

УДК 550.340

## МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ОДНОМЕРНО НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ МОДЕЛИ ЗЕМНОЙ КОРЫ

© 2013 г. И.П. Добровольский

*Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия*

Рассматривается однородная система уравнений линейной теории упругости для изотропной среды с одномерной непрерывной неоднородностью. Применение двойного преобразования Фурье приводит задачу для изображений к обыкновенным дифференциальным уравнениям, решения которых для некоторых частных видов неоднородности могут быть получены в явном виде. В общем случае дифференциальные уравнения преобразованы в интегральные. Приводятся решения конкретных задач.

**Ключевые слова:** непрерывная неоднородность, слоистая среда, преобразование Фурье.

### Введение

Задачи для упругого полупространства занимают особое положение в науках о Земле. Дело в том, что земная кора и лежащие под ней слои успешно моделируются упругим полупространством даже на значительных расстояниях. Это особенно убедительно показано в расчетах процессов подготовки сильнейших землетрясений, диаметр зон подготовки которых достигает нескольких тысяч километров [Добровольский, 2009]. Геофизики часто используют также решение задачи Буссинеска – действие сосредоточенной силы на поверхности однородного полупространства.

Упомянутые расчеты, как и множество аналогичных, обладают некоторым общим качеством. В задаче Буссинеска все полупространство считается однородным; при расчетах процессов подготовки землетрясений земная кора принимается также однородной вне неоднородности, моделирующей будущую очаговую зону. Именно это качество – однородность – вызывает критику, суть которой довольно проста: земная кора, которая при вычислениях предполагается однородной, в действительности неоднородна, и, следовательно, надо еще посмотреть, насколько можно доверять расчетным результатам. Такая критика обычно отличается огульностью и бездоказательностью и, конечно, весьма уязвима; подобное положение можно долго обсуждать. Но лучшим (и, безусловно, научным) в этой ситуации будет конструктивный подход, предполагающий развитие методов решения задач для неоднородных сред. При этом преследуются две цели. Во-первых, мы получаем возможность решать задачи для реально неоднородной среды. Во-вторых, имея сложное решение для среды неоднородной, мы можем сравнить его с относительно простым для однородной, чтобы понять, в чем состоят их различия и действительно ли нужно их учитывать.

Одна из относительно простых форм неоднородности – одномерная неоднородность. В данном случае речь идет о неоднородности механических свойств по глубине. В работе [Добровольский, 2012] рассматривалась слоисто-однородная среда со скачками механических характеристик на границах слоев. Насколько такая ситуация соответствует реальной, следует судить по результатам анализа конкретного района. Решение подобных задач сравнительно просто, но результаты отличаются громоздкостью. Другой подход – решение задач с непрерывной неоднородностью свойств. Эти задачи подробно рассмотрены и обобщены в монографии [Ломакин, 1976]. Однако ни названная

монография, ни ряд аналогичных работ не исчерпывают темы. В настоящей статье это исследование продолжено с применением аппарата двойного преобразования Фурье и некоторых нестандартных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Цель настоящей работы – анализ задач теории упругости для полупространства с непрерывной одномерной неоднородностью. Если же говорить о форме статьи, то автор считает целесообразным привести в приложениях к ней некоторые известные сведения, что несколько увеличивает объем работы, но упрощает взаимодействие читателя с важными и необходимыми ссылками.

### Общая постановка задачи и обсуждение методов решения

Обобщение и анализ методов решения задач теории упругости для неоднородных сред выполнен В.А. Ломакиным в его монографии [1976]. В ней одним из основных общих методов решения задач для произвольно неоднородных тел считается метод возмущений, который, однако, требует знания функции Грина исследуемой задачи для однородной среды. Вместе с тем, в этой монографии довольно подробно исследован частный случай неоднородности – одномерная неоднородность. Поскольку именно эти результаты используются в настоящей работе, то в Приложении 1 приведены основные формулы, относящиеся к названному случаю.

Далее будет рассматриваться ситуация с неоднородным модулем сдвига и постоянным коэффициентом Пуассона ( $\nu = \text{const}$ ). Такие задачи в работе [Ломакин, 1976] исследовались с помощью метода разделения переменных. В настоящей статье рассматриваются задачи только для полупространства, что позволяет применить метод двойного преобразования Фурье.

Двукратное преобразование Фурье используется в форме

$$\tilde{f}(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{(px+qy)i} dx dy = \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} r f(x, y) e^{ir\rho \sin \tau} d\tau dr, \quad (1)$$

где  $\rho^2 = p^2 + q^2$ ;  $r^2 = x^2 + y^2$ .

В этом случае однородная система (П.1)<sup>1</sup> в изображениях получает вид

$$\begin{aligned} \mu \omega \tilde{u}_{zz} + \omega \mu_z \tilde{u}_z - \mu p(p\tilde{u} + q\tilde{v}) - \mu \omega \rho^2 \tilde{u} - pi(\mu \tilde{w}_z + \omega \mu_z \tilde{w}) &= 0, \\ \mu \omega \tilde{v}_{zz} + \omega \mu_z \tilde{v}_z - \mu q(p\tilde{u} + q\tilde{v}) - \mu \omega \rho^2 \tilde{v} - qi(\mu \tilde{w}_z + \omega \mu_z \tilde{w}) &= 0, \\ -\mu i(p\tilde{u}_z + q\tilde{v}_z) - 2\nu \mu_z i(p\tilde{u} + q\tilde{v}) + 2\mu \beta \tilde{w}_{zz} + 2\mu_z \beta \tilde{w}_z - \mu \omega \rho^2 \tilde{w} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\omega = 1 - 2\nu$ ;  $\beta = 1 - \nu$ ; нижние индексы  $z$  означают производные по этой координате.

В итоге система (П.5) для функций  $\tilde{N}$  и  $\tilde{L}$  при  $\nu = \text{const}$  приобретает вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\tilde{N}}{dz^2} + \frac{d\mu}{dz} \frac{d\tilde{N}}{dz} - \mu \rho^2 \tilde{N} &= 0, \\ \tilde{\Delta} \left( \frac{\tilde{\Delta} \tilde{L}}{\mu} \right) - \frac{1}{\beta} \frac{d}{dz^2} \left( \frac{1}{\mu} \right) \tilde{\Delta}_{xy} \tilde{L} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Основные операторы также подвергаются преобразованию, а именно

$$\tilde{\Delta}_{xy} = -\rho^2, \quad \tilde{\Delta} = \frac{d}{dz^2} + \tilde{\Delta}_{xy} = \frac{d}{dz^2} - \rho^2, \quad \tilde{D} = \nu \tilde{\Delta}_{xy} - \beta \frac{d}{dz^2} = -\nu \rho^2 - \beta \frac{d}{dz^2}. \quad (4)$$

<sup>1</sup> Здесь и далее (П.1)–(П.10) – номера формул, приводимых в Приложениях 1, 2.

Изображения перемещений и трансформанты напряжений на плоскости  $z = \text{const}$  задаются формулами (5) и (6) соответственно:

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= -\frac{ip}{2\mu} \left( \nu\rho^2 + \beta \frac{d}{dz^2} \right) \tilde{L} - iq\tilde{N}, \\ \tilde{v} &= -\frac{iq}{2\mu} \left( \nu\rho^2 + \beta \frac{d}{dz^2} \right) \tilde{L} + ip\tilde{N},\end{aligned}\quad (5)$$

$$\tilde{w} = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{2\mu} \tilde{D}\tilde{L} \right) + \frac{\rho^2}{\mu} \frac{d\tilde{L}}{dz},$$

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \rho^4 \tilde{L},$$

$$\tilde{\sigma}_{zx} = -ip\rho^2 \frac{d\tilde{L}}{dz} - iq\mu \frac{d\tilde{N}}{dz},\quad (6)$$

$$\tilde{\sigma}_{zy} = -iq\rho^2 \frac{d\tilde{L}}{dz} + ip\mu \frac{d\tilde{N}}{dz}.$$

Как мы видим, задача свелась к определению двух функций –  $\tilde{N}$  и  $\tilde{L}$  – из обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и граничных условий с последующим обращением преобразования Фурье. Таким образом, основная трудность лежит в решении уравнений (3), каждое из которых будет рассмотрено ниже с необходимой степенью подробности; здесь же мы ограничимся лишь общими соображениями.

В рассматриваемом случае неоднородность определяется неоднородностью модуля сдвига  $\mu(z)$ . Если модуль сдвига имеет экспоненциальный вид  $\mu(z) = \mu_0 e^{bz}$ , то оба уравнения (3) становятся уравнениями с постоянными коэффициентами, и их решение не вызывает принципиальных осложнений. Близкая ситуация возникает с неоднородностью вида  $\mu(z) = \mu_0 (1 + kz)^b$  как для линейных уравнений с переменными коэффициентами в общем виде, так и для рассматриваемых уравнений (3) [Камке, 1976; Ломакин, 1976]. Однако оба отмеченных варианта имеют недостаток, мало приемлемый для моделирования земной коры: при  $z \rightarrow \infty$  модуль сдвига стремится либо к нулю, либо тоже к бесконечности. Этот недостаток можно смягчить, если рассматривать не полное полупространство с такими модулями, а непрерывно неоднородный слой, лежащий, например, на однородном полупространстве. В таком варианте можно учесть скачок модуля упругости на границе Мохоровичича.

### Анализ уравнения для $\tilde{N}$

Перепишем первое уравнение из (3) в виде

$$\frac{d^2 \tilde{N}}{dz^2} + m(z) \frac{d\tilde{N}}{dz} - \rho^2 \tilde{N} = 0,\quad (7)$$

где  $m(z) = d(\ln \mu(z))/dz$ .

Если сделать замену независимой переменной по формуле  $\zeta = \rho z$ , то выражение (7) приобретает вид

$$\frac{d^2 \tilde{N}}{d\zeta^2} + m(\zeta) \frac{d\tilde{N}}{d\zeta} - \tilde{N} = 0.\quad (8)$$

Трудно сказать, какой из двух этих вариантов более предпочтителен. Например, в случае (8) параметр  $\rho$  не входит в уравнение явно, что, конечно, удобно, но он содержится

в выражении для модуля сдвига. Вероятно, выбор может зависеть от конкретной задачи или от метода решения.

Для произвольной, хотя и достаточно гладкой, функции  $m(z)$  уравнение (7), по-видимому, не имеет общего решения в конечном виде. Во всяком случае, автору настоящей статьи не удалось его найти, в том числе, и в литературе. Однако для многих частных случаев решение может быть найдено в справочной литературе или в известных математических программах. Это относится к функциям  $\mu(z)$ , упомянутым в предыдущем разделе, функции  $\mu(z) = \mu_0(c + k e^{bz})$ , тригонометрическим функциям и, вероятно, к ряду других. Решения обычно выражаются через специальные функции [Бейтмен, Эрдейи, 1973а,б], значения которых и их определения также выдаются программой *Maple* 15.

В случаях, когда точное решение уравнения (7) не удается найти или оно по каким-то причинам оказывается неприемлемым, приходится обращаться к иным методам, один из которых – переход к интегральному уравнению – описывается ниже.

Представим уравнение (7) в виде

$$\frac{d^2 \tilde{N}}{dz^2} - \rho^2 \tilde{N} = -m(z) \frac{d\tilde{N}}{dz}. \quad (9)$$

Сравнивая (9) с (П.6) и прослеживая выкладки, проведенные в Приложении 2, мы приходим к двум интегро-дифференциальным уравнениям II рода для  $\tilde{N}(z)$ :

$$\tilde{N}(z) = C_1 e^{-\rho z} + C_2 e^{\rho z} - \frac{1}{\rho} \int_0^z \text{sh}(\rho(z-x)) m(x) \frac{d\tilde{N}(x)}{dx} dx - \quad \text{для слоя} \quad (10)$$

и

$$\tilde{N}(z) = C e^{-\rho z} + \frac{1}{2\rho} \int_0^\infty e^{-\rho|z-x|} m(x) \frac{d\tilde{N}(x)}{dx} dx - \quad \text{для полупространства.} \quad (11)$$

Относительно уравнения (10) необходимо сделать существенное замечание. Если решать его, например, методом последовательных приближений, то обнаруживается, что подстановка экспоненты в интеграл не сохраняет основное качество этой экспоненты – характер ее изменения при возрастании  $z$ . Иными словами, какую бы экспоненту (с положительным или отрицательным показателем) мы ни подставляли в интеграл, после вычислений всегда получаются оба вида экспонент. Таким образом, уравнение (10) подходит только для слоя. Несложно установить, что такая ситуация возникает при подстановке именно нижнего предела интеграла, и, следовательно, ее можно избежать, если производить вычисления с неопределенным интегралом, в результате которых получается уравнение, записываемое в виде

$$\tilde{N}(z) = C_1 e^{-\rho z} + C_2 e^{\rho z} - \frac{1}{\rho} \int \text{sh}(\rho(z-x)) m(x) \frac{d\tilde{N}(x)}{dx} dx. \quad (12)$$

Это уравнение может быть названо универсальным, поскольку подходит и для слоя, и для полупространства.

В уравнении (12) неопределенный интеграл приведен в символической форме без нижнего предела, что означает следующее. Вычисляется неопределенный интеграл по переменной интегрирования  $x$  и в полученное выражение вместо  $x$  производится подстановка выражения из верхнего предела, т.е.  $x = z$ ; нижнего предела нет. Производная по  $z$  от такого интеграла вычисляется как производная от интеграла, зависящего от параметра с учетом только верхнего предела. Эти несложные правила автоматически возникают при более подробном исследовании выражения (12).

Выражения (10)–(12) могут быть преобразованы в чисто интегральные уравнения. Это достигается двумя путями: либо взятием производной по  $z$ , либо интегрированием

по частям. Разработано немало методов приближенного решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [Верлань, Сизиков, 1978]. Широкие возможности для этого предоставляют существующие математические программы.

### Анализ уравнения для $\tilde{L}$

Второе уравнение системы (3) в развернутой форме имеет вид

$$\frac{d^4 \tilde{L}}{dz^4} - 2m(z) \frac{d^3 \tilde{L}}{dz^3} - (2\rho^2 - M(z)) \frac{d^2 \tilde{L}}{dz^2} + 2\rho^2 m(z) \frac{d\tilde{L}}{dz} + \rho^2 (\rho^2 + \nu M(z)) \tilde{L} = 0, \quad (13)$$

где  $M(z) = \mu(z) \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{1}{\mu(z)} \right)$ ,  $\nu = \frac{\nu}{1-\nu}$ .

Если сделать замену  $\zeta = \rho z$ , то, как и в случае с уравнением (7), получим

$$\frac{d^4 \tilde{L}}{d\zeta^4} - 2m(\zeta) \frac{d^3 \tilde{L}}{d\zeta^3} - (2 - M(\zeta)) \frac{d^2 \tilde{L}}{d\zeta^2} + 2m(\zeta) \frac{d\tilde{L}}{d\zeta} + (1 + \nu M(\zeta)) \tilde{L} = 0. \quad (14)$$

Сравнивая (13) и (14), мы приходим к тому же, что сказано выше о выражениях (7) и (8).

Рассчитывать на получение в конечном виде общего решения уравнения (13) для произвольного модуля сдвига не приходится. Если положить  $\mu(z) = \mu_0 (1 + kz)^b$ , то уравнение (13) полностью совпадает с аналогичным уравнением из монографии [Ломакин, 1976, с. 321]. В этом случае линейный оператор уравнения (13) при  $b \neq -1$  двумя способами разлагается на произведение двух операторов второго порядка, и общее решение получается как сумма общих решений двух уравнений второго порядка. Если  $b = -1$ , то  $M(z) = 0$ , и уравнение (13) значительно упрощается, допуская общее решение в явном виде (даже при “произвольной” функции  $m(z)$ ). Ниже мы еще раз обратимся к этому случаю.

Для произвольной функции  $\mu(z)$  дифференциальное уравнение (13) также может быть сведено к интегральному. Для этого перепишем второе уравнение системы (3) в виде

$$\tilde{\Delta} \left( \frac{\tilde{\Delta} \tilde{L}}{\mu} \right) = -\frac{\rho^2}{\beta} Q(z) \tilde{L}, \quad (15)$$

где  $Q(z) = \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{\mu(z)}$ .

Далее, решая последовательно это уравнение как уравнение с правой частью, мы приходим к двум интегральным уравнениям. Можно сказать по-другому.

Применяя к этому уравнению последовательно оператор, обратный к  $\tilde{\Delta}$ , получим два интегральных уравнения: одно для слоя конечной толщины

$$\begin{aligned} \tilde{L}(z) = & C_1 e^{-\rho z} + C_2 e^{\rho z} + \\ & + C_3 \int_0^z \text{sh}(\rho(z-x)) e^{-\rho x} \mu(x) dx + C_4 \int_0^z \text{sh}(\rho(z-x)) e^{\rho x} \mu(x) dx - \\ & - \frac{1}{(1-\nu)} \int_0^z \text{sh}(\rho(z-y)) \mu(y) \int_0^y \text{sh}(\rho(y-x)) Q(x) \tilde{L}(x) dx dy; \end{aligned} \quad (16)$$

другое – для полупространства

$$\begin{aligned} \tilde{L}(z) = & C_1 e^{-\rho z} + C_2 \int_0^{\infty} e^{-\rho|z-x|} e^{-\rho x} \mu(x) dx - \\ & - \frac{1}{4(1-\nu)} \int_0^{\infty} e^{-\rho|z-y|} \mu(y) \int_0^{\infty} e^{-\rho|y-x|} Q(x) \tilde{L}(x) dx dy. \end{aligned} \quad (17)$$

В упомянутом выше случае, когда  $b = -1$ , имеем  $Q(x) = 0$ , и выражения (16) и (17) дают общее решение уравнения (15) в конечном виде.

Как и в предыдущем разделе, можно построить универсальное интегральное уравнение. Если говорить точнее, то речь идет о другой форме частного решения неоднородного уравнения (15). Запишем это уравнение в виде

$$\tilde{\Delta} \left( \frac{\tilde{\Delta} \tilde{L}}{\mu} \right) = F(z). \quad (18)$$

Тогда частное решение (18) с помощью неопределенных интегралов получается в форме

$$\tilde{L}_p(z) = \frac{1}{\rho^2} \int_0^z \text{sh}(\rho(z-y)) \mu(y) \int_0^y \text{sh}(\rho(y-x)) F(x) dx dy. \quad (19)$$

Подставляя в (19) функцию  $F(z) = -\rho^2 Q(z) \tilde{L} / (1-\nu)$ , получаем выражение, которое можно использовать в (16) и (17) вместо имеющихся там “частных решений”. Кстати, в (16) определенные интегралы при  $C_3$  и  $C_4$  можно также заменить неопределенными. Таким образом, уравнениям (16) и (17) можно придать различную форму, удобную для решения конкретной задачи.

Отметим еще одну особенность, возникающую при использовании решения в виде (19). Иногда для конкретных вычислений в (16) и (17) целесообразно в двойном интеграле изменить порядок интегрирования, что делается по известным общим правилам и не вызывает затруднений. Иное дело с выражением (19). Здесь мы поступим следующим образом. В двойном интеграле (19) изменим порядок интегрирования, формально повторяя результат такой операции с двойным интегралом в (16) и получим в итоге

$$\int_0^z \text{sh}(\rho(z-y)) \mu(y) \int_0^y \text{sh}(\rho(y-x)) F(x) dx dy \sim \int_0^z F(x) \int_x^z \text{sh}(\rho(z-y)) \text{sh}(\rho(y-x)) \mu(y) dy dx. \quad (20)$$

Вообще говоря, левая и правая части выражения (20) не равны между собой. Поэтому они соединены знаком, который можно назвать символом соответствия или эквивалентности по отношению к уравнению (18). Дело в том, что в рассматриваемой ситуации от этих выражений и не требуется равенства. В (19) двойной интеграл является частным решением неоднородного уравнения (18), и преобразование (20) должно сохранять лишь это качество. Несложно убедиться прямыми вычислениями, что это действительно имеет место быть. Левая и правая части в (20), очевидно, могут различаться на функцию, удовлетворяющую однородному уравнению. Кстати, внутренний интеграл в правой части (20) в отличие от внешнего является обычным определенным интегралом.

### Решение модельных задач

В этом разделе рассматривается задача о сосредоточенной сжимающей единичной силе, приложенной к поверхности полупространства  $z \geq 0$  в начале координат. Как видно из системы (6), в этом случае можно положить  $N = 0$ , а для функции  $L$  граничные условия имеют вид

$$\rho^4 \tilde{L}(0) = -1, \quad \frac{d\tilde{L}(0)}{dz} = 0. \quad (21)$$

По существу, решаются две задачи для разных вариантов распределения модуля сдвига при коэффициенте Пуассона, равном 1/4. При этом преследуются две цели. При решении первой задачи есть возможность сравнить точное решение с приближенным; после решения второй сравниваются результаты для принципиально различных распределений модуля сдвига.

*Первая задача.* Модуль сдвига принимается в форме

$$\mu(z) = \mu_0(1+z). \quad (22)$$

В этом случае в соответствии с процедурой решения, приводимой в монографии [Ломакин, 1976], для уравнения (13) получаем точное, ограниченное на бесконечности, решение

$$\tilde{L}(\zeta) = C_1 \zeta^3 e^{-\zeta} \Psi(2 + 1/\sqrt{3}, 4; 2\zeta) + C_2 \zeta^3 e^{-\zeta} \Psi(2 - 1/\sqrt{3}, 4; 2\zeta), \quad (23)$$

в котором  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные,  $\zeta = \rho(1+z)$ ,  $\Psi(\alpha, \beta; x)$  – вырожденная гипергеометрическая функция II рода (функция Куммера II рода) [Бейтмен, Эрдейи, 1973а,б; Градштейн, Рыжик, 1963], имеющая, в частности, интегральное представление

$$\Psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt, \quad \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} x > 0, \quad (24)$$

где  $\Gamma(a)$  – гамма-функция, которая в компьютерной программе *Maple* обозначается символом  $\operatorname{KummerU}(\alpha, \beta, z)$ .

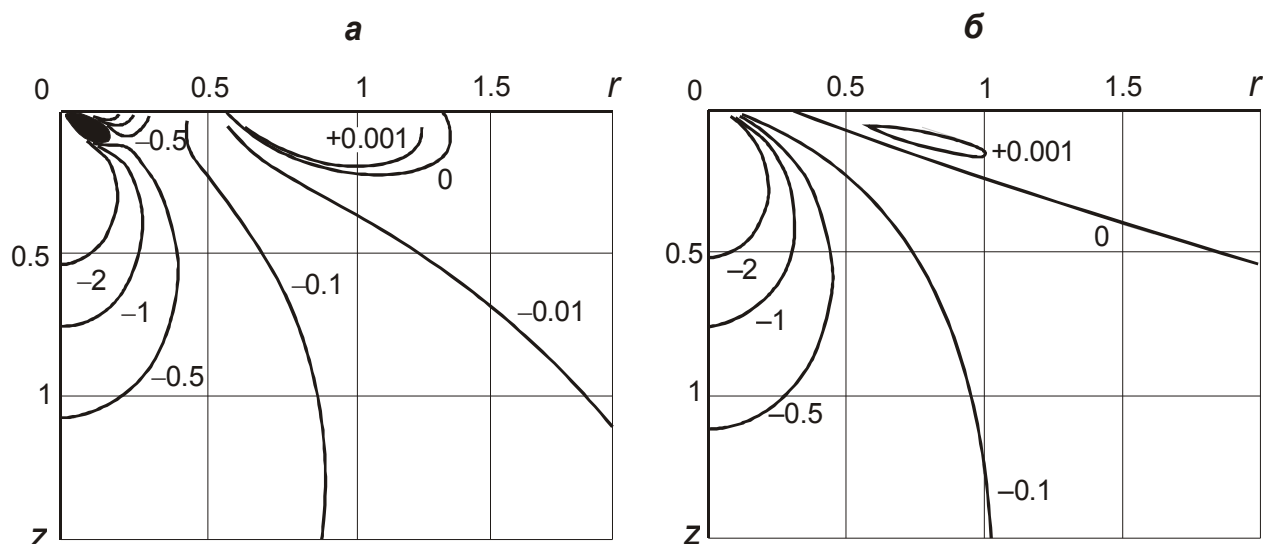
Ясно, что получение точного решения даже для рассматриваемой относительно простой функции с последующим обращением преобразования Фурье – довольно сложное дело. Другой подход состоит в представлении приближенного выражения специальных функций через, например, комбинации элементарных функций. Такие приближения могут осуществляться с весьма высокой точностью, а возрастающая при этом громоздкость формул не должна служить принципиальным препятствием: компьютеры для того и существуют, чтобы дать нам возможность эффективной работы со сложными выражениями.

В конкретных вычислениях мы пошли по второму пути. Формула (23) аппроксимируется выражением

$$\tilde{L}(\zeta) = C_1 (0.2303 e^{-0.9\zeta} - 0.0525 e^{-2\zeta}) + C_2 ((0.737\zeta + 0.0222) e^{-0.909\zeta} + 0.26 e^{-2.313\zeta}). \quad (25)$$

Погрешность такого представления не превышает 0.5%, если принять во внимание, что в конечном итоге оно используется как подынтегральное выражение при обращении преобразования Фурье.

Рассмотрим только вычисление напряжения  $\sigma_{zz}$ . На рис. 1 приведены линии уровня этого напряжения. Существенная особенность графика на рис. 1, а – наличие зон растягивающих (хотя и очень небольших) напряжений. Причем первая из этих зон располагается вблизи точки приложения силы. Вообще говоря, малая окрестность начала координат, где величины и градиенты напряжений особенно велики, требует специального анализа; проведенные вычисления и представленный график для этого слишком грубы. То же относится и к узкому слою, прилегающему к свободной поверхности. На наш взгляд, наличие зон положительных напряжений в значительной степени связано с определяемым формулой (22) неограниченным увеличением жесткости среды с глубиной; образно говоря – мягкий слой лежит на жестком основании. Ниже при рассмотрении второй задачи у нас будет возможность убедиться в бессмысленности такого объяснения.



**Рис. 1.** Линии уровня напряжения  $\sigma_{zz}$  при модуле сдвига, определяемом по формуле (22): *а* – точное решение первой задачи; *б* – нулевое приближение для интегрального уравнения (17), принятое в качестве приближенного решения. Цифры возле линий – величина напряжения; область с черной заливкой – зона положительных значений

Интересно сравнить полученное точное решение с приближенным, в качестве которого возьмем являющееся наиболее грубым нулевое приближение для интегрального уравнения (17), которое для модуля сдвига (22) имеет вид

$$\tilde{L}_0(z) = C_1 e^{-\rho z} + C_2 z(\rho z + 2\rho + 1)e^{-\rho z}. \quad (26)$$

Линии уровня напряжения  $\sigma_{zz}$ , вычисленные с помощью выражения (26), приведены на рис. 1, б. Сравнивая рис. 1, а и 1, б, обнаруживаем их схожесть в общих чертах. Нулевое приближение, в основном, упрощает поведение рассматриваемой функции в малой окрестности точки приложения силы. Но в целом, согласие рассматриваемых графиков нельзя не признать удивительным, если принять во внимание простоту нулевого приближения.

*Вторая задача.* Будем рассматривать частный случай выражения  $\mu(z) = \mu_0(c + k e^{bz})$ , где, очевидно, должно быть  $c + k = 1$ . Конкретно, возьмем

$$\mu = \mu_0(3 - 2e^{-z}). \quad (27)$$

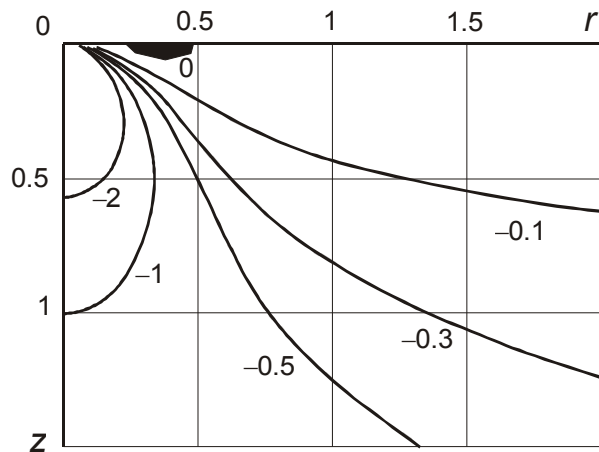
Относительно выражений (22) и (27) можно отметить следующее. До значений  $z \approx 2$  они довольно близки качественно и количественно, но далее различие становится принципиальным: по (22) с увеличением  $z$  модуль сдвига возрастает безгранично, по (27) растет слабо, стремясь к конечной величине.

Для выражения (27) исследуется только приближенное решение. Как и в первой задаче, рассмотрим нулевое приближение уравнения (17), которое для (27) имеет вид

$$\tilde{L}_0(z) = C_1 e^{-\rho z} + C_2(6\rho z + 3z + 4\rho e^{-z})e^{-\rho z}. \quad (28)$$

Линии уровня напряжения  $\sigma_{zz}$ , вычисленные с помощью выражения (28), приведены на рис. 2. Представленное на рис. 2 мы имеем право сравнивать только с рис. 1, а, поскольку именно на этих рисунках имеются зоны положительных напряжений. Однако на рис. 2 эта зона чрезвычайно мала, что, конечно, связано с различием соотношений (22) и (27), о чем говорилось выше.





**Рис. 2.** Линии уровня напряжения  $\sigma_{zz}$  при модуле сдвига, определяемом по формуле (27). Нулевое приближение. Черная область – зона положительных значений. Комментарии см. на рис. 1

Изложенное позволяет сделать ряд выводов. Во-первых, даже нулевое приближение в анализе полученных интегральных уравнений неплохо описывает решение задачи на некотором удалении от точки приложения силы. Во-вторых, улучшение приближения необходимо, прежде всего, для более точного анализа малой окрестности этой точки. В-третьих, двойное преобразование Фурье оказывается достаточно эффективным методом решения задач для полупространства.

#### Приложение 1

#### Однородные уравнения одномерно неоднородной среды

Однородная система уравнений равновесия линейной теории упругости в перемещениях  $u$ ,  $v$ ,  $w$  для изотропной среды с одномерной неоднородностью по  $z$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\omega} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{d\mu}{dz} &= 0, \\ \frac{\mu}{\omega} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{d\mu}{dz} &= 0, \\ \frac{\mu}{\omega} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w + \theta \frac{d\lambda}{dz} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{d\mu}{dz} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

где  $\lambda(z)$ ,  $\mu(z)$  – модули Ляме;  $\nu(z)$  – коэффициент Пуассона;  $\omega = 1 - 2\nu$ ;  $\Delta$  – оператор Лапласа по трем переменным;  $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$  – объемная деформация;  $\lambda = \frac{2\nu\mu}{\omega}$ .

Введем следующие обозначения:  $\Delta_{xy}$  – оператор Лапласа по переменным  $x$  и  $y$ ;  $D = \nu\Delta - \partial/\partial z^2 = \nu\Delta_{xy} - \beta\partial/\partial z^2$ ;  $\beta = 1 - \nu$ . Система (П.1) может быть разделена на два уравнения для функций  $N$  и  $L$  [Ломакин, 1976], которые в приведенных обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned} \mu \Delta N + \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial N}{\partial z} &= 0, \\ \Delta \Delta L - \frac{\mu}{\beta} \left\{ \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial z^2} (\nu \Delta L) - \nu \frac{\partial}{\partial z^2} \Delta L \right] - 2 \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial z} (\beta \Delta L) + \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{1}{\mu} \right) \left( \nu \Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right) \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

В результате перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  задаются формулами

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} DL + \frac{\partial N}{\partial y}, \\
 v &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} DL - \frac{\partial N}{\partial x}, \\
 w &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2\mu} DL \right) - \frac{1}{\mu} \Delta_{xy} \frac{\partial L}{\partial z},
 \end{aligned}
 \tag{П.3}$$

а напряжения на плоскостях  $z = \text{const}$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz} &= \Delta_{xy}^2 L, \\
 \sigma_{zx} &= -\Delta_{xy} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 N}{\partial y \partial z}, \\
 \sigma_{zy} &= -\Delta_{xy} \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} - \mu \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z}.
 \end{aligned}
 \tag{П.4}$$

При  $v = \text{const}$  система (П.2) упрощается до вида

$$\begin{aligned}
 \mu \Delta N + \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial N}{\partial z} &= 0, \\
 \Delta \left( \frac{\Delta L}{\mu} \right) - \frac{1}{\beta} \frac{d}{dz^2} \left( \frac{1}{\mu} \right) \Delta_{xy} L &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{П.5}$$

## Приложение 2

### О решении обыкновенного дифференциального уравнения

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - a^2 y = F(x), \quad a = \text{const} > 0.
 \tag{П.6}$$

Функция Грина однородного уравнения, соответствующего (П.6), для произвольной линейной краевой задачи имеет вид (см., например, [Камке, 1976])

$$E(x, \xi) = C_1(\xi) e^{-ax} + C_2(\xi) e^{ax} + \frac{1}{a} \text{sh}(a|x - \xi|).
 \tag{П.7}$$

Отсюда, в частности, функция Грина решения, ограниченного на бесконечности, получает форму

$$E(x, \xi) = -\frac{1}{2a} e^{-a|x - \xi|}.
 \tag{П.8}$$

Тогда частные решения неоднородного уравнения (П.6) образуются сверткой правой части с функцией Грина [Гельфанд, Шилов, 1959; Наймарк, 1954; Эльсгольц, 1969]; с добавлением общего решения однородного уравнения формируется общее решение неоднородного уравнения.

В итоге для решения на конечном отрезке имеем

$$y(x) = C_1 e^{-ax} + C_2 e^{ax} + \frac{1}{a} \int_0^x \text{sh}(a(x - \xi)) F(\xi) d\xi,
 \tag{П.9}$$

а для решения, ограниченного на бесконечности –

$$y(x) = C e^{-ax} - \frac{1}{2a} \int_0^\infty e^{-a|x - \xi|} F(\xi) d\xi.
 \tag{П.10}$$

## Литература

- Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1973а. 296 с.  
 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. II. М.: Наука, 1973б. 296 с.  
 Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1978. 292 с.  
 Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия на них. М.: ГИФМЛ, 1959. 470 с.  
 Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4 изд. М.: ГИФМЛ, 1963. 1100 с.  
 Добровольский И.П. Математическая теория подготовки и прогноза тектонического землетрясения М.: Физматлит, 2009. 240 с.  
 Добровольский И.П. Кусочно-однородная упругая среда с плоскопараллельными границами // Геофизические исследования. 2012. Т. 13, № 4. С.60–69.  
 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.  
 Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 368 с.  
 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: ГИТТЛ, 1954. 352 с.  
 Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

*Сведения об авторе*

**ДОБРОВольский Игорь Петрович** – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.:8 (499) 614-06-32. E-mail: dip-dip@gmail.com

## TECHNIQUE OF CONSTRUCTION OF A 1D INHOMOGENEOUS ELASTIC MODEL OF THE EARTH'S CRUST

I.P. Dobrovolsky

*Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**Abstract.** The homogeneous system of equations of the linear elasticity theory for the isotropic media with 1D continuous heterogeneity is considered. When applied to problems for half-space, double Fourier transform reduces the problem to ordinary differential equations. For some types of heterogeneity it is possible to receive solutions of these equations in a finite form. Generally differential equations are transformed to integral ones. Solutions of specific problems are given.

**Keywords:** continuous heterogeneity, stratified medium, double Fourier transformation.