

УДК 550.384.3, 519.246.3, 519.258

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕКОВЫХ ГЕОМАГНИТНЫХ ВАРИАЦИЙ. ПРИНЦИПЫ И РЕАЛИЗАЦИЯ

© 2012 г. А.В. Хохлов

*Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики
РАН, Геофизический центр РАН, г. Москва, Россия*

Приведены современные взгляды на математическую модель вековых вариаций Главного магнитного поля Земли и изложен алгоритм ее реализации. Программный код разработан автором и свободно доступен в сети Интернет. В рамках построенной модели можно исследовать появление эффектов, традиционно относимых к нестационарным, например, экскурсов магнитного поля. Помимо этого, модель представляет удобную для количественной оценки явлений занижения магнитного склонения в осадках, а также для уточнения статистических свойств традиционных параметров, используемых в геомагнетизме.

Ключевые слова: Главное магнитное поле Земли, палеомагнетизм, вековые вариации, гауссовские случайные процессы, статистика точек на сфере.

Введение

Основной прогресс в понимании природы вековых вариаций магнитного поля Земли, на наш взгляд, стал возможным благодаря ясным формулировкам так называемого Большого гауссовского процесса (в оригинале *Giant Gaussian Process*), предложенного в качестве модели Р. Паркером и К. Констабл [Constable, Parker, 1988] в конце 80-х годов XX века. Дальнейшие уточнения в рамках этой модели сводятся к оценкам значений ее параметров с помощью постоянно пополняемых мировых баз архео- и палеомагнитных данных, например *MagIC* [Magnetics...]. Разумеется, эта проверка еще далека от завершенности; множество вопросов лишь ожидают ответа, тем не менее, методологический принцип, заложенный в основу модели, похоже, остается неизменным.

Как известно, наблюдаемое магнитное поле Земли непостоянно во времени, и характер его вариаций сильно зависит от выбора разрешения (масштаба) [Merrill, McElhinny, McFadden, 1996]. Предмет исследования данной работы – геомагнитные вариации в масштабе от нескольких лет до первых миллионов лет, поиск адекватного описания которых с возможностью установления количественных признаков сходства или различия спектрального состава давно привлекает исследователей.

В статье будет рассмотрена возможность формулировки модели процесса вековых вариаций на языке статистики, в частности, определены принципы построения отвечающих ей синтетических данных. Кроме того, в таких данных, построенных, казалось бы, в рамках гипотезы стационарности, можно наблюдать эффекты, которые традиционно рассматриваются геофизическим сообществом как проявления особенного, нестационарного поведения – например, экскурсии магнитного полюса.

Постановка задачи

Общая необходимость поиска адекватной математической модели для процесса вековых вариаций вытекает из неформального вопроса: как количественно оценить различия в поведении магнитного поля Земли в разные эпохи или доказать, что значи-

мых различий нет? Современный естественнонаучный язык использует измеримость различий; это, в конечном счете, выражается в том, что данные соотносятся с некоторой математической моделью и для конкретного набора количественно измеряется их соответствие (или несоответствие) модели. В частности, если модель статистическая, то данные следует изучать с точки зрения их вероятностных характеристик, таких как законы распределения, числовые характеристики, вычисляемые в процессе обработки данных, и т.п. Статистически достоверное несоответствие таких характеристик для разных эпох и будет требуемым аргументом в пользу того, что поведение поля было различно. Специфика палеомагнитных данных (как правило, содержащих лишь направления векторов без знания их длины, т.е. данные не являются векторами, их нельзя непосредственно складывать, усреднять и т.д.) требует использования методов непараметрической статистики, позволяющей проверять теоретическую модель на неполных векторных данных о магнитном поле.

В будущем автор предполагает опубликовать некоторые результаты, полученные им в области разработки и применения названных методов при гипотезе справедливости модели Констабль – Паркера для вековых вариаций, но в данной статье ограничивается только рассмотрением принципов и геофизических мотивировок формально-математической стороны конструкции.

Модели Констабль – Паркера, определяемые некоторым набором параметров, в русскоязычной литературе, по-видимому, следует обозначать аббревиатурой БГП (по аналогии с принятым в англоязычной литературе сокращением *GGP* от *Giant Gaussian Process*). Для описания моделей БГП используется язык теории случайных процессов. Формально-математические части текста по возможности дополнены примерами, иллюстрирующими геофизическую суть дела.

Некоторые особенности статистического подхода в геомагнетизме

Математическая статистика обычно предполагает, что экспериментальные данные составляют *выборку*, которая, неформально говоря, получается в результате последовательности *независимых* измерений при повторении эксперимента *в одних и тех же* условиях. Прикладной смысл выделенных курсивом понятий вовсе не очевиден и требует множества пояснений, среди которых выберем следующее – статистическая выборка устроена так, что любое ее подмножество из N элементов должно в принципе обеспечить оценку неизвестных параметров с точностью, зависящей лишь от N , а не от подмножества. Применение статистических формул оценивания к данным, не являющимся выборкой, заведомо приведет к искажениям в ответе (может быть, фатальным), которые отнюдь не исчезнут с увеличением объема данных.

Пример 1. Привычной операцией при работе с данными является их представление в виде гистограмм. Один из простейших эвристических тестов, показывающих, что данные не могут считаться выборкой, – разделение всех данных на два одинаковых по числу элементов множества и сравнение вида соответствующих гистограмм. Если две формы существенно (здесь также нужны уточнения) различаются, то это свидетельствует о нарушении свойств статистической выборки.

Совершенно ясно, что произвольную последовательность измерений магнитного поля Земли нельзя объявить выборкой хотя бы потому, что наблюдения в близких моментах времени (в близких географических точках) заведомо продемонстрируют близость (и, тем самым, зависимость) значений. Поэтому для применимости статистической модели данных в геомагнетизме необходимо специальное предположение, справедливость которого – ключевой момент дальнейших рассмотрений. Это основное предположение (увы, нечасто проговариваемое явно) заключается в том, что в записях

Главного магнитного поля Земли можно выделить временные сегменты и соответствующие размеры шага по времени так, что дискретизованная запись будет обладать всеми свойствами выборки, по крайней мере, в пределах точности, которую могут обеспечить статистические формулы. На языке случайных процессов это предположение может быть сформулировано в терминах свойств *стационарности* и *эргодичности*, а для практических приложений соответствующие интервалы времени принято соотносить с периодами стабильной полярности магнитного поля. Всякий раз, впрочем, требуется предварительный анализ данных, чтобы убедиться в отсутствии или наличии их внутренних корреляций.

Таким образом, модель вариаций Констабль – Паркера будет использоваться лишь для интервалов определенной полярности поля, а вопрос о ее более широкой применимости (для промежутков времени, покрывающих не один хрон, или, наоборот, для весьма коротких интервалов, на которых корреляции измерений очевидны) остается предметом обсуждения и проверок. В последнем разделе статьи приводится пример построения синтетических данных для интервала 25 тыс. лет с разрешением 5 лет (что очевидно учитывает корреляцию); вопрос об их реалистичности в этом масштабе представляет отдельный интерес.

Пример 2. В конкретной ситуации вопрос о том, подходят или нет данные под критерии статистической выборки, остается во многом предметом эвристических рассуждений, для которых, на наш взгляд, чрезвычайно важна визуализация данных. Например, для древних (1097–1108 млн. лет) данных [Swanson-Hysell et al., 2009] рассмотрение наклонов в 72-х последовательных потоках дает картину, представленную на рис. 1. Наличие корреляций между наклонами в соседних потоках видно невооруженным глазом, в связи с чем вся последовательность отнюдь не похожа на выборку, но зато дает представление о вековых вариациях в древнюю эпоху. Интересно, что в упомянутой статье это обстоятельство никак не отмечено, меж тем ее авторы использовали без ограничений статистические оценки по рассматриваемым данным. Подобного рода недостатки часто (чтобы не сказать – обычно) встречаются и в других статьях.

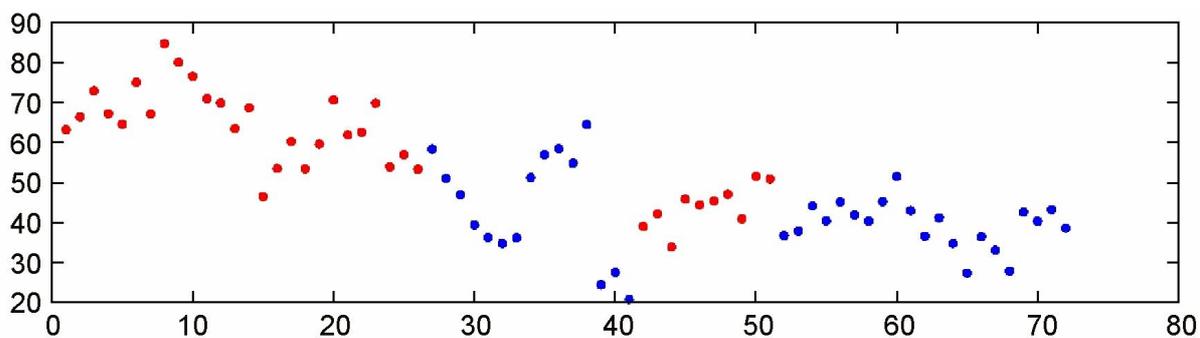


Рис. 1. Приведенные к нормальной полярности данные наклонов из лавовых потоков оз. Кевинаван (*Keweenawan*). Синие кружки – исходная нормальная полярность, красные – обратная. Горизонтальная ось – порядковый номер потока; вертикальная – наклонение, град

Вопрос о соответствии набора параметров конкретной модели Констабль – Паркера реальным данным решается лишь с помощью статистического теста, примененного к выборке данных. К настоящему времени для современной эпохи стабильной полярности Брюнес предложено несколько моделей, различающихся своими параметрами; ниже будет подробно рассказано об этих моделях и об исследованиях, ведущих к выбору одной модели из многих.

Описание Главного магнитного поля Земли в терминах БГП (модель Констабль – Паркера)

Как предложено выше, для краткости будем употреблять аббревиатуру БГП для конструкции, изложенной в [Constable, Parker, 1988]. Предполагая известным общее определение сферической гармонике через многочлены Лежандра и тригонометрические функции, напомним, что в геомагнетизме приняты специальные соглашения и обозначения для многочленов Лежандра, а именно:

$$P_l^m = \begin{cases} P_{l,m}, & m = 0 \\ \frac{2(l-m)!}{(l+m)!} P_{l,m}, & m > 0, \end{cases}$$

где $P_{l,m}$ – ассоциированные многочлены Лежандра от аргумента $\cos\Theta$. Явные формулы для вычисления коэффициентов и значений в конкретных аргументах хорошо известны [Press et al., 1996, 2004].

Основная идея использует то, что в области свободной от источников (и в магнитостатическом приближении, разумеется) Главное магнитное поле Земли может быть построено из потенциала V , который, в свою очередь, представлен суммой сферических гармоник с коэффициентами:

$$V(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi) = a \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a}{\mathfrak{R}} \right)^{l+1} (g_l^m \cos m\Psi + h_l^m \sin m\Psi) P_l^m(\cos \Theta), \quad (1)$$

где g_l^m и h_l^m – гауссовские коэффициенты разложения; $(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi)$ – стандартные географические сферические координаты¹ (расстояние до центра Земли, коширота и долгота); a – земной радиус. Слагаемые с $l = 1$ называют дипольными, с $l = 2$ – квадрупольными и т.д. Для потенциала магнитного поля Земли коэффициенты быстро убывают по абсолютной величине с возрастанием степеней l ; самым большим, значительно превосходящим прочие является коэффициент g_1^0 . По-другому этот факт выражают, говоря о “преимущественно дипольном характере” магнитного поля Земли. Полный набор коэффициентов, входящих в разложение потенциала, составляет пространственный спектр потенциального поля; обычно (см. [Mauersberger, 1956]) в качестве энергетической характеристики убывания коэффициентов выбирают величину

$$R_n = (n+1) \sum_{m=0}^n (g_n^m)^2 + (h_n^m)^2.$$

Существует несколько основополагающих гипотез о характере спектра геомагнитного поля при различных временных масштабах рассмотрения (например, при осреднении значений по интервалу времени). Так, в частности, в палеомагнетизме основной считается гипотеза осевого диполя, гласящая, что при достаточной длине интервала осреднения поля по времени все коэффициенты, кроме g_1^0 , становятся слабо отличимыми от нуля, и тем самым само поле неотлично от дипольного с полюсами на географических севере и юге. Хотя в настоящее время эта гипотеза является предметом обсуждений, гипотез, альтернативных ей, немного. Другие более тонкие гипотезы о характере пространственного спектра в больших промежутках времени в десятки и сотни тысяч лет заведомо представляют интерес, но их проверка требует очень больших баз данных.

¹ Эти обозначения для географических координат выбраны с учетом того, что в дальнейшем потребуются другие системы локальных сферических координат, отнесенных к географическому положению.

Выражение (1) позволяет описать вариации геомагнитного поля в терминах вариаций “модельного вектора” $\mathbf{k} = \{\mathbf{g}, \mathbf{h}\}$, составленного из гауссовских коэффициентов $\mathbf{g} = \{g_1^0, g_1^1, \dots, g_l^m \dots\}$, $\mathbf{h} = \{h_1^1, h_2^1, \dots, h_l^m \dots\}$. Характер этих вариаций в модели Констабль – Паркера определен тем, что $\mathbf{k} = \{\mathbf{g}, \mathbf{h}\}$ полагается бесконечномерным стационарным эргодическим гауссовским процессом. Иными словами, любая n -мерная проекция этого вектора есть n -мерный гауссовский процесс, который, как известно, определяется вектором математических ожиданий $E(\mathbf{k})$ и ковариационной матрицей $\text{Cov}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = [\text{cov}(k_\alpha, k_\beta)]$, составленной из элементов $\text{cov}(g_i^j, g_k^l)$, $\text{cov}(h_i^j, h_k^l)$ и $\text{cov}(g_i^j, h_k^l)$, в частности, любой коэффициент g_i^m представляет собой стационарный гауссовский процесс со своим средним и своей автокорреляционной функцией.

Обсуждение принципов моделирования

Постулат о том, что в модель закладывается именно гауссовский процесс (в частности, все выборки коэффициентов g_l^m , h_l^m должны иметь гауссовское распределение – нормальный закон) в принципе может быть статистически проверен, однако на практике это чрезвычайно трудно осуществить. Коэффициенты разложения потенциала по сферическим гармоникам непосредственно не наблюдаемы – для их сколь-либо точного вычисления требуется достаточно большой объем наблюдений, подобно тому, как это делается при производстве *IGRF*-моделей. Обсуждаемый постулат не противоречит тому, что временные вариации вектора поля в заданной точке дают гауссовское распределение (этот факт более-менее проверен), ибо, согласно Центральной Предельной Теореме теории вероятностей, сумма многих независимых случайных величин сходится к гауссовскому распределению при выполнении некоторых достаточно общих условий. Напротив, из гауссовского характера вариаций вектора магнитного поля прямо не следует, что выборки коэффициентов g_l^m , h_l^m должны также иметь гауссовское распределение, т.е. в модель заложено дополнительное предположение, которое в настоящий момент на реальных данных проверить чрезвычайно трудно.

Делались попытки оценить закон распределения коэффициентов g_l^m , h_l^m для синтетических данных, полученных из вычислительных² моделей [*Bouligand et al., 2005*], однако в этом весьма специальном случае имело место скорее экспоненциальное убывание плотности распределения (распределение Лапласа, по форме подобное $\exp(-|x|)$), нежели гауссовское убывание (по форме подобное $\exp(-x^2)$). Конечно, это обстоятельство относится не к реальным данным геомагнитного поля и потому не может служить основанием для отбрасывания самой идеи БГП как несостоятельной.

То, что процесс имеет короткую память (быстро убывающую по времени автокорреляционную функцию), согласуется с экспериментом по обработке исторических и археомагнитных записей (см., например, [*Hulot, Le Mouël, 1994; Hongre, Hulot, Khokhlov, 1998*]). Благодаря тому, что, как правило, палеомагнитные записи по лавам разделены во времени интервалами, превышающими нескольких сотен лет, есть основания надеяться, что палеомагнитные данные во времени обычно представляют собой статистическую выборку (см., однако, рис. 1). Типичные предположения о характеристических временах памяти процесса, заслуживающие дальнейших уточнений, были предложены, исходя именно из реальных данных [*Hulot, Le Mouël, 1994; Hongre, Hulot, Khokhlov, 1998*].

² Явно использующих эти коэффициенты.

Таблица 1. Оценки интервала времени (годы), вне которого корреляционная функция процессов $g_n^m(t), h_n^m(t)$ пренебрежимо мала, для различных значений степени $n=1,2,\dots$
(Зависимость от m не предполагается)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Годы	2000	451	400	355	315	279	248	220	195	153	173	136	120

Вид ковариационной матрицы в известных опубликованных моделях (см. далее по тексту) для эпохи Брюнес был выбран диагональным, т.е. разные коэффициенты разложения по сферическим гармоникам – взаимно некоррелированные случайные процессы. На самом деле это означает наличие довольно естественных симметрий модели относительно системы географических координат $(\mathcal{R}, \Theta, \Psi)$ (см. [Eckhardt, 1984; Bouligand, Hulot, 2005; Hulot, Le Mouél, 1994]).

Что касается явного вида корреляционной функции, то здесь присутствует известный произвол, неизбежный в настоящий момент в связи с невозможностью прямого наблюдения коэффициентов разложения, о чем уже говорилось выше. Представляется логичным рассматривать несколько простейших случаев модельных автокорреляционных функций, например, их экспоненциальное и гауссовское убывание по времени, или, например, положить автокорреляционную функцию для $g_n^m(t)$ (или $h_n^m(t)$) совпадающей с $K(s) = e^{-\frac{|s|}{\lambda}}$ или $K(s) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{s}{\lambda})^2}$, где значение $\lambda = \lambda_n$ выбирается в соответствии с требованиями на величину памяти процесса $3\lambda_n$ (табл. 1).

Параметры конкретных моделей

Изложенный выше формальный подход означает, что вековые вариации, по крайней мере, на уровне анализа выборок палеомагнитных данных предлагается рассматривать как реализацию (в дискретном времени) стационарного гауссовского процесса $\mathbf{k}(t)$. С другой стороны, задание стационарного гауссовского процесса сводится к заданию его средних $E(g_i^j), E(h_k^l)$ и элементов ковариационной матрицы $\text{Cov}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = [\text{cov}(k_\alpha, k_\beta)]$. В приложениях имеют место два дополнительных предположения о взаимной независимости элементов и о том, что автокорреляционная функция определяется лишь своей степенью (но не порядком) и, в частности,

$$\text{cov}(h_i^j, h_k^l) = \text{cov}(g_i^j, g_k^l) = \delta_{ik} \delta_{jl} \sigma_k^2, \tag{2}$$

$$\text{cov}(g_i^j, h_k^l) \equiv 0. \tag{3}$$

Опубликованные модели *CP, QC, CJ, JC* и *TK* сходны по многим характеристикам (описание модели *CP* см. в [Constable, Parker, 1988]; моделей *QC, CJ, JC* и *TK* – в [Quidelleur, Courtillot, 1996; Constable, Johnson, 1999; Johnson, Constable, 1995, 1996, 1997; Tauxe, Kent, 2004]). В них все математические ожидания, кроме $E(g_1^0)$ и $E(g_2^0)$, имеют нулевые значения, ковариационная матрица всегда диагональна и $\text{cov}(g_n^m, g_n^m) = \text{cov}(h_n^m, h_n^m) = (\sigma_n^m)^2$; при этом последняя формула видоизменена в модели *JC*, для которой $\text{cov}(g_2^1, g_2^1) = (\sigma(g_2^1))^2$ и $\text{cov}(h_2^1, h_2^1) = (\sigma(h_2^1))^2$. Во всех моделях, кроме одной, при $n \geq 3$ параметры σ_n^m не зависят от m и вычисляются по формуле $\sigma_n^m = \sigma_n$, где $\sigma_n = \alpha(c/a)^n / ((n+1)(2n+1))^{1/2}$. Особняком стоит модель *TK*, в которой $\sigma_n^m = \sigma_n$ для четных значений $(n-m)$ и $\sigma_n^m = \beta \sigma_n$ для нечетных. В табл. 2 приведены значения соответствующих параметров моделей.

Таблица 2. Параметры моделей *CP*, *QC*, *CJ*, *JS* и *TK*. Единицы измерения всех параметров (кроме безразмерного β , задействованного в модели *TK*) – мкТ

	<i>CP</i>	<i>QC</i>	<i>CJ</i>	<i>JS</i>	<i>TK</i>
$E(g_1^0)$	-30.0	-30.0	-30.0	-30.0	-18.0
$E(g_2^0)$	-1.8	-1.2	-1.5	-1.5	0.0
σ_1^0	3.0	3.0	11.72	11.72	6.36
σ_1^1	3.0	3.0	1.67	1.67	1.67
σ_2^0	2.14	1.3	1.16	1.16	0.58
$\sigma(g_2^1)$	2.14	4.3	4.06	1.16	2.20
$\sigma(h_2^1)$	2.14	4.3	4.06	8.12	2.20
σ_2^2	2.14	1.3	1.16	1.16	0.58
α	27.7	27.7	15.0	15.0	7.5
β					3.8

Большой гауссовский процесс и поведение магнитного поля в выбранной географической точке

Для каждой точки q с координатами $(\mathcal{R}, \Theta, \Psi)$ вектор поля вычисляется из соотношения $\mathbf{V}(q) = \mathbf{V}(\mathcal{R}, \Theta, \Psi) = -\text{grad}V(\mathcal{R}, \Theta, \Psi)$, линейного по коэффициентам g_l^m и h_l^m . Иными словами, для каждой точки q имеется линейный оператор $A(q)$, отображающий \mathbf{k} в $\mathbf{V}(q)$: $\mathbf{V}(q) = A(q)\mathbf{k}$.

Поскольку в модели БГП распределение вектора \mathbf{k} (или его конечномерной аппроксимации) предполагается гауссовским, то из взаимной некоррелированности (см., однако, выше замечание о Центральной Предельной Теореме теории вероятностей) распределение трехмерного вектора поля $\mathbf{V}(q)$ также гауссовское, определяемое девятью вещественными параметрами. Три из них отвечают среднему вектору $E(\mathbf{V})$, а остальные шесть соответствуют элементам симметричной 3×3 матрицы ковариаций $\text{Cov}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$. С параметрами $\bar{k} = E(\mathbf{k})$ и $\text{Cov}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ связь определяется формулами:

$$E(\mathbf{V}(q)) = A(q)E(\mathbf{k}) = A(q)\bar{k}, \quad (4)$$

$$\text{Cov}(\mathbf{V}(q), \mathbf{V}(q)) = A(q)\text{Cov}(\mathbf{k}, \mathbf{k})A(q)^T, \quad (5)$$

которые можно использовать при тестировании конкретной модели БГП посредством сравнения выборки случайных ее значений с выборкой реальных данных. Реализация этого подхода в применении к реальным данным содержит еще одну трудность, связанную с тем, что реальные данные, как правило, неполны и представляют лишь направления. Статистика направлений предполагает исследование свойств распределений на двумерной сфере методами непараметрической статистики, которые обычно не входят в стандартные учебники или справочники. Методика работы с данными по направлениям в предположении справедливости модели БГП будет предметом следующей публикации.

Построение генератора модельных данных

Напомним, что в любой точке $(\mathcal{R}, \Theta, \Psi)$ имеется локальная система евклидовых координат, заданных направлениями север–восток–надир, определяемыми как пара касательных к соответствующей сфере, и направлением, противоположным радиус-вектору. Формула (1) указывает, как получить мгновенное значение потенциала поля в заданной географической точке. Небольшая модификация этой формулы дает представление евклидовых координат (в указанной системе координат) мгновенного значения вектора поля в заданной географической точке. Действительно, достаточно явно

выписать градиент каждого слагаемого из формулы (1), и сумма градиентов дает с обратным знаком вектор поля $\mathbf{B}(t) = -\nabla V(t)$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_N(t) \\ B_E(t) \\ B_D(t) \end{bmatrix} = & -\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l g_l^m(t) \begin{bmatrix} (P_l^m)'(\cos \Theta) \cos m\Psi \sin \Theta \\ -mP_l^m(\cos \Theta) \sin m\Psi / \sin \Theta \\ (1+l)P_l^m(\cos \Theta) \cos m\Psi \end{bmatrix} \left(\frac{a}{\mathfrak{R}}\right)^{l+2} - \\ & -\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l h_l^m(t) \begin{bmatrix} (P_l^m)'(\cos \Theta) \sin m\Psi \sin \Theta \\ mP_l^m(\cos \Theta) \cos m\Psi / \sin \Theta \\ (1+l)P_l^m(\cos \Theta) \sin m\Psi \end{bmatrix} \left(\frac{a}{\mathfrak{R}}\right)^{l+2}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает идея генерации выборки синтетических данных. Для избранного конечномерного приближения используется столько независимых генераторов гауссовских случайных чисел, сколько рассматривается коэффициентов g_l^m , h_l^m . Привычнее оперировать степенью разложения; в этом случае для модели степени n потребуется $(n+1)^2-1$ генератор. Далее формула (1) даст выборку потенциалов, и, наконец, формула, выражающая компоненты вектора градиента в данной точке q через коэффициенты g_l^m , h_l^m , доставит окончательную выборку векторов поля. Эта достаточно простая процедура может быть несколько обобщена, чтобы указать последовательность векторов поля, не разнесенных по времени на расстояние больше памяти БПП, тем самым сгенерировать синтетические данные с любым заданным временным шагом. Для этого достаточно выстроить значения во времени каждого из коэффициентов $g_l^m(t)$, $h_l^m(t)$ с учетом соответствующих автокорреляционных функций. Этот шаг – построение значений во времени стационарного гауссовского процесса с заданной автокорреляционной функцией – не столь уж очевиден и поэтому будет описан более подробно.

Генератор случайного процесса с заданной автокорреляцией

Начнем с того, что напомним определение (авто)корреляционной функции $k_{\xi}(\tau) = K_{\xi}(t + \tau, t)$ стационарного (вообще говоря, комплекснозначного) гауссовского процесса $\xi(t)$, где

$$K_{\xi}(t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t) = K_{\xi}(t_1, t_2) = \text{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2)) = E(\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}).$$

Обратим внимание на расстановку комплексного сопряжения: для положительных τ более ранний момент времени берется с сопряжением, а для отрицательных – наоборот. В нашем случае рассматриваемый гауссовский процесс – вещественнозначный, и поэтому $k_{\xi}(\tau) = k_{\xi}(-\tau)$. Рассмотрим быстроубывающую (чтобы обеспечить существование всех необходимых интегралов по прямой) четную вещественнозначную функцию $R(t) = R(-t)$ и случайный процесс $\xi(t)$, определяемый интегралом по гауссовской случайной мере $\int_{-\infty}^{+\infty} R(t-s)dX(s)$, где $X(s)$ обозначает процесс броуновского движения.

Для простоты (чтобы не вникать в детали свойств стохастического интеграла) можно рассматривать дискретный аналог выражения со стохастическим интегралом – последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин α_n и

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R(t-n)\alpha_n.$$

Корреляционная функция $k_\xi(\tau)$ процесса $\xi(t)$ явно вычисляется в терминах функции R . Приведем это вычисление (в дискретном случае):

$$E\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} R(n+\tau)\alpha_n \sum_{-\infty}^{+\infty} R(n)\alpha_n\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R(n+\tau)R(-n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} R(\tau-m)R(m);$$

последнее выражение является дискретной сверткой, а в непрерывном варианте оно примет вид $\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau-s)R(s)ds$. Таким образом, если известно представление заданной автокорреляционной функции $k(\tau)$ в виде свертки $k(\tau) = R * R = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau-s)R(s)ds$, то, используя указанную выше формулу для случайного процесса $\xi(t)$, получим $k(\tau) = k_\xi(\tau)$. Для практического моделирования процесса $\xi(t)$ надо задать явное представление желаемой корреляционной функции в виде свертки $R * R$ и вычислить соответствующий стохастический интеграл или его оценку с некоторой точностью.

Пример. Хорошо известно, что

$$e^{-s^2/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-t^2} * e^{-t^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-t)^2} e^{-t^2} dt;$$

таким образом решается вопрос о моделировании стационарного гауссовского процесса с корреляционной функцией $k(\tau) = e^{-\tau^2/2}$.

В более общей ситуации поиск необходимого выражения для R может вестись исходя из формул Бореля, связывающих преобразование Фурье $F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i st} dt$ (эта версия интегрального преобразования Фурье соответствует традициям теории сигналов) с произведением и сверткой:

$$F[f(t)g(t)] = F[f(t)] * F[g(t)]; \quad F[f(t)]F[g(t)] = F[f(t) * g(t)].$$

Так, например, преобразование Фурье функции $2/(1+4\pi^2 t^2)$ дает $e^{-|s|}$, а функции $\sqrt{2/(1+4\pi^2 t^2)} = \sqrt{2}K_0(|s|)/\pi$, где $K_0()$ обозначает функцию Бесселя (см. [Abramovitz, Stegun, 1964]). Таким образом, соответствующий случайный процесс $\xi(t)$ будет иметь экспоненциально убывающую корреляционную функцию.

Практическое моделирование данных

В силу изложенного выше, достаточно сложное модельное поведение в пространстве и времени вектора магнитного поля $\mathbf{V}(\mathcal{R}, \Theta, \Psi, t)$ может быть воспроизведено путем некоторого преобразования данных, полученных из достаточно стандартного и легкодоступного генератора случайных чисел. Статистические свойства таких модельных данных тем самым оказываются вычислительно проверяемыми, благо модельные данные не ограничены ни в количестве, ни в точности. При этом в ряде случаев статистические свойства параметров можно и теоретически вывести из свойств БГП. Прямое сравнение модельных данных с реальными представляет отдельный интерес, но в первую очередь интересно проверить свойства некоторых широко используемых в палеомагнетизме параметров, рассчитанных на основе реальных данных. Статистическое поведение таких параметров (например, того же магнитного полюса VGP) обычно достаточно непросто вывести аналитически даже для моделей, но зато несложно вычислить экспериментально, просто обработав достаточно большой набор синтетических данных. Далее, сравнивая статистическое поведение двух параметров, рассчитанных по реальным и синтетическим данным, можно будет судить о том, укладываются ли реальные данные в ту глобальную модель, которую использовали для получения синтетических.

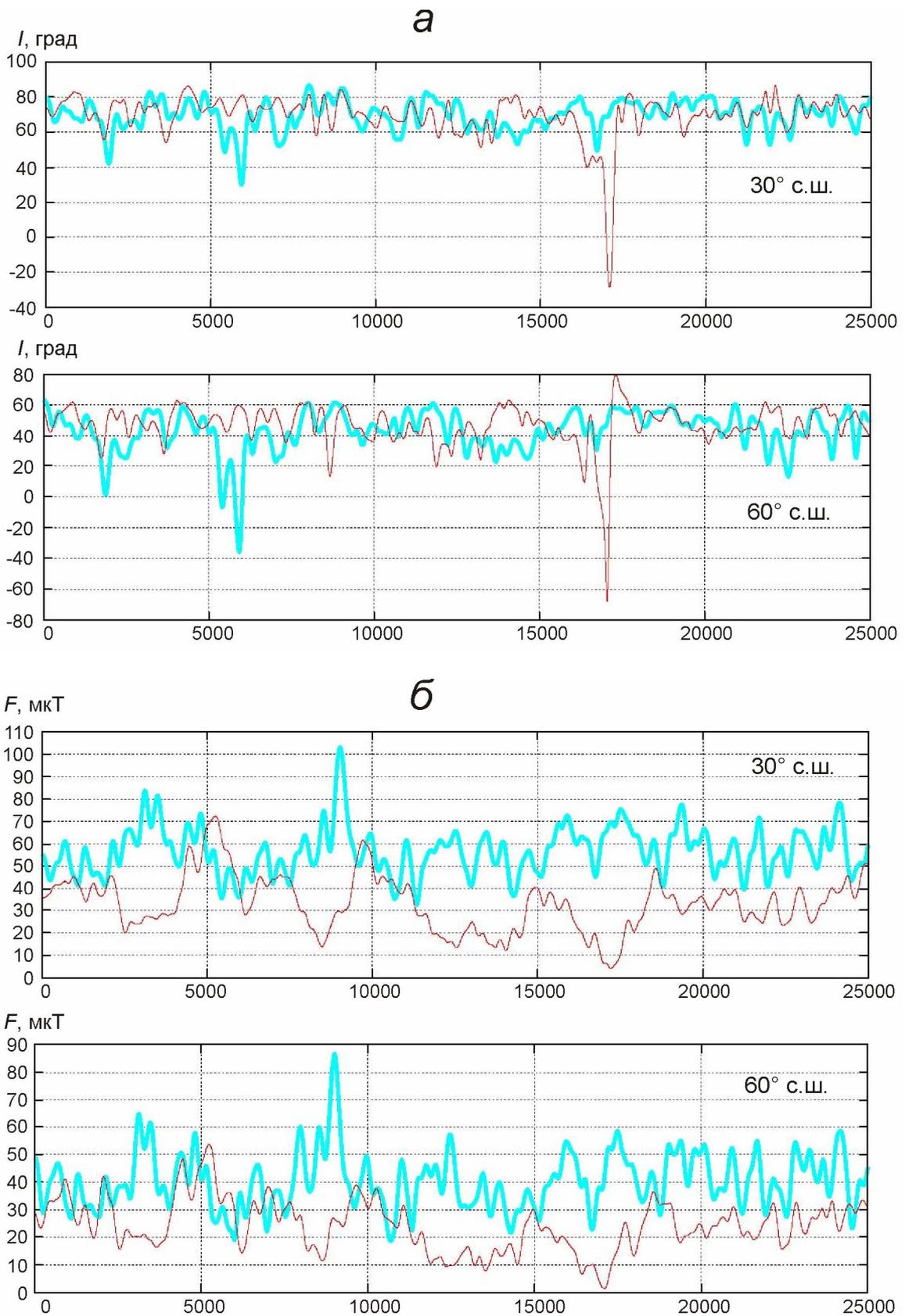


Рис. 2. Моделирование эволюции наклонения I (а) и интенсивности F (б) за 25 тыс. лет в моделях TK (красные линии) и QC (голубые линии) для 30° с.ш. (нижние графики) и 60° с.ш. (верхние графики)

На сегодня распространенным и удобным инструментом для обработки данных является пакет *MATLAB*, с помощью которого автором создана программа для генерации реализаций Большого гауссовского процесса при разных параметрах (см. сайт <http://paleomag.ifz.ru>).

В качестве примера рассмотрим охватывающие 25 тыс. лет реализации Большого гауссовского процесса для моделей *TK* и *QC* (см. соответственно [Quidelleur, Courtillot, 1996; Tauхе, Kent, 2004]) с шагом разрешения по времени 5 лет и построим для них графики эволюции во времени наклонения *I* (рис. 2, а, с. 59) и интенсивности *F* (рис. 2, б, там же) на широтах 30°с.ш. и 60°с.ш. Интересно, что, несмотря на стационарный характер БГП, в рассматриваемых параметрах мы наблюдаем, например, экскурсии, которые традиционно принято соотносить с проявлениями нестационарности. Видна также некоторая разница в поведении графиков, определяемая несовпадением параметров моделей. Более подробный анализ подобных реализаций с целью оценки влияния параметров модели на привычные статистические параметры, отвечающие синтезированным данным, будет предметом следующих публикаций.

Основной результат данной работы состоит в явном предъявлении математической модели и ее программной реализации с целью проведения в дальнейшем статистически-корректного отбора параметров модели с использованием реальных данных.

Литература

- Abramovitz M., Stegun I.* Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. New York, 1964. 1048 p.
- Bouligand C., Hulot G.* Statistical palaeomagnetic field modelling and symmetry considerations // *J. Int. Geoph.* 2005. V. 161. P.591–602. doi:10.1111/j.1365-246X.2005.02612.
- Bouligand C., Hulot G., Khokhlov A., Glatzmaier G.A.* Statistical palaeomagnetic field modelling and dynamo numerical simulation // *J. Int. Geoph.* 2005. V. 161. P.603–626. doi: 10.1111/j.1365-246X.2005.02613.
- Constable C., Johnson C.* Anisotropic paleosecular variation models: implications for geomagnetic field observables // *Earth Planet. Sci. Lett.* 1999. V. 115. P.35–51.
- Constable C.G., Parker R.L.* Statistics of the geomagnetic secular variation for the past 5 Myr // *J. Geophys. Res.* 1988. V. 93. P.11569–11581.
- Eckhardt D.H.* Correlations between global features of terrestrial fields // *Math. Geol.* 1984. V. 16. P.155–171.
- Hongre L., Hulot G., Khokhlov A.* An analysis of the geomagnetic field over the past 2000 years // *Phys. Earth Planet. Int.* 1998. V. 106. P.311–315.
- Hulot G., Le Mouél J-L.* A statistical approach to the Earth's main magnetic field // *Phys. Earth Planet. Int.* 1994. V. 82. P.167–183.
- Johnson C., Constable C.* The time-averaged field as recorded by lava flows over the past 5 Myr // *Geophys. J. Int.* 1995. V. 122. P.489–519.
- Johnson C., Constable C.* Paleosecular variation recorded by lava flows over the last 5 Myr // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 1996. V. 354. P.89–141.
- Johnson C., Constable C.* The Time-Averaged Geomagnetic Field: Global and Regional Biases for 0-5 Ma // *Geophys. J. Int.* 1997. V. 131. P.643–666.
- Magnetics Information Consortium (MagIC) Promoting information technology-infrastructures for the international paleomagnetic, geomagnetic and rock magnetic community // <http://earthref.org/cgi-bin/magic-sO-main.cgi>
- Mauersberger D.* Das Mittel der Energiedichte des Geomagnetischen Hauptfeldes an der Erdoberfläche und seine Sakulare Änderung // *Gerlands Beitr. Geophys.* 1956. V. 65. P.207–215.
- Merrill R., McElhinny M., McFadden P.* The magnetic field of the Earth. London: Academic Press, 1996. 532 p.

- Press C., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B.* Numerical Recipes in C. Second ed. Cambridge, 1996. See also http://www.ulib.org/webRoot/Books/Numerical_Recipes/bookc.html.
- Press C., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B.* Numerical Recipes in C. Second ed. Cambridge, 2004. 1004 p.
- Quidelleur X., Courtillot V.* On low-degree spherical harmonic models of paleosecular variation // Phys. Earth Planet. Int. 1996. V. 95. P.55–77.
- Swanson-Hysell N.L., Maloof A.C., Weiss B.P., Evans D.A.* No asymmetry in geomagnetic reversals recorded by 1.1-billion-year-old Keweenaw basalts // Nature Geosci. 2009. V. 2. P.713–717.
- Tauxe L., Kent D.V.* A simplified statistical model for the geomagnetic field and the detection of shallow bias in paleomagnetic inclinations: was the ancient magnetic field dipolar? // Timescales of the Paleomagnetic held: Amer. Geophys. Un. Monogr / Eds. J.E.T. Channell, D.V. Kent, W. Lowrie, J. Meert. 2004. V. 145. P.101–115.

Сведения об авторе

ХОХЛОВ Андрей Владимирович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН. 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 84/3. Тел.: +7 (495) 333-45-56. E-mail: fbmotion@gmail.ru

THE MODEL OF THE PALEOMAGNETIC SECULAR VARIATIONS: THEORY AND IMPLEMENTATION

A.V. Khokhlov

*International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics,
Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Abstract. The Giant Gaussian Process mathematical model of the paleomagnetic secular variations is revisited to discuss the corresponding computer implementation. The code is available via INTERNET. It comes out that magnetic excursions (previously associated with non-stationarity) can be observed in this purely stationary stochastic model. The corresponding computations will give rise the quantitative description of some specific features in sedimentary paleomagnetic data, for instance the flattening.

Keywords: magnetic field of the Earth, secular variation, paleomagnetism, stationary gaussian process, statistics on sphere.