ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2012, том 13, № 4, с.60-69

УДК 550.340

КУСОЧНО-ОДНОРОДНАЯ УПРУГАЯ СРЕДА С ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ГРАНИЦАМИ

© 2012 г. И.П. Добровольский

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

Рассматривается линейно-упругая среда с однородными и изотропными слоями, которая, в частности, моделирует земную кору. К уравнениям, описывающим каждый из названных слоев, можно применить двойное преобразование Фурье и получить общее решение в изображениях. Таким методом анализируются две задачи: первая – о сосредоточенной силе в пространстве, состоящем из двух разных полупространств; во второй рассматривается однородное полупространство с лежащим на нем упругим слоем с другими модулями, к поверхности которого приложена сосредоточенная сила.

Ключевые слова: неоднородность, функция Грина, двойное преобразование Фурье.

Введение

Неоднородность земной коры, о которой говорится почти в каждой публикации, – одно из основных ее свойств. Например, разлом можно определить как неоднородность, у которой один размер весьма мал по сравнению с двумя другими. В целом, бессмысленно подвергать сомнению справедливость этого утверждения: земная кора действительно неоднородна по химическим характеристикам, минеральному составу и множеству других материальных качеств. Но одновременно не следует забывать одно общее положение – материалы, радикально различающиеся по одним качествам, могут мало различаться по другим. Можно сказать и по-другому: при анализе задач, в которых исследуются одна группа характеристик материала (например, только механические или только оптические), допустимо не принимать во внимание остальные. В результате мы приходим к еще одному общему утверждению: подвергать сомнению решения задач для однородных сред только потому, что земная кора вообще-то неоднородна, безграмотно – необходим серьезный качественный и количественный анализ.

В настоящей работе исследуется деформирование неоднородных сред в рамках линейной теории упругости.

В механике сплошных сред различают два типа особых областей [*Эшелби*, 1963]: неоднородность и включение. Существенно, что в обоих случаях сравниваются два состояния среды. Определим эти понятия более подробно. Пусть мы имеем некоторое исходное состояние среды. Если во втором состоянии в некоторой области модули упругости отличаются от таковых в первом, то такая область называется неоднородностью. При одинаковом внешнем воздействии напряженно-деформированное состояние этих областей будет различно.

Теперь определим включение. Пусть мы опять имеем некоторое исходное состояние среды. Во втором состоянии некоторая область испытывает превращение, состоящее в следующем – если эту область мысленно вынуть из среды, то в свободном состоянии она изменит свои размеры. Такая область называется включением. Поскольку включение “вклеено” в среду, то после превращения в нем и в окружающей его среде возникает или меняется напряженно-деформированное состояние, в зависимости от того, каким оно было в исходном состоянии – нулевым или ненулевым. Предполагается, что в рассматриваемой постановке модули упругости во включении при превращении не меняются и, в частности, могут совпадать с модулями окружающей однородной среды.

Задачи о неоднородности и включении рассматривались в ряде работ (например, [*Эшелби*, 1963; *Гольдштейн, Шифрин,* 2004, 2005; *Добровольский,* 2007, 2009, 2010]), где они сводились к интегральным уравнениям с ядром из соответствующих функций Грина. Ограничений на размеры и форму особых областей теоретически не возникало, но практически такая постановка особенно удобна для компактных соразмерных областей. Более широкий подход к решению задач для неоднородных сред намечен в монографии [*Ломакин*, 1976], в которой также использовались методы решения с применением функций Грина, но немалое внимание уделялось и прямому рассмотрению задач для линейных уравнений с переменными коэффициентами. Последнее интересно для анализа сред с непрерывным распределением модулей упругости и будет более подробно обсуждаться в Заключении.

Настоящая работа, если говорить конкретно, посвящена анализу неоднородных пространства и полупространства, моделирующих относительно небольшие приповерхностные объемы планеты. Подобные задачи довольно непросты во всех отношениях. Если рассматривать земную кору как упругую среду (это делается обычно), то для постановки таких задач следует знать распределение упругих модулей. Но в литературе подобные сведения, конечно, не встречаются, т. е. по существу для постановки и решения конкретных задач отсутствует база исходных данных. Это первая сложность. Вторая сложность состоит в том, что для решения задач необходим эффективный математический аппарат. Однако даже в относительно простых частных случаях непрерывного распределения неоднородности упругих свойств дело сводится к сложным уравнениям, часто не имеющих решения в общем виде. Но если бы это и удалось сделать, то полученные в общем виде решения были бы сложными, громоздкими и трудно обозримыми. Иными словами, разумно рассматривать такие задачи лишь для конкретных районов с известными численными характеристиками. Наконец, всегда остаются два вопроса: в чем проявляется влияние неоднородности по сравнению с однородной средой? В какой степени это влияние нужно учитывать? Эти вопросы можно решить лишь при теоретическом анализе разных вариантов, в том числе путем сравнения с решениями для однородной среды.

Цель настоящей статьи – развитие метода решения задач для слоисто-однородной среды.

Решение однородной системы уравнений теории упругости в изображениях Фурье

К числу трехмерных задач теории упругости с плоскопараллельными (бесконечными) границами относятся задачи для пространства, полупространства и слоя. Эти области, в свою очередь, могут быть кусочно-однородными и разделяться такими же плоскостями, на которых возможны граничные условия разных типов. Таким образом. рассматриваемый класс задач довольно обширен и заведомо включает в себя классические задачи для однородных областей. Перечисленные задачи объединяет одно существенное качество: их решение может быть получено единым методом – применением двукратного преобразования Фурье.

По-видимому, систематическое использование этого метода было начато в работе [*Снеддон, Берри,* 1961], но впоследствии внимание к нему незаслуженно ослабло. В силу всего сказанного целесообразно рассмотреть метод более подробно.

Однородная система уравнений равновесия теории упругости в перемещениях $\mathbf{u}$ для однородной изотропной среды имеет вид:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + (1-2\nu)\nabla^2\mathbf{u} = 0, \qquad (1)$$

где ∇ – набла-оператор; ν – коэффициент Пуассона.

Далее задачи исследуются в декартовой системе координат x, y, z с границами z = const. После применения к (1) двойного преобразования Фурье по x, y (см. Приложение) уравнения теории упругости превращаются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, решение которой ищется обычным способом. Характеристическое уравнение этой системы имеет два трехкратных корня: $-\rho$ и ρ. В этом случае решение, например, для отрицательного корня следует искать в виде $\left(A_n z^2 + B_n z + C_n\right)e^{-\rho z}$. Подставляя это решение в систему и приравнивая нулю выражения при разных степенях z, приходим к системе матричных уравнений для определения коэффициентов A_n, B_n, C_n:

$$\mathrm{S}\times\mathrm{A} = 0,\ \mathrm{S}\times\mathrm{B} = \mathrm{K}\times\mathrm{A},\ \mathrm{S}\times\mathrm{C} = \mathrm{L}\times\mathrm{A} + \mathrm{M}\times\mathrm{B}. \qquad (2)$$

Здесь и далее прямыми латинскими буквами обозначаются матрицы; знак $\times$ означает матричное умножение; A, B, C – матрицы-столбцы из коэффициентов A_{n}, B_n, C_n соответственно;

$$\mathrm{S} = \begin{vmatrix} p & q & -\rho i \\ p & q & -\rho i \\ p & q & -\rho i \end{vmatrix};\quad \mathrm{K} = \begin{vmatrix} -4\rho/\alpha p & 0 & -2i \\ 0 & -4\rho/\alpha q & -2i \\ 2p/\rho & 2q/\rho & -8\beta i/\alpha \end{vmatrix};\quad \mathrm{M} = \begin{vmatrix} -2\rho/\alpha p & 0 & -i \\ 0 & -2\rho/\alpha q & -i \\ p/\rho & q/\rho & -4\beta i/\alpha \end{vmatrix};$$

$$\mathrm{L} = \begin{vmatrix} 2/\alpha p & 0 & 0 \\ 0 & 2/\alpha q & 0 \\ 0 & 0 & 4\beta i/\alpha\rho \end{vmatrix};\ \alpha=1-2\nu;\ \beta=1-\nu;\ \chi=3-4\nu;\ i \text{ – мнимая единица.}$$

Определяя A из второго уравнения системы (2) и подставляя результат в третье уравнение, получаем решение $\mathrm{B} = (\mathrm{L}\times\mathrm{K}^{-1}\times\mathrm{S} + \mathrm{M})^{-1}\times\mathrm{S}\times\mathrm{C}$, т.е. выражаем B через C. Подставляя полученное значение B во второе уравнение системы, обнаруживаем, что A = 0.

Возможен и другой вариант решения системы (2), мало отличающийся от приведенного выше, но несколько более изящный. Первое уравнение дает возможность сделать предположение, что A = 0. Тогда из третьего уравнения немного более простым путем определяется B, а из второго, как и в предыдущем случае, убеждаемся, что действительно A = 0.

Существующие математические программы даже общего назначения (*Maple*, *Mathematica*), не говоря уж о специализированной матричной программе *MATLAB*, легко выполняют основные операции матричной алгебры, которые для матриц столь невысокого порядка оказываются достаточно обозримыми. (При выкладках следует быть внимательными и помнить о некоммутативности произведения матриц.) Для положительной экспоненты решение получается подстановкой $\rho\to-\rho$ и заменой обозначений констант. В итоге решение в изображениях Фурье записывается в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= e^{-\rho z}(\chi A_1 + pzG) + e^{\rho z}(\chi B_1 + pzQ), \\ \tilde{v} &= e^{-\rho z}(\chi A_2 + qzG) + e^{\rho z}(\chi B_2 + qzQ), \\ \tilde{w} &= e^{-\rho z}(\chi A_3 - \rho zGi) + e^{\rho z}(\chi B_3 + \rho zQi), \end{aligned} \qquad (3)$$

где $G = -\dfrac{p\,A_1 + q\,A_2 - \rho\,A_3 i}{\rho}$, $\quad Q = \dfrac{p\,B_1 + q\,B_2 + \rho\,B_3 i}{\rho}$.

Формулы (3) выражают общее решение однородной системы для областей с плоскопараллельными границами; с добавлением частного решения неоднородной системы эти формулы становятся и ее общим решением. С помощью общего решения единым образом могут быть решены многие задачи, включая, конечно, и все классические. Особый интерес представляют задачи с сосредоточенными силами (функции Грина).

Сделаем важное замечание. Решение (3), приводимое, в частности, в монографии [*Новацкий*, 1975], по своему существу – частный случай представления Папковича [*Папкович*, 1939; *Новожилов*, 1958], получившего впоследствии название представления Папковича–Нейбера [*Новацкий*, 1975]. В рамках рассматриваемой ситуации решение (3) является естественно получаемым общим и единственным решением, тогда как представление Папковича–Нейбера – одно из возможных. Благодаря этому можно сделать вывод об особом положении представления Папковича–Нейбера по сравнению с другими аналогичными формулами. Близкая мысль была высказана и в вышеназванной монографии [*Новожилов*, 1958].

Неоднородное пространство

В качестве первого примера приложения формул (3) к решению задач рассмотрим построение тензора Грина для кусочно-однородного пространства. Имеем пространство, состоящее из однородных полупространств. Положительное полупространство $z>0$ имеет коэффициент Пуассона ν и модуль сдвига μ; отрицательное $z<0$ – константы ν_1, $\mu_1=m\mu$ и соответственно α_1, β_1, χ_1. Полагаем, что в положительном полупространстве в точке (0, 0, h) действует единичная сила. Считаем также, что на границе раздела соблюдается непрерывность перемещений и соответствующих напряжений (состояние полного контакта), хотя возможны варианты.

Напомним, что тензор Кельвина (тензор Грина однородного и изотропного пространства) для силы, действующей в точке (0, 0, h), имеет вид

$$k_{ir} = D\left(\frac{4\beta\delta_{ir}}{R} - R_{,ir}\right), \quad i, r = 1, 2, 3, \tag{4}$$

где r – номер единичной силы; $D = 1/(16\pi\mu\beta)$, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}$.

Будем искать решение задачи в положительном полупространстве в виде $k_{ir} + u_i$ и отрицательном – v_i. Здесь u_i и v_i удовлетворяют однородным системам уравнений. Тогда, исходя из (3), изображения этих функций записываются для положительного полупространства в виде:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{e^{-\rho z}}{\rho} \cdot \mathrm{Usp} \times \mathrm{A} = \frac{e^{-\rho z}}{\rho} \cdot \begin{vmatrix} \chi\rho - p^2 z & -pqz & p\rho zi \\ -pqz & \chi\rho - q^2 z & q\rho zi \\ p\rho zi & q\rho zi & \rho(\chi + \rho z) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

а для отрицательного –

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{e^{\rho z}}{\rho} \cdot \mathrm{Usn} \times \mathrm{B} = \frac{e^{\rho z}}{\rho} \cdot \begin{vmatrix} \chi_1\rho + p^2 z & pqz & p\rho zi \\ pqz & \chi_1\rho + q^2 z & q\rho zi \\ p\rho zi & q\rho zi & \rho(\chi_1 - \rho z) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Основываясь на (5) и (6), выпишем матрицы перемещений (UP, UN) и напряжений (SP, SN) на поверхности раздела. Очевидно, рассматриваются напряжения $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$. Для положительного полупространства имеем

$$\mathrm{UP}=\chi\cdot\mathrm{A},\quad \mathrm{SP}=\frac{\mu}{\rho}\cdot\mathrm{Sp}\times\mathrm{A}=\frac{\mu}{\rho}\cdot\begin{vmatrix}-\chi\rho^2-p^2 & -pq & -2\alpha p\rho i\\ -pq & -\chi\rho^2-q^2 & -2\alpha q\rho i\\ 2\alpha p\rho i & 2\alpha q\rho i & -4\beta\rho^2\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{vmatrix}, \tag{7}$$

для отрицательного –

$$\mathrm{UN}=\chi_1\cdot\mathrm{B},\quad \mathrm{SN}=\frac{m\mu}{\rho}\cdot\mathrm{Sn}\times\mathrm{B}=\frac{m\mu}{\rho}\cdot\begin{vmatrix}\chi_1\rho^2+p^2 & pq & -2\alpha_1 p\rho i\\ pq & \chi_1\rho^2+q^2 & -2\alpha_1 q\rho i\\ 2\alpha_1 p\rho i & 2\alpha_1 q\rho i & 4\beta_1\rho^2\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}B_1\\ B_2\\ B_3\end{vmatrix}. \tag{8}$$

Обозначим через UK и SK матрицы перемещений и напряжений на поверхности раздела от тензора Кельвина. Тогда непрерывность перемещений и напряжений на границе z=0 определяется системой матричных уравнений: UK+UP=UN, SK+SP=SN. С использованием (7) и (8) решение этой системы имеет вид

$$\tilde{\mathbf{u}}=\frac{e^{-\rho z}}{\rho}\cdot\mathrm{Usp}\times\left(\mathrm{Sp}-\frac{m\chi}{\chi_1}\cdot\mathrm{Sn}\right)^{-1}\times\left(\frac{m}{\chi_1}\cdot\mathrm{Sn}\times\mathrm{UK}-\frac{\rho}{\mu}\cdot\mathrm{SK}\right), \tag{9}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}=\frac{e^{\rho z}}{\rho}\cdot\mathrm{Usn}\times\left(\frac{\chi_1}{\chi}\cdot\mathrm{Sp}-m\cdot\mathrm{Sn}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{\chi}\cdot\mathrm{Sp}\times\mathrm{UK}-\frac{\rho}{\mu}\cdot\mathrm{SK}\right). \tag{10}$$

Вставляя различные (при разных значениях r в формуле (4)) матрицы UK и SK в (9) и (10), после соответствующих операций получим полное решение поставленной задачи. Не ставя перед собой цели выписать это полное решение, ограничимся одним частным случаем – рассмотрим действие третьей силы, направленной вдоль оси z в точке (0,0,h), т. е. тензора k_{i3}. В этой ситуации имеем

$$\mathrm{UK}=\frac{2D\pi e^{-\rho h}}{\rho}\cdot\mathrm{Uk}=\frac{2D\pi e^{-\rho h}}{\rho}\cdot\begin{vmatrix}-phi\\ -qhi\\ \chi+\rho h\end{vmatrix},\ \mathrm{SK}=\frac{4D\pi\mu e^{-\rho h}}{\rho}\cdot\mathrm{Sk}=\frac{4D\pi\mu e^{-\rho h}}{\rho}\cdot\begin{vmatrix}-p(\alpha+\rho h)i\\ -p(\alpha+\rho h)i\\ \rho(2\beta+\rho h)\end{vmatrix}, \tag{11}$$

и (9), (10) приобретают вид

$$\tilde{\mathbf{u}}=\frac{2D\pi e^{-\rho(h+z)}}{\chi_1\rho^2}\cdot\mathrm{Usp}\times\left(\mathrm{Sp}-\frac{m\chi}{\chi_1}\cdot\mathrm{Sn}\right)^{-1}\times\left(m\cdot\mathrm{Sn}\times\mathrm{Uk}-2\rho\chi_1\cdot\mathrm{Sk}\right), \tag{12}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}=\frac{2D\pi e^{-\rho(h-z)}}{\chi\rho^2}\cdot\mathrm{Usn}\times\left(\frac{\chi_1}{\chi}\cdot\mathrm{Sp}-m\cdot\mathrm{Sn}\right)^{-1}\times\left(\mathrm{Sp}\times\mathrm{Uk}-2\rho\chi\cdot\mathrm{Sk}\right). \tag{13}$$

Если к тому же ограничиться случаем равенства коэффициентов Пуассона (χ_1=χ), то получим решение в оригиналах:

$$\mathbf{u}=\frac{(m-1)(m+\chi)(\chi m+1)}{8\pi\mu(\chi+1)}\begin{vmatrix}4hz(m+\chi)\overline{N}_{,xz}-\chi(h-z)(m+\chi)\overline{N}_{,x}+\chi(\chi^2-1)\overline{L}_{,x}\\ 4hz(m+\chi)\overline{N}_{,yz}-\chi(h-z)(m+\chi)\overline{N}_{,y}+\chi(\chi^2-1)\overline{L}_{,y}\\ -4hz(m+\chi)\overline{N}_{,zz}-\chi(h+z)(m+\chi)\overline{N}_{,z}+\chi(\chi^2+1+2\chi m)\overline{N}\end{vmatrix}, \tag{14}$$

$$\mathbf{v}=-\frac{(m+\chi)(\chi m+1)}{8\pi\mu\chi}\begin{vmatrix}-2\chi(h(m+\chi)-z(\chi m+1))N_{,x}-\chi^2(\chi-1)(m-1)L_{,x}\\ -2\chi(h(m+\chi)-z(\chi m+1))N_{,y}-\chi^2(\chi-1)(m-1)L_{,y}\\ 2\chi(h(m+\chi)-z(\chi m+1))N_{,z}-\chi^2(\chi+1)(m+1)N\end{vmatrix}, \tag{15}$$

где $R=\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}$, $N=1/R$, $L=\ln(R+|z-h|)$, $\overline{R}=\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}$, $\overline{N}=1/\overline{R}$, $\overline{L}=\ln(\overline{R}+z+h)$.

Анализ полученных решений почти тривиален, поэтому не будем на нем останавливаться. Общий случай $\chi_1 \neq \chi$ не вносит принципиальных изменений, но решение при этом получается более громоздким. Вообще, выкладки становятся особенно простыми, если ставить и решать задачу для конкретного случая, когда основные ее характеристики выражаются числами.

В заключение этого раздела отметим, что поставленная задача получила точное решение в элементарных функциях в общем виде, т.е. при буквенном обозначении характеристик среды. Ниже мы увидим, что появление слоя конечной толщины нарушает эту "традицию".

Неоднородное полупространство

В качестве второго примера рассмотрим однородное полупространство, к границе которого прилегает слой конечной толщины с другими модулями упругости, в результате чего образуется кусочно-однородное полупространство. Предположим, что на поверхности слоя, т.е. по существу на поверхности неоднородного полупространства, действует сосредоточенная сила P, и сформулируем задачу конкретно.

Полагаем, что на поверхности однородного полупространства $z \geq 0$ лежит слой толщиной H, занимая область $-H \leq z \leq 0$. Таким образом, мы располагаем границу между слоем и однородным полупространством на плоскости $z = 0$. В результате упрощается вид граничных условий на этой плоскости, и в окончательном решении несложно перейти к привычному положению дневной поверхности. Обозначим перемещения в слое через $\mathbf{u}(u, v, w)$, а в полупространстве – $\mathbf{U}(U, V, W)$. Тогда из (3) следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= e^{-\rho z}(\chi A_1 + pzG) + e^{\rho z}(\chi B_1 + pzQ), & \tilde{U} &= e^{-\rho z}(\chi C_1 + pzL), \\ \tilde{v} &= e^{-\rho z}(\chi A_2 + qzG) + e^{\rho z}(\chi B_2 + qzQ), & \tilde{V} &= e^{-\rho z}(\chi C_2 + qzL), \\ \tilde{w} &= e^{-\rho z}(\chi A_3 - \rho zGi) + e^{\rho z}(\chi B_3 + \rho zQi), & \tilde{W} &= e^{-\rho z}(\chi C_3 - \rho zLi), \end{aligned} \tag{16}$$

где $G = \dfrac{-pA_1 - qA_2 + \rho A_3 i}{\rho}$, $Q = \dfrac{pB_1 + qB_2 + \rho B_3 i}{\rho}$, $L = \dfrac{-pC_1 - qC_2 + \rho C_3 i}{\rho}$.

Производя дальнейшую запись в матричной форме, имеем:
перемещения –

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} &= e^{-\rho z}(\chi \cdot \mathrm{A} + z \cdot G \cdot \mathrm{Ma}) + e^{\rho z}(\chi \cdot \mathrm{B} + z \cdot Q \cdot \mathrm{Mb}), \\ \tilde{\mathbf{U}} &= e^{-\rho z}(\chi \cdot \mathrm{C} + z \cdot L \cdot \mathrm{Ma}), \end{aligned} \tag{17}$$

напряжения (рассматриваются напряжения $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$) –

$$\begin{aligned} \mathrm{SH} &= m\mu e^{-\rho z}(\mathrm{No} + z \cdot \mathrm{Nz}) \times \mathrm{A} + m\mu e^{\rho z}(\mathrm{Po} + z \cdot \mathrm{Pz}) \times \mathrm{B}, \\ \mathrm{S} &= \mu e^{-\rho z}(\mathrm{No} + z \cdot \mathrm{Nz}) \times \mathrm{C}. \end{aligned} \tag{18}$$

(в (17) и (18) первое уравнение относится к слою, второе – к однородному полупространству);
граничные условия –

$$\begin{aligned} &\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{C}, \\ &m \cdot \mathrm{No} \times \mathrm{A} + m \cdot \mathrm{Po} \times \mathrm{B} = \mathrm{No} \times \mathrm{C}, \\ &m\mu \cdot \left(e^{\rho H}(\mathrm{No} - H \cdot \mathrm{Nz}) \times \mathrm{A} + e^{-\rho H}(\mathrm{Po} - H \cdot \mathrm{Pz}) \times \mathrm{B}\right) \times \mathrm{C} = \mathrm{F}, \end{aligned} \tag{19}$$

где первые два уравнения выражают соответственно непрерывность перемещений и напряжений на плоскости раздела сред.

Решение системы (19) имеем в виде

$$\mathrm{A}=\left(\mathrm{E}-\frac{1-m}{m}\mathrm{NP}\right)\times\mathrm{C},\quad \mathrm{B}=\frac{1-m}{m}NP\times\mathrm{C},$$
$$\mathrm{C}=\frac{1}{m\mu}\left(e^{\rho H}\cdot(\mathrm{No}-H\,\mathrm{Nz})\times\left(\mathrm{E}-\frac{1-m}{m}\mathrm{NP}\right)+e^{-\rho H}\frac{1-m}{m}(\mathrm{Po}-H\cdot\mathrm{Pz})\times\mathrm{NP}\right)^{-1}\times\mathrm{F}, \qquad (20)$$

где E – единичная матрица размерности 3×3, $\mathrm{NP}=\left(\mathrm{No}^{-1}\times\mathrm{Po}-\mathrm{E}\right)^{-1}$.

Матрицы (17)–(20) при постоянном коэффициенте Пуассона во всем неоднородном полупространстве имеют вид

$$\mathrm{Pz}=\begin{vmatrix}2p^2 & 2pq & 2p\rho i\\ 2pq & 2q^2 & 2q\rho i\\ 2p\rho i & 2q\rho i & -2\rho^2\end{vmatrix},\quad \mathrm{Nz}=\begin{vmatrix}2p^2 & 2pq & -2p\rho i\\ 2pq & 2q^2 & -2q\rho i\\ -2p\rho i & -2q\rho i & -2\rho^2\end{vmatrix},$$

$$\mathrm{Ma}=\begin{vmatrix}p\\ q\\ -\rho i\end{vmatrix},\quad \mathrm{Mb}=\begin{vmatrix}p\\ q\\ \rho i\end{vmatrix},\quad \mathrm{F}=\begin{vmatrix}0\\ 0\\ P\end{vmatrix},$$

$$\mathrm{Po}=\begin{vmatrix}\dfrac{p^2+\rho^2\chi}{\rho} & \dfrac{pq}{\rho} & -2p\alpha i\\ \dfrac{pq}{\rho} & \dfrac{q^2+\rho^2\chi}{\rho} & -2q\alpha i\\ 2p\alpha i & 2q\alpha i & 4\beta\rho\end{vmatrix},\quad \mathrm{No}=\begin{vmatrix}-\dfrac{p^2+\rho^2\chi}{\rho} & -\dfrac{pq}{\rho} & -2p\alpha i\\ -\dfrac{pq}{\rho} & -\dfrac{q^2+\rho^2\chi}{\rho} & -2q\alpha i\\ 2p\alpha i & 2q\alpha i & -4\beta\rho\end{vmatrix}, \qquad (21)$$

$$\mathrm{SH}=\begin{vmatrix}\tilde\sigma_{xz}\\ \tilde\sigma_{yz}\\ \tilde\sigma_{zz}\end{vmatrix},\quad \mathrm{S}=\begin{vmatrix}\tilde\sigma_{xz}\\ \tilde\sigma_{yz}\\ \tilde\sigma_{zz}\end{vmatrix}.$$

С помощью (21) раскрываются выражения (20), использование которых позволяет выписать в явном виде перемещения (17) и при необходимости напряжения (18). Однако если эти выкладки проводить в общем виде, даже в рассматриваемом частном случае (постоянство коэффициента Пуассона во всем полупространстве) мы приходим к очень громоздким, необозримым, а потому практически бесполезным выражениям. Ситуация меняется радикально, если некоторые характеристики задачи выразить в числах, т.е. рассматривать конкретный район.

Для иллюстрации проведем вычисления, полагая $H = 1$, $m = ½$, $\nu = ¼$. Тогда коэффициенты C_i, например, приобретают относительно простой вид, и в этом случае несложно провести хорошую аппроксимацию точных выражений, что и показано ниже:

$$\begin{vmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\end{vmatrix}=\frac{2P}{\mu}\begin{vmatrix}\dfrac{3pie^{-\rho}(21-34\rho-8\rho e^{-2\rho})}{4\rho^2(100\rho^2e^{-2\rho}+83e^{-2\rho}-54\rho e^{-2\rho}+8e^{-4\rho}+161)}\\ \dfrac{3qie^{-\rho}(21-34\rho-8\rho e^{-2\rho})}{4\rho^2(100\rho^2e^{-2\rho}+83e^{-2\rho}-54\rho e^{-2\rho}+8e^{-4\rho}+161)}\\ \dfrac{3e^{-\rho}(2\rho e^{-2\rho}-2e^{-2\rho}-7-4\rho)}{\rho(100\rho^2e^{-2\rho}+83e^{-2\rho}-54\rho e^{-2\rho}+8e^{-4\rho}+161)}\end{vmatrix}\approx$$

$$\approx \frac{2P}{\mu}\begin{vmatrix} \dfrac{-pie^{-\rho}(-66+81\rho+35e^{-0.8\rho})}{500\rho^2} \\ \dfrac{-qie^{-\rho}(-66+81\rho+35e^{-0.8\rho})}{500\rho^2} \\ -\dfrac{3e^{-\rho}(125+91\rho)}{3500\rho} \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Приближенные выражения при вычислениях перемещений и напряжений дают ошибку не более 1%. К этому нужно добавить, что даже в случае точных выражений интегрирование по общим формулам обращения преобразования Фурье (см. Приложение) не приводит к неприемлемому увеличению времени вычислений. Аппроксимация здесь преследует две цели – делает выражения более простыми и, главное, позволяет провести обращение преобразования Фурье в элементарных функциях. В качестве иллюстрации рассмотрим выражения для $\tilde{\mathbf{U}}$:

$$\begin{vmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \\ \tilde{W} \end{vmatrix} = \frac{Pe^{-\rho(z+1)}}{875\mu}\begin{vmatrix} \dfrac{-pi(462+567\rho+245e^{-0.8\rho})}{\rho^2} \\ \dfrac{-qi(462+567\rho+254e^{-0.8\rho})}{\rho^2} \\ \dfrac{-375-273\rho)}{\rho} \end{vmatrix} + \frac{zPe^{-\rho(z+1)}}{1750\mu}\begin{vmatrix} \dfrac{pi(-837+294\rho+245e^{-0.8\rho})}{\rho} \\ \dfrac{qi(-837+294\rho+245e^{-0.8\rho})}{\rho} \\ -837+294\rho+245e^{-0.8\rho} \end{vmatrix}. \tag{23}$$

При этом W, например, приобретает форму

$$W = \frac{P}{1750\pi\mu\sqrt{(z+1)^2+r^2}}\left(375+\frac{273(z+1)}{(z+1)^2+r^2}\right)+$$
$$+\frac{zP}{1750\pi\mu}\left(\frac{837(z+1)}{2((z+1)^2+r^2)^{3/2}}+\frac{147(2(z+1)^2-r^2)}{((z+1)^2+r^2)^{5/2}}+\frac{245(z+1.8)}{2((z+1.8)^2+r^2)^{3/2}}\right). \tag{24}$$

Заключение

Мы убедились в том, что задача для кусочно-однородной среды с плоскопараллельными границами, вообще говоря, может быть решена для произвольного количества слоев. Принципиальных препятствий к этому нет, и при *действительной необходимости* решение может быть получено. Причем очевидно, что задачу разумно ставить для конкретной ситуации, когда основные характеристики сред заданы в числах. Одновременно, на примере со слоем конечной толщины были наглядно продемонстрированы трудности, безусловно возникающие на пути решения подобных задач. Собственно говоря, все трудности сводятся к лавинообразному увеличению громоздкости выкладок с увеличением количества слоев.

Если же говорить о ситуации в целом, то следует вернуться к Введению. Наши сведения о механических свойствах земной коры далеки от совершенства и довольно приблизительны. Рассматриваемая кусочно-однородная среда – это лишь приближение к реальной среде. Возможно, в таких условиях имеет смысл попытаться получить решение для среды с непрерывной неоднородностью. Такой путь, конечно, весьма непростой, давно намечен, например, в упоминаемой выше монографии В.А. Ломакина [1976].

Приложение

Прямое двумерное преобразование Фурье используется в виде

$$\tilde{f}(p,q)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{(px+qy)i}dxdy=\int_{0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} r\,f(x,y)e^{ir\rho\sin\tau}d\tau dr\,, \tag{П.1}$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\rho=\sqrt{p^2+q^2}$ и во втором интеграле $x=\frac{r}{\rho}(p\sin\tau+q\cos\tau)$, $y=\frac{r}{\rho}(q\sin\tau-p\cos\tau)$.

Тогда обратное преобразование есть

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(p,q)e^{-i(px+qy)}dpdq=\frac{1}{4\pi^2}\int_{0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\rho\,\tilde{f}(p,q)e^{ir\rho\sin\tau}d\tau d\rho\,, \tag{П.2}$$

где во втором интеграле $p=-\frac{\rho}{r}(x\sin\tau+y\cos\tau)$, $q=\frac{\rho}{r}(x\cos\tau-y\sin\tau)$.

Существует связь двумерного преобразования Фурье с одной из форм интегрального преобразования Бесселя. Поскольку функция Бесселя первого рода целочисленного индекса выражается формулой

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(z\sin\tau-n\tau)i}d\tau\,, \tag{П.3}$$

то такая связь становится почти очевидной.

В ряде случаев при вычислениях полезной оказывается формула, приводимая в [*Градштейн, Рыжик,* 1963, с. 726]:

$$\int_{0}^{\infty}x^{m+1}e^{-\alpha x}J_\nu(\beta x)dx=(-1)^{m+1}\beta^{-\nu}\frac{d^{m+1}}{d\alpha^{m+1}}\left(\frac{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha\right)^{\nu}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) \tag{П.4}$$

при $\alpha>0$, $\beta>0$, $\operatorname{Re}\nu>-(m+2)$.

Литература

Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И. Интегральные уравнения задачи об упругом включении. Полное аналитическое решение задачи об эллиптическом включении // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С.50–76.

Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И. Напряженное состояние в упругом пространстве, определяемое фазовыми превращениями во включении // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С.48–64.

Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4. М.: ГИФМЛ, 1963. 1100 с.

Добровольский И.П. Задача о неоднородности в линейно-упругих пространстве и полупространстве // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 1. С.59–66.

Добровольский И.П. Математическая теория подготовки и прогноза тектонического землетрясения. М.: Физматлит, 2009. 240 с.

Добровольский И.П. Задача о включении // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 5. С.89–97.

Новожилов В.Н. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 372 с.

Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 368 с.

Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

Папкович П.Ф. Теория упругости. М.: Оборонгиз, 1939. 641 с.

Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости. М.: ГИФМЛ, 1961. 220 с.

Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963. 248 с.

Сведения об авторе

ДОБРОВОЛЬСКИЙ Игорь Петрович – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: (499)614-06-32. E-mail: dipedip@gmail.com

ELASTIC MEDIUM WITH PLANE-PARALLEL BORDERS

I.P. Dobrovolsky

Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. The linearly-elastic environment with homogeneous and isotropic layers is considered. It models an earth's crust. To the equations describing such layer, it is possible to apply double transformation Fourier and to receive the common decision. Such procedure has been lead and two problems are analyzed by this method. The first problem is about the concentrated force in the space consisting from two different half-spaces. In the second problem homogeneous half-space is considered on which the elastic layer with other modules lays. The concentrated force is enclosed to a surface of the layer.

Keywords: heterogeneity, Green's function, double Fourier transformation.