

УДК 550.344

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ *SH*-ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ НЕУПРУГОЙ ЗЕМЛЕ

© 2014 г. В.Ю. Бурмин¹, Д.С. Кравцов¹, И.В. Лукьянов¹,
А.Г. Фатьянов²

¹ *Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия*

² *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Рассматривается алгоритм численного моделирования волнового поля в неоднородной неупругой Земле, построенный с помощью численно-аналитического метода. Приведены результаты расчета синтетических сейсмограмм.

Ключевые слова: волновое поле, численное моделирование, неупругая Земля, сейсмические волны.

Введение

В последние десятилетия в теории распространения сейсмических волн благодаря использованию различных аналитических и численных методов достигнут значительный прогресс при изучении динамических процессов. Существует большое число сеточных методов расчета волновых полей (отметим, например, работу [Самарский, 1977]). Однако при использовании этих методов происходит существенная потеря точности за счет возникновения сеточной дисперсии. Для безартефактного моделирования требуется использование мелкого шага сетки, что приводит к очень большим затратам машинного времени. В частности, при расчете волнового поля в Земле эти затраты становятся столь большими, что не позволяют проводить вычисления на современных ЭВМ.

Новые возможности для численного моделирования волновых полей появились при комбинировании конечно-разностных методов с аналитическими приемами разделения переменных. При численно-аналитическом моделировании также возникает проблема выбора шага разностной схемы. Показано, что при достаточно мелком шаге разностной схемы численно-аналитическое решение хорошо совпадает с аналитическим [Fatyanov, Terekhov, 2011]. В 1981 г. А.Г. Фатьяновым [1981] был предложен следующий численно-аналитический метод – в сферической системе координат ($0 \leq r \leq R$; $0 \leq \theta \leq \pi$; $0 < \varphi \leq 2\pi$) рассматривается неоднородный неупругий шар радиуса R , заполненный средой Больцмана.

Теория, учитывающая историю нагружения, впервые была сформулирована Л. Больцманом и получила название линейной теории наследственности. Основная идея теории Больцмана состоит в том, что при каждой ступени нагрузки в упруго-вязкой среде процесс деформации протекает независимо от того, какая нагрузка была до этого, но считается, что от всех предыдущих ступеней нагрузки процесс не завершился. Поэтому процесс как бы ступенчато сдвинут, а конечный результат является суммой (интегралом) результатов всех предшествующих нагружений, поскольку уравнение линейно.

Позже эта теория была развита В. Вольтерра, предложившим интегральные соотношения, обобщающие уравнения Больцмана, и поэтому чаще ее стали называть теорией Больцмана–Вольтерра.

При нагрузке $\sigma(t)$ выражение наследственной теории ползучести имеет вид [Биргер, Пановко, 1988]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t Q(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau,$$

где $Q(t-\tau)$ – ядро ползучести, характеризующее скорость деформации при постоянном напряжении $\sigma=1$; E – мгновенный модуль упругости; время t отсчитывается от момента первого нагружения.

Уравнения наследственной ползучести обладают большой общностью и при соответствующем выборе ядра $Q(t-\tau)$, которое получается экспериментальным путем, дают различные законы деформирования.

Постановка задачи

Исследование распространения волн в земном шаре в рамках модели Больцмана сводится к решению системы динамических уравнений с объемными силами:

$$(\lambda + 2M)\text{graddiv}\mathbf{U} + M\text{rot rot}\mathbf{U} + \text{div}M\text{grad}\lambda + 2(\text{grad}M\mathbf{E}) + \rho\mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \quad (1)$$

при начальных (2) и граничных (3) условиях:

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{\varphi r} = 0 \Big|_{r=R}. \quad (3)$$

В уравнении (1) \mathbf{E} – тензор деформации; $\mathbf{U} = (U_r, U_\theta, U_\varphi)$ – вектор смещения; λ и M – интегральные операторы, действующие по правилу:

$$\Lambda = \lambda x - x' \int_{-\infty}^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau, \quad M = My - y' \int_{-\infty}^t h(t-\tau)y(\tau)d\tau,$$

где $h(\xi)$, $g(\xi)$ – функции последдействия, удовлетворяющие трем следующим условиям:

h, g – положительные и монотонно-убывающие при $\xi \rightarrow \infty$;

$$\mu' \int_0^\infty h(t)dt < \mu, \quad \lambda' \int_0^\infty g(t)dt < \lambda;$$

$h, g=0$ при $\xi < 0$.

Упругие параметры Ламе λ, μ , плотность ρ и параметры неидеальности λ', μ' предполагаются кусочно-гладкими функциями координаты r .

Приложим в точке $r=d, \theta=0$ вращательное воздействие в виде момента сил

$$\mathbf{F} = \delta(r-d) \frac{\delta(\theta)}{d^3 \sin^2 \theta} f(t) \mathbf{e}_\varphi;$$

при этом в среде возникают и распространяются только волны типа SH .

Вектор упругих смещений определяется формулой $\mathbf{U} = U_\varphi(r, \theta, t) \mathbf{e}_\varphi$. Входной импульс выбран в виде $f(t) = \exp(-4\pi^2 f^2 t^2 / \gamma^2) \cos(2\pi t)$, где f – частота; γ – параметр, характеризующий форму и длительность сигнала (рис. 1).

В сферической системе координат система (1) приобретает вид [Левшин, 1973]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \theta r}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi r}{\partial \varphi} + \frac{\partial r r}{\partial r} + \frac{1}{r} (2r r - \theta \theta - \varphi \varphi + \theta r \text{ctg} \theta) = \rho \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} - F_r,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \theta \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \theta \varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta r}{\partial r} + \frac{1}{r} (3\theta r + (\theta \theta - \varphi \varphi) \operatorname{ctg} \theta) = \rho \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2} - F_\theta,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \theta \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi \varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varphi r}{\partial r} + \frac{1}{r} (3\varphi r + 2\theta \varphi \operatorname{ctg} \theta) = \rho \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial t^2} - F_\varphi,$$

где

$$\theta r = M \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right), \quad \theta \theta = \lambda \Delta + \frac{2M}{r} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right),$$

$$\theta \varphi = \frac{M}{r} \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - U_\varphi \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U_\theta}{\partial \varphi} \right), \quad \varphi r = M \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} \right),$$

$$\varphi \varphi = \lambda \Delta + \frac{2M}{r} \left(U_r + U_\theta \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad r r = \lambda \Delta + 2M \frac{\partial U_r}{\partial r},$$

а $\Delta = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{2U_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta$ – дилатансия.

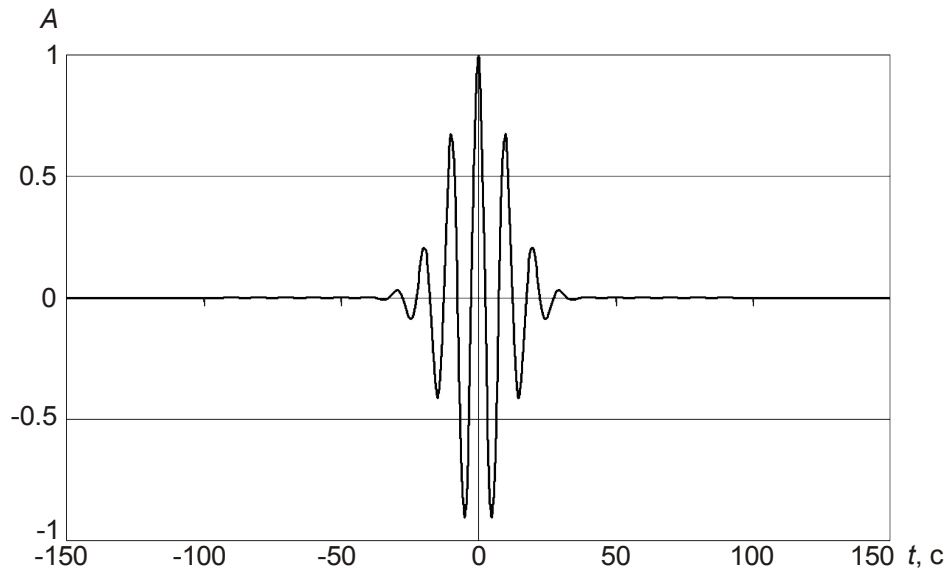


Рис. 1. Вид входного сигнала $f(t)$

Запишем уравнение для нахождения U_φ . В нашем случае $U_r=U_\theta=0$, $\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} = 0$, следовательно, дилатансия $\Delta=0$. Уравнение для компоненты U_φ примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{M}{r} \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - U_\varphi \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U_\theta}{\partial \varphi} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[M \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{r} \left\{ 3M \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} \right) + 2 \left[\frac{M}{r} \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - U_\varphi \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U_\theta}{\partial \varphi} \right) \right] \operatorname{ctg} \theta \right\} = \rho \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial t^2} - F_\varphi.$$

Таким образом, компонента U_φ определяется из уравнения:

$$\frac{M}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta} - U_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[M \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r} \right) \right] + \frac{3M}{r} \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r} \right) +$$

$$+ \frac{2M}{r^2} \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta} - U_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) \operatorname{ctg} \theta + \rho F_\varphi = \rho \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial t^2} \quad (4)$$

с начальными данными

$$U_{\varphi}|_{t=0} = \frac{\partial U_{\varphi}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad (5)$$

и граничным условием на свободной поверхности

$$M\left(\frac{\partial U_{\varphi}}{\partial r} - \frac{U_{\varphi}}{r}\right)\bigg|_{r=R} = 0. \quad (6)$$

Краевая задача (4)–(6) решается в рамках сейсмологической модели жидкого ядра, что приводит к дополнительному граничному условию:

$$M\left(\frac{\partial U_{\varphi}}{\partial r} - \frac{U_{\varphi}}{r}\right)\bigg|_{r=R_0} = 0. \quad (7)$$

Здесь R и $R_0 > 0$ – соответственно радиус Земли и жидкого ядра.

Решение краевой задачи (4)–(7) состоит в разделении переменных θ и t и численном решении полученных двухпараметрических одномерных краевых задач.

Разделение переменных

Разделение переменных предполагает два этапа, на первом из которых отделяется переменная θ и решение ищется в виде:

$$U_{\varphi}(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} S(r, k, t) P_k^1(\cos \theta), \quad (8)$$

где $S(r, k, t) = \frac{2k+1}{2k(k+1)} \int_{-1}^1 U_{\varphi} P_k^1(\cos \theta) d \cos \theta$; $P_k^1(\cos \theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра I рода [Наденник, 2010].

Подставим выражение (8) в уравнение для вектора смещения:

$$\begin{aligned} \frac{M}{r^2} \sum_{k=1}^{\infty} S \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial P_k}{\partial \theta} - P_k \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[M \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{S}{r} \right) P_k \right] + \frac{3M}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{S}{r} \right) P_k + \\ + \frac{2M}{r^2} \sum_{k=1}^{\infty} S \left(\frac{\partial P_k}{\partial \theta} - P_k \operatorname{ctg} \theta \right) \operatorname{ctg} \theta + \rho F_{\varphi} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{k=1}^{\infty} S P_k. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь для краткости опущены аргументы функций $S(r, k, t)$, $P_k(\cos \theta)$. Перегруппируем слагаемые в выражении (9) таким образом, чтобы производные по r и θ стояли отдельно:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[M \left(\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{S}{r} \right) \right] + \frac{3M}{r} \left(\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{S}{r} \right) \right) P_k + \\ + \frac{M}{r^2} \sum_{k=1}^{\infty} S \left\{ \frac{\partial^2 P_k}{\partial \theta^2} - \frac{\partial P_k}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - P_k \frac{\partial (\operatorname{ctg} \theta)}{\partial \theta} + 2 \left(\frac{\partial P_k}{\partial \theta} - P_k \operatorname{ctg} \theta \right) \operatorname{ctg} \theta \right\} + \rho F_{\varphi} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{k=1}^{\infty} S P_k. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее воспользуемся дифференциальным уравнением для присоединенных полиномов Лежандра I рода [Наденник, 2010]:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P_k(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) + \left(k(k+1) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) P_k = 0.$$

Раскрыв скобки, получим $\operatorname{ctg}\theta \frac{\partial P_k}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 P_k}{\partial \theta^2} + \left(k(k+1) - \frac{1}{\sin^2 \theta}\right) P_k = 0$. Подставив это выражение в (10), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[M \left(\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{S}{r} \right) \right] + \frac{3M}{r} \left(\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{S}{r} \right) \right) P_k + \frac{M}{r^2} \sum_{k=1}^{\infty} S(-k(k+1)+2) + \rho F_{\varphi} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{k=1}^{\infty} S P_k. \quad (11)$$

Силу F_{φ} также можно представить в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$F_{\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\cos \theta) f_{\varphi}(r) \delta(r-d) f(t).$$

Разложение силы подставляется в (11). Так как вклад в уравнение для каждого k независим, суммирование по k можно опустить и сократить P_k в обеих частях уравнения. В итоге получим для S задачу, редуцированную из (4)–(7):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[M \left(\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{S}{r} \right) \right] + \frac{3M}{r} \left(\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{S}{r} \right) - \frac{M}{r^2} [k(k+1) - 2] S + \rho f_{\varphi} \delta(r-d) f(t) = \rho \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}, \quad (12)$$

с начальными $S|_{t=0} = \frac{\partial S}{\partial t}|_{t=0} = 0$ и граничными $M \left(\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{S}{r} \right) \Big|_{r=R, R_0} = 0$ условиями. Граничные условия получаются путем замены U на S , поскольку не зависят от переменной θ .

На втором этапе отделяется переменная t . Решение ищется в виде $S = S_1 r$; при этом $S_1 = \left(\frac{a(r, k, 0)}{2T} + \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{\infty} a(r, k, i) \cos \lambda_i t + b(r, k, i) \sin \lambda_i t \right)$, где $a(r, k, 0) = \int_0^{2T} S_1(r, k, t) dt$;

$$a(r, k, i) = \int_0^{2T} S_1(r, k, t) \cos \lambda_i t dt; \quad b(r, k, i) = \int_0^{2T} S_1(r, k, t) \sin \lambda_i t dt; \quad \lambda_i = \frac{i\pi}{t}.$$

Рассмотрим задачу нахождения функции S_1 . Справедливо равенство

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (S_1 r) = \frac{\partial S_1}{\partial r} r + S_1$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{S}{r} = \frac{\partial S_1}{\partial r} r.$$

В этом случае уравнение (12) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[M \left(\frac{\partial S_1}{\partial r} r \right) \right] + \frac{3M}{r} \frac{\partial S_1}{\partial r} r - \frac{M}{r^2} [k(k+1) - 2] S_1 r + \rho f_{\varphi} \delta(r-d) f(t) = \rho r \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2}.$$

Поделим обе части уравнения на r и приведем его к дивергентному виду:

$$\frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(M r^4 \frac{\partial S_1}{\partial r} \right) - \frac{M}{r^2} [k(k+1) - 2] S_1 + \frac{\rho f_{\varphi} \delta(r-d) f(t)}{r} = \rho \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2};$$

при этом начальные и граничные условия примут вид:

$$S_1|_{t=0} = \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad M \frac{\partial S_1}{\partial r} \Big|_{r=R, R_0} = 0. \quad (13)$$

Далее нам понадобятся формулы:

$$\int_0^{2T} \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \cos \lambda_i t dt = + \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_0^{2T} - \lambda_i^2 \int_0^{2T} S_1 \cos \lambda_i t dt,$$

$$\int_0^{2T} \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2} \sin \lambda_i t dt = - \lambda_i S_1 \Big|_0^{2T} - \lambda_i^2 \int_0^{2T} S_1 \sin \lambda_i t dt,$$

$$\int_0^{2T} \sin \lambda_i t \int_{-\infty}^t h(t-\tau) S_1(\tau) d\tau dt \approx \int_0^{\infty} h(t) d(t) \int_0^{2T} S_1(\tau) \sin \lambda_i(t+\tau) d\tau.$$

Вводя обозначения $\alpha = \int_0^{\infty} h(t) \cos \lambda t dt$; $\beta = \int_0^{\infty} h(t) \sin \lambda t dt$, последнее соотношение пере-

пишем в виде $\int_0^{2T} \sin \lambda_i t \int_{-\infty}^t h(t-\tau) S_1(\tau) d\tau dt \approx \alpha \int_0^{2T} S_1(\tau) \sin \lambda_i \tau d\tau + \beta \int_0^{2T} S_1(\tau) \cos \lambda_i \tau d\tau$; анало-

гично имеем $\int_0^{2T} \cos \lambda_i t \int_{-\infty}^t h(t-\tau) S_1(\tau) d\tau dt \approx -\beta \int_0^{2T} S_1(\tau) \sin \lambda_i \tau d\tau + \alpha \int_0^{2T} S_1(\tau) \cos \lambda_i \tau d\tau$.

Теперь, вспомнив, что M представляет собой интегральный оператор, действующий по правилу (2), перепишем уравнение для нахождения функции S_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r^4 \frac{\partial S_1}{\partial r} \right) - \frac{\mu}{r^2} [k(k+1) - 2] S_1 - \\ & - \int_{-\infty}^t h(t-\tau) \left[\frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r^4 \frac{\partial S_1}{\partial r} \right) - \frac{\mu'}{r^2} [k(k+1) - 2] S_1 \right] d\tau + \frac{\rho f_{\phi} \delta(r-d) f(t)}{r} = \rho \frac{\partial^2 S_1}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Представим импульс в источнике тригонометрическим рядом

$$f(t) = \frac{1}{T} \left(\frac{p_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} p \cos \lambda_i t + q \sin \lambda_i t \right), \text{ где } p = \int_0^{2T} f(t) \cos \lambda t dt, \quad q = \int_0^{2T} f(t) \sin \lambda t dt.$$

Последовательно умножая уравнение (14) и граничные условия (13) сначала на $\cos \lambda_i t$, затем на $\sin \lambda_i t$ и интегрируя от 0 до $2T$, получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r^4 \frac{\partial a}{\partial r} \right) - \frac{\mu}{r^2} [k(k+1) - 2] a + \beta \left[\frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r^4 \frac{\partial b}{\partial r} \right) - \frac{\mu'}{r^2} [k(k+1) - 2] b \right] - \\ & - \alpha \left[\frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r^4 \frac{\partial a}{\partial r} \right) - \frac{\mu'}{r^2} [k(k+1) - 2] a \right] + \frac{\rho f_{\phi} \delta(r-d) p}{r} = -\rho \lambda_i^2 a - \rho \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_{t=0} + \rho \frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_{t=2T}; \\ & \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r^4 \frac{\partial b}{\partial r} \right) - \frac{\mu}{r^2} [k(k+1) - 2] b - \alpha \left[\frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r^4 \frac{\partial b}{\partial r} \right) - \frac{\mu'}{r^2} [k(k+1) - 2] b \right] - \\ & - \beta \left[\frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r^4 \frac{\partial a}{\partial r} \right) - \frac{\mu'}{r^2} [k(k+1) - 2] a \right] + \frac{\rho f_{\phi} \delta(r-d) q}{r} = -\rho \lambda_i^2 b + \rho \lambda_i S_1 \Big|_{t=0} - \rho \lambda_i S_1 \Big|_{t=2T} \end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial a}{\partial r} - \mu' \left[-\beta \frac{db}{dr} + \alpha \frac{da}{dr} \right] \Big|_{r=R, R_0} = 0, \\ & \mu \frac{\partial b}{\partial r} - \mu' \left[\alpha \frac{db}{dr} + \beta \frac{da}{dr} \right] \Big|_{r=R, R_0} = 0. \end{aligned}$$

Начальные условия удовлетворяются точно; причем S_1 и $\frac{\partial S_1}{\partial t} \Big|_{t=2T}$ равномерно по r

стремятся к 0 при $T \rightarrow \infty$. Выполнение последнего условия доказывается в [Фатьянов, Михайленко, 1979].

Вводя для сокращения записи дифференциальный оператор

$$\Lambda(P, Q) = \frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left(r^4 P \frac{dQ}{dr} \right) - \frac{P}{r^2} [k(k+1) - 2] Q$$

и обозначая $d_1 = \mu - \alpha\mu'$, $d_2 = \beta\mu'$, окончательно получим двухпараметрическое семейство одномерных краевых задач:

$$\begin{aligned} \Lambda(d_1, a) + \Lambda(d_2, b) + \rho f_\phi \frac{\delta(r-d)}{r} p + \rho\lambda^2 a &= 0, \\ -\Lambda(d_2, a) + \Lambda(d_1, b) + \rho f_\phi \frac{\delta(r-d)}{r} q + \rho\lambda^2 b &= 0; \end{aligned} \tag{15}$$

$$d_1 \frac{da}{dr} + d_2 \frac{db}{dr} \Big|_{r=a, a_0} = 0, \quad -d_2 \frac{da}{dr} + d_1 \frac{db}{dr} \Big|_{r=a, a_0} = 0, \tag{16}$$

Для краткости в (15), (16) опущены индексы i и k .

Решение задачи (15)–(16) осуществляется конечно-разностным методом. Аппроксимация краевых условий (16) производится со вторым порядком по h .

Введем разностную схему $\omega_n = \{r_n = (n+1)h, n = 0, 1, \dots, N, hN = R, lh = R_0\}$ на отрезке $R \leq r \leq R_0$. Разностную схему для (15) напомним по аналогии с [Фатьянов, Михайленко, 1979] методом конечных объемов. Проинтегрируем (15) по $\int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} r^4 \dots dr$, где

$$r_{n\pm 1/2} = r_n \pm \frac{h}{2}:$$

$$\begin{aligned} \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} \Lambda(P, Q) r^4 dr &= \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} \frac{d}{dr} \left(r^4 P \frac{dQ}{dr} \right) dr - \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} r^2 P [k(k+1) - 2] Q dr \approx r_{n+1/2}^4 P_{n+1/2} \frac{Q_{n+1} - Q_n}{h} - \\ &- r_{n-1/2}^4 P_{n-1/2} \frac{Q_n - Q_{n-1}}{h} - r_n^2 P_n [k(k+1) - 2] Q_n h, \\ &\int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} \rho \lambda_i^2 a r^4 dr \approx \rho_n \lambda_i^2 r_n^4 a_n h, \\ &\int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} \rho f_\phi \frac{\delta(r-d)}{r} p r^4 dr \approx \rho_n p_n \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} r^3 \delta(r-d) dr. \end{aligned}$$

Далее, разделив все слагаемые на r_n^4 и умножив на h , получим следующую трехдиагональную систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} A_n Y_{n-1} - C_n Y_n + B_n Y_{n+1} = -F_n \\ Y_0 = A_0 Y_1 + F_0 \\ Y_N = A_N Y_{N-1} + F_N. \end{cases}$$

В этой системе введены следующие обозначения:

$$A_n = \frac{r_{n-1/2}^4}{r_n^4} \begin{pmatrix} d_{n-1/2}^1 & d_{n-1/2}^2 \\ -d_{n-1/2}^2 & d_{n-1/2}^1 \end{pmatrix}; \quad B_n = \frac{r_{n+1/2}^4}{r_n^4} \begin{pmatrix} d_{n+1/2}^1 & d_{n+1/2}^2 \\ -d_{n+1/2}^2 & d_{n+1/2}^1 \end{pmatrix}; \quad C_n = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ -C_2 & C_1 \end{pmatrix}; \quad F_n = \begin{pmatrix} F_n^1 \\ F_n^2 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{r_{n+1/2}^4}{r_n^4} d_{n+1/2}^1 + \frac{r_{n-1/2}^4}{r_n^4} d_{n-1/2}^1 + \frac{h^2 d_n^1}{r_n^2} [k(k+1) - 2] - \rho_n \lambda^2 h^2; \\ C_2 &= \frac{r_{n+1/2}^4}{r_n^4} d_{n+1/2}^2 + \frac{r_{n-1/2}^4}{r_n^4} d_{n-1/2}^2 + \frac{h^2 d_n^2}{r_n^2} [k(k+1) - 2]; \\ F_n^1 &= \frac{h \rho_n p}{r_n^4} \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} r^3 \delta(r-d) dr; \quad F_n^2 = \frac{h \rho_n q}{r_n^4} \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} r^3 \delta(r-d) dr. \end{aligned}$$

Соответствующие матричные уравнения решаем методом прогонки и в результате находим a_n , b_n на каждом пространственном слое. Осуществляя этот алгоритм для набора значений i, k , искомое решение для произвольных $r > 0$, θ и времен $t < 2T$ получим

$$\text{как } U_\phi(r, \theta, t) = \frac{r}{T} \sum_{k=1}^{N_1} \left(\frac{a(r, k, 0)}{2} + \sum_{i=1}^{N_2} a(r, k, i) \cos \frac{i\pi}{T} t + b(r, k, i) \sin \frac{i\pi}{T} t \right) P_k^1(\cos \theta).$$

Результаты численного моделирования с использованием представленного алгоритма

Данный алгоритм был реализован численно на языке FORTRAN98. Были выполнены расчеты для модели Земли из работы [Бурмин, 2006] при источнике на глубине 100 км и несущей частоте 0.1 Гц. В качестве исходных в программе задаются следующие данные: число границ в модели Земли и соответствующие значения плотности и модуля сдвига; число трасс в монтаже сейсмограмм; число членов полинома Лежандра; число членов в преобразовании Фурье; время начала и конца трассы (с); шаг сетки для прогонки (м, не менее 40 точек на длину волны); частота сигнала в источнике (Гц); параметр затухания (в данном случае равный 10); начальное эпицентрального расстояние и шаг по эпицентральному расстоянию в градусах; радиус до источника (км); радиус Земли (сферы, км)¹. Использованные распределения плотности ρ и модуля сдвига μ в мантии Земли приведены на рис. 2; для наглядности на этом же рисунке представлено распределение скорости V_{SH} .

Монтаж синтетических сейсмограмм SH -волн (рис. 3) отображает волновое поле, которое включает, рефрагированные SH -волны, а также волны, отраженные от земного ядра, целый набор кратных волн, отраженных от земной поверхности, и поверхностные волны Лява.

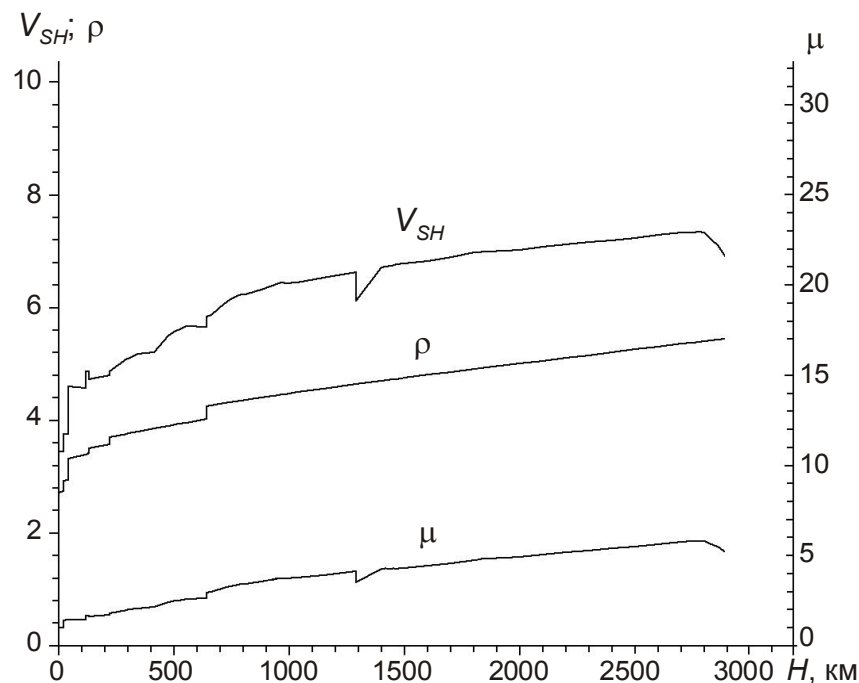


Рис. 2. Распределение скорости V_{SH} (км/с, левая вертикальная ось), плотности ρ (г/см³, левая вертикальная ось) и модуля сдвига $\mu \cdot 0.5 \cdot 10^{10}$ (Па, правая вертикальная ось) в мантии Земли

¹ Все исходные параметры задаются в системе СИ.

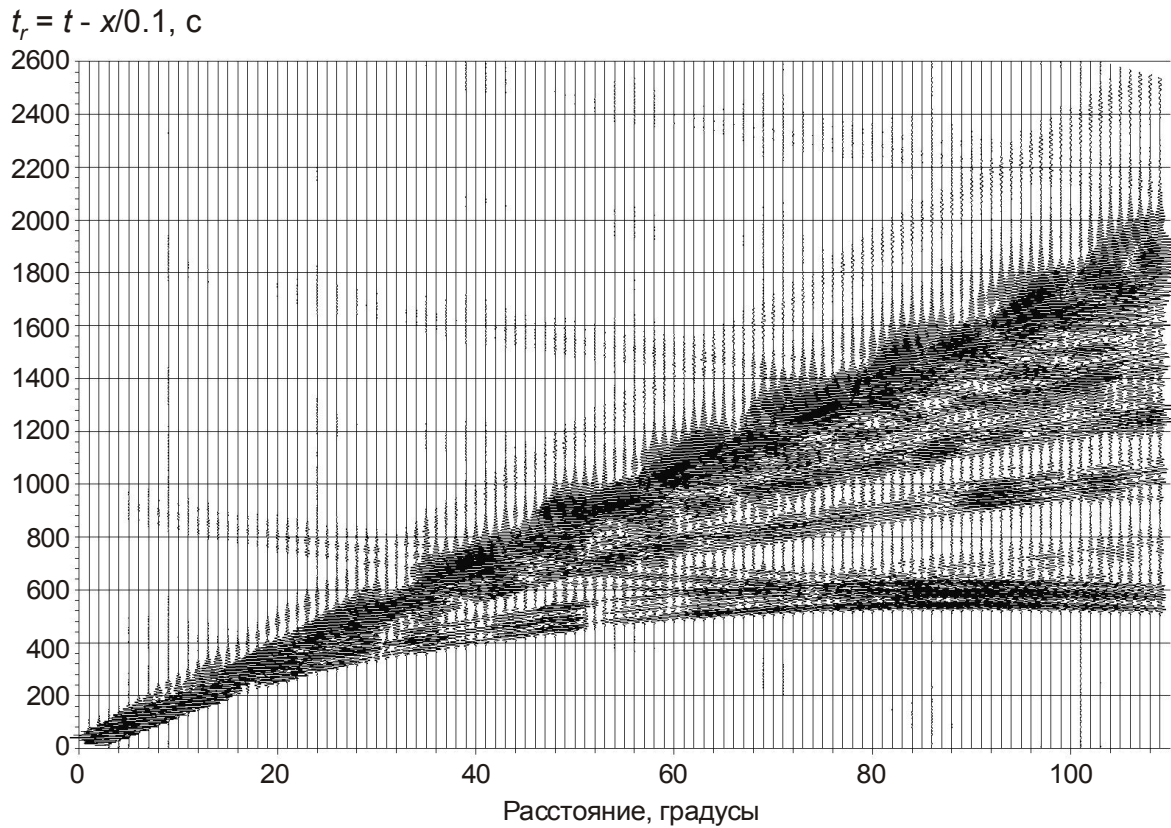


Рис. 3. Монтаж синтетических сейсмограмм SH-волн в мантии Земли, построенный по результатам численного моделирования с использованием представленного алгоритма

Заключение

В работе достаточно подробно выписаны основные уравнения метода для SH-волны и показана принципиальная возможность расчета волнового поля для неупругой Земли. Все расчеты выполнены на одном процессоре с тактовой частотой 2.2 ГГц. Расчет 100 трасс для мантии Земли занял в общей сложности около 15 сут. Переход на суперкомпьютер позволит с меньшими временными затратами проводить расчеты как для SH-волн, так и для волн P и SV, что представляет наибольший интерес для практики, а также для различных параметров среды и частот в источнике, включая частоту 1 Гц.

Литература

- Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник. В 3-х т. М.: Машиностроение, 1988. Т. 1. 733 с.
- Бурмин В.Ю. Распределение плотности и упругих параметров в Земле // Физика Земли. 2006. № 7. С.76–88.
- Левшин А.Л. Поверхностные и каналовые сейсмические волны. М.: Наука, 1973. 174 с.
- Наденик З. Шаровые функции для геодезии. М.: Изд-во МИИГАиК, 2010. 157 с.
- Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
- Фатьянов А.Г. Численное моделирование волновых полей в неоднородном неупругом шаре. Новосибирск, 1981. 21 с. (Препринт ВЦ СО АН СССР; 337).
- Фатьянов А.Г., Михайленко Б.Г. Численное решение задачи Лэмба для неоднородной среды Больцмана с упругим последствием // Математические методы интерпретации геофизических наблюдений. Новосибирск, 1979. С.115–160.
- Fatyanov A.G., Terekhov A.V. High-performance modeling acoustic and elastic waves using the Parallel Dichotomy Algorithm // J. Comp. Phys. 2011. V. 230. P.1992–2003.

Сведения об авторах

БУРМИН Валерий Юрьевич – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: (499)-254-68-95. E-mail: burmin@ifz.ru

КРАВЦОВ Дмитрий Сергеевич – аспирант, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: (499)-254-68-95. E-mail: lab303@ifz.ru

ЛУКЬЯНОВ Илья Владимирович – научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: (499)-254-68-95. E-mail: lab303@ifz.ru

ФАТЬЯНОВ Алексей Геннадьевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. 630090, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, д. 6. Тел.: +79069096821. E-mail: fat@nmsf.sccc.ru

NUMERICAL MODELING OF SH-WAVES IN AN INHOMOGENEOUS INELASTIC EARTH

V.Yu. Burmin¹, D.S. Kravtsov¹, I.V. Lukiyanov¹, A.G. Fatyanov²

¹ *Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

² *Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

Abstract. The paper considers an algorithm for the numerical modeling of the wave field in inhomogeneous inelastic Earth, constructed by using numerical-analytic method. The results of calculation of synthetic seismograms are represented.

Keywords: wave field, numerical modeling, inelastic Earth, seismic waves.