ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2012, том 13, № 4, с.19-33

УДК 550.831

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ ГРАВИРАЗВЕДКИ. ГАРАНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД

© 2012 г. П.И. Балк[1], А.С. Долгаль[2], Т.В. Балк[1], Л.А. Христенко[2]

[1] *г. Берлин, Германия*
[2] *Горный институт Уральского отделения РАН, г. Пермь, Россия*

Выделены основные недостатки традиционных форм представления результатов интерпретации гравитационных аномалий в терминах единичного допустимого (оптимального) решения обратной задачи. Утверждается, что наиболее полное извлечение достоверной информации из результатов измерений гравитационного поля невозможно без построения и целенаправленного анализа некоторого репрезентативного подмножества допустимых вариантов интерпретации. Решение этой проблемы возлагается на гарантированный подход, достоинства которого уже оценили в различных разделах прикладной математики, но который пока не нашел сколь-нибудь заметного применения в практике геофизических исследований.

Приводимое представление о сущности гарантированного подхода при решении обратных задач гравиразведки по сравнению с опубликованными ранее является более общим и более гибким. Развивая обновленную концепцию представляемого подхода, предлагается метод структурирования геологического пространства, допускающий оценку вероятности обнаружения источников поля в разных его точках; в качестве основного рабочего инструмента рассматриваются монтажные алгоритмы. Эффективность связки "гарантированный подход – монтажный метод" иллюстрируется на практических примерах.

Ключевые слова: гравиразведка, гарантированный подход, монтажный метод, моделирование, алгоритм, геологические объекты.

Введение

На первый взгляд это может показаться парадоксальным, но в условиях существования множества Q априори равноправных допустимых решений обратной задачи и отсутствия возможности оценить эффективно и содержательно точность каждого из них объем *достоверной* информации, извлекаемой из результатов интерпретации в терминах единичных ("оптимальных") оценок параметров модели, по существу равен нулю. Так, если речь идет о нелинейной обратной задаче, суть которой заключается в оценке геометрического места точек, образующих некую область S^T, занятую источниками поля, то ни за одну точку X подобранного носителя S^*, по какому бы критерию оптимальности он ни был отобран из Q, нельзя поручиться, что она гарантированно является точкой неизвестного носителя S^T (разумеется, не считая тех точек, чья принадлежность S^T предопределена априорной информацией).

Дефектность общепринятых представлений о результатах количественной интерпретации гравитационных аномалий как единичного допустимого решения обратной задачи легко просматривается с позиций различных научных теорий. Начнем с теории множеств и того очевидного факта, что элемент множества, какими бы «замечательными» свойствами он ни обладал, не в состоянии сколь-нибудь полно охарактеризовать само множество. Применительно к проблематике обратных задач, где информативность гравиметрических данных всецело определяется структурой и мощностью множества допустимых решений обратной задачи, это означает, что никакое отдельно взятое приближенное решение $S^* \in Q$ не может нести в себе информацию обо всех “оттенках” его несоответствия неизвестному истинному решению S^T; такая информация может содержаться лишь в множестве *Q*, либо в каком-то из его репрезентативных подмножеств. Любые эффективные (неулучшаемые) оценки точности $\left\| S^* - S^T \right\| \le \varepsilon$ (даже если предположить, что их удается построить) также не решат проблемы уже потому, что скалярной величины (ε) недостаточно, чтобы охарактеризовать все особенности структуры множества (*Q*). Любая попытка наделить выбираемое решение $S^* \in Q$ неким дополнительным свойством “оптимальности”, оттенив тем самым факт существования проблемы неоднозначности выбора, лишь множит противоречия. Так, из общей теории выбора известно [*Айзерман, Малишевский,* 1981], что оптимальный выбор “лучшего” из множества “допустимых к сравнению” вариантов на основе парно-доминантных отношений типа “если $F(x_1) < F(x_2)$, то вариант x_1 предпочтительней варианта x_2”, не может быть осуществим ни при каком скалярном критерии оптимальности *F* (а именно по таким критериям явно или неявно происходит отбор оптимального решения в известных методах количественной интерпретации гравитационных полей), если само понятие “лучший” определяется с учетом взаимовлияния альтернативных вариантов и зависит от всего “контекста выбора”, каковым в нашем случае является множество *Q* допустимых решений обратной задачи. При таком критерии выбора “оптимальное” решение не чувствительно к любым изменениям в структуре множества *Q*, если эти изменения не затрагивают точку минимума функционала *F*. Не выдерживает критики свойство оптимальности решения и с точки зрения физики изучаемых природных объектов и простейших доводов, взятых из теории вероятностей. Суть в том, что реальные природные соотношения, складывающиеся под влиянием большого числа неконтролируемых случайных факторов, вовсе не обязаны подчиняться неким экстремальным принципам, хотя и не заложенным в априорную информацию, но зато “благоприятным” в плане применения того или иного математического аппарата.

Точно так же статистические свойства ограниченной выборки случайных чисел, играющих роль помех в измерениях поля, не обязаны совпадать с предполагаемыми вероятностными характеристиками помехи. К этому можно добавить, что после того как вся априорная информация уже нашла отражение в структуре множества *Q*, введение любого дополнительного свойства решения, позволяющего сделать однозначный выбор из *Q*, будет носить исключительно субъективный характер. Не случайно в некоторых прикладных науках (взять хотя бы теорию управления [*Цыпкин,* 1982]), где приходится иметь дело с решением задач в условиях неопределенности, очередная смена парадигм происходила под девизом “оптимальность становится опасной, если ее принимать слишком всерьез”.

В работах [*Балк*, 2000, 2001, 2002] всесторонне рассмотрены причины, по которым очевидные недостатки устоявшихся представлений о результатах интерпретации как оптимальных (в некотором смысле) точечных оценок параметров модели источников поля, до сих пор не смогли побудить геофизиков-теоретиков к пересмотру ряда важных положений теории интерпретации потенциальных полей. Основные из этих причин – столкновение математических и геофизических интересов, которыми руководствуются представители той или иной научной школы; чрезмерная ориентация на критерии состоятельности научных разработок, принятых в абстрактной теории решения некорректно поставленных задач; абсолютизация условия сходимости последовательности приближенных решений – условия, носящего на практике исключительно виртуальный характер. И это все при том, что в силу естественных ограничений на физические и геометрические параметры геологических объектов обратные задачи гравиразведки не являются, вообще-то говоря, неустойчивыми в классическом понимании этого термина. Условие сходимости имеет основополагающее значение при изучении гносеологических проблем принципиальной познаваемости реальной действительности по ее косвенным проявлениям; идеализация экспериментальных данных (стремление свести помехи измерений к нулю, задание физического поля на несчетном множестве точек) здесь вполне допустима. Другое дело – интерпретация практического экспериментального материала, когда, в частности, помеха статична, ею невозможно управлять и не всегда известен ее уровень. Сослагательный характер условия сходимости, когда о качестве решения для конкретных данных предлагается судить по тому, каким бы оно было при других – идеализированных и невыполнимых – обстоятельствах, вызывает возражение. На практике совершенно безразлично, как ведут себя приближенные решения обратной задачи, соответствующие значениям помехи в полуокрестности нуля; интерес представляет лишь интервал возможного значения нормы ε помехи в измерениях поля $\left[\varepsilon^{\min},\varepsilon^{\max}\right]$. Удивительная вещь, но объективно, при сопоставлении любого расходящегося итерационного процесса с математически состоятельным сходящимся алгоритмом преимущество будет за первым, если на отрезке возможного значения уровня помех по точности он превосходит второй.

Наиболее отчетливо негативная роль условия сходимости в математической теории интерпретации потенциальных полей проявляется в том, что, создавая иллюзию возможности получения результата с наперед заданной точностью, это условие автоматически переводит в разряд второстепенных (за отсутствием актуальности в них при наличии этой самой сходимости) такие вопросы, как необходимость использования дополнительной информации (теперь уже это “избыточная” информация, переводящая постановку обратной задачи в разряд “переопределенных”). Трудно согласиться с мнением, что “вопрос использования дополнительной априорной информации для повышения точности приближенного решения корректно поставленной задачи не является принципиальным” [*Васин, Агеев*, 1993]. Этот вывод сделан, видимо, по той лишь причине, что условие сходимости в этом случае не требует дополнительных ограничений на свойства решения. Также трудно согласиться и с тем, что “при совпадении носителей масс, создающих гравитационное и магнитное поля, можно ограничиться интерпретацией лишь одного из этих полей” [*Васин и др.,* 2003]. Если условие сходимости отвечает на вопрос, можно ли для желаемой точности δ решения обратной задачи указать ограничение ε на допустимый уровень помех (можно сказать и более общо – на минимально допустимый объем априорной информации G), то на практике требуется все то же, но с точностью до наоборот: необходимо указать точность δ решения обратной задачи, которую могут обеспечить данные при заданном уровне ε помех (при заданной информации G).

Может возникнуть вопрос, не затрагивает ли заочная полемика со сторонниками классической теории некорректных задач относительно роли и места в теории интерпретации условия сходимости и свойства “оптимальности” решений исключительно теоретические нюансы проблемы, мало значащие для практики интерпретации гравиметрических данных, и сколь заметными в приложениях могут быть реальные потери от игнорирования приведенных выше доводов. Вероятно, будет достаточным сказать, что неэффективность концепции “оптимальных” решений проявляется в немонотонной зависимости качества результатов интерпретации от объема и качества априорных данных, что может необоснованно поставить под сомнение эффективность идеи комплексирования и явиться серьезной преградой на пути создания теории интерпретации, адекватной геофизическим реалиям. Наглядное подтверждение дефектности привычных форм представления результатов интерпретации можно найти в работе [*Балк*, 2004]. В ней приведены примеры, подмывающие устоявшиеся представления геофизиков о реальных возможностях известных методов и свойствах решений обратных задач, выраженных в терминах оценок параметров модели. В частности, приводятся примеры, когда измерения аномалии гравитационного поля группируются в три различных подмножества и результаты интерпретации, выполненной по данным из каждого этого подмножества, оказываются более точными, чем “оптимальное” решение обратной задачи по всему объему данных, построенное тем же методом. Приводятся также примеры, когда результаты совместной интерпретации данных измерений двух производных гравитационного потенциала путем минимизации взвешенного функционала невязки, уступают по точности решениям обратных задач по отдельным составляющим поля практически при всех значениях весового коэффициента в минимизируемом функционале. Теоретически обосновывается, что подобные исходы не обязательно являются следствием “патологических раскладов” ошибок измерения значений поля.

Суммируя все вышеприведенные доводы можно сказать, что переориентация теории интерпретации гравитационных аномалий на извлечение *достоверной* информации об объекте исследования предполагает смещение акцентов с единичных оценок параметров модели, их оптимальности и сходимости на содержательный анализ всего множества допустимых решений Q. Цель такого анализа состоит в обнаружении тех геологически содержательных особенностей, которые присущи всем альтернативным вариантам интерпретации, а значит и неизвестному истинному решению обратной задачи. Эта концепция была сформулирована в работе [*Балк*, 1980] как гарантированный подход к обратным задачам гравиразведки.

Суть концепции гарантированного подхода

Безусловно, мысль о преимуществе, которое дает использование не одного, а сразу нескольких возможных вариантов интерпретации для вынесения более обоснованного суждения о строении аномалиеобразующей среды, озвучивалась геофизиками неоднократно. Однако подобные высказывания (и это важно) всегда предполагали, что результатом совместного анализа построенных вариантов интерпретации будет опять же некое “средневзвешенное” решение обратной задачи, выраженное в тех же терминах единичных допустимых оценок параметров модели. Если говорить о современных представлениях геофизиков о путях решения проблемы достоверности результатов интерпретации гравитационных аномалий, то они хорошо представлены в недавно вышедшей монографии [*Кауфман, Хансен,* 2011]. Для оценки достижимой точности определения вектора $\theta^T \in \mathbf{R}^n$ параметров модели источников поля в этой монографии предлагается построение нескольких допустимых приближенных решений θ_i^* обратной задачи (как именно и сколько не обсуждается), отбор из них минимальных $\theta_j^{\min}$ и максимальных $\theta_j^{\max}$ оценок и параметров θ_j^T; далее следует опираться в своих выводах на неравенства $\theta_j^{\min} \le \theta_j^T \le \theta_j^{\max}$, j=1, 2, …, n. Подобные оценки, конечно, имеют право на жизнь, и это лучше полной неопределенности. Очевидно и то, что предлагаемое решение проблемы всего лишь половинчатое; считать, что двухсторонние оценки параметров модели закрывают проблему, было бы опрометчиво.

Во-первых, сразу встает вопрос о репрезентативности используемой выборки $\{\theta_i^*\}$ допустимых решений обратной задачи, а значит и о справедливости построенных оценок. Во-вторых, граница множества Q допустимых векторов $\theta^* = (\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_n^*)$, определяемая структурой априорных ограничений, обычно весьма сложна, тогда как множество векторов, отвечающих указанным неравенствам, – это многомерный параллелепипед, описанный около множества Θ, большинство точек которого могут быть недопустимыми решениями со всеми вытекающими отсюда последствиями [*Балк, Долгаль*, 2011]. Раздельные оценки интервалов возможных значений параметров геологических тел недостаточны. Стремясь предвосхитить возможные доводы сторонников информационно-статистического направления, что все отмеченное – исключительно недостатки детерминистского подхода, которому попросту не хватает аналога ковариационной матрицы, заметим, что наличие этого аналога все равно не решило бы проблемы. Требуются множественные оценки, связывающие воедино все параметры модели, т.е. все то же множество допустимых решений обратной задачи.

Понятно, что ситуация принципиально не меняется, если неопределенность оценивать с помощью неравенства $\left\|\theta^T - \theta^{opt}\right\| \le \varepsilon$, где θ^{opt} – некая “оптимальная” оценка вектора θ^T. Но и это не все. Даже располагая удобным описанием множества Q, проблема извлечения из него информации, достаточной для идентификации точек X пространства на предмет выполнения включения $X \in S^T$, по сложности не уступит самой проблеме построения множества Q. Требуется радикальное решение – все перечисленные ступени к созданию эффективных приемов оценки разрешающих возможностей гравиметрии необходимо попросту “перешагнуть”.

В плане реализации концепции гарантированного подхода обратным задачам гравиметрии в некотором смысле “повезло”. В отличие от некоторых других обратных задач, где целевым объектом являются параметры математической модели исследуемого объекта (процесса), в геофизике, как подмечено в [*Рокитянский*, 1985], оценки параметров модели источников поля не могут рассматриваться как единственно возможная форма представления результатов интерпретации. Это означает, что, в конечном счете, множество Q само по себе не представляет интерес – важны лишь его отдельные характеристики, и это, как будет показано дальше, оставляет возможности для “маневра”. В работе [*Балк*, 1980] применительно к нелинейной обратной задаче рудного типа для группы геологических тел S_k^T, k=1, 2,… m в качестве результата интерпретации предложено брать m пар множеств $< D_1^{(k)}, D_2^{(k)} >$, $D_1^{(k)}, D_2^{(k)} \subset \mathbf{R}^3$, где для каждого k множество $D_1^{(k)}$ суть минимальная область пространства, гарантированно содержащая неизвестный носитель S_k^T; $D_2^{(k)}$ – максимальная область, гарантированно являющаяся фрагментом носителя S_k^T (естественно, при условии адекватности всех априорных предпосылок); разность $D_1^{(k)} \setminus D_2^{(k)}$ – область неопределенности, каждую точку которой при имеющемся объеме информации невозможно однозначно идентифицировать на предмет принадлежности носителю S_k^T; мера разности есть мера проявления ε-эквивалентности (по отношению к задаче оценки геометрии и пространственного положения локального источника поля S_k^T). В содержательном плане $D_1^{(k)}$ – это объединение парциальных носителей Ω_k^*, входящих во все допустимые решения $\Omega^* \in Q$, а $D_2^{(k)}$ – их пересечение.

Теоретически существование эффективных алгоритмов построения областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$ предопределено тем, что множество Q содержит в большом числе (здесь редкая возможность использовать фактор ε-эквивалентности в качестве “союзника”) такие достаточно узкие подмножества Q_0 (репрезентативные семейства) допустимых решений, что объединения и пересечения множеств Ω_k^* не зависят от того, выполняются ли эти операции по элементам всего множества Q или его подмножества Q_0. Конструктивной основой метода построения областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$ могут служить монтажные алгоритмы поиска отдельных допустимых решений нелинейной обратной задачи гравиразведки. Один из возможных приемов построения подходящего подмножества Q_0 предложен в работе [*Балк*, 1997].

Будем исходить из того, что читатель знаком с работой авторов [*Балк и др.,* 2012], в которой изложена наиболее полная версия монтажных алгоритмов построения отдельных допустимых решений Ω^* обратной задачи при наличии разнородной априорной информации. Здесь же необходимо напомнить, что монтажные алгоритмы базируются на конечноэлементном замощении $\{\omega_\alpha\}$ некоторой части S геологического пространства, заведомо содержащей все источники аномалии, а в качестве элементов ω_α обычно выступают элементарные геометрические фигуры достаточно малых размеров. Сами приближенные решения обратной задачи представляют при этом распределения масс по (конфигурационным) носителям Ω_k^*, которые являются объединениями некоторого числа элементов замощения ω_α и удовлетворяют заданным априорным ограничениям. Множество элементов замощения, составляющих некую конфигурацию Ω, принято называть ядром конфигурации и обозначать как $Я[\Omega]$.

Работа метода, реализующего концепцию гарантированного подхода, начинается с поиска любого допустимого решения обратной задачи $\Omega^* = \{\Omega_1^*, \Omega_2^*, ..., \Omega_m^*\}$ по одной из версий монтажных алгоритмов. Пусть M_k – множество номеров α элементов замощения ω_α в ядре $Я[\Omega_k^*]$ парциального носителя Ω_k^* из этого решения; Ω_k^+ – конфигурационная аппроксимация области S_k^+, являющейся по априорным данным фрагментом носителя S_k^T; Ω_k^- – конфигурационная аппроксимация области S_k^-, заведомо также не имеющей по априорным данным общих точек с носителем S_k^T (допускается, что для каких-то k множества Ω_k^+, Ω_k^- могут быть пустыми). Компоненты Ω_k^* многосвязной конфигурации Ω^* принимаются за нулевые приближения к искомым областям $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$:

$$Я\left[D_{1,0}^{(k)}\right] = Я\left[D_{2,0}^{(k)}\right] = \{\omega_\alpha : \alpha \in M_k\},\ k=1, 2, \ldots\ m.$$

Организуем итерационный процесс построения множеств $D_2^{(k)}$, на каждом шаге $j \geq 1$ которого выполняются следующие операции. Формируется множество K_j, состоящее из номеров k всех парциальных носителей S_k^T, для которых выполняется следующее условие: предшествующее приближение $D_{2,j-1}^{(k)}$ к искомой области $D_2^{(k)}$ содержит хотя бы один элемент замощения ω_α, не принадлежащий конфигурационной области Ω_k^+. Далее для произвольно взятой пары (k, ω_α), $k \in K_j$, $\omega_\alpha \in Я\left[D_{2,j-1}^{(k)}\right] \backslash Я\left[\Omega_k^+\right]$, не рассматриваемой на предыдущих итерациях, осуществляется поиск очередного допустимого решения Ω^* при одном дополнительном условии: элемент ω_α не должен войти в ядро парциального носителя Ω_k^*. Если такое решение удалось построить, то производится корректировка текущих приближений $D_{2,j-1}^{(k)}$:

$$Я\left[D_{2,j}^{(k)}\right] = Я\left[D_{2,j-1}^{(k)}\right] \cap Я\left[\Omega_k^*\right],\ k=1, 2, \ldots\ m.$$

В результате ядро текущего приближения к области $D_2^{(k)}$ уменьшается, как минимум, на один элемент ω_α, поскольку удалось обнаружить допустимое решение обратной задачи, в котором ядро парциального носителя Ω_k^* не содержит этот элемент замощения. Попутно корректировке автоматически подвергаются и другие области $D_2^{(k)}$. Итерационный процесс завершается, если возможность выбора пары (k,ω_α), удовлетворяющей вышеназванным условиям, полностью исчерпана.

По схожей итерационной схеме осуществляется построение областей $D_1^{(k)}$. Здесь на каждом шаге $j\geq 1$ формируется множество K_j, состоящее из номеров k всех парциальных носителей S_k^T, для которых выполняется условие: среди элементов замощения изучаемой части S геологического пространства отыщется хотя бы один элемент ω_α, не принадлежащий ни ядру предшествующего приближения $D_{1,j-1}^{(k)}$, ни ядру множества Ω_k^-. Для произвольной пары (k,ω_α), $k\in K_j$, $\omega_\alpha \notin \left(Я\left[D_{1,j-1}^{(k)}\right]\cup Я\left[\Omega_k^-\right]\right)$, не рассматриваемой на предыдущих итерациях, осуществляется поиск очередного допустимого решения Ω^* при одном дополнительном условии: элемент ω_α должен войти в ядро парциального носителя Ω_k^*. Это ограничение вносит в алгоритм поиска допустимого решения Ω^* одну особенность: нулевое приближение к Ω_k^*, как правило, не будет связным (здесь понадобятся процедуры анализа топологических особенностей конфигурационных носителей [*Балк*, 1989] и анонсированные в [*Балк и др*., 2012] двухстадийные итерационные процессы). Если такое допустимое решение удалось построить, производится корректировка текущих приближений $D_{1,j-1}^{(k)}$:

$$Я\left[D_{1,j}^{(k)}\right]=Я\left[D_{1,j-1}^{(k)}\right]\cup Я\left[\Omega_k^*\right],\ k=1, 2,\dots\ m.$$

В результате ядро очередного приближения к $D_1^{(k)}$ получит, как минимум, один новый элемент ω_α, поскольку удалось обнаружить допустимое решение обратной задачи, в ядре соответствующего парциального носителя, в котором этот элемент присутствует. Найденное допустимое решение может попутно внести вклад и в корректировку текущих приближений к другим областям $D_1^{(k)}$ (особо заметны изменения ядер текущих приближений к областям $D_1^{(k)}$ на первых итерациях, что вполне понятно). Критерий завершения итерационного процесса такой же, как и в алгоритме построения областей $D_2^{(k)}$. Остается заметить, что если построению областей $D_1^{(k)}$ предшествует построение областей $D_2^{(k)}$, то в качестве нулевых приближений $D_{1,0}^{(k)}$ целесообразно брать объединения соответствующих парциальных носителей, входящих в допустимые решения, найденные в ходе построения областей $D_1^{(k)}$.

Апостериори можно констатировать, что допустимые решения обратной задачи, найденные в ходе построения областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$, и составляют репрезентативное подмножество Q_0.

В технологиях интерпретации, реализующих концепцию гарантированного подхода, монтажные алгоритмы перестают, вообще говоря, играть роль алгоритмов для решения условно-экстремальных задач в их классическом понимании. Все значительно упрощается. Минимум невязки перестает быть целью, а стремление к нему становится всего лишь средством для достижения какого-нибудь приемлемого значения невязки, а значит и допустимого решения обратной задачи; ε-эквивалентность, как бы это ни показалось странным, здесь выступает в роли "союзника", а пологий рельеф минимизируемого функционала только облегчает решение проблемы. Надежность предложенного алгоритма идентификации элементов замощения на предмет принадлежности областям $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$ повышается также и за счет способности алгоритма корректировать ложные выводы, сделанные на предыдущих итерациях. Если на некотором шаге j при работе с парой (k, ω_α) не было достигнуто приемлемое значение невязки из-за проблем, связанных с многоэкстремальностью минимизируемого функционала, и на этом основании был сделан неверный вывод об отсутствии допустимых решений, в которых $\omega_\alpha \in \Omega_k^*$, а, следовательно, и вывод о принадлежности элемента ω_α области $D_2^{(k)}$, то ситуация может быть исправлена на последующих итерациях, когда при работе с другой парой (k_1, ω_β) удалось построить решение Ω^*, где $\omega_\alpha \notin Я\left[\Omega_k^*\right]$.

Аналогичное замечание относится и к корректировке результатов по областям $D_1^{(k)}$. Остроту проблемы достоверности решения в терминах пар $< D_1^{(k)}, D_2^{(k)} >$ снижает и то обстоятельство, что в принципе не так важно, если мера областей $D_1^{(k)}$ будет занижена, а мера областей $D_2^{(k)}$, напротив, завышена. Важно, чтобы построенные области $D_1^{(k)}$, $D_2^{(k)}$ обеспечили двухсторонние оценки для неизвестных парциальных носителей: $D_2^{(k)} \subset S_k^T \subset D_1^{(k)}$, k=1, 2,… m (при решении модельных примеров в условиях адекватности интерпретационной модели нарушения указанных включений не отмечались). И наконец, на результаты интерпретации в терминах пар $< D_1^{(k)}, D_2^{(k)} >$ можно ведь смотреть и так: совокупная априорная информация оставляет неопределенность, при которой по меньшей мере любая точка области $D_1^{(k)}$ может оказаться точкой парциального носителя S_k^T, а области, которые гарантированно можно отнести к фрагментам парциальных носителей S_k^T, лежат внутри построенных областей $D_2^{(k)}$. Если не забывать, что проблема адекватности принятых предпосылок является прерогативой интерпретатора, а не разработчика математического обеспечения, то с учетом всех замечаний приставка “гарантированный” не должна вызывать возражений даже у самых строгих оппонентов предложенного подхода.

Суть гарантированного подхода поясним на одном методическом примере. Аномалия Δg обусловлена двумя однородными призмами S_1^T и S_2^T (рис. 1), плотности которых считаются известными – 0.15 и 0.1 г/см^3. Чтобы исключить фактор неадекватности модельных представлений, поиск допустимых решений обратной задачи ведется среди пар однородных призм с прямоугольным сечением. Для исключения неопределенности в отношении того, действительно ли в построениях использовалось репрезентативное подмножество Q_0, осуществлялся прямой перебор геометрических параметров призм на достаточно густой сетке их возможных значений с последующей отбраковкой (по значению невязки) недопустимых решений обратной задачи. Наконец, чтобы не быть связанными с определенной выборкой случайных чисел, имитирующих помехи в измерениях, интерпретация намеренно осуществляется по точному полю для нескольких фиксированных значений невязки. Представлены решения обратной задачи при различных предположениях относительно максимально возможного уровня $\varepsilon^{\max}$ помех в измерениях. Логично было ожидать (и это подтвердилось), что в некотором диапазоне значений $\varepsilon^{\max}$ уровень неопределенности позволяет выявить фрагмент лишь одного, менее глубоко залегающего тела S_1^T. Если бы не априорное ограничение, по которому тело S_1^T лежит левее плоскости $x = 25$ км, а тело S_2^T – правее этой плоскости, то можно было бы отметить, как, начиная с некоторого $\varepsilon^{\max}$, области $D_1^{(1)}$ и $D_1^{(2)}$ начинают пересекаться, и это означало бы уровень неопределенности, при котором некоторая часть геологического пространства могла бы быть фрагментом либо первого, либо второго аномалиеобразующего тела.

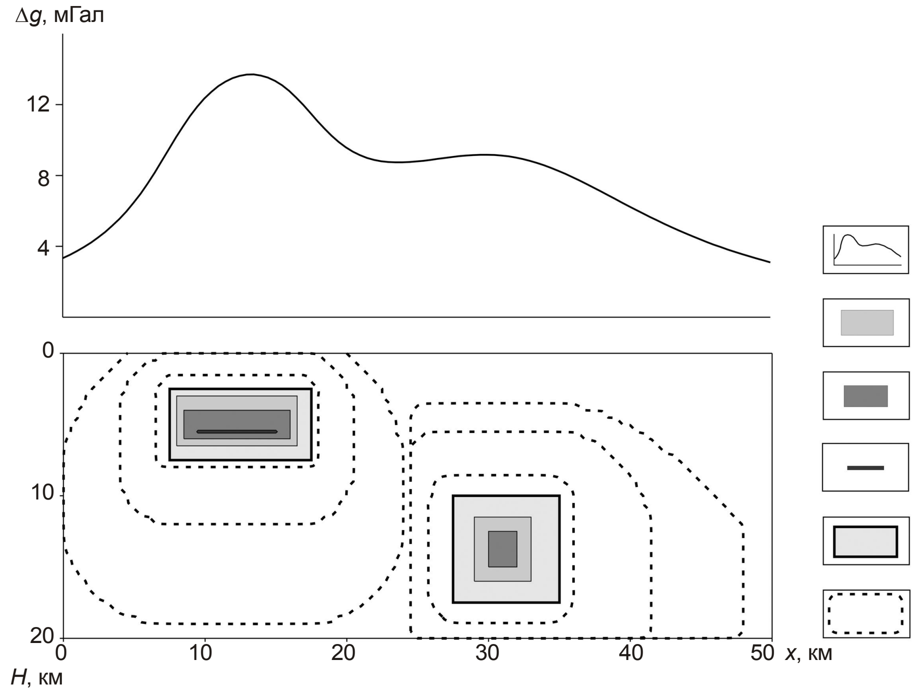

Рис. 1. Результаты решения обратной задачи гравиметрии для двух прямоугольных призм в рамках гарантированного подхода

1 – поле Δg; *2*–*4* – фрагменты среды, гарантированно принадлежащие источникам поля при условии, что уровень помех в измерениях не превосходит 0.4 мГал (*2*), 0.7 мГал (*3*), 1.2 мГал (*4*); *5* – границы аномалиеобразующих тел; *6* – границы областей, гарантированно содержащих источники аномалии в предположении, что уровень помех не превосходит 0.4, 1.5 и 2.5 мГал

В завершение раздела попытаемся непредвзято сопоставить традиционный подход к решению обратных задач с гарантированным. Начнем с того, что, с точки зрения достоверности обнаружения аномалиеобразующих масс, в тех или иных точках X области $S_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{m}(S_k^+ \cup S_k^-)$ информативность отдельно взятого допустимого решения Ω^* обратной задачи равна нулю; как априори, так и апостериори область S_0 остается информационно однородной, и каждая ее точка несет максимальную неопределенность, при которой вероятность $p(X)$ события $X \in S^T$ можно оценить лишь как $0 \le p(X) \le 1$. Результаты интерпретации в терминах пар областей $< D_1^{(k)}, D_2^{(k)} >$ вносят, если так можно выразиться, информационную анизотропию в область S_0. Теперь “белыми пятнами” остаются лишь подобласти $D_1^{(k)} \setminus D_2^{(k)}$, тогда как для оставшихся точек имеет место полная определенность: вероятность события $X \in S_k^T$ для всех $X \in D_2^{(k)}$ равна 1 и для всех точек $X \setminus D_1^{(k)}$ вероятность события $X \in S_k^T$ равна 0. Но справедливо и другое. Пусть μ – классическая мера Лебега в $\mathbf{R}^3$, Ω^* – любое (в том числе и оптимальное по какому-то критерию) приближенное решение обратной задачи. Безусловно, при использовании любого алгоритма построения допустимого решения Ω^* совместный фрагмент истинного (S_k^T) и найденного (Ω_k^*) парциальных носителей превзойдет (и, возможно, существенно) по мере гарантированно установленный фрагмент истинного тела – $\mu(\Omega_k^* \cap S_k^T) > \mu(D_2^{(k)})$. Правда указать, какие именно точки $X \in \Omega_k^*$ являются также и точками тела S_k^T, в рамках обычного подхода не представляется возможным.

Толерантная точка зрения должна допускать право на существование и того, и другого подходов. Результатом совместной интерпретации гравитационных аномалий по ним могла бы стать триада $<\Omega^{opt}; D_1, D_2>$. Желательно лишь, чтобы (условно) оптимальное решение Ω^{opt} неформально зависело от контекста выбора, т.е. от множества Q. Конфигурация Ω^{opt} может быть выбрана из множества Q_0 допустимых решений, найденных в ходе построения областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$ (пусть L – число таких решений, которые обозначим как $\Omega^*(l)$, $l = 1,2,...,L$). Так, пусть $N(q,r)$ – число элементов замощения ω_α, входящих в ядра $Я\left[\Omega^*(q)\right]$ и $Я\left[\Omega^*(r)\right]$ двух конфигураций из Q_0, а $N(q)$ – минимальное из чисел $N(q,\ r)$ $N(q,r)$, $r = 1,2,...,L$ $(r \neq q)$. В качестве Ω^{opt} можно предложить любую конфигурацию $\Omega^*(l^{opt})$ из множества Q_0 (таких конфигураций может оказаться несколько), для которой $N(l^{opt})$ наибольшее из всех $N(l)$, $l = 1,2,...,L$. Такой выбор направлен на максимизацию меры общности $\mu(\Omega^{opt} \cap S^T)$ истинного и приближенного решения в наихудшей ситуации. Если теперь за $N(q)$ принять сумму чисел $N(q,\ r)$, $r = 1,2,...,L$ $(r \neq q)$, а за Ω^{opt} – конфигурацию $\Omega(l^{opt})$, для которой значение $N(l^{opt})$ является наибольшим, то такой выбор будет преследовать цель максимизации математического ожидания меры $\mu(\Omega^{opt}, S^T)$.

Неопределенность в априорной информации и гарантированный подход

Возникает вопрос, являются ли результаты интерпретации в терминах областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$ пределом возможностей детерминистского подхода в задачах, связанных с оценкой разрешающей способности гравиметрического метода; можно ли предложить более богатую, чем “трехцветная” (фрагмент изучаемого пространства принадлежит, не принадлежит, не идентифицируем) палитру при изучении проблемы достоверности обнаружения источников поля в пределах изучаемой части S геологического пространства. Речь, таким образом, идет о структурировании области S, позволяющем задать на ней некоторую функцию предпочтения. В этом и последующем разделах будет показано, что с этой точки зрения резервы детерминистского подхода далеко не исчерпаны.

Нечеткость (размытость) априорных представлений о границах допустимых значений параметров в описании интерпретационной модели создает предпосылки для построения сравнительных оценок степени надежности обнаружения аномалиеобразующих масс в тех или иных фрагментах изучаемого объема геологической среды S. В качестве примера рассмотрим случай, когда данные о фактической величине ε^T нормы помехи ξ в измеренных значениях поля представлены неравенствами: $0 < \|\xi\| \leq \varepsilon_0$, $\varepsilon' \leq \varepsilon_0 \leq \varepsilon''$ (для полной адекватности следовало бы, конечно, рассмотреть случай, когда нижняя оценка нормы помехи также неопределена). Существует альтернатива: либо выбрать рискованный путь, назначив ε_0, близкое к минимальному ε', либо придерживаться осторожной стратегии и принять $\varepsilon_0 = \varepsilon''$. В первом случае не исключено, что $\varepsilon^T > \varepsilon_0$; тогда истинное решение даже не войдет в множество псевдодопустимых решений обратной задачи, а все последующие рассуждения будут некорректны. Напротив, необоснованно завышенный порог невязки приведет к тому, что в множество Q будут включены приближенные решения, которые заведомо не могут являться истинными решениями обратной задачи. Соответственно, за счет необоснованного расширения области D_1 и сужения области D_2 (возможно даже до пустого множества) будут завышены “размеры” области неопределенности $D_1 \setminus D_2$.

Противоречие, возникшее в связи с неопределенностью выбора ε_0, можно не просто обойти, но и получить при этом некую содержательную информацию о пространственном положении источников поля, недоступную при решении обратной задачи в терминах “оптимальных” оценок параметров носителя масс. Идея чрезвычайно проста. Зададимся достаточно малым h>0 и покроем интервал $\left[\varepsilon', \varepsilon''\right]$ возможных значений ε_0 сеткой: $\varepsilon_0^{(j)} = \varepsilon' + jh$, $j = 0,1,...,n$, $h = (\varepsilon'' - \varepsilon')/n$. Пусть $\varepsilon_0^{\max}(\alpha)$ – максимальное из значений $\varepsilon_0^{(i)}$, при котором любое допустимое решение обратной задачи, отвечающее условию $\|\xi\| \le \varepsilon_0^{\max}(\alpha)$, содержит элемент ω_α. Элементы замощения ω_α, на которых функция $\varepsilon_0^{\max}(\alpha)$ принимает одно и то же значение, можно объединить в класс эквивалентности. Тем самым изучаемая часть пространства S будет разбита на m+1 непересекающихся “локальных фрагментов” (не обязательно связных), ранжированных по возрастанию вероятности обнаружения в них аномалиеобразующих масс [*Балк, Долгаль,* 2010]. Как и в случае приведенного ранее алгоритма построения областей D_1 и D_2, здесь также нет необходимости знать все множество Q допустимых решений обратной задачи. Для определения значения функции $\varepsilon_0^{\max}(\alpha)$ при каком-то фиксированном α достаточно последовательно для каждого предполагаемого значения $\varepsilon_0^{(j)}$ максимально возможного уровня помех организовать поиск любого допустимого решения Ω^*. Как только для некоторого $\varepsilon_0^{(j)}$ построить допустимое решение не удается, принимается $\varepsilon_0^{\max}(\alpha) = \varepsilon_0^{(j-1)}$.

Оценка вероятности обнаружения аномалиеобразующих масс в различных точках геологического пространства

Следуя сложившимся представлениям, эту задачу также можно было бы считать прерогативой информационно-статистической теории интерпретации. Однако в случае, когда в априорных данных превалирует информация детерминистского характера, более эффективными могут оказаться алгоритмы, базирующиеся на концепции гарантированного подхода.

Поводом для рассматриваемой постановки явилось осознание того, что гарантированный подход в “чистом виде” является в некотором смысле ортодоксальным, чрезмерно категоричным и совершенно не допускает каких-либо компромиссов. Можно представить себе ситуацию, когда некий элемент замощения ω_α не войдет в ядро парциального носителя Ω_k^* лишь одного из всех допустимых решений $\Omega^* \in Q$ и формально этого уже будет достаточно, чтобы отказать элементу ω_α в праве считаться фрагментом тела S_k^T. Аналогично, если включение $\omega_\alpha \in Я\left[\Omega_k^*\right]$ имеет место лишь для одного из допустимых решений Ω^*, то мы обязаны отнести его к области неопределенности $D_1^{(k)} \setminus D_2^{(k)}$ и не исключать возможность, что ω_α является фрагментом тела S_k^T. Но как тогда быть с принципом доверительной вероятности, на котором основано принятие решений во всех сферах практической деятельности? Столь прямолинейное понимание гарантии приводит к тому, что даже в достаточно насыщенных априорной информацией постановках обратной задачи, результаты интерпретации в терминах множеств $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$ оказываются неоправданно пессимистичными и не привносят ничего нового в априорную информацию, непосредственно касающейся геометрии и пространственного положения источников поля.

Если вся априорная информация о помехе сводится к заданию максимально возможного значения ее нормы (что довольно типично, имея в виду непредсказуемость свойств помех геологического характера), то допустимые решения $\Omega^* \in Q$ априори равноправны. Соответственно это дает возможность предполагать, что каждое из них с равной вероятностью может оказаться наилучшим приближением к неизвестному носителю S^T. Обозначим через N число всех допустимых решений обратной задачи (здесь оно хотя и велико, но конечно), а через $N_{k,\alpha}$ – число допустимых решений Ω^*, ядро парциального носителя Ω_k^* в каждом из которых содержит элемент замощения ω_α. Тогда $p_{k,\alpha} = N_{k,\alpha} / N$ – вероятность того, что элемент ω_α является локальным фрагментом неизвестного парциального носителя S_k^T [*Долгаль, Шархимуллин*, 2011]. Если для одного и того же α отыщутся два и более значения k, для которых $p_{k,\alpha} \neq 0$, то с соответствующими вероятностями элемент ω_α может оказаться фрагментом того или иного парциального носителя масс.

Но можно ли найти приемлемые оценки $\tilde{p}_{k,\alpha}$ вероятностей $p_{k,\alpha}$, ограничившись построением некоторого подмножества $Q_0 \subset Q$ допустимых решений по алгоритму из [*Балк и др.,* 2012] и каковы должны быть его минимальная мощность и принцип целенаправленного поиска допустимых решений? Достаточно ли в качестве Q_0 воспользоваться тем же семейством допустимых решений, что и при построении множеств D_1 и D_2? – Будем считать эти вопросы пока открытыми, а предложенную постановку рассматривать как задел для будущих исследований, подкрепив ее двумя примерами.

Возьмем рассмотренный выше модельный пример (см. рис. 1) и применим к нему предлагаемый подход. На этот раз поле содержит помехи; причем их уровень (1.2 мГал) тот, при котором гарантированно (!) не удавалось обнаружить сколь-нибудь малый фрагмент более глубоко залегающего тела. Оценки вероятностей $p_{k,\alpha}$ принадлежности элементарных объемов ω_α парциальным носителям S_k^T были получены на основании 7229 найденных допустимых решений обратной задачи. Легко видеть (рис. 2), что области геологического пространства, отвечающие значениям вероятностей $p_{k,\alpha} \geq 0.3$, практически совпадают с изучаемыми геоплотностными неоднородностями.

Приведем практический пример интерпретации данных крупномасштабной гравиметрической съемки, выполненной на месторождении платино-медноникелевых руд Норильск-1 (рис. 3). Значительные размеры аномалиеобразующих объектов по простиранию позволяют использовать двумерную постановку задачи. В основу модели среды положены следующие допущения: аномалия в основном обусловлена рудоносной интрузией базит-гипербазитового состава; ее избыточная плотность (по отношению к вмещающим породам трапповой формации) составляет 0.2 г/см^3, а суммарное среднеквадратическое значение ε^T помехи не превосходит 0.15 мГал. С помощью монтажного метода при различных центрах кристаллизации (начальных приближениях) было построено около 400 различных вариантов конфигурационных распределений масс, удовлетворяющих априорным допущениям. Их синтез позволил построить пространственное распределение вероятностей $p_{k,\alpha}$, локализующее приближенную к дневной поверхности наиболее мощную часть интрузии.

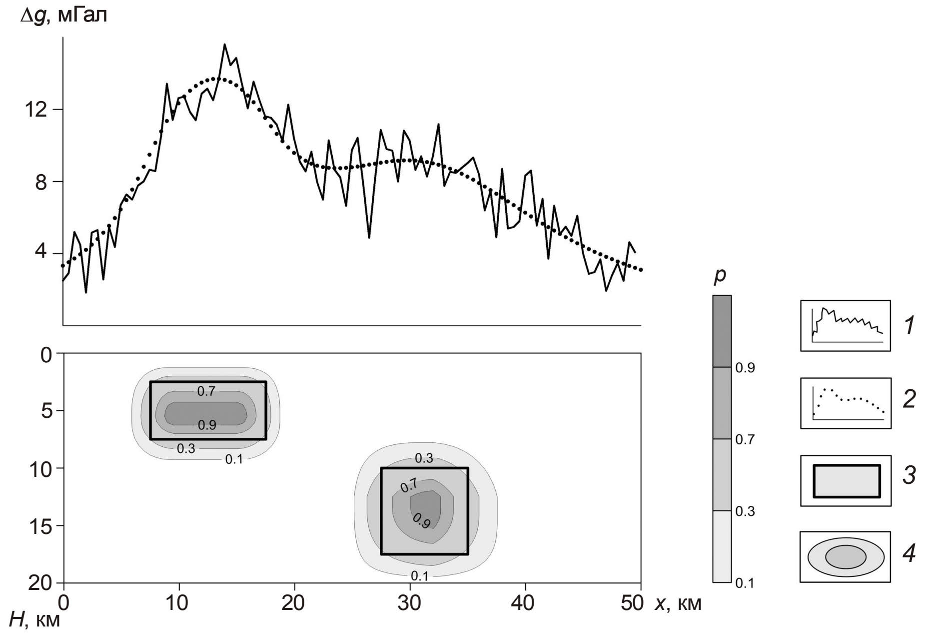

Рис. 2. Оценка вероятности обнаружения двух прямоугольных призм по гравитационному полю с помехой

1 – поле Δg, осложненное помехой с нормой ε^T=1.2 мГал; *2* – поле Δg без помех; *3* – границы аномалиеобразующих тел; *4* – изолинии вероятности $p_{k,\alpha}$ = 0.1, 0.3, 0.7 и 0.9

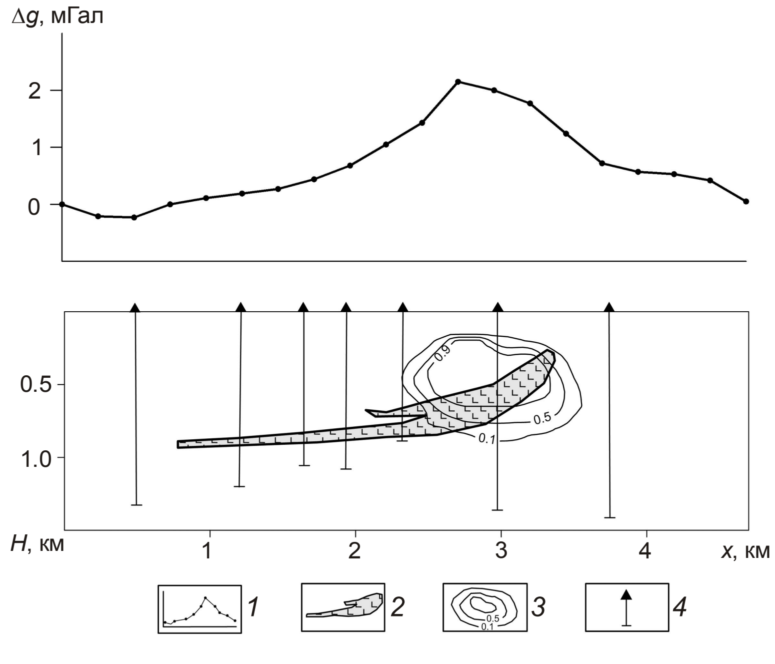

Рис. 3. Месторождения платино-медно-никелевых руд Норильск-1. Результаты интерпретации гравитационного поля

1 – наблюденное поле Δg; *2* – рудоносная интрузия; *3* – изолинии вероятности $p_{k,\alpha}$ = 0.1, 0.5, 0.9 (N = 396); *4* – буровые скважины

Смещение изолиний в верхнюю часть разреза (относительно фактического положения рудоносной интрузии) свидетельствует о некоторой неадекватности модели, связанной с неучтенным ореолом уплотнения вмещающих эффузивных пород, что весьма характерно для надинтрузивных зон месторождений Норильского рудного района [*Долгаль*, 1993].

Выводы

Авторы убеждены, что теория интерпретации гравитационных (и магнитных) аномалий стоит на пороге новой парадигмы, характеризуемой отходом от традиционных представлений результатов количественной интерпретации данных как отдельного ("оптимального") решения обратной задачи. Для подобной смены парадигм уже сегодня имеются достаточные теоретические наработки, реальное воплощение которых вполне обеспечивается мощностью современных вычислительных средств.

Принципиальный прорыв в вопросе наиболее полного извлечения достоверной информации из результатов измерений гравитационных и магнитных полей удастся достичь лишь тогда, когда построение отдельных приемлемых вариантов интерпретации станет элементом более общей технологии, реализующей концепцию гарантированного подхода и заключающейся в поисках геологически содержательных инвариантов на множестве допустимых решений обратной задачи. Монтажным алгоритмам может быть отведена основная роль в реализации этой глобальной проблемы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-05-00414-а) и программы исследований ОНЗ РАН (проект 12-Т-5-1012).

Литература

Айзерман М.А., Малишевский А.В. Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов // Автоматика и телемеханика. 1981. № 2. С.65–83.

Балк П.И. О надежности результатов количественной интерпретации гравитационных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 6. С. 43–57.

Балк П.И. Использование априорной информации о топологических особенностях источников поля при решении обратной задачи гравиметрии // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309, № 5. С.1082–1084.

Балк П.И. Проблема параметризации и достоверности решения нелинейной обратной задачи гравиметрии // Физика Земли. 1997. № 10. С.14–32.

Балк П.И. Столкновение геофизических и математических интересов – главный источник противоречий в современной теории интерпретации потенциальных полей // Геофизический журнал. 2000. Т. 22, № 4. С.3–20.

Балк П.И. Столкновение геофизических и математических интересов – основной источник противоречий в современной теории интерпретации потенциальных полей // Физика Земли. 2001. № 3. С.85–96.

Балк П.И. Математический формализм и невостребованные идеи в теории интерпретации потенциальных полей // Геофизика. 2002. № 2. С.41–46.

Балк П.И. О принципиальных недостатках общепринятых форм представления результатов математической интерпретации потенциальных полей // Геофизический журнал. 2004. Т. 26, № 5. С.124–132.

Балк П.И., Долгаль А.С. Детерминированный подход к проблеме достоверности результатов интерпретации гравиметрических данных // Докл. РАН. 2010. Т. 431, № 1. С.334–338.

Балк П.И., Долгаль А.С. Синтез преимуществ функционально-аналитического и вероятностно-статистического подходов в смешанных алгоритмах решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии // Геоинформатика. 2011. № 1. С.33–42.

Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Конечноэлементные технологии интерпретации данных гравиразведки. Монтажный метод // Геофизические исследования. 2012. № 3. С.18–34.

Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург, 1993. 262 с.

Васин В.В., Пересторонина Г.Я., Пруткин И.Л., Тимерханова Л.Ю. Решение трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии для трехслойной среды // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 2. С.69–76.

Долгаль А.С. Решение обратной задачи гравиразведки при поисках медно-никелевых руд // Геофизический журнал. 1993. № 6. С.83–88.

Долгаль А.С., Шархимуллин А.Ф. Определения параметров одиночных геоплотностных неоднородностей с использованием функции локализации // Геодинамика. Глубинное строение. Тепловое поле Земли. Интерпретация геофизических полей. Шестые научные чтения памяти Ю.П. Булашевича. 2011. С.121–124.

Кауфман А.А., Хансен Р. Принципы метода гравиметрии: Пер. с англ. Тверь: АИС, 2011. 376 с.

Рокитянский И.И. Моделирование в геоэлектрике. 1. Неоднозначность // Геофизический журнал. 1985. Т. 7, № 1. С.15–24.

Цыпкин Я.З. Оптимальность в задачах и методах современной теории управления // Вестник АН СССР. 1982. № 9. С.116–121.

Сведения об авторах

БАЛК Петр Исаакович – доктор физико-математических наук. BRD, Blasewitser Ring 46, 13593, Berlin. Тел.: (4930) 364-95-15. E-mail: tatianabalk@mail.ru

ДОЛГАЛЬ Александр Сергеевич – доктор физико-математических наук, Горный институт Уральского отделения РАН. 620007, г. Пермь, ул. Сибирская, 78-А. Тел.: (342) 216-10-08. E-mail: dolgal@mi-perm.ru

БАЛК Татьяна Васильевна – кандидат физико-математических наук. BRD, Blasewitser Ring 46, 13593, Berlin. Тел.: (4930) 364-95-15. E-mail: tatianabalk@mail.ru

ХРИСТЕНКО Людмила Анатольевна – кандидат геолого-минералогических наук, Горный институт Уральского отделения РАН. 620007, г. Пермь, ул. Сибирская, 78-А. Тел.: (342) 216-66-08. E-mail: liudmila.hristenko@yandex.ru

FINITE-ELEMENT TECHNOLOGIES OF INTERPRETATION OF GRAVITY DATA. GUARANTEED APPROACH

P.I. Balk[1], A.S. Dolgal'[2], T.V. Balk[1], L.A.Christenko[2]

[1] *Berlin, Germany*
[2] *Mining Institute Ural Branch Russian Academy of Sciences, Perm, Russia*

Abstract. The main disadvantages of traditional forms for the representation of results of interpretation of gravity anomalies in terms of single allowable (optimal) solution of inverse problem are emphasized. Authors suggest that the most total extraction of reliable information from observed gravity data is impossible without the construction and purposeful analysis of some representational subset of possible variants of interpretation. We entrust to guaranteed approach the solution of this problem. Guaranteed approach was very useful in different areas of applied mathematics but it hasn't high profile in geophysical research.

The most general description of the guaranteed approach of inverse problem solution as compared with already published specifications is given here. Authors also give the method of structuring of geological medium as the development this conception. Assembly algorithms are offered as main tools for realization of guaranteed approach. The efficacy of complex "guaranteed approach – assembly method" is illustrated on practical examples.

Keywords: gravitational exploration, guaranteed approach, assembly method, modeling, algorithm, geological objects.