УДК 550.334

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОМПОНЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ АФТЕРШОКОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

© 2013 г. А.А. Любушин

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

Предлагается метод выделения периодических компонент интенсивности афтершоковых последовательностей на основе оценки приращения логарифмической функции правдоподобия в скользящем событийном окне (временном окне с постоянным числом событий).

Приводятся примеры применения метода для анализа афтершоков двух событий – Суматранского мегаземлетрясения 26.12.2004 г. и индуцированного землетрясения 26.04.1996 г. вблизи водохранилища Койна в Индии. В изменениях интенсивности сейсмического процесса этих событий удалось выделить значимые периоды от нескольких часов до месяца, которые невозможно идентифицировать при анализе фоновой сейсмичности из-за сравнительно малого числа событий.

Ключевые слова: периодические компоненты интенсивности, максимальное правдоподобие, афтершоки.

Введение

Анализ сейсмических каталогов является методически более сложным процессом, чем обработка других традиционных источников информации в геофизике – временных рядов. Это обусловлено тем, что анализ точечных процессов [Кокс, Льюис, 1969; Сох, 1975], к которым относятся последовательности землетрясений, не позволяет непосредственно применить чрезвычайно богатый арсенал методов анализа данных, параметрических моделей и быстрых алгоритмов, разработанных в теории сигналов. Трудность состоит в том, что для применения этих методов информацию сейсмических каталогов предварительно необходимо привести к виду временных рядов - последовательностей значений с заданным постоянным шагом по времени. Формально этот переход не вызывает трудностей, поскольку он может быть реализован либо путем вычисления средних значений той или иной характеристики каталога (выделившейся энергии землетрясений, например) в последовательных непересекающихся временных окнах постоянной длины, либо путем вычисления накопленных значений тех же величин с равномерным шагом по времени (кумулятивные кривые). Однако получаемые при этом временные ряды являются существенно негауссовыми. При этом они или содержат сильные выбросы значений, или имеют ступенеобразные особенности (для кумулятивных кривых), обусловленные как временной неоднородностью сейсмического каталога (затишьями и группами событий – роями и афтершоками), так и концентрацией основной сейсмической энергии в редких, но сильных событиях (известная проблема "тяжелых хвостов" распределений). Классические методы анализа сигналов, основанные на использовании преобразования Фурье и вычислении ковариаций, формально применимы к обработке подобных временных рядов, но малоэффективны в силу сильных смещений оценок, возникающих вследствие выбросов (или ступеней).

Даже такие рутинные операции, как оценка спектра мощности и выделение периодических компонент сигнала, при анализе сейсмических каталогов становятся неоднозначными и требуют разработки специальных подходов, основанных на анализе параметров той или иной модели точечного процесса [Vere-Jones, Ozaki, 1982; Hawkes, 1971; Любушин и др., 1998]. В данной работе рассматривается применение метода выделения периодических компонент сейсмического процесса на основе оценки приращения логарифмической функции правдоподобия. Этот метод, предложенный автором ранее в [Любушин и др., 1998] и затем модифицированный им для скользящего временного окна фиксированного объема событий, позволяет исследовать афтершоковые последовательности сильных ($M \ge 8$) землетрясений с быстро меняющейся интенсивностью. Названные последовательности ценны тем, что их высокая интенсивность (число событий в единицу времени) позволяет выделять такие малые периоды вариаций интенсивности сейсмического процесса, какие невозможно определить при анализе фоновой сейсмичности из-за сравнительно малого числа событий. В частности, только анализ периодической структуры афтершоков позволяет выделить периоды порядка 1 сут и менее, обусловленные влиянием приливных деформаций земной коры.

Проанализированы афтершоковые последовательности после ряда сильных землетрясений; в статье в качестве примера приводятся результаты анализа для Суматранского мегаземлетрясения 26.12.2004 г. и индуцированного землетрясения 26.04.1996 г. вблизи водохранилища Койна в Индии. Автором использованы данные каталога сейсмических событий с сайта Геофизической службы США (USGS) и данные, предоставленные Национальным институтом геофизических исследований в г. Хайдарабаде, Индия. Временной интервал между событиями для рассматриваемых нижних магнитуд в анализируемых последовательностях составлял от 1 мин до 17 сут. Нижние пороги магнитуд выбирались так, чтобы для всех магнитуд – от минимальных и выше – выполнялся закон распределения Гуттенберга–Рихтера.

Метод анализа данных

Рассматривается модель интенсивности сейсмического процесса в виде:

$$\lambda(t) = \mu(1 + a\cos(\omega t + \varphi)), \qquad (1)$$

где ω – частота; *a* – амплитуда, $0 \le a \le 1$; φ – фазовый угол, $\varphi \in [0, 2\pi]$; μ – множитель, описывающий пуассоновскую часть интенсивности, $\mu > 0$. Таким образом, пуассоновская часть интенсивности модулируется гармоническим колебанием.

Зафиксируем какое-то значение частоты ю. Логарифмическая функция правдоподобия [Кокс, Льюис, 1969] в этом случае для серии из N независимых наблюденных событий равна

$$\ln L(\mu, a, \varphi \mid \omega) = \sum_{t_i} \ln(\lambda(t_i)) - \int_0^T \lambda(u) du =$$

$$= N \ln(\mu) + \sum_i \ln(1 + a\cos(\omega t_i + \varphi)) - \mu T - \frac{\mu a}{\omega} [\sin(\omega T + \varphi) - \sin(\varphi)].$$
(2)

Взяв максимум выражения (2) по отношению к параметру μ, нетрудно найти, что

$$\mu = \hat{\mu}(a, \varphi \mid \omega) = \frac{N}{T + a(\sin(\omega T + \varphi) - \sin(\varphi)) / \omega}$$
(3)

Подставив (3) в формулу (2), получим

$$\ln(L(\hat{\mu}, a, \phi \mid \omega)) = \sum_{t_i} \ln(1 + a\cos(\omega t_i + \phi)) + N\ln(\hat{\mu}(a, \phi \mid \omega)) - N.$$
(4)

Следует заметить, что выражение $\hat{\mu}(a = 0, \phi | \omega) \equiv \hat{\mu}_0 = N / T$ – оценка интенсивности процесса при условии, что он является однородным пуассоновским (чисто случайным). Таким образом, приращение логарифмической функции правдоподобия вследствие

рассмотрения более богатой, чем для чисто случайного потока событий, модели интенсивности с гармонической компонентой заданной частоты ω равно

$$\Delta \ln L(a, \varphi \mid \omega) = \sum_{t_i} \ln \left(1 + a \cos(\omega t_i + \varphi) \right) + N \ln \left(\hat{\mu}(a, \varphi \mid \omega) / \hat{\mu}_0 \right).$$
(5)

Пусть

$$R(\omega) = \max_{a, \omega} \Delta \ln L(a, \varphi \mid \omega), \ 0 \le a \le 1, \varphi \in [0, 2\pi].$$
(6)

Функция (6) может рассматриваться как обобщение спектра для последовательности событий. График этой функции показывает, насколько периодическая модель интенсивности "более выгодна" по сравнению с чисто случайной моделью. Максимальные значения функции (6) выделяют частоты, присутствующие в потоке событий.

Следующим очевидным обобщением метода является вычисление функции (6) с использованием наблюденных моментов времени не на всем интервале (0,*T*], но внутри скользящего временного окна заданной длины *L*. Пусть τ – время, соответствующее правому концу скользящего временного окна. Тогда выражение (6) становится функцией двух аргументов – $R(\omega, \tau | L)$, – которую можно визуализировать в виде двумерных карт или трехмерных рельефов на плоскости аргументов (ω, τ). Такая частотновременная диаграмма позволяет исследовать динамику возникновения и развития периодических компонент внутри исследуемого потока событий.

Ниже приводятся примеры применения оценки (6) для скользящего событийного окна, т.е. окна, включающего в себя фиксированное число событий. Использование событийного окна одного и того же объема позволяет более корректно по сравнению с обычным временным окном фиксированной длины в физическом времени (и, как следствие этого, с разным числом событий внутри каждого окна) проводить сравнение статистической значимости пиков приращения максимумов логарифмической функции правдоподобия для разных периодов и окон.

Рассмотрим для набора данных $X^{(N)}$, состоящего из N независимых наблюдений, две гипотезы – известную гипотезу H_0 и гипотезу H_1 , предполагающую наличие периодической компоненты интенсивности для частоты ω (периода $2\pi / \omega$). В первом случае (гипотеза H_0) набор данных $X^{(N)}$ распределен в соответствии с плотностью $p_0(X^{(N)} | \theta_0)$; во втором (гипотеза H_1) – в соответствии с плотностью $p_1(X^{(N)} | \theta_1)$; θ_0 и θ_1 – векторы неизвестных параметров, имеющих размерности m_0 и m_1 . Гипотеза H_1 при этом является более "богатой", поскольку в ней $m_1 > m_0$, а вектор параметров θ_1 полностью включает в себя компоненты вектора θ_0 .

Найдем разность между логарифмами правдоподобия для двух этих гипотез при условии, что для векторов параметров взяты их оценки методом максимального правдоподобия:

$$\Delta \ln L(X^{(N)}) = \ln \left(\max_{\theta_1} p_1(X^{(N)} | \theta_1) \right) - \ln \left(\max_{\theta_0} p_0(X^{(N)} | \theta_0) \right).$$
(7)

Очевидно, что $\Delta \ln L(X^{(N)}) \ge 0$. Согласно теореме Уилкса [*Уилкс*, 1967], если справедлива гипотеза H_0 , величина (7) имеет асимптотическое распределение:

$$\Delta \ln L(X^{(N)}) \sim \frac{\chi_m^2}{2}, \ m = m_1 - m_0, \ N \to \infty.$$
 (8)

В нашем случае разница между числом параметров m = 2; следовательно, удвоенная величина (8) имеет асимптотическую плотность распределения χ_2^2 , равную $e^{-x/2}/2$, а сама величина (8) распределена асимптотически с экспоненциальной плотностью e^{-x} или

$$\Pr\{\Delta \ln(L) < x\} = 1 - e^{-x}, \ N \to \infty$$
(9)

при условии, что анализируемая последовательность моментов времени распределена согласно пуассоновскому закону с постоянной интенсивностью.

В приводимых ниже примерах N=200. Считая это число достаточно большим, получим, что для порога 4 для значений $\Delta \ln(L)$ вероятность случайного превышения составляет 0.018. Таким образом, асимптотическая вероятность справедливости гипотезы H_1 превышает вероятность 0.98, если значение локального максимума по частоте функции $\Delta \ln(L)$ для частоты ω более чем 4.

Примеры применения метода

Далее подробно рассматриваются примеры применения оценки (6) к анализу последовательности афтершоков после двух событий, первое из которых – Суматранское мегаземлетрясение 26.12.2004 г. с *М*=9. В случае этого землетрясения серьезным препятствием для применения оценок в скользящем окне постоянной временной длины являлась сильная изменчивость интенсивности анализируемых афтершоков. Использовалось событийное окно объемом 200 событий со смещением 5 событий; в каждом окне сканировалось 200 значений периодов. Второй пример – анализ последовательности афтершоков индуцированного землетрясения 26.04.1996 г. вблизи водохранилища Койна в Индии. В этом случае использовалось событийное окно объемом 50 событий с минимальным смещением в 1 событие; в каждом окне сканировалось 50 значений периодов.

1. Суматранское землетрясение 26.12.2004 г.

Рассмотрим последовательность из 2606 землетрясений с $M \ge 4.5$, произошедших внутри окружности с радиусом 5°, центр которой совпадает с эпицентром главного толчка (3.32° с.ш., 95.85° в.д.). На рис. 1, *а* представлена последовательность магнитуд событий, зафиксированных после катастрофы в течение 1130 сут после главного толчка); на рис. 1, δ – то же самое в зависимости от кумулятивного числа событий афтершоковой последовательности



Рис. 1. К анализу афтершоковой последовательности Суматранского землетрясения 26.12.2004 г.: a – распределение во времени магнитуд событий афтершоковой последовательности; δ – распределение магнитуд в зависимости от числа событий, произошедших после главного толчка; e – зависимость кумулятивного числа событий от времени



Рис. 2. Частотно-временная диаграмма для афтершоковой последовательности Суматранского землетрясения (*нижний фрагмент*). На *верхнем* и *среднем* фрагментах приведены зависимости положения правого конца и длины временного окна в сутках от номера события, соответствующего правому концу событийного окна. Цифры на диаграмме – значения периода в данной точке, сут

На нижнем фрагменте рис. 2 представлена частотно-временная диаграмма эволюции $\Delta \ln(L)$ в скользящем событийном окне для всей афтершоковой последовательности Суматранского землетрясения. Диаграмма содержит непрерывные линии максимальных значений, вдоль которых физический период может быть как постоянным, так и меняющимся вследствие изменения длины временного окна. Диаграмма снабжена черными числовыми метками, отображающими значение периода в данной точке в сутках. Отметим, что частота расположения черных меток в размерном времени выбрана только из соображений здравого смысла – при более густом расположении собственно диаграмма оказалась бы закрыта ими. На всех приводимых ниже частотно-временных диаграммах присутствуют аналогичные метки, но нас в основном будут интересовать линии локальных максимальных значений периодов ("хребты" диаграмм).

Рассмотрим более подробно разные участки частотно-временной диаграммы, приведенные в укрупненном масштабе на единообразно построенных рис. 3–7.

На начальном участке диаграммы (кумулятивные числа событий – до 500, рис. 3) видно, что не расщепляемый на отдельные гармоники максимум $\Delta \ln(L)$ для событийных окон с метками 210–270 приходится на периоды около 2.8–4.6 сут. Максимумы $\Delta \ln(L)$ невозможно расщепить на разные периодические компоненты в силу малой физической длины событийного окна. Эта ситуация аналогична обычному спектральному анализу для короткой временной реализации сигнала. Далее, по мере роста длины окна, метод начинает расщеплять гармоники и выделять колебания с разными периодами. В частности, прослеживаются хребты диаграмм с периодами от 1.8 до 0.7 сут, от 2.8 до 1.8 сут и т.д. Представленная на рис. 3 частотно-временная диаграмма имеет вид начального "сгустка" периодов, распадающегося затем на серию расходящихся лучей с округленными периодами 1, 2, 3, 4.2, 6.6, 10 сут.



Рис. 3. Начальный участок частотно-временной диаграммы, приведенной на рис. 2; кумулятивные числа – до 500. Комментарии см. на рис. 2 и в тексте



Рис. 4. Фрагмент приведенной на рис. 2 частотно-временной диаграммы для кумулятивных чисел от 500 до 800. Комментарии см. на рис. 2 и в тексте

На рис. 4 представлен фрагмент для кумулятивных чисел событий от 500 до 800. Судя по быстрому уменьшению длины окна на среднем графике, на этом участке возник рой землетрясений средней силы. На диаграмме видно, что статистически значимое колебание интенсивности с периодами от 3 до 10 сут появляется в окне 510; затем эти спектральные пики расширяются и для окон 620–680 сливаются в единый максимум. Примечательная особенность поведения сейсмичности для этих окон состоит в том, что, начиная с окна 690, формируется периодичность с мигрирующим периодом от 1 до 0.56 сут.

Выделим фрагмент для кумулятивных чисел событий от 800 до 1000 (рис. 5). Можно видеть, что длина временного окна быстро растет по мере его выхождения из роя, а затем отмечается всплеск периодических компонент интенсивности. Далее длина окна становится практически постоянной; одновременно постоянным становится и положение правого конца временного окна. Отмеченное связано с тем, что окно снова вошло в область высокой интенсивности, появление которой объясняется возникновением новой афтершоковой последовательности, вызванной сильным событием с M=8.6. Это событие произошло вскоре после главного толчка 18.03.2005 г. (2.09° с.ш., 97.11° в.д., событие 976, см. рис. 1). Отсюда следует, что приращение функции $\Delta \ln(L)$ для периодических компонент интенсивности на фоне роста длины временного окна, представленное на рис. 5, может рассматриваться как предвестник названного сильного события.

Из меток значений размерного периода на диаграмме, представленной на рис. 5, следует, что очень малая длина окна в самом начале афтершоковой последовательности приводит к потере разрешающей способности спектрального анализа и к образованию одного сплошного максимума на условно низких частотах (окна 800–910). Далее по мере роста длины окна в этом сплошном спектральном максимуме начинает просматриваться тонкая структура в виде отдельных локальных экстремумов приращения максимума функции правдоподобия, в частности, выделяются периоды 12–15 сут (окна 910–925) и 25–30 сут (окна 940–980).

Начиная с окна 1000 (см. рис. 2), отмечается рост низкочастотных периодических компонент, что связано с проявлением афтершоков упомянутого выше сильного события 976. Как уже отмечалось, всплеск периодических компонент интенсивности (см. рис. 5) может рассматриваться как проявление форшоковой активности перед ним. Исследуем более детально сейсмический процесс после этого землетрясения (рис. 6).

На частотно-временной диаграмме (рис. 6, *внизу*) видно, что, начиная с окна 1050, в афтершоках возникают низкочастотные периодические составляющие, исчезающие после окна 1200. Прежде всего, следует отметить, что продвижение окна вглубь афтершоковой последовательности при условии, что его начальная часть все еще занята событиями перед сильным землетрясением, приводит к появлению в оценке приращения $\Delta \ln(L)$ сильных низкочастотных максимумов (см. рис. 6, *вверху*, окна 1050–1150). После того, как большая часть событийного окна (или даже окно полностью) заполняется афтершоками, величины $\Delta \ln(L)$ образуют сплошной спектральный максимум с периодами порядка длины окна (там же, окна 1160–1240); при этом начинает выделяться тонкая структура с периодами от 0.5 до 1.5 сут (окна 1180–1240). Далее, после выхода окна из области очень интенсивных афтершоков (окна 1260–1400), опять становятся заметными значимые монохроматические узкие спектральные пики на периодах, близких к 0.5 сут, т.е. к 12-часовому приливному периоду.

Наконец, рассмотрим финальную часть выборки – кумулятивные числа событий 1400 – 2600 (рис. 7). На нижнем фрагменте хорошо видно, что эта часть выборки характеризуется более спокойным, "фоновым", поведением. На частотно-временной диаграмме видны значимые всплески компонент для периодов от 8 до 15 сут и от 18 до 21 сут, образующие непрерывные линии максимумов. Полусуточная гармоника, отчетливо выделяемая на диаграмме, приведенной на рис. 6, здесь становится незначимой.



Рис. 5. Фрагмент приведенной на рис. 2 частотно-временной диаграммы для кумулятивных чисел событий от 800 до 1000. Комментарии к рисунку см. на рис. 2 и в тексте



Рис. 6. Частотно-временная диаграмма для кумулятивных чисел событий от 1000 до 1400 после события 976, произошедшего 18.03.2005 г. (*М*=8.6, координаты 2.09° с.ш., 97.11° в.д.). Комментарии см. на рис. 2 и в тексте



Рис. 7. Фрагмент частотно-временной диаграммы, приведенной на рис. 2, для кумулятивных чисел событий более 1400. Комментарии см. на рис. 2 и в тексте

2. Индуцированное землетрясение 26.04.1996 г. вблизи водохранилища Койна, Индия



Рис. 8. Частотно-временная диаграмма афтершоковой последовательности индуцированного землетрясения вблизи водохранилища Койна, Индия, произошедшего 2.04.1996 г., *M*=5.6

ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ. 2013. Том 14. № 2

Афтершоковая последовательность индуцированного землетрясения, произошедшего вблизи водохранилища Койна в Индии (26.04.1996 г., M=5.6), включает 186 событий с магнитудой от 2 до 3.7. Частотно-временная диаграмма эволюции $\Delta \ln(L)$ для событийного окна объемом 50 событий представлена на рис. 8. Можно видеть, что, несмотря на малое число афтершоков, и для этого землетрясения предлагаемый метод позволил выделить компоненты интенсивности с периодами около 1, 2, 7, 11 и 20 сут.

Выводы

Анализ афтершоковых последовательностей с применением предлагаемого автором метода позволил выделить в изменениях интенсивности сейсмического процесса значимые периоды от нескольких часов до месяца (для Суматранского землетрясения 2004 г. прослежен широкий спектр периодов от 0.5 до 30 сут; для индуцированной сейсмичности в окрестности водохранилища Койна – 1, 2, 7, 11 и 20 сут), которые невозможно выделить при анализе фоновой сейсмичности из-за сравнительно малого числа событий.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект ГК № 11.519.11.5024) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-05-00146).

Литература

Кокс Д., Льюис П. Статистический анализ последовательностей событий. М.: Мир, 1969. 312 с. Любушин А.А., Писаренко В.Ф., Ружич В.В., Буддо В.Ю. Выделение периодичностей в сейсмическом режиме // Вулканология и сейсмология. 1998. № 1. С.62–76.

Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1967. 632 с.

Cox D.R. Partial likelihood // Biometrica. 1975. V. 62. P.269-276.

Vere-Jones D., Ozaki T. Some examples of statistical estimation applies to earthquake data. Cyclic Poisson and self-exciting models // Ann. Inst. Statist. Math. 1982. V. 34. Part B. P.189–207.

Hawkes A.G. Spectra of self-exciting and mutually exciting point processes // Biometrica. 1971. V. 58. P.83–90.

Сведения об авторе

ЛЮБУШИН Алексей Александрович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. E-mail: lyubushin@yandex.ru

PERIODIC COMPONENTS OF AFTERSHOCKS SERIES INTENSITY

A.A. Lyubushin

Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. A method is proposed for detecting periodic components of aftershocks series which is based on the estimate of logarithmic likelihood increments within moving event window (time window containing the fixed number of events). Examples of applications of the method are presented for case studies of aftershocks after the Sumatra mega-earthquake of 26 Dec 2004 and the induced earthquake near the Koyna Dam (India) on 24 April 1996. Using the method we extracted statistically significant periodic variations of intensity with periods from few hours up to one month which could not be detected by analyzing background seismicity due to small numbers of events.

Keywords: periodic components of intensity, maximum likelihood, aftershocks.