

УДК 550.831

## КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ ГРАВИРАЗВЕДКИ. МОНТАЖНЫЙ МЕТОД\*

© 2012 г. П.И. Балк<sup>1</sup>, А.С. Долгаль<sup>2</sup>, Т.В. Балк<sup>1</sup>, Л.А. Христенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> г. Берлин, Германия

<sup>2</sup> Горный институт Уральского отделения РАН, г. Пермь, Россия

Подведены итоги основных этапов развития конечноэлементного подхода к количественной интерпретации данных гравirazведки. Среди известных разработок авторы выделяют монтажные технологии решения обратных задач как наиболее подготовленные к одновременному учету разнородных априорных физико-геологических данных о моделируемых объектах и имеющейся дополнительной информации о свойствах помех в измерениях поля. Подчеркивается, что по ряду основных признаков монтажные алгоритмы можно рассматривать как принципиально новую генерацию методов минимизации, используемых в геофизике при изучении формы и пространственного положения источников поля.

Дается наиболее общее по сравнению с ранее известными описание монтажного подхода. Приводятся различные итерационные схемы поиска допустимых решений обратной задачи гравirazведки и описание конкретных приемов учета априорных ограничений на параметры модели источников поля.

Впервые исследуется возможность перенесения идей монтажного подхода на класс смешанных обратных задач при интервальном задании значений плотности горных пород, слагающих изучаемые геологические объекты. Приводятся модельные и практические примеры трехмерного моделирования источников гравитационного поля с использованием монтажных алгоритмов.

**Ключевые слова:** гравirazведка, конечноэлементный подход, монтажный метод, моделирование, алгоритм, геологические объекты.

### Введение

Метод конечных элементов – численный метод, используемый для решения широкого круга задач механики твердого тела, теплообмена, гидродинамики и др. Так, этот метод является важнейшим инструментом построения геоэлектрических моделей сложных геологических сред по измерениям нестационарных электромагнитных полей [Тригубович, Персова, Соловейчик, 2009]. Метод не имеет строгих очертаний, правильнее было бы говорить о группе методов, объединенных идеей приближенной замены континуальной задачи математической физики на конечномерную. Для гравirazведки, где измерения поля дискретны и любые континуальные постановки обратных задач заведомо нарушают принцип информационной обеспеченности, идея дискретизации плотностной среды, при которой возмущающие тела представлены в виде объединения определенного числа простых геометрических фигур (элементов) и оценивается лишь конечное число параметров модели, выглядит вполне логично.

В теории и практике интерпретации гравитационных аномалий можно выделить несколько этапов наиболее пристального внимания специалистов к сеточным моделям геоплотностной среды. Начало исследованиям в этом направлении положили работы А.А. Юнькова и Е.Г. Булаха [Юньков, Булах, 1958]. В конце 1960-х – начале 1970-х гг.

---

\* Данная статья – первая из двух, подготовленных авторами к 80-летию академика В.Н. Страхова; вторая статья будет опубликована в следующем номере.

по мере того, как все большее число геофизиков-теоретиков овладевало методами решения условно-экстремальных задач, появился ряд работ, объединенных идеей сращения конечноэлементного описания среды и методов линейного программирования [Ломтадзе, 1968; Дядюра, Шалаев, 1968; Перфильев, 1972; Шалаев, 1972] и др. Немаловажную роль в становлении нового направления, безусловно, сыграла работа академика Л.В. Канторовича [1962] по применению линейного программирования для получения двухсторонних оценок избыточной массы в рамках модели источников гравитационного поля в виде пакета однородных призм. Параллельно с разработкой методов решения линейных обратных задач для оценки значений эффективной плотности в каждом элементе (объеме) сеточной структуры среды предпринимались попытки модификации полученных методов с целью решения сугубо нелинейной обратной задачи локализации источников поля. Надежды возлагались на различного рода “штрафные слагаемые” в минимизируемом функционале, позволяющие находить близкие к кусочно-постоянным распределения плотностей, с помощью которых нетрудно было бы оконтурить границы аномалиеобразующих тел. Отсутствие значимых результатов (проблемы возникли уже на стадии формализации условия связности носителя масс), а также ощущение тупиковости выбранного пути, с одной стороны, и пришедшийся на эти же годы пик всеобщего увлечения методами решения некорректно поставленных задач в функциональных пространствах, с другой, на какое-то время привели к свертыванию работ по созданию численных алгоритмов решения нелинейных обратных задач на базе дискретных описаний плотностной среды.

Универсальность и эффективность – два свойства, плохо уживающиеся друг с другом. В большинстве серьезных работ, посвященных общим методам решения условно-экстремальных задач, неизменно подчеркивается, что математическая состоятельность метода не является гарантией успеха его применения на практике. Решающее значение здесь приобретает эвристика и учет особенностей конкретной задачи, а наиболее эффективными, скорее всего, могут оказаться какие-то частные, узконаправленные методы, не претендующие на общность [Бахвалов, Жданов, Кобельков, 2006]. В середине 1970-х гг. с небольшим разрывом во времени вышли работы А.В. Овчаренко [1975] и В.Н. Страхова в соавторстве с М.И. Лапиной [Страхов, Лапина, 1976], в которых предлагался принципиально новый, не опирающийся на классические методы минимизации геофизически содержательный подход к решению нелинейных обратных задач в сеточных классах источников поля, названный В.Н. Страховым монтажным. Уже при беглом знакомстве с ним становится ясно, что многие типы априорных ограничений, проблемы с формализацией которых возникали прежде, при этом подходе учесть несложно, а другие (например, требование связности носителя) выполняются автоматически. Очевидные достоинства нового подхода в вопросе учета разнородной априорной информации не могли остаться незамеченными; идеи, разрабатываемые в нем, легли в основу ряда алгоритмов, предложенных в работах других авторов [Булах, Корчагин, 1978; Завойский, Неисжал, 1979; Schäfer, 1990; Балк, Шефер, 1992; Schäfer, Balk, 1993; Долгаль, 1993]. Несколько позже был опубликован цикл работ П.И. Балка, частично в соавторстве с Т.В. Балк [Балк, 1993, 1997; Балк, Балк, 1994, 1995, 1996], в которых идеи монтажного подхода были распространены на некоторые новые постановки обратных задач, изучены возможности использования различных типов априорной информации, прежде всего, топологического характера. Если в постановках В.Н. Страхова и А.В. Овчаренко сеточное разбиение геологического пространства присутствует явно и априори фиксировано, то в некоторых появившихся позже работах конечноэлементное представление среды явным образом не вводится, хотя скрытно присутствует, а его структура может пересматриваться от итерации к итерации (наиболее яркий пример – некоторые методы решения обратной задачи для контактных по-

верхностей [Пруткин, 1986; Балк и др., 1988]). Однако главное, что при этом объединяет все сеточные алгоритмы, созданные начиная со второй половины 1970-х годов, и что их кардинально отличает от первых конечноэлементных алгоритмов, состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса в текущее приближение к решению обратной задачи вносятся лишь локальные (“местные”) изменения. Благодаря этому параметрическая размерность задачи оптимизации, возникающей на каждом шаге итерационного монтажного процесса, невелика и не совпадает (как это обычно бывает) с параметрической размерностью самой модели источников поля, которая устанавливается лишь на выходе из итерационного процесса. Такого рода структурирование итерационного процесса позволяет снять проблему одновременного учета разнородной априорной информации.

В настоящее время монтажный подход, образно выражаясь, переживает ренессанс. Заложено в его алгоритмы соотношение между объемами вычислений, приходящимися на простой перебор, с одной стороны, и на реализацию простейших процедур минимизации, с другой, при современной мощности вычислительных средств оказалось весьма удачным. Появилась реальная возможность решения сложных трехмерных обратных задач, возможность создания более передовых технологий количественной интерпретации гравитационных аномалий (их основным элементом могут стать монтажные алгоритмы построения единичных решений обратной задачи), базирующихся на идее построения некоторого репрезентативного подмножества допустимых вариантов интерпретации, совместный анализ которых позволяет выделить из совокупных данных некоторый объем достоверной (при условии адекватности всех предпосылок) информации об изучаемом объекте и, тем самым, объективно оценить фактические возможности геофизического метода в конкретных условиях интерпретации. Более 30 лет назад эта идея была оформлена одним из авторов статьи в виде гарантированного подхода к обратным задачам гравиразведки [Балк, 1980], суть и достоинства которого предполагается обсудить в следующем номере журнала в контексте тех результатов, изложенных в данной статье.

По мнению авторов, пришло время собрать воедино известные наработки, дать современную трактовку монтажного подхода, привести наиболее полное описание схемы построения монтажных алгоритмов решения обратной задачи гравиразведки и очертить область их применимости. Отдельные результаты, приведенные в данной статье, являются оригинальными и не были отражены в предшествующих публикациях.

### **Монтажные алгоритмы решения обратной задачи гравиразведки**

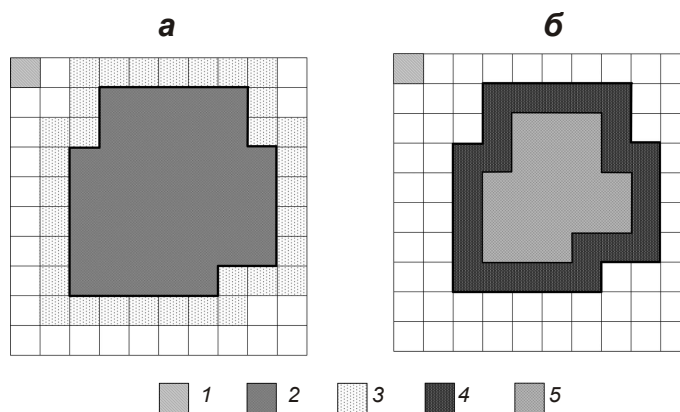
*Основная терминология и обозначения.* Монтажный подход, безусловно, является наиболее известной и “продвинутой” реализацией идеи метода конечных элементов в проблематике нелинейных обратных задач гравиразведки рудного типа. Сущность его составляет неразрывное единство конечноэлементного представления ограниченной части пространства  $S \in \mathbf{R}^3$ , заведомо содержащей аномалиеобразующие геологические тела  $S_k^T$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ), известной постоянной избыточной плотности  $\delta_k^T > 0$ , и специального, геофизически обоснованного способа построения приближенного решения обратной задачи  $\Omega^* = \{\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_m^*\}$ , когда (парциальные) аппроксимации  $\Omega_k^*$  тел  $S_k^T$  собираются (монтируются) из некоторого числа конечных элементов  $\omega_\alpha$ , участвующих в аппроксимации области  $S$ . В качестве конечных элементов  $\omega_\alpha$  могут выступать простейшие геометрические фигуры, образующие замощение  $\{\omega_\alpha\}$  области  $S$ . Для практики наибольший интерес представляют регулярные замощения, где все конечные элементы  $\omega_\alpha$  конгруэнтны и каждая точка  $X$  области  $S$  принадлежит хотя бы одному эле-

менту замощения  $\omega_\alpha$  (если точка  $X$  принадлежит нескольким элементам  $\omega_\alpha$ , то она лежит на их границах). Среди простейших регулярных замощений (фактически лишь они и используются сегодня в известных компьютерных программах) отметим замощение кубами (в трехмерных монтажных технологиях решения обратной задачи грави- и магнитометрии) и замощения квадратами и правильными шестиугольниками (в случае плоской обратной задачи). Элементы регулярного замощения  $\omega_\alpha$  допускают естественную нумерацию (в трехмерном случае  $\alpha$  – трехкомпонентный вектор  $\alpha=(i,j,k)$ , в плоском – двухкомпонентный вектор  $\alpha=(i,k)$ ), а их пространственное положение однозначно определяется по номеру  $\alpha$  и координатам центра тяжести какого-то одного из элементов замощения (центра замощения). Независимо от характера замощения компьютерная программа работает не с самими элементами  $\omega_\alpha$  (как геометрическими фигурами), а с их номерами  $\alpha$ , что позволяет значительно ускорить расчеты благодаря использованию целочисленной арифметики.

Модельный класс  $A$  всевозможных комбинаций попарно непересекающихся множеств, представляющих собой односвязные объединения любого числа элементов замощения  $\omega_\alpha$ , принято называть конфигурационным, а сами объединения – конфигурациями. Здесь связность – это свойство, не допускающее разделение тела на два и более тел, попарно не граничащих между собой, а свойство односвязности предполагает отсутствие “пустот” (“дыр”) внутри тела. Распределение масс с плотностями  $\delta_k^T$  по носителям  $\Omega_k^*$  принято называть конфигурационным. Основные операции в конфигурационном классе  $A$  выполняются с использованием понятий ядра  $Я[\Omega]$ , оболочки  $О[\Omega]$ , внутреннего ядра  $Я_0[\Omega]$  и границы  $\Gamma[\Omega]$  конфигурации  $\Omega$ :  $Я[\Omega]$  – множество элементов  $\omega_\alpha \subset \Omega$ , из которых составлена конфигурация  $\Omega$ ;  $О[\Omega]$  – множество всех элементов замощения, не принадлежащих ядру, но граничащих с его элементами;  $Я_0[\Omega]$  – множество элементов  $\omega_\alpha \in Я[\Omega]$ , чья оболочка  $О[\omega_\alpha] \subset Я[\Omega]$ ;  $\Gamma[\Omega]$  – множество элементов  $\omega_\alpha \in Я[\Omega]$ , не вошедших в  $Я_0[\Omega]$  (рис. 1).

**Рис. 1.** Графическая иллюстрация основных понятий, используемых в монтажном методе: оболочки  $О[\Omega]$  и ядра  $Я[\Omega]$  (а); границы  $\Gamma[\Omega]$  и внутренности  $В[\Omega]$  (б) конфигурации

$l$  – отдельный элемент замощения  $\omega_\alpha$ ; элементы замощения  $\omega_\alpha$ , принадлежащие: 2 – ядру  $Я[\Omega]$ , 3 – оболочке  $О[\Omega]$ , 4 – границе  $\Gamma[\Omega]$ , 5 – внутренности  $В[\Omega]$  двухмерной конфигурации  $\Omega$



На основе монтажного подхода может быть создано целое семейство итерационных алгоритмов, различающихся структурой итерационного шага. Некоторые из них будут представлены в статье. Однако в любом случае их реализации всегда предшествует выбор интерпретатором конкретного замощения  $\{\omega_\alpha\}$ . Проблема выбора замощения сродни традиционной, трудно формализуемой проблеме выбора параметрической размерности модели источников поля и также требует компромиссного решения. С одной стороны, увеличение размеров элементов замощения  $\omega_\alpha$  снижает вычислительные

затраты на поиск допустимого решения  $\Omega^*$  и, в некоторой степени, повышает его устойчивость (в этом смысле определенный интерес представляют нерегулярные замощения, такие, например, где средние значения поля всех элементов  $\omega_\alpha$  единичной плотности равны между собой). С другой стороны, степень дискретизации области  $S$  геологического пространства должна быть такой, чтобы при оценке допустимого значения невязки подбора поправкой за неадекватность конечноэлементного представления источников поля можно было бы пренебречь. К тому же, критерии гладкости приближенного решения, используемые для отбраковки геологически малосодержательных вариантов интерпретации, как правило, срабатывают лишь в определенном, хотя и достаточно широком диапазоне размеров элементов замощения  $\omega_\alpha$ . И, наконец, размеры элементов  $\omega_\alpha$  должны быть малы настолько, чтобы спорный случай, при котором телу  $S_k^T$  принадлежит лишь часть элемента, можно было бы по желанию трактовать как  $\omega_\alpha \subset S_k^T$ , либо как  $\omega_\alpha \not\subset S_k^T$ .

Опыт показывает, что общие соображения и интуиция интерпретатора вполне достаточны для выбора приемлемого замощения (к тому же, в резерве всегда остается имитационное моделирование).

*Общая схема итерационных монтажных алгоритмов.* В общем виде монтажный принцип построения (допустимого) решения  $\Omega^* = (\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_m^*)$  обратной задачи в выбранном модельном классе  $A$  состоит в том, чтобы отправляясь от некоторого начального приближения  $\tilde{\Omega}^{(0)} = (\tilde{\Omega}_1^{(0)}, \tilde{\Omega}_2^{(0)}, \dots, \tilde{\Omega}_m^{(0)})$  к неизвестному (многосвязному при  $m \geq 2$ ) носителю  $S^T = (S_1^T, S_2^T, \dots, S_m^T)$  выстроить конечную последовательность  $\tilde{\Omega}^{(1)}, \tilde{\Omega}^{(2)}, \dots, \tilde{\Omega}^{(L)}$ ,  $\tilde{\Omega}^{(j)} = (\tilde{\Omega}_1^{(j)}, \tilde{\Omega}_2^{(j)}, \dots, \tilde{\Omega}_m^{(j)})$ ,  $\tilde{\Omega}^{(j)} \in A$ , такую, при которой конфигурационное распределение  $\Omega^* = \tilde{\Omega}^{(L)}$  удовлетворяет всем априорным предпосылкам о геометрии носителей  $S_k^T$  и их положении в пространстве, а распределение масс в объемах  $\Omega_k^* = \Omega_k^{(L)}$  с известными плотностями  $\delta_k^T$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , обеспечивает приемлемую невязку подбора значений  $\Delta \tilde{g}_i$  гравитационного поля, измеренного в точках произвольного рельефа земной поверхности. Выбор наилучшего варианта перехода от  $(j-1)$ -го приближения  $\tilde{\Omega}^{(j-1)}$  к  $j$ -му  $\tilde{\Omega}^{(j)}$  осуществляется из множества  $A_j$  пробных вариантов, тогда как на протяжении всего итерационного процесса плотности масс, заполняющих парциальные носители  $\tilde{\Omega}_k^{(j)}$ , считаются свободными (оптимизируемыми) параметрами. Структура и мощность множества  $A_j$  предопределяется структурой предшествующего приближения  $\tilde{\Omega}^{(j-1)}$  и принятой структурой итерационного шага алгоритма. В основе монтажных алгоритмов лежит принцип наследования текущим приближением  $\tilde{\Omega}^{(j)}$  свойств предшествующего приближения  $\tilde{\Omega}^{(j-1)}$ , предписанных априорной информацией. С этой целью из множества  $A_j$  предварительно отбирается подмножество  $A_j^0$  допустимых к сравнению вариантов  $\Omega^{(r)} = (\Omega_1^{(r)}, \Omega_2^{(r)}, \dots, \Omega_m^{(r)})$ , удовлетворяющих ограничениям на связность и односвязность парциальных носителей  $S_k^T$  и все дальнейшие построения фактически ведутся с этим подмножеством.

В алгоритме А.В. Овчаренко [1975] избыточная масса источника аномалии считается априори известной, а плотность исключается из рассмотрения. В работе В.Н. Страхова и М.И. Лапиной [1976] также рассматривается случай  $m=1$ , но предварительная оценка избыточной массы не предусматривается (в принципе ничего не меня-

ется, если носитель  $S^T$  является многосвязным множеством, но плотность масс всюду одна и та же).

Важным этапом в развитии монтажного подхода стало приложение алгоритма из [Страхов, Лапина, 1976] к случаю произвольного числа  $m$  связанных однородных геологических тел различной плотности [Балк, Балк, 1994]. В этом случае в рассмотрение необходимо ввести вектор  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$  плотностей масс, заполняющих пробные носители  $\Omega_k^{(r)}$ , и ограничить свободу выбора значений его отдельных компонент  $\delta_k$  достаточно гладкими непрерывными функциями  $\delta_k = \varphi_k(\delta_1)$ ,  $k=2, 3, \dots, m$ , обеспечивающими одновременный выход подбираемых плотностей на истинные значения  $\delta_k^T$ :  $\delta_k \rightarrow \delta_k^T$  при  $\delta_1 \rightarrow \delta_1^T$ . Опробованы и рекомендованы две следующие зависимости: мультипликативная –  $\delta_k = \delta_1 \delta_k^T (\delta_1^T)^{-1}$  и аддитивная –  $\delta_k = \delta_1 + (\delta_k^T - \delta_1^T)$ . Теперь для каждого пробного варианта  $r$  выбора очередного приближения  $\Omega^{(r)} \in A_j^0$  вычисляются (при условиях  $\delta_k = \varphi_k(\delta_1)$ ) значения плотностей  $\delta_k = \delta_k^{(r)}$  масс, заполняющих носители  $\Omega_k^{(r)}$ , при которых достигается наименьшее значение невязки. Та из допустимых многосвязных конфигураций  $\Omega^{(r)}$ , на которой достигнуто наименьшее значение невязки, принимается за текущее  $j$ -е приближение  $\tilde{\Omega}^{(j)}$ , а соответствующий вектор  $\delta^{(r)} = (\delta_1^{(r)}, \delta_2^{(r)}, \dots, \delta_m^{(r)})$  плотностей, обеспечивший этот минимум, – за вектор  $\tilde{\delta}^{(j)} = (\tilde{\delta}_1^{(j)}, \tilde{\delta}_2^{(j)}, \dots, \tilde{\delta}_m^{(j)})$ .

Ясно, что рассмотрение всех пробных вариантов может вестись одновременно, независимо друг от друга, а это значит, что время, необходимое для компьютерной реализации алгоритма, можно кардинально сократить за счет распараллеливания алгоритма на многопроцессорных вычислительных системах. Заметное снижение времени счета (теперь уже благодаря уменьшению общего объема вычислений) может быть достигнуто, если воспользоваться приближенными формулами вычисления поля элементов  $\omega_\alpha$ , расположенных “вдали” от дневной поверхности (например, поле куба заменить полем точечной массы).

Перевод известных параметров  $\delta_k^T$  в число свободных (оптимизируемых) – одна из основных особенностей монтажных алгоритмов, не свойственная другим методам решения обратной задачи гравиметрии. С позиций физики это вполне оправдано: компенсируя различие в объемах  $\Omega_k^{(r)}$  и  $S_k^T$  значениями плотностей (по сути – сохраняя истинное значение гармонического момента масс нулевого порядка), можно уже на первых итерациях выйти на сравнительно небольшое значение невязки. Это, в свою очередь, позволяет монтажным алгоритмам отказаться от стандартного требования задания начального приближения, близкого по полю к изучаемому распределению масс. Критерием завершения итерационного процесса является выход на некоторой итерации  $j=L$  значения  $\tilde{\delta}_1^{(L)}$  в достаточно малую окрестность истинного значения плотности  $\delta_1^T$  (непрерывность и гладкость зависимостей  $\varphi_k$  обеспечивает при этом выход и остальных плотностей  $\tilde{\delta}_k^{(L)}$  в малые окрестности значений  $\delta_k^T$ ). Таким образом, при любом числе  $m$  геологических тел на каждом пробном шаге приходится минимизировать функцию невязки лишь одной переменной ( $\delta_1$ ), причем в случае среднеквадратической невязки задача сводится к решению линейного уравнения. Гарантия выхода значения  $\tilde{\delta}_1^{(j)}$  в малую окрестность значения  $\delta_1^T$  на некотором шаге  $L$  должна следовать из геофизического смысла и обеспечиваться структурой итерационного шага алгоритма (на

практике итерационный процесс обрывается на шаге  $j=L$ , если на числовой оси значения  $\tilde{\delta}_1^{(L)}$  и  $\tilde{\delta}_1^{(L-1)}$  оказались по разные стороны от  $\delta_1^T$ .

Если на последней итерации  $j=L$  значение невязки не превысило максимально допустимое  $\varepsilon$ , то конфигурационное распределение  $\tilde{\Omega}^{(L)}$  принимается за приближенное решение  $\Omega^*$  (нелинейной) обратной задачи.

В отношении общей схемы итерационных монтажных алгоритмов остается сказать, что начальное приближение  $\tilde{\Omega}^{(0)}$  может быть обусловлено априорной информацией (данными бурения, например), либо назначено интерпретатором, на основании каких-либо эвристических соображений. Если выбрана схема, по которой для приближений  $\tilde{\Omega}^{(j-1)}$  и  $\tilde{\Omega}^{(j)}$  выполняются включения  $\tilde{\Omega}_k^{(j-1)} \subseteq \tilde{\Omega}_k^{(j)}$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , то в последнем случае рекомендуется ограничиться одним элементом замощения (парциальным центром кристаллизации) на каждое из  $m$  тел –  $\tilde{\Omega}_k^{(0)} = \omega_{\alpha(k)}$ .

Необходимо также отметить, что в монтажных алгоритмах, в чем также проявляется их специфика, параметрическая размерность каждого текущего приближения, которую здесь можно определить по-разному (например, как число элементов замощения в ядре текущего приближения  $\tilde{\Omega}^{(j)}$ ), не является фиксированной, а изменяется от итерации к итерации по мере вовлечения в итерационный процесс тех элементов замощения области  $S$ , без которых невозможно обойтись при построении очередного приближения к решению обратной задачи.

Далее следует конкретизировать структуру итерационного шага алгоритма и описать способы учета априорных ограничений.

*Выбор структуры итерационного шага.* В принципе, итерационный шаг  $j$  монтажного алгоритма может представлять собой процедуру обмена произвольным числом элементов замощения  $\omega_\alpha$  с каждой стороны между ядром  $Я[\tilde{\Omega}^{(j-1)}]$  и оболочкой  $O[\tilde{\Omega}^{(j-1)}]$  предшествующего приближения  $\tilde{\Omega}^{(j-1)}$ . Определенные теоретические разработки на этот счет имеются [Балк, Балк, 2000], однако трудоемкость вычислений, обусловленная необходимостью применения целочисленного программирования, оказалась неоправданной. В настоящее время опробованы и зарекомендовали себя три версии монтажных алгоритмов, использующие разные модификации итерационного шага: метод регулируемой направленной кристаллизации (МНРК), метод регулируемой направленной раскристаллизации (МНРП) и метод регулируемой направленной перекристаллизации (МРНП).

В современной трактовке метода РНК очередное приближение  $\tilde{\Omega}^{(j)}$  образуется путем наращивания ядра одного из парциальных носителей (пусть  $t$  его номер), входящих в предшествующее приближение  $\tilde{\Omega}^{(j-1)}$ , на один элемент замощения  $\omega_\alpha$ , взятый из множества  $O[\tilde{\Omega}_t^{(j-1)}]$ . Таким образом,  $\tilde{\Omega}_k^{(j)} = \tilde{\Omega}_k^{(j-1)}$  для всех  $k \neq t$  и  $\tilde{\Omega}_t^{(j)} = \tilde{\Omega}_t^{(j-1)} \cup \omega_\alpha$ . Номер  $t$  определяется в ходе сравнения невязок, достигнутых во всех опробованных вариантах наращивания каждого из ядер  $Я[\tilde{\Omega}_k^{(j-1)}]$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , на один элемент замощения, взятый из оболочки  $O[\tilde{\Omega}_k^{(j-1)}]$ . Заметим, что если конфигурация  $\tilde{\Omega}_t^{(j-1)}$  является связной, то конфигурация  $\tilde{\Omega}_t^{(j)}$  автоматически это свойство наследует, что нельзя сказать об односвязности; все пробные варианты, нарушающие условие наследования свойства односвязности отбраковываются еще на стадии формирования множества  $A_j^0$  вариантов, допускаемых к сравнению. Так как для каждого  $k=1, 2, \dots, m$  парциальные носители  $\tilde{\Omega}_k^{(j)}$  образуют

последовательность вложенных множеств –  $\Omega_k^{(0)} \subseteq \Omega_k^{(1)} \subseteq \dots \subseteq \Omega_k^{(j-1)} \subseteq \Omega_k^{(j)} \dots$ , то из геофизических соображений ясно, что при условии  $\delta_k^T > 0$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ), итерационный процесс обязательно прервется на какой-то итерации  $j=L$ , а критерием прерывания будет выполнение двух неравенств:  $\tilde{\delta}_1^{(L-1)} > \delta_k^T, \tilde{\delta}_1^{(L)} \leq \delta_k^T$ .

Метод РНР, предложенный в работе [Долгалъ, Мичурин, 2010], является зеркальным отображением метода РНК. Здесь каждое очередное приближение  $\tilde{\Omega}^{(j)}$  образуется путем изъятия из границы  $\Gamma[\Omega_t^{(j-1)}]$  какого-то из парциальных носителей  $\Omega_t^{(j-1)}$  опять же одного элемента  $\omega_\alpha$ . Начальное приближение  $\Omega^{(0)} = (\Omega_1^{(0)}, \Omega_2^{(0)}, \dots, \Omega_m^{(0)})$  должно при этом удовлетворять следующему условию: каждый из парциальных носителей  $\Omega_k^{(0)}$  заведомо содержит тело  $S_k^T$ , а любые два из них не имеют общих точек. Если носитель  $\tilde{\Omega}_t^{(j-1)}$  является связным и односвязным, то процедура РНР обеспечивает наследование конфигурацией  $\tilde{\Omega}_t^{(j)} = \tilde{\Omega}_t^{(j-1)} / \omega_\alpha$  свойства односвязности, но допускает нарушение условия связности. Метод РНР может иметь преимущества перед методом РНК при моделировании эшелонированных по вертикали геоплотностных неоднородностей, локализованных в определенных горизонтах геологического разреза. Приуроченность этих неоднородностей к определенным слоям или структурам в методе РНР может быть учтена уже в начальном приближении.

Оба метода – МРНК и МРНР – заведомо не относятся к так называемым “жадным” алгоритмам, когда оптимальность на каждом отдельном шаге обеспечивает оптимальность итогового решения задачи [Кормен, Лейзерсон, Ривест, 2005]. В случае МРНК элемент замощения  $\omega_\alpha$ , “неудачно” внесенный в ядро  $\mathcal{Y}[\tilde{\Omega}_t^{(j-1)}]$  на  $j$ -й итерации, автоматически войдет в ядро итогового решения  $\Omega^*$  (аналогичное высказывание, но уже относительно элемента, “неудачно” изъятая из ядра текущего приближения, имеет место в случае метода РНР). Разумеется, если итерационный процесс “вышел” на допустимое решение обратной задачи, то высказанный упрек в адрес методов РНК и РНР можно отозвать. Тем не менее, вопрос о принципиальной возможности корректировки построения, выполненные на промежуточных итерациях, не возникает в третьем из предлагаемых методов – методе РНП. Эта модификация монтажного алгоритма была предложена еще в работе [Балк, 1993], но в то время не могла быть реализована из-за недостаточной мощности компьютеров. Каждую итерацию метода РНП можно представить как сумму взаимосвязанных и согласованных итераций, выполняемых в методах РНК и РНР, когда  $\Omega_t^{(j)} = \Omega_t^{(j-1)} \cup \omega_\alpha, \Omega_q^{(j)} = \Omega_q^{(j-1)} \setminus \omega_\beta, 1 \leq t, q \leq m$  и  $\Omega_k^{(j)} = \Omega_k^{(j-1)}$  для всех  $k \neq t, q$ . Номера  $t, q$  парциальных носителей и номера  $\alpha, \beta$  элементов замощения, участвующих в построении очередного приближения  $\tilde{\Omega}^{(j)}$ , определяются в ходе перебора всевозможных пар ( $k(1)=k(2)$ ),  $1 \leq k(1), k(2) \leq m$  (включая случай  $k(1)=k(2)$ ) и опробования всех допустимых вариантов наращивания ядра  $\mathcal{Y}[\tilde{\Omega}_{k(1)}^{(j-1)}]$  на элемент  $\omega_\alpha \in \mathcal{O}[\tilde{\Omega}_{k(1)}^{(j-1)}]$  и изъятия из ядра  $\mathcal{Y}[\tilde{\Omega}_{k(2)}^{(j-1)}]$  элемента  $\omega_\beta \in \Gamma[\tilde{\Omega}_{k(2)}^{(j-1)}]$ . Ясно, что здесь уже необходим контроль соблюдения условий наследования обоих топологических свойств носителя – связности и односвязности. Понятно также, что на протяжении всего итерационного процесса РНП число элементов замощения, составляющих ядра многосвязных конфигураций  $\tilde{\Omega}^{(j)}$ , остается неизменным (при этом, естественно, допускается “перекачивание” элементов из ядра одного парциального носителя в ядро другого). В этой связи процедуру РНП можно считать самостоятельным методом, если только ее предваряли процедуры РНК или РНР, с помощью которых было построено некоторое



решение  $\Omega^*$ , оказавшееся недопустимым по невязке. В этом случае корректировка конфигурации может быть успешно выполнена с помощью метода РНП.

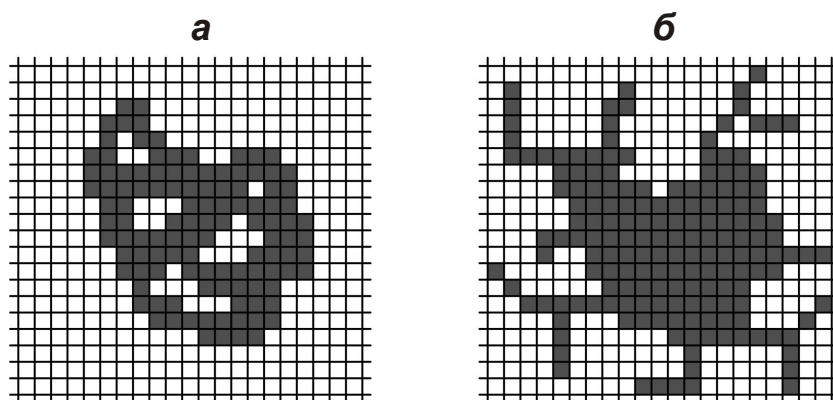
Как показывает опыт, из-за достаточно высокого уровня помех геологического характера обе рассмотренные простейшие реализации монтажного подхода – РНК и РНР – обычно обеспечивают выход на допустимое значение невязки. В более сложных случаях можно порекомендовать гибридные алгоритмы РНК+РНП и РНР+РНП, в которых происходит чередование определенного числа итераций, выполненных по методам РНК или РНР, с некоторым числом итераций по методу РНП.

*Учет априорной информации.* Возможность одновременного учета разнородной априорной информации – основное достоинство монтажных алгоритмов. Прежде всего имеющуюся информацию необходимо перефразировать в терминах структурных элементов модельного класса. Так, если известно, что часть пространства  $S_k^+ \subset \mathbf{R}^3$  является фрагментом геологического тела  $S_k^T$ , а  $S_k^-$  – часть пространства, не имеющая с носителем  $S_k^T$  общих точек, то в рассмотрение вводятся конфигурации  $\Omega_k^+$  и  $\Omega_k^-$ , ядра которых состоят из всех элементов замощения  $\omega_\alpha$ , принадлежащих  $S_k^+$  и  $S_k^-$ , соответственно. Налагается ограничение: в искомом приближенном решении  $\Omega^*$  обратной задачи элементы  $\omega_\alpha \in \mathcal{Y}[\Omega_k^+]$  должны присутствовать в ядрах  $\mathcal{Y}[\Omega_k^*]$  парциальных носителей  $\Omega_k^*$  (в методе РНК это достигается путем включения соответствующих элементов в начальные приближения  $\tilde{\Omega}_k^{(0)}$ ), тогда как включение элементов  $\omega_\alpha \in \mathcal{Y}[\Omega_k^-]$  в ядра текущих приближений  $\tilde{\Omega}_k^{(j)}$  не допускается. Понятно, что зная положение элементов замощения в системе координат, не представляет особого труда следить за соблюдением ограничений на минимально и максимально возможные глубины залегания кровли и подошвы аномалиеобразующих объектов  $S_k^T$ , на их вертикальную и горизонтальную мощности, на предельно (и минимально) допустимые расстояния между отдельными телами. Так, предположение о том, что тела  $S_p^T$  и  $S_q^T$  не граничат друг с другом, сводится к запрету на выполнение неравенства  $\mathcal{O}[\tilde{\Omega}_p^{(j)}] \cap \mathcal{Y}[\tilde{\Omega}_q^{(j)}] \neq \emptyset$  на каждой итерации  $j$ . Не поддающиеся контролю свойства помех геологического характера автоматически снимают проблему учета априорной информации о каких-то “тонких” особенностях ошибок в измерениях поля. Что же касается использования различных функционалов невязки, то поскольку на каждом шаге  $j$  итерационного процесса приходится минимизировать функцию одной лишь переменной ( $\tilde{\delta}_1^{(j)}$ ) и проблема глобального минимума не играет при этом решающей роли, в этом вопросе возможности монтажного метода, по сути, не ограничены.

Несколько особняком стоят ограничения на топологию подбираемых носителей  $\Omega_k^*$  и их отдельных фрагментов. Речь идет о соблюдении условия связности и односвязности парциальных конфигурационных носителей  $\Omega_k^*$ , а также об отсутствии малосодержательных фрагментов границ  $\Gamma[\Omega_k^*]$ . В конфигурационном модельном классе последнее условие можно формализовать с помощью понятия отрезка  $H(\Omega)$  конфигурации  $\Omega$ , как любого связного фрагмента границы  $\Gamma[\Omega]$ , не граничащего с элементами  $\omega_\alpha \in \mathcal{Y}_0[\Omega]$  ее внутреннего ядра, и введения ограничения на максимальное число  $L(\Omega)$  (его логично назвать длиной отрезка) элементов замощения, составляющих любой из отрезков. Во многих случаях условие гладкости границы конфигурационного носителя может заключаться в требовании его безотростковости:

$$\{\omega_\alpha \in \Gamma[\Omega]: O[\omega_\alpha] \cap Я_0[\Omega] \neq \emptyset\} = \emptyset.$$

Введенный в рассмотрение фрагмент  $H(\Omega)$  конфигурации  $\Omega$  является, кстати, удобным объектом для иллюстрации привязанности не только критериев гладкости носителя (об этом говорилось выше), но и самого понятия “отросток”, к структуре выbranного замощения. Так, фрагмент  $\Omega_0 \subset \Omega$ , являющийся по определению отростком при данном замощении, может уже не являться таковым при более детальном (“мелком”) замощении, если из  $\Omega_0$  удастся выделить хотя бы одно подмножество, которое в новом замощении становится элементом внутреннего ядра конфигурации. Можно использовать и другие характеристики гладкости границы носителя, в том числе и интегральные, например, такие, как индекс компактности  $v(\Omega)$  конфигурации – отношение числа элементов замощения, входящих в оболочку  $O[\Omega]$  конфигурации  $\Omega$ , к числу элементов, входящих в ее ядро  $Я[\Omega]$  (рис. 2).



**Рис. 2.** Топологические особенности конфигураций  $\Omega$ : *а* – неодносвязная безодростковая конфигурация,  $v(\Omega)=0.56$ ; *б* – односвязная конфигурация с отростками,  $v(\Omega)=1.02$

В работе [Балк, 1989] предложены быстродействующие компьютерные процедуры для установления связности и односвязности произвольной конфигурации, дополнения ее до минимальной связной односвязной конфигурации (в случае, если установлено, что этими свойствами она не обладает), определения значения  $L(\Omega)$  и дополнения ядра конфигурации  $\Omega$  до ядра конфигурации  $\Omega'$ , чей максимальный отросток имеет длину, не превышающую заданного  $L' < L$ . В качестве примера приведем описание процедуры установления односвязности связной конфигурации  $\Omega$ . Для произвольно взятого элемента  $\omega_\alpha \notin Я[\Omega]$  организуем итерационный процесс  $Я[\Omega^{(i)}] = Я[\Omega^{(i-1)}] \cup (O[\Omega^{(i-1)}] \setminus Я[\Omega])$  ( $i=1, 2, \dots$ ), где ядро конфигурации  $\Omega^{(0)}$  содержит лишь один элемент  $\omega_\alpha$ . Поскольку замощение содержит конечное число элементов, то на некотором шаге  $i=n$  выполнится равенство  $Я[\Omega^{(n)}] = Я[\Omega^{(n-1)}]$ . Если при этом множество  $Я[\Omega^{(n)}] \cup Я[\Omega]$  не совпадет со всем замощением, то конфигурация  $\Omega$  не является односвязной, а элементы замощения, не вошедшие в указанное множество, образуют в этой конфигурации “пустоты”. В случае регулярных замощений можно задать формулы для определения номеров элементов замощения, граничащих с данным элементом, что значительно упрощает не только сами вычисления, но и программирование процедур анализа топологических особенностей текущих конфигурационных приближений.

Наиболее просто перечисленные топологические задачи решаются в монтажных алгоритмах, когда требуется лишь осуществлять контроль за соблюдением условия наследования конфигурациями  $\tilde{\Omega}_k^{(j)}$  свойств, присущих конфигурациям  $\tilde{\Omega}_k^{(j-1)}$  и являю-

щихся отражением априорной информации. Указанный контроль осуществляется с помощью локальных критериев, требующих анализа одной лишь оболочки  $O[\omega_\alpha]$  элемента замощения  $\omega_\alpha$ , подключаемого (в процедуре РНК) к ядру предшествующего приближения, или изымаемого (в процедуре РНР) из него. Так, в отношении плоских замощений  $\{\omega_\alpha\}$  установлено, что конфигурация  $\Omega_1 = \Omega \cup \omega_\alpha$ ,  $\omega_\alpha \in O[\Omega]$ , наследует свойство односвязности конфигурации  $\Omega$ , если множество  $O[\omega_\alpha] \cap Я[\Omega]$  является ядром связной конфигурации.

Невозможность учета всех априорных ограничений в начальном приближении  $\tilde{\Omega}^{(0)}$  (так, нулевое приближение  $\Omega_k^{(0)}$  не будет удовлетворять ограничению на минимально допустимую мощность тела  $S_k^T$ , если ядро  $Я[\Omega_k^{(0)}]$  этого приближения состоит из одного элемента замощения – центра кристаллизации) подводит к идее разбиения итерационного процесса на две стадии. Можно потребовать, чтобы на начальных итерациях в число допустимых к сравнению вариантов перехода к очередному приближению  $\tilde{\Omega}^{(j)}$  входили лишь те, что позволяют приблизиться к выполнению априорных ограничений (формализовать это требование не составляет труда). Можно поступить и так: на первых порах вообще не обращать внимание на априорную информацию, которая не “укладывается” в начальное приближение, и, используя принцип наследования свойств предшествующего приближения, построить допустимое решение, отвечающее оставшейся части априорной информации, а затем с помощью метода РНП подкорректировать это решение уже с учетом ранее исключенных из рассмотрения априорных ограничений. Эта идея анонсируется впервые и, конечно же, требует апробации на модельном и практическом материале.

### Монтажные алгоритмы при неполной информации о плотностях

По своей структуре монтажные алгоритмы – это методы решения нелинейной обратной задачи при заданных плотностях источников поля. Однако горные породы – сложные гетерогенные образования, а сложенные ими геологические тела – неоднородные по физическим характеристикам мультифрактальные объекты [Блох, 2004; Кобрунов, 2008]. Иначе говоря, в реальных условиях интерпретации неопределенность в отношении физических параметров является неотъемлемым атрибутом любой постановки обратной задачи. Постоянную плотность можно рассматривать лишь как некое условное “среднее” (“эффективное”)  $\bar{\delta}$  значение, обуславливающее приблизительно то же самое поле, что и истинное распределение физического параметра. Существование такого “эффективного” параметра обеспечивает присущая обратным задачам эквивалентность, но установить его априори невозможно по ряду причин, в числе которых различие физических свойств горных пород, определенных на образцах и в естественном залегании [Вахромеев, Давыденко, 1987]. Таким образом, отказ от предпосылки об известных точных значениях физических параметров следует рассматривать как обязательный элемент любой постановки обратной задачи, претендующей на адекватность реалиям геофизической практики.

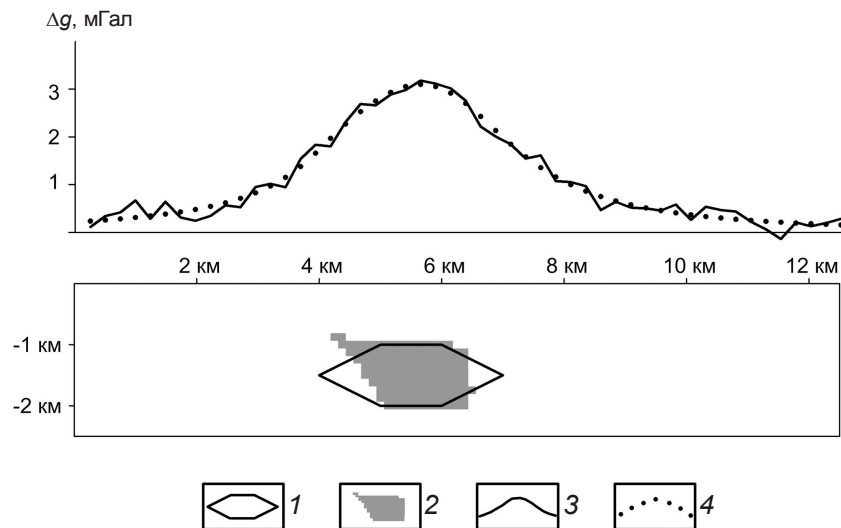
Коль скоро монтажные алгоритмы открыты для использования разнородных априорных ограничений, то возникает естественное желание внести в уже изученные модификации методов РНК, РНР и РНП решения сугубо нелинейных обратных задач еще одно дополнительное ограничение  $\delta'_k \leq \bar{\delta}_k \leq \delta''_k$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , где  $\bar{\delta}_k$  – те самые “эффективные” значения плотностей масс, и, как говорится, не выделять этот случай в “отдельную строку”. Но плотность в монтажных алгоритмах – это “особый” параметр, ко-

торый управляет всем итерационным процессом и присутствует в критерии его завершения. Требуется не просто обеспечить одновременное попадание на некотором шаге  $j$  всех  $m$  значений  $\tilde{\delta}_k^{(j)}$  в интервалы  $[\delta'_k, \delta''_k]$  и удерживать в этих интервалах соответствующие значения плотностей на всех последующих итерациях. Необходимо, чтобы при вхождении плотностей  $\tilde{\delta}_k^{(j)}$  в указанные интервалы не произошло скачкообразного увеличения значения невязки. С этой целью итерационный процесс (для определенности возьмем РНК) разбивается на две стадии [Балк, Долгаль, Христенко; 2011]. На первой из них плотности  $\delta_k$ ,  $k=2, 3, \dots, m$ , связаны с плотностью  $\delta_1$  непрерывными зависимостями  $\delta_k = \varphi_k(\delta_1)$ , подчиняющимися условию  $\varphi_k(\delta_1) \rightarrow \delta''_k$  при  $\delta_1 \rightarrow \delta''_1$ . В частности, можно использовать те же мультипликативные и аддитивные зависимости, которые предлагались ранее в случае известных плотностей  $\delta_k^T$ . Как только на некотором шаге  $j$  плотность  $\tilde{\delta}_1^{(j)}$ , минимизирующая совместно с другими  $m-1$  плотностями  $\tilde{\delta}_k^{(j)}$  текущее значение невязки, удовлетворит неравенству  $\tilde{\delta}_1^{(j)} \leq \delta''_1$ , начинается вторая стадия итерационного процесса, на которой минимизирующие невязку плотности  $\tilde{\delta}_k$  должны выбираться уже из допустимых интервалов  $[\delta'_k, \delta''_k]$ . Для этого достаточно связать плотности  $\delta_k$ ,  $k \geq 2$ , с  $\delta_1$  зависимостями  $\delta_k = \psi_k(\delta_1)$ , удовлетворяющими условиям:  $\psi_k(\delta_1) \rightarrow \delta'_k$  при  $\delta_1 \rightarrow \delta'_1$  (например,  $\delta_k = \delta'_k(\delta'_1)^{-1}\delta_1$ ). Как только на каком-то шаге  $j=L$  достигнуто допустимое значение невязки, процесс прерывается и текущее приближение  $\tilde{\Omega}^{(L)} = (\tilde{\Omega}_1^{(L)}, \tilde{\Omega}_2^{(L)}, \dots, \tilde{\Omega}_m^{(L)})$  есть одно из допустимых решений обратной задачи. Если же достигнута итерация  $j$ , на которой  $\tilde{\delta}_1^{(j)} \leq \delta'_1$ , то следует вывод, что априорные ограничения противоречивы и множество допустимых решений обратной задачи пусто (поскольку проблему глобального минимума многоэкстремальных функций монтажные алгоритмы, как и любые известные методы, не решают, то теоретически возможно, что при иной организации итерационного процесса последний мог бы выйти на более глубокое и теперь уже допустимое значение невязки).

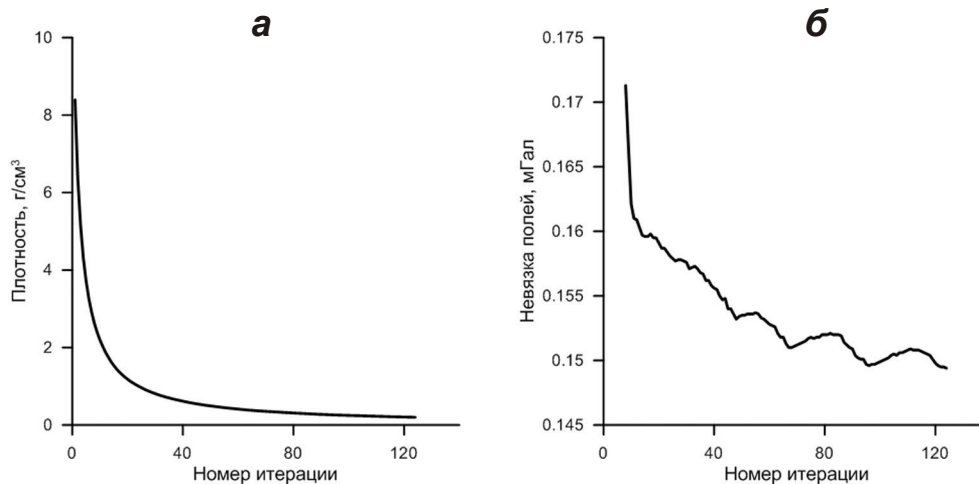
## Примеры

Понятно, что наибольший интерес представляют результаты успешного применения монтажных алгоритмов при изучении сугубо трехмерных геологических тел и структур: гранитоидных батолитов, вулcano-тектонических депрессий, рифогенных образований, соляных куполов, астроблем и т.п. Тем не менее, будет логично начать рассмотрение с более наглядного и легкого для понимания модельного примера решения обратной задачи в двухмерной постановке.

*Пример 1.* Источником гравитационного поля  $\Delta g$ , заданного на профиле с шагом 250 м в 51 точке, является шестиугольная призма  $S^T$  избыточной плотности 0.2 г/см<sup>3</sup>. “Измерения”  $\Delta g_i$  содержат помеху, распределенную по нормальному закону  $N(0, \sigma)$  со значением  $\sigma=0.15$  мГал (около 5% от амплитуды аномалии). Результаты интерпретации представлены на рис. 3, динамику итерационного процесса можно отследить по рис. 4. Немонотонное поведение невязки иллюстрирует возможности монтажных алгоритмов преодолевать локальные экстремумы минимизируемого функционала невязки; это свойство достаточно высоко ценится в теории решения многоэкстремальных задач, на нем основан широко используемый метод, реализующий концепцию “тяжелого шарика” [Евтушенко, 1982].



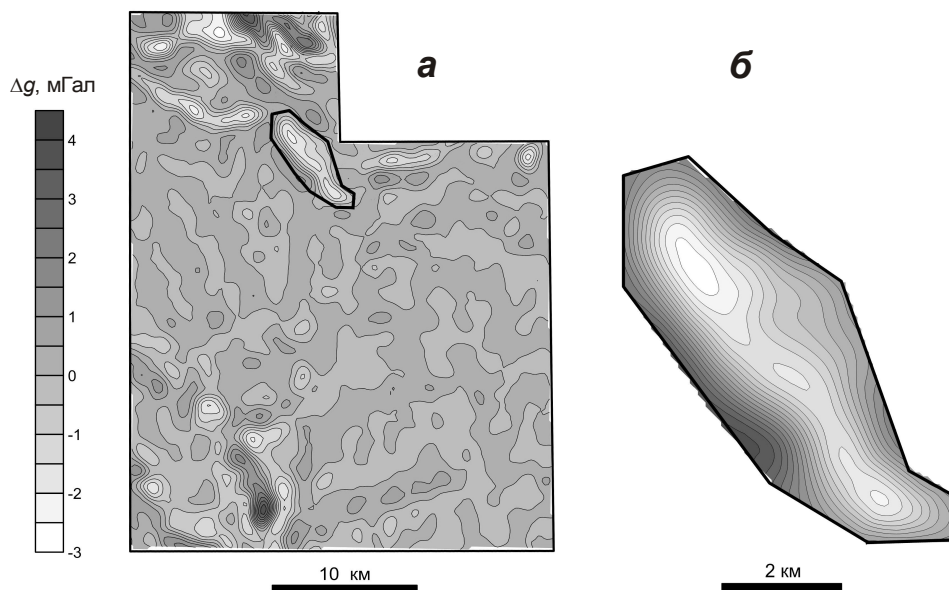
**Рис. 3.** Результат решения обратной задачи гравirazведки для локального однородного тела  
 1 – аномалиеобразующий объект  $S^T$ ; 2 – подобранный объект  $\Omega^*$ ; 3 – график исходного поля  $\Delta g$ ; 4 – дискретные значения выбранного поля



**Рис. 4.** Характеристики итерационного процесса: *a* – изменение плотности подбираемого объекта; *б* – изменение невязки исходного и модельного полей

Достигнутое значение невязки 0.149 мГал оказалось ниже уровня помех, что позволяет считать подобранный конфигурационный носитель  $\Omega^*$  допустимым приближенным решением обратной задачи.

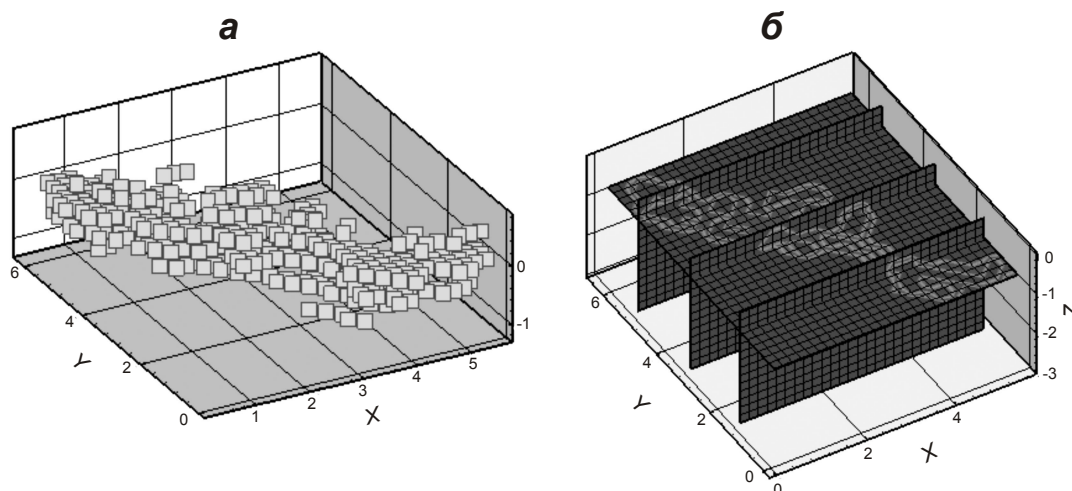
*Пример 2.* Несмотря на то, что первая компьютерная реализация трехмерного монтажного алгоритма появилась 20 лет тому назад [Schäfer, Balk, 1993], интенсивно “трехмерное направление” начало развиваться лишь в последние годы [Балк, Долгаль, 2009]. Для иллюстрации выбран пример применения монтажного метода при интерпретации локальной аномалии, зафиксированной при гравиметрической съемке масштаба 1:50000 в пределах южной части Енисейского кряжа – одной из наиболее значимых золоторудных провинций России. Указанная аномалия отрицательна и имеет амплитуду до 3.1 мГал, эллипсоидальную форму с размерами в плане примерно 9.2×3.6 км (рис. 5). С высокой степенью вероятности можно предположить, что интерпретируемая аномалия создается мощной корой выветривания. Объекты такого типа оцениваются как перспективные на обнаружение золотого оруденения, но в рассматриваемой части Енисейского кряжа до настоящего времени они остаются недостаточно изученными.



**Рис. 5.** Локальная аномалия силы тяжести (а), предположительно обусловленная древней корой выветривания, и ее местоположение на карте гравитационного поля (б). Южная часть Енисейского края (по материалам Гравиметрической экспедиции № 3)

Анализировались материалы гравиметрической съемки в пределах участка, на котором расположена 451 точка наблюдений. Избыточная плотность аномалиеобразующего объекта принималась равной  $-0.4 \text{ г/см}^3$  (в абсолютном выражении около  $2.35 \text{ г/см}^3$ ). Для замощения изучаемой части нижнего полупространства были взяты кубы со стороной 200 м (рис. 6). Алгоритму понадобилось около 400 итераций для достижения невязки наблюденного и модельного полей порядка 0.15 мГал, что сопоставимо с точностью выполненной гравиметрической съемки.

Построенный аномалиеобразующий объект северо-западного простирания имеет крутое падение, вытянутую форму и характеризуется максимальной глубиной залегания нижней кромки около 1.2 км (в юго-восточной части). По своим морфологическим особенностям и петроплотностным параметрам его вполне можно отнести к древней коре выветривания, перекрытой рыхлыми отложениями.



**Рис. 6.** Объемная модель коры выветривания (а), построенная по результатам количественной интерпретации гравитационного поля, и сечения этой модели четырьмя плоскостями:  $Y = 1.36 \text{ км}$ ,  $Y = 3.20 \text{ км}$ ,  $Y = 5.18 \text{ км}$ ,  $Z = 0.61 \text{ км}$  (б)

### Выводы

При количественной интерпретации данных гравиразведки могут эффективно применяться монтажные технологии решения обратных задач, концепция которых близка к общей идее метода конечных элементов. В их основе лежит традиционное для геотектоники представление о геологическом пространстве как совокупности элементарных объемов с кусочно-однородным распределением характеристик среды (в нашем случае – плотности горных пород) [Косыгин, 1974].

Способность учесть все априорные физико-геологические сведения о моделируемых объектах и обеспечить при этом выход на допустимое значение невязки за приемлемое число итераций – основной критерий состоятельности любого алгоритма решения обратной задачи. Монтажные алгоритмы в достаточно полной мере отвечают этому критерию. По ряду основных признаков их можно рассматривать как принципиально новую генерацию методов минимизации, используемых в геофизике при изучении формы и пространственного положения источников поля.

Авторы убеждены, что истинное назначение монтажных алгоритмов состоит в том, чтобы стать основным элементом более общих (чем построение одного “оптимального” варианта решения обратной задачи) технологий интерпретации, нацеленных на извлечение достоверной информации об источниках аномалии в условиях неопределенности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-05-00414-а) и программы исследований ОНЗ РАН (проект 12-Т-5-1012).

### Литература

- Балк П.И. О надежности результатов количественной интерпретации гравитационных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 6. С.43–57.
- Балк П.И. Использование априорной информации о топологических особенностях источников поля при решении обратной задачи гравиметрии // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309, № 5. С.1082–1084.
- Балк П.И. Использование априорной информации о топологических особенностях источников поля при решении обратной задачи гравиметрии в рамках монтажного подхода // Физика Земли. 1993. № 5. С.59–71.
- Балк П.И. Проблема параметризации и достоверности решения нелинейной обратной задачи гравиметрии // Физика Земли. 1997. № 10. С.14–32.
- Балк П.И., Балк С.П. О решении нелинейной обратной задачи гравиметрии с использованием конечноэлементных представлений источников поля // Докл. РАН. 2000. Т. 371, № 2. С.231–234.
- Балк П.И., Балк Т.В. Структура минимизируемого функционала в монтажных алгоритмах поиска допустимых решений обратной задачи гравиметрии // Физика Земли. 1994. № 7/8. С.98–106.
- Балк П.И., Балк Т.В. Структурно-рудная обратная задача гравиметрии // Физика Земли. 1995. № 6. С.32–41.
- Балк П.И., Балк Т.В. Совмещенная обратная задача грави- и магнитометрии // Физика Земли. 1996. № 2. С.16–30.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Трехмерные монтажные технологии интерпретации гравиметрических данных // Докл. РАН. 2009. Т. 427, № 3. С.380–383.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Христенко Л.А. Синтез линейной и нелинейной постановок обратной задачи в гравиразведке и магниторазведке // Геофизический журнал. 2011. Т. 33, № 5. С.51–65.
- Балк Т.В., Шефер У. Монтажный метод решения совмещенной обратной задачи грави- и магнитометрии // Докл. РАН. 1992. Т. 327, № 1. С.79–83.

- Балк Т.В., Новоселова М.Р., Балк П.И., Турутанов Е.Х.* О точности определения нижней границы геологического объекта по гравиметрическим данным // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1988. № 3. С.81–88.
- Бахвалов Н.С., Жданов Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Изд-во “БИНОМ”, 2006. 636 с.
- Блох Ю.И.* Проблема адекватности интерпретационных моделей в гравиразведке и магниторазведке // Геофизический вестник. 2004. № 6. С.10–15.
- Булах Е.Г., Корчагин И.Н.* О подборе аномальных источников гравитационного поля методом последовательных приращений модели // Докл. АН УССР. Сер. Б. 1978. С.1059–1062.
- Вахромеев Г.С., Давыденко А.Ю.* Моделирование в разведочной геофизике. М.: Недра, 1987. 192 с.
- Долгаль А.С.* Решение обратной задачи гравиразведки при поисках медно-никелевых руд // Геофизический журнал. № 6. 1993. С.83–88.
- Долгаль А.С., Мичурин А.В.* Новая модификация монтажного метода решения нелинейной обратной задачи гравиметрии // Уральский геофизический вестник. № 2 (17). 2010. С.34–40.
- Дядюра В.А., Шалаев С.В.* Определение местоположения локальных геологических объектов по гравитационным аномалиям // Вопросы разведочной геофизики. 1968. Вып. 8. С.31–36.
- Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их приложение в системах оптимизации. М., 1982. 432 с.
- Завойский В.Н., Неисжал Ю.Е.* Декомпозиционно-итерационный метод решения обратной задачи магниторазведки // Геофизический журнал. 1979. Т. 1, № 12. С.46–52.
- Канторович Л.В.* О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. 1962. Т. 3, № 5. С.701–709.
- Кобрунов А.И.* Математические основы теории интерпретации геофизических данных: учеб. пособие. М.: ЦентрЛитНефтеГаз, 2008. 288 с.
- Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦМНО, 2005. 1290 с.
- Косыгин Ю.А.* Основы тектоники. М.: Недра, 1974. 216 с.
- Ломтадзе В.В.* Интерпретация гравитационных аномалий способом эквивалентных призм // Вопросы разведочной геофизики. 1968. Вып. 8. С.36–40.
- Овчаренко А.В.* Подбор сечения двумерного тела по гравитационному полю // Вопросы нефтяной и рудной геофизики. Алма-Ата: Изд-во Казахского политехн. ин-та, 1975. Вып. 2. С.71–75.
- Перфильев Л.Г.* Некоторые вопросы обработки и интерпретации геолого-геофизических данных на ЭЦВМ: Автореф. дисс. канд. тех. наук. М., 1972. 28 с.
- Пруткин И.Л.* О решении трехмерной обратной задачи гравиметрии в классе контактных поверхностей методом локальных поправок // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 1. С.67–77.
- Страхов В.Н., Лапина М.И.* Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 2. С.344–347.
- Тригубович Г.М., Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г.* 3D-электроразведка становлением поля. Новосибирск: Наука, 2009. 218 с.
- Шалаев С.В.* Геологическое истолкование геофизических аномалий с помощью линейного программирования. Л.: Недра, 1972. 142 с.
- Юньков А.А., Булах Е.Г.* О точности определения плотности аномальных масс методом сеток // Докл. АН УССР. 1958. № 11. С.1234–1237.
- Schäfer U.* Die Lösung einer inversen Aufgabe für gravimetrische und geomagnetische Anomalien mittels der Montagemethode // Potsdam. Zentralinstitut für Physik der Erde. 1990. 137 s.
- Schäfer U., Balk P.* The Inversion of Potential Field Anomalies by the Assembling Method: The Third Dimension // Proc. IAG Symp. № 112. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. 1993. P.237–241.

#### *Сведения об авторах*

**БАЛК Петр Исаакович** – доктор физико-математических наук. BRD, Blasewitser Ring 46, 13593, Berlin. Тел.: (4930) 364-95-15. E-mail: tatianabalk@mail.ru



**ДОЛГАЛЬ Александр Сергеевич** – доктор физико-математических наук, Учреждение Российской академии наук Горный институт Уральского отделения РАН. 620007, г. Пермь, ул. Сибирская, 78-А. Тел.: (342) 216-10-08. E-mail: dolgal@mi-perm.ru

**БАЛК Татьяна Васильевна** – кандидат физико-математических наук. BRD, Blasewitser Ring 46, 13593, Berlin. Тел.: (4930) 364-95-15. E-mail: tatianabalk@mail.ru

**ХРИСТЕНКО Людмила Анатольевна** – кандидат геолого-минералогических наук, Учреждение Российской академии наук Горный институт Уральского отделения РАН. 620007, г. Пермь, ул. Сибирская, 78-А. Тел.: (342) 216-66-08. E-mail: liudmila.hristenko@yandex.ru

## **FINITE-ELEMENT TECHNOLOGIES OF INTERPRETATION OF GRAVITY DATA. ASSEMBLY METHOD**

P.I. Balk<sup>1</sup>, A.S. Dolgal<sup>2</sup>, T.V. Balk<sup>1</sup>, L.A.Christenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Berlin, Germany*

<sup>2</sup> *Mining Institute Ural Branch Russian Academy of Sciences, Perm, Russia*

**Abstract.** In this paper we emphasize main stages and summarize the evolution of finite-element approach to quantitative interpretation of gravity data. Authors have chosen the assembly technologies of inverse problem solutions among known developments as the most suitable for simultaneous accounting of different a priori physical-geological data about modeled objects and additional information about noise properties in observed fields. It is accentuated that according to the set of characteristics these assembly algorithms can be viewed as a principally new generation of minimization methods which are used in geophysics to study the form and attitude position of field sources.

We provide the most comprehensive description of the assembly method as compared to the already published specifications. Various iterative search schemas of allowable solutions of inverse gravity problem and examples of specific techniques of the accounting of a priori limits on parameters of the model of field sources are indicated in this article. It is the first investigation of the possibility to apply the ideas of assembly approach to the class of hybrid inverse problems with interval assignment of the rock density value for the studied geological objects. Authors present a model and practical examples of 3D modeling of gravity field sources with the use of assembly algorithms.

**Keywords:** gravitational exploration, finite-element approach, assembly method, modeling, algorithm, geological objects.