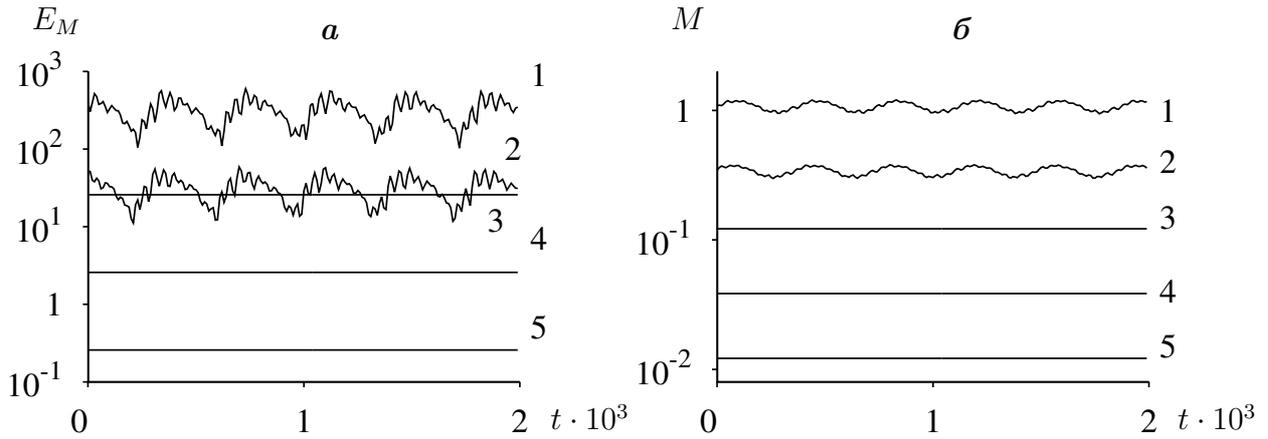
$$\Omega \mathcal{B}''' - \Omega' \mathcal{B}'' = \mathcal{D} \alpha \Omega^2 \frac{\mathcal{B}}{1 + C_a \mathcal{B}^2}, \quad (7)$$

где для простоты мы использовали, что в  $\alpha\omega$ -приближении  $E_M \sim \mathcal{B}^2$ , при  $\mathcal{D} \gg 1$ .

Уравнение (7) замыкается граничными условиями  $\mathcal{B}|_{\theta=0} = \mathcal{B}|_{\theta=\pi} = \mathcal{B}''|_{\theta=0} = \mathcal{B}''|_{\theta=\pi} = 0$ . Граничное условие для  $\mathcal{B}''$  получается из второго уравнения в (6), если учесть, что на оси  $\Omega = 0$ .

Впервые задача (7) для  $\Omega' = 0$  и несколько другой формы нелинейности была решена аналитически в [Kvasz, Shukurov, Sokoloff, 1992] для квадрупольного магнитного поля в модели тонкого диска, используемой в галактическом динамо. Однако, даже для более простых случаев асимптотические методы были весьма громоздки. Поскольку с численной точки зрения удобнее иметь дело с системой дифференциальных уравнений низкого порядка (1), зависящих от времени, исключив возможность неустойчивости стационарных решений при больших  $\mathcal{D}$ , далее мы остановимся на численном интегрировании (1).

Как уже отмечалось выше, достижение разной амплитуды стационарного (или квазистационарного) решения системы (1) контролируется параметром  $C_a$  в нелинейности (5). Однако, как показывают вычисления, роль  $C_a$  не сводится к простой перенормировке решения, а может приводить к изменению временной эволюции магнитного поля. Сначала рассмотрим диапазон отрицательных значений  $\mathcal{D}$ . На рис. 1, а представлена эволюция во времени магнитной энергии для разных  $C_a$  для  $\mathcal{D} = -10^3$ . Как мы видим, величина  $C_a$  ответственна не только за амплитуду энергии на нелинейном режиме, но и определяет, будет ли решение стационарным или квазистационарным. Как видно из рис. 1, б величина  $\zeta = C_a E_M$ , хоть слабо, но зависит от  $C_a$ .



**Рис. 1.** Эволюция магнитной энергии  $E_M$  (а) и диполя  $M$  (б) в зависимости от амплитуды параметра  $C_a$ : 1 – 0.01, 2 – 0.1, 3 – 1, 4 – 10, 5 –  $10^2$  для  $\mathcal{D} = -10^3$ . Произведение  $\zeta = C_a E_M$  с ростом  $C_a$  изменяется как 3.17, 3.15, 2.61, 2.58, 2.62

Данное изменение можно сформулировать в терминах эффективного динамо-числа  $\mathcal{D}_{eff}$ , учитывающего подавление  $\alpha$ :  $\mathcal{D}_{eff} = \frac{\mathcal{D}}{1 + \zeta}$ . Тогда для пяти рассмотренных  $C_a$  имеем значения  $\mathcal{D}_{eff} = -239, -240, -277, -279, -276$ , т.е. существует скачок  $\mathcal{D}_{eff}$  вблизи  $C_a = 1$ .

Согласно линейной теории, для данного значения  $\mathcal{D}_{eff}$  должно существовать две моды: стационарный диполь, и осциллирующий квадруполь. Как видно из рис. 1, б, эволюция диполя  $M = \frac{1}{2} \int_0^\pi B_r \sin 2\theta d\theta$  повторяет свойства  $E_M$ , за исключением перехода между режимами 2–3, где магнитные энергии близки (рис. 1, а, а диполи – отличаются, рис. 1б).

Данный переход можно связать с особенностью вблизи  $\mathcal{D} = -265$  на рис. 1, а в [Решетняк, 2011], которая связана с расщеплением стационарной моды на две осциллирующие. Можно взглянуть на это явление с точки зрения устойчивости возникающих мод, проведя анализ, аналогичный выполненному в [Решетняк, Соколов, Шукуров, 1992] для галактического динамо. Пусть нелинейное решение  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  удовлетворяет системе уравнений (1, 5). Рассмотрим задачу на устойчивость относительно малого возмущения  $(a, b)$ . Тогда, подставляя в (1) вместо  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  сумму  $(\mathcal{A} + a, \mathcal{B} + b)$  и используя разложение в ряд по  $b$  для  $\alpha$ :

$$\alpha(\mathcal{B}, b) = \frac{\alpha_0}{1 + C_a (\mathcal{B} + b)^2} \sim \frac{\alpha_0}{1 + C_a \mathcal{B}^2} - \alpha_0 \frac{2 C_a \mathcal{B}}{1 + C_a \mathcal{B}^2} b,$$

получим линеаризованную систему для  $(a, b)$ , где вместо  $\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + C_a \mathcal{B}^2}$  будет

$\alpha = \alpha_0 \frac{1 - \zeta}{(1 + \zeta)^2}$ . Здесь мы учли, что  $\mathcal{B} \gg \mathcal{A}, b \gg a$ . Поскольку  $\zeta > 1$ , имеем смену знака  $\alpha$ , что эквивалентно смене знака динамо-числа  $\mathcal{D}$ . Таким образом, получаем аналог уравнений (1) для  $(a, b)$  с эффективным динамо-числом  $\mathcal{D}_{eff} = \mathcal{D} \frac{1 - \zeta}{(1 + \zeta)^2}$ , что

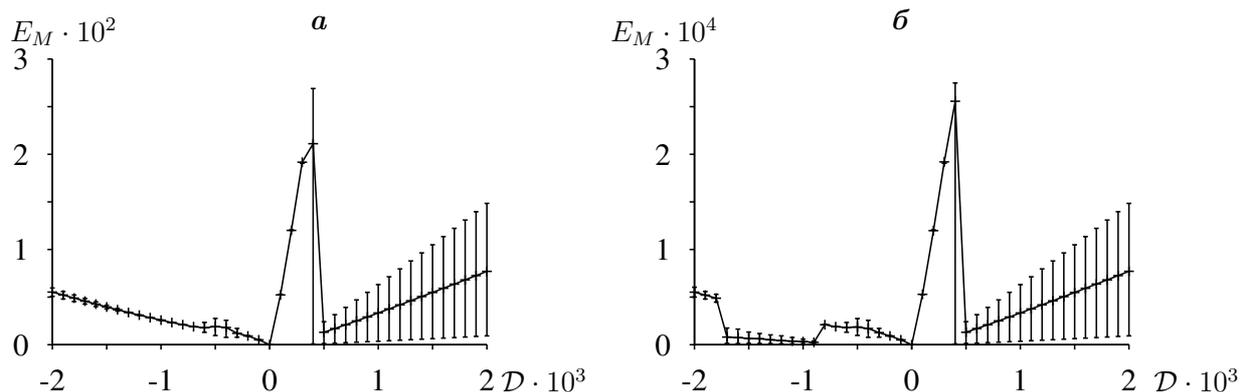
при наших значениях  $\zeta = 3.2, 2.6$  для  $\mathcal{D} = -10^3$  даст  $\mathcal{D}_{eff} \approx 125$  и  $123$ . Как следует из линейного анализа [Решетняк, 2011], в этой области наблюдается осциллирующее дипольное решение, которое и может возбуждаться, приводя к неустойчивости. Несмотря на это, к предсказаниям линейного анализа стоит относиться очень осторожно, и при больших  $\mathcal{D}$  следует больше полагаться на прямое интегрирование по времени системы (1).

Интересно, что если в (5) вместо полной  $E_M$  использовать лишь  $B_r^2$ , то полная энергия, конечно же возрастет, а само решение будет стационарным при любых  $\mathcal{D}$  и  $C_a$ . Последнее связано с тем, что осцилляции связаны с обменом энергией между полоидальным и тороидальным полями, а сами  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  сдвинуты по фазе между собой.

Для положительных  $\mathcal{D}$  влияние  $C_a$  на амплитуду сводится к аналогичному изменению амплитуды  $E_M$ . Для всего диапазона  $C_a$   $E_M$  и  $B_r$  осциллируют. Для  $B_r$  среднее по времени равно нулю. Данный режим можно сопоставить с частыми инверсиями магнитного поля.

Рассмотрим изменение магнитной энергии от амплитуды динамо-числа  $\mathcal{D}$  (рис. 2). В зависимости от величины  $C_a$  это изменение может быть или монотонным, или нет. Для  $C_a = 1$  и отрицательных  $\mathcal{D}$  с увеличением  $|\mathcal{D}|$  происходит линейное увеличение  $E_M$  с плавным нарастанием амплитуды осцилляций. В терминах  $B_r$  для этого режима амплитуда колебаний меньше среднего по времени уровня поля, и такой режим называют режимом в осцилляциях. Далее, наблюдается интервал  $-600 < \mathcal{D} < -400$ , где энергия остается практически неизменной, а амплитуда осцилляций начинает уменьшаться, и в конце-концов решение становится стационарным. В районе  $\mathcal{D} \approx -700$   $E_M$  начинает линейно расти с увеличением амплитуды осцилляций. Наблюдаемые линейные участки  $E_M(\mathcal{D})$  соответствуют постоянным значениям  $\frac{\mathcal{D}}{1 + \zeta}$ .

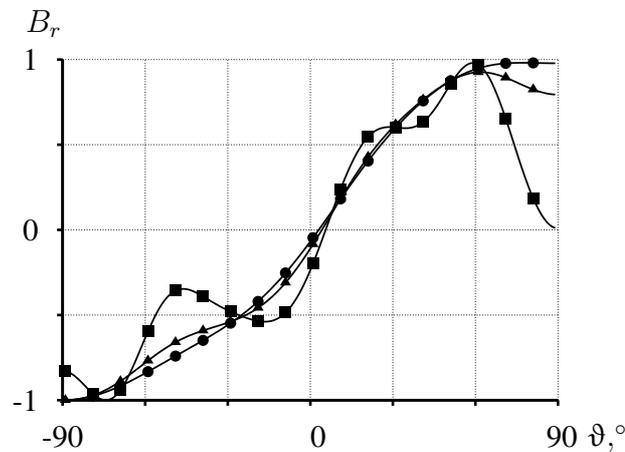
Для  $C_a = 10^{-2}$  (рис. 2, б) при  $\mathcal{D} \approx -800$  наблюдается резкое падение амплитуды энергии  $E_M$ , также, сопровождаемое переходом к стационарному решению. Увеличение  $\mathcal{D}$  приводит к последующему скачку  $E_M$ . Участки  $\mathcal{D} > -500$  и  $\mathcal{D} < -1700$  лежат, практически, на одной прямой.



**Рис. 2.** Зависимость средней магнитной энергии  $E_M$  от величины динамо-числа  $\mathcal{D}$  для  $C_a = 1$  (а) и  $C_a = 10^{-2}$  (б). Вертикальные линии соответствуют амплитуде колебаний  $E_M$

Как уже отмечалось выше, для положительных  $\mathcal{D}$  изменение  $C_a$  не приводит к качественным изменениям в поведении  $E_M$  и  $B_r$ . Увеличение же  $\mathcal{D}$  приводит к монотонному увеличению  $E_M$  и  $B_r$  и амплитуды их осцилляций.

Рассмотрим пространственное распределение полей. Современная радиальная компонента магнитного поля, представляющая собой в первом приближении диполь  $M \sim \sin \vartheta$  представлена на рис. 3. Следует обратить внимание, что это лишь грубая аппроксимация поля, проникающего из жидкого ядра в мантию, что связано с быстрым затуханием высоких гармоник. Аналогичные распределения  $B_r$  внутри мантии и на поверхности жидкого ядра демонстрируют уменьшение  $|B_r|$  вблизи полюсов  $|\vartheta| < \vartheta_{tc} \approx 60^\circ$ . Отметим, что проекция Тейлоровского Цилиндра (ТЦ) на границу ядро-мантия составляет  $20.48^\circ$ . Если учесть, что основная генерация магнитного поля осуществляется циклонами, имеющими также некоторый масштаб вблизи ТЦ, то такое уменьшение магнитного поля в высоких широтах вполне объяснимо удалением от источника генерации поля. Несмотря на то, что используемая нами модель Паркера не учитывает влияние твердого ядра на гидродинамику, сходный эффект ослабления магнитного поля в высоких широтах в модели мог бы быть вызван нулевыми граничными условиями для  $(A, B)$  в (1).

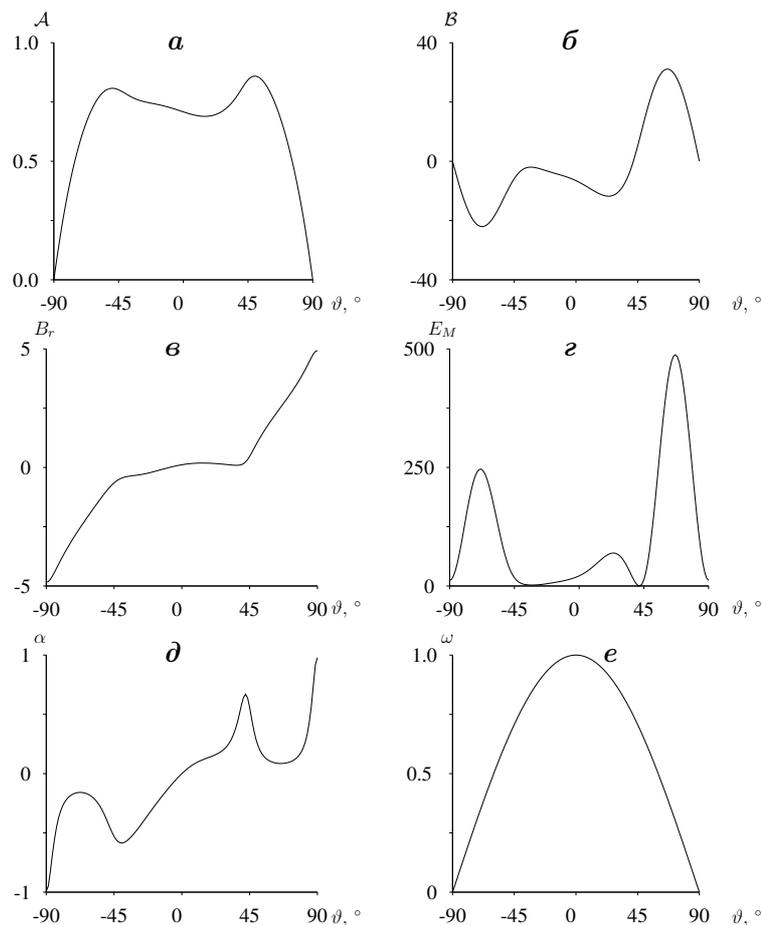


**Рис. 3.** Средняя по времени и широте зависимость  $B_r$  от долготы в градусах  $\vartheta = 90^\circ - \theta$  по модели IGRF-11 за 1900–2012 гг для трех радиусов: квадратики –  $r = 3485$  км (вблизи поверхности жидкого ядра), треугольники –  $r = 4928$  км (середина мантии), кружочки –  $r = 6371$  км (поверхность Земли)

Рассмотренная нами модель хорошо воспроизводит дипольную структуру магнитного поля (рис. 4). Аналогичные расчеты для положительного  $\mathcal{D} = 10^3$  дает также дипольное решение, но с нулевым средним по времени для  $B_r$ . В тоже время добиться снижения  $B_r$ -компоненты магнитного поля вблизи полюсов все же не удастся. Добиться этого эффекта не позволяет и использование локализованного вблизи средних широт  $\alpha$ -эффекта. Не исключена возможность влияния на это явление меридиональной циркуляции (см. подробнее в [Попова, Решетняк, Соколов, 2008]), анализ которой в данной работе не проводился. Хорошо наблюдается асимметричное распределение магнитной энергии между полушариями при сравнительно одинаковой напряженности радиального магнитного поля, проникающего на поверхность.

Характерная черта моделей  $\alpha\omega$ -динамо является большая величина тороидального магнитного поля  $B$ . Если считать, что  $\frac{\partial}{\partial \theta} \sim k$ , то имеем:  $\frac{B}{C_a B^2 + 1} \sim k^2 A$ ,

$$DA' \sim k^2 B \text{ и } B \sim \sqrt{\frac{\frac{\alpha \mathcal{D}}{k^3} - 1}{C_a}}. \text{ Оценивая волновое число из рис. 4 для } \mathcal{D} = -10^3, \text{ как}$$



**Рис. 4.** Мгновенное распределение по широте  $\mathcal{A}$  (а),  $\mathcal{B}$  (б),  $B_r$  (в),  $E_M$  (г),  $\alpha$  (д) и  $\omega$  (е) для  $\mathcal{D} = -10^3$ ,  $C_a = 10^{-2}$

$k = 4$ , имеем  $\mathcal{B} \approx 38$ , что близко к амплитуде поля на рис. 4, б. Оценка для  $\mathcal{A}$  имеет вид:  $\mathcal{A} \sim \frac{k\mathcal{B}}{\mathcal{D}} \approx 0.15$ , тогда оценка радиальной компоненты равна  $B_r \sim \frac{k^2\mathcal{B}}{\mathcal{D}} \approx 0.6$ . Заниженная оценка для  $B_r$  связана с тем, что в выражение для  $B_r$  через  $\mathcal{A}$  входят тригонометрические функции от  $\theta$ . Суммируя сказанное, имеем известное свойство  $\alpha\omega$ -моделей:  $\mathcal{B} \sim \mathcal{D}^{1/2}$ ,  $B_r \sim \mathcal{D}^{-1/2}$ . Для Земли это означало бы, что напряженность тороидального магнитного поля в 1000 раз больше, чем напряженность полоидального поля. Оценивая напряженность полоидального поля внутри жидкого ядра в 10 раз больше его напряженности на границе ядро—мантия  $5 \cdot 10^{-4}$  Тл, имеем  $\mathcal{B} \approx 0.1$  Тл, что несомненно выше современных оценок в трехмерных моделях  $\sim 10^{-3} - 10^{-2}$  Тл. Данное завышение тороидального магнитного поля присуще всем  $\alpha\omega$ -моделям, включая  $Z$ -модель Брагинского, в которой большие азимутальные скорости способствуют генерации сильных тороидальных полей.

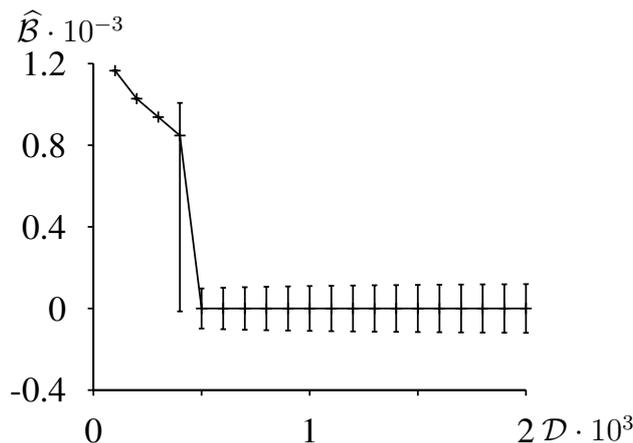
Другим важным моментом является сильное влияние магнитного поля на  $\alpha$ -эффект, выраженное в сильном изменении профиля  $\alpha(\vartheta)$  (рис. 4, д). Вместо исходного профиля  $\alpha_0 = \sin(\vartheta)$  мы наблюдаем сильное искажение профиля, сохраняющего однако признаки дипольной симметрии относительно экватора.

Наличие решений смешанной четности на нелинейном режиме может служить основанием для нарушения симметрии относительно экваториальной плоскости. Рас-

смотрим в качестве меры асимметрии байес-фактор:  $\hat{B} = \langle \int_0^\pi B_r \sin \theta d\theta \rangle_t$ , где  $\langle \dots \rangle_t$  – осреднение по времени. Для диполя величина  $\hat{B}$  равна нулю, а для квадруполя отлична от нуля.

Для положительных  $\mathcal{D}$  график зависимости  $\hat{B}(\mathcal{D})$  приведен на рис. 5, где хорошо виден переход от квадрупольного решения с большим значением  $\hat{B}$  к дипольному с нулевым  $\hat{B}$ .

Для отрицательных  $\mathcal{D}$ , в силу отсутствия смены полярности  $B_r$ ,  $\hat{B}$  всегда отлична от нуля.



**Рис. 5.** Зависимость байес-фактора  $\hat{B}$  магнитного поля от амплитуды динамо-числа  $\mathcal{D}$  для  $C_a = 10^{-2}$ . Вертикальные линии соответствуют амплитуде колебаний уже не осредненной величины. На интервале  $100 < \mathcal{D} < 500$  суммарное магнитное поле имеет предпочтительную полярность за счет наложения стационарного квадрупольного решения

### Инверсии магнитного поля

Одним из атрибутов современных моделей динамо является их способность воспроизводить инверсии магнитного поля, которые имеют случайное распределение [Jacobs, 1994]. Существует две концепции моделирования инверсий. Первая основана на том, что модель должна обладать такими внутренними свойствами, при которых инверсии будут происходить без привлечения внешних случайных факторов. Наиболее удачно в этом направлении обстоит дело в трехмерных вычислениях [Christensen, Aubert, Hulot, 2010], хотя получаемые временные ряды еще слишком коротки, чтобы проводить сравнение с палеомагнитными данными.

Другое направление связано с введением случайного фактора, позволяющего воспроизводить случайную смену полярности за счет флуктуации некоторого параметра, например,  $\alpha$ -эффекта [Hoynig, 1993]. Данный подход, используемый в более простых моделях, позволяет получать длинные временные ряды и проводить сравнение с наблюдениями на геологических временах [Собко и др., 2012]. В моделях среднего поля флуктуации  $\alpha$ -эффекта связывают с конечным количеством циклонов, приводящим к флуктуациям среднего значения спиральности. Обратим внимание, что случайный шум наблюдается и в трехмерных моделях с постоянными коэффициентами, если энергия на масштабе сетки велика.

Как мы видели в предыдущем параграфе, используемая нами модель Паркера при данном выборе нелинейности не способна воспроизводить случайные инверсии

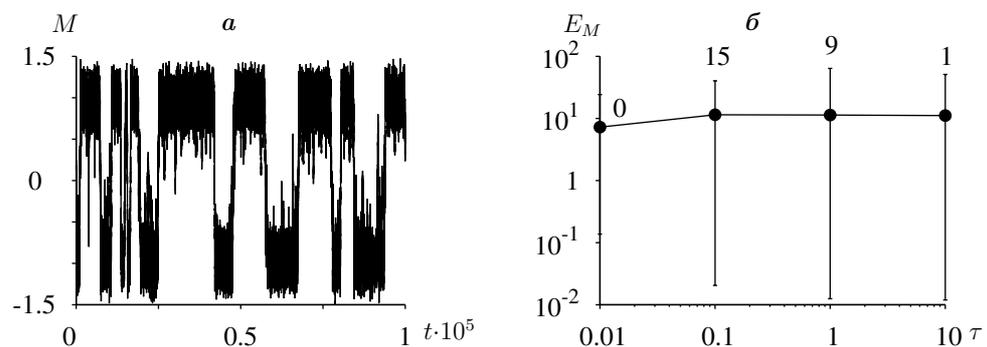
поля без привлечения случайных факторов. Для положительных  $\mathcal{D}$  инверсии являются периодическим процессом, а для отрицательных – наблюдается режим в осцилляциях, при котором смена знака  $B_r$  не происходит, т.е. введение нелинейности вида (5) стабилизирует магнитный диполь, не позволяя развиваться более высоким модам. Отметим, что именно на основе существования этих мод в линейном анализе и делалось предположение в [Решетняк, 2011] о возможности инверсий в модели. Далее мы рассмотрим, как можно модифицировать модель, чтобы получить инверсии, напоминающие наблюдаемые. Очевидно, что имеет смысл говорить лишь о положительных  $\mathcal{D}$ , поскольку для отрицательных значений динамо-числа инверсии уже происходят периодически.

Введем возмущение в  $\alpha$ -эффект в (5) в виде:

$$\alpha = \frac{\alpha_0(1 + \epsilon\delta)}{1 + C_a E_M}, \quad (8)$$

где  $\delta(\tau)$  – случайная величина, равномерно распределенная в интервале  $(-1, 1)$  и рассчитываемая в каждой точке по  $\theta$ ;  $\epsilon$  – амплитуда возмущения;  $\tau$  – интервал времени, через который происходит обновление  $\delta$ .

Как показывают численные эксперименты, появление инверсий возможно при достаточно больших значениях  $\epsilon > 2$ . На рис. 6, а представлено поведение магнитного диполя  $M$  во времени, демонстрирующего хаотические смены полярности магнитного поля. Уменьшение величины  $\epsilon$  приводит к прекращению инверсий, а увеличение – к нарастанию их числа.



**Рис. 6.** Эволюция магнитного диполя  $M$  для  $\mathcal{D} = -1500$ ,  $\tau = 0.1T$ ,  $\delta = 3$  (а) и зависимость магнитной энергии  $E_M$  от времени корреляции  $\tau$  (б). В последнем случае все значения, включая минимальные-максимальные, соответствующие вертикальным линиям на рисунке, нормированы на значение средней магнитной энергии  $E_M = 686$  при  $\epsilon = 0$ . Цифрами отмечено количество инверсий за интервал времени  $t = 10^5$

Вторым важным параметром в (8) является время корреляции  $\tau$ . Пусть период осцилляции магнитного поля  $T = 40$  (для  $\mathcal{D} = 1500$ ). Оценим минимальное время корреляции как  $\tau = 0.1T$ . Этот режим как раз и изображен на рис. 6, а. Очевидно, что при слишком малых  $\tau \ll T$  в силу малой корреляции  $\alpha$  и полоидального магнитного поля, система не будет успевать взять энергию от  $\alpha$  и совершить инверсию. При слишком больших  $\tau \gg T$  будет наблюдаться последовательность квазистационарных состояний с редкими изменениями  $\alpha$ , что также соответствует состоянию без инверсий.

Частота инверсий, вообще говоря, не единственная характеристика, которая за-

висит от  $\tau$ . Интересно посмотреть, как зависит от  $\tau$  полная энергия  $E_M$  (рис. 6, б). При том, что величина диполя  $M$  не претерпела существенного изменения, полная энергия  $E_M$  при введении шума существенно увеличила свое значение. Другими словами, возмущение  $\alpha$  на малых масштабах, а именно это и происходит при использовании возмущения в виде (8), приводит к изменению спектра магнитного поля, сводящееся к усилению мелкомасштабной компоненты. Последнее приводит к увеличению полной магнитной энергии на порядок. В каком-то смысле ситуация становится более реалистичной и похожей на то, что происходит в жидком ядре Земли, где спектр магнитного поля убывает крайне медленно [Roberts, Glatzmaier, 2000]. Хотя, в силу простоты модели, вопрос об энергетическом бюджете не стоит, очевидно, что данный подход связан с повышенным потреблением энергии, быстро переходящей в энергию диссипации, и мало связанной с поведением крупномасштабного магнитного поля  $M$ . Другими словами, внесение случайного шума снижает КПД генерации крупномасштабного магнитного поля. Ситуация чем-то похожа на задачу о зависимости величины критического магнитного числа Рейнольдса от амплитуды магнитного числа Прандтля и связанной с ним степени случайности поля скорости, см. подробнее в [Tobias, Cattaneo, Boldyrev, 2013].

Расчеты подтверждают наши предположения о зависимости количества инверсий от величины  $\tau$ , демонстрируя уменьшение количества инверсий при слишком малых и больших  $\tau$  (рис. 6, б). Другой важной особенностью является большая амплитуда флуктуаций магнитной энергии  $E_M$ , превосходящая средний уровень во много раз, и соответствующая по физике режимам с большими числами магнитного Рейнольдса.

В расчетах мы использовали достаточно большую амплитуду шума  $\epsilon = 3$ , который приводил к возмущению  $\alpha$ . Напомним, что возмущение вводилось независимо в каждой точке по  $\theta$ . Возможность больших локальных флуктуаций, вообще говоря, не противоречит режимам с большими числами Рейнольдса. В то же время, оценка по порядку величины возмущения среднего значения уже намного более скромная:  $\delta\alpha \sim \epsilon \mathcal{N}^{-1/2}$ , где  $\mathcal{N}$  – количество точек по  $\theta$ . Для  $\mathcal{N} = 130$ , использованном в наших вычислениях,  $\delta\alpha \sim 0.3$ , что уже вполне приемлемо.

Обратим внимание, что период осцилляций системы при  $\epsilon = 0$  определяется исключительно амплитудой  $|\mathcal{D}|$ : это означает, что для  $\mathcal{D} = 1500$  мы вправе были бы ожидать инверсии магнитного поля на временах  $T$ . Если для отрицательных  $\mathcal{D}$  логично сопоставить  $T$  с основным периодом геодинамо  $\sim 10^4$  лет, то частота инверсий была бы крайне высокой. Это обстоятельство может быть причиной выбора отрицательных  $\mathcal{D}$  в модели. Согласно трехмерным вычислениям [Решетняк, 2010а], при положительном  $\alpha$ , т.е. при отрицательной гидродинамической спиральности, вне ТЦ градиент угловой скорости вращения оказывается отрицательным для сравнительно больших значений чисел Рэллея (в единицах его критического значения на пороге возникновения конвекции), что соответствует представлениям о конвекции в ядре Земли [Jones, 2000]. Отметим также возможность положительных  $\mathcal{D}$  вблизи оси в ТЦ.

Введение случайных флуктуаций в  $\alpha$ -эффект является не единственной возможностью вывести систему (1) на режим инверсий. Используемая алгебраическая нелинейность (5) предполагает мгновенный отклик  $\alpha$  на изменение  $E_M$ , что, вообще говоря, не соответствует действительности. Трехмерные вычисления указывают на существование по-масштабного баланса магнитной и кинетической энергии [Tobias,

[Cattaneo, Boldyrev, 2013], что может приводить к некоторому запаздыванию в отклике. В таких системах возможно развитие резонансных явлений, приводящих как к изменению формы решения во времени, так и возрастанию амплитуды [Решетняк, 2010б]. Ниже мы рассмотрим динамическую модель  $\alpha$ -квенчинга, хорошо известную в солнечном и галактическом динамо [Kleeorin, Rogachevskii, Ruzmaikin, 1995].

Идея квенчинга состоит в том, чтобы остановить рост магнитного поля возрастом магнитного  $\alpha_m$ -эффекта, который компенсирует гидродинамический  $\alpha_o$ -эффект [Pouquet, Frisch, Leorat, 1976; Зельдович, Рузмайкин, Соколов, 2006]. Суммарный  $\alpha$ -эффект равен сумме двух вкладов:  $\alpha = \alpha_o + \alpha_m$ , где магнитная часть подчиняется эволюционному дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial t} = \mathbf{V} \cdot \nabla \times \mathbf{B} - (\alpha_o + \alpha_m) \frac{\mathbf{B}^2}{\eta} - \frac{\alpha_m}{\mathcal{T}}, \quad (9)$$

обеспечивающему сдвиг по времени между  $\alpha_o$  и магнитным полем. Здесь  $\eta$  – магнитная диффузия и  $\mathcal{T}$  – релаксационное время. Исследование свойств решений (1) совместно с (9) не входит в нашу задачу. Далее мы ограничимся приближением малых периодов осцилляций  $T$  ( $\mathcal{T} \ll T$ ) [Kleeorin, Rogachevskii, Ruzmaikin, 1995]:

$$\alpha = \frac{\alpha_o + \chi^J}{1 + C_a \mathbf{B}^2}. \quad (10)$$

Отличие (10) от (5) состоит в том, что нелинейность учитывает производные магнитного поля (входящие в силу Лоренца!), усиливая тем самым отклик  $\mathbf{V}$  на возмущение  $\alpha$ . Здесь  $\chi^J = \mathbf{V} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$  означает токовую спиральность, которая для одномерного случая по  $\theta$  имеет вид:

$$\chi^J = 2 B_r B' + B_r B \operatorname{ctg} \theta - (B B_r)'. \quad (11)$$

Аналогично предыдущему случаю, ограничиваясь отрицательными  $\mathcal{D}$  и решая систему (1), (10), (11) численно для  $\mathcal{D} = -1500$ , имеем следующее: при  $C_a \gg 1$  решение стационарно. Режим  $C_a \ll 1$  соответствует неустойчивым решениям, что связано с резонансными явлениями. Для случая  $C_a \sim 1$ , используя численный коэффициент (0.2–0.3) при  $\chi^J$ , удается получить переход от осцилляций  $M$  с малой амплитудой для режима в осцилляциях к режиму с практически периодическими сменами полярности и периодом в 4 раза меньшим, чем период  $T$  с рассмотренной ранее нелинейностью в форме (5). В этом случае форма  $M(t)$  уже меньше напоминает синусоиду и имеет изломы. Получить случайную последовательность инверсий в этом случае не удастся. Другими словами, нелинейность в виде (10) может оказаться полезной для объяснения археомагнитных колебаний, вариаций солнечной активности в задачах солнечного динамо, но не может быть полезной для получения инверсий в модели геодинамо, поскольку характерные времена между инверсиями оказываются слишком малыми. Возможно, положительный результат можно получить, решая (9) для  $\mathcal{T}$  много больших или сравнимых с  $T$ . Использование (10), (11) совместно с возмущенным случайным шумом  $\alpha$  не вносит качественно новых эффектов в распределение инверсий.

### Обсуждение и выводы

Согласно приведенным в работе оценкам динамо-числа и данным линейного анализа, для рассмотренной модели Паркера должно было бы наблюдаться несколько собственных решений с различной четностью (дипольность или квадрупольность) и поведением во времени (стационарные или осциллирующие). Введение нелинейностей, ограничивающих экспоненциальный рост магнитного поля, приводит к эффективному подавлению источников энергии, так что генерация высоких мод становится невозможной. В то же время, нелинейность приводит к искажению формы собственных решений, так что конечное решение может лишь отдаленно напоминать исходные линейные решения. Используя простейшую одномерную  $\alpha\omega$ -модель, нам удалось воспроизвести дипольное магнитное поле как регулярно меняющее свою полярность, так и в устойчивом режиме в осцилляциях. В свою очередь, добавление случайного шума в  $\alpha$ -эффект позволило получить хаотическую смену полярности магнитного поля на фоне осцилляций поля с основным периодом геодинамо. Сравнение с результатами трехмерных вычислений конвекции в жидком ядре позволяют убедиться в справедливости выбора знака динамо-числа в нашей модели.

### Литература

- Ануфриев А.П., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д.* Оценка динамо-числа в модели турбулентного  $\alpha$ -эффекта для жидкого ядра Земли // Геомагнетизм и аэрономия. 1997. Т. 37, № 5. С.141–146.
- Брагинский С.И.* Почти аксиально-симметричная модель гидромагнитного динамо Земли // Геомагнетизм и аэрономия. 1978. Т. 18, № 2. С.340–351.
- Зельдович Я.Б., Рuzмайкин А.А., Соколов Д.Д.* Магнитные поля в астрофизике. М.; Ижевск: РХД, 2006. 384 с.
- Попова Е.П., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д.* Меридиональная циркуляция и распространение динамо-волн // Астрономический журнал. 2008. Т. 85, № 1. С.183–190.
- Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д., Шукуров А.М.* Устойчивость нелинейного динамо в диске // Магнитная гидродинамика. 1992. Т. 3. С.10–18.
- Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д.* Напряженность геомагнитного поля и подавление спиральности в геодинамо // Физика Земли. 2003. Т. 39, № 9. С.774–777.
- Решетняк М.Ю.* Тейлоровский цилиндр и конвекция в сферической оболочке // Геомагнетизм и аэрономия. 2010а. Т. 50, № 2. С.273–283.
- Решетняк М.Ю.* Эффекты запаздывания в динамо Паркера // Астрономический журнал. 2010б. Т. 87, № 11. С.1135–1140.
- Решетняк М.Ю.* Нарушение симметрии в моделях динамо // Докл. РАН. 2011. Т. 439, № 4. С.467–472.
- Решетняк М.Ю.* Модель Паркера в геодинамо // Физика Земли. 2012. Т. 48, № 4. С.326–334.
- Рuzмайкин А.А., Соколов Д.Д., Шукуров А.М.* Магнитные поля галактик. М.: Наука, 1988. 279 с.
- Собко Г.С., Задков В.Н., Соколов Д.Д., Трухин В.И.* Инверсии геомагнитного поля в простой модели геодинамо // Геомагнетизм и аэрономия. 2012. Т. 52, № 2. С.271–277.
- Beck R., Brandenburg A., Moss D., Shukurov A., Sokoloff D.* Galactic magnetism: recent developments and perspectives // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1996. V. 34. P.155–206.
- Brandenburg A., Subramanian K.* Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory // Physics Reports. 2005. V. 417. P.1–209.
- Christensen U.R., Aubert J., Hulot G.* Conditions for Earth like geodynamo models // Earth. Planet Sci. Lett. 2010. V. 296. P.487–496.
- Hoynig P.* Helicity fluctuations in mean field theory: an explanation for the variability of the solar cycle? // Astron. Astrophys. 1993. V. 272. P.321–339.
- Jacobs J.A.* Reversals of the Earth's Magnetic Field. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 324 p.

- Jones C.A.* Convection driven geodynamo models // *Phil. Trans. R. Soc. London.* 2000. V. A358. P.873–897.
- Jones C.* Planetary magnetic fields and fluid dynamos // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2011. V. 43. P.583–614.
- Kleeorin N., Rogachevskii I., Ruzmaikin A.* Magnitude of dynamo generated magnetic field in solar type convective zones // *Astronomy and Astrophysics.* 1995. V. 297. P.159–167.
- Krause F., Rädler K.H.* Mean field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Berlin: Akademie Verlag, 1980. 271 p.
- Kvasz L., Shukurov A., Sokoloff D.* A steady state of the disc dynamo // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.* 1992. V. 65. P.231–244.
- Moffatt H.K.* Magnetic field generation in electrically conducting fluids. Cambridge: Cambridge University Press, 1978. 343 p.
- Parker E.N.* Hydromagnetic dynamo models // *Astrophys. J.* 1955. V. 122. P.293–314.
- Pouquet A., Frisch U., Leorat J.* Strong MHD helical turbulence and the nonlinear dynamo effect // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 77. P.321–354.
- Roberts P.H., Glatzmaier G.A.* A test of the frozen flux approximation using a new geodynamo model // *Phil. Trans. R. Soc. London.* 2000. V. 358. P.1109–1121.
- Tobias S.M., Cattaneo F., Boldyrev S.* MHD dynamos and turbulence. In *Ten Chapters In Turbulence / Eds. P.A. Davidson, Y. Kaneda, K.R. Sreenivasan.* NY: Cambridge University Press, 2013. 450 p.
- Vainshtein S.I., Cattaneo F.* Nonlinear restrictions on dynamo action // *Astrophys. J.* 1992. V. 393. P.165–171.

*Сведения об авторе*

**РЕШЕТНЯК Максим Юрьевич** – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: (499)-254-92-14. Email: m.reshetnyak@gmail.com

## NONLINEARITY IN PARKER'S DYNAMO MODEL

M.Yu. Reshetnyak

*Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**Abstract.** The various mechanisms of the  $\alpha$  effect quenching by the magnetic field in Parker's dynamo model in the liquid Earth's core are considered. We show that random fluctuations of the  $\alpha$  effect, which causes chaotic reversals of the geomagnetic field, lead to increase of the magnetic energy at the small scales. To provide reversals due to fluctuations, the total magnetic energy should increase in one order relative to the state without fluctuations.

**Keywords:** geodynamo, kinetic helicity, differential rotation, reversals.