

УДК 51-7:550.831

СФЕРИЧЕСКИЙ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ АЭРОГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ ДАННЫХ

©2012 г. Ю.В. Болотин, В.С. Вязьмин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Цель обработки аэрогравиметрических измерений – построение карт аномального гравитационного поля Земли и последующая их трансформация: определение аномального поля на поверхности геоида, вычисление потенциала аномального поля, уклонов отвесной линии и т.п. Многие задачи трансформации относятся к классу обратных математически некорректно поставленных задач, в связи с чем результат сильно зависит от методики решения.

Обсуждается возможность применения в задачах трансформации в качестве математического аппарата техники сферического вейвлет-разложения, предлагается соответствующий алгоритм и приводится оценка его методических погрешностей.

Ключевые слова: гравиметрия, гравитационная аномалия, вейвлеты.

Введение

Рассматривается задача трансформации карт аномального гравитационного поля Земли, представляющая собой последний этап постобработки аэрогравиметрических измерений [Болотин, Голован, Парусников, 2002], после которого обычно следует геологическая интерпретация карт. Под трансформациями аномального гравитационного поля Земли понимается вычисление таких его характеристик, как аномалия силы тяжести на поверхности геоида, уклона отвесной линии, потенциал аномального поля и др. Трансформации сводятся к вычислению оператора свертки поля с функцией Грина соответствующей краевой задачи или его обращению. Трудности при трансформации обусловлены неограниченностью многих рассматриваемых операторов, что приводит к экспоненциальному накоплению ошибок в исходных данных.

Другая проблема связана с влиянием так называемых дальних зон [Heiskanen, Moritz, 1967]. Для корректности трансформации требуется знание аномального поля на высоте измерения вне участка аэрогравиметрической съемки. Для этого, как правило, используют склейку (комбинирование) с данными приближенных глобальных моделей, полученными по спутниковым измерениям (EGM96, EGM2008 или др.) [Болотин, Голован, Парусников, 2002; Дробышев и др., 2006]. Из-за нестыковки локальной авиационной модели поля с глобальной моделью на границе области могут возникать краевые эффекты.

Целью настоящей работы является построение методики трансформации аномального гравитационного поля Земли с помощью метода сферических гармонических вейвлет-разложений, разработанного В. Фреденом [Fengler, Freedden, Gutting, 2004; Fengler и др., 2008; Freedden, Schneider, 1998]. Главное достоинство метода в рассматриваемой задаче определяется возможностью одновременной локализации аномалии силы тяжести в пространстве и в частотной области. В отличие от вышеназванных работ В. Фредена, ориентированных в большей степени на обработку данных GOCE/GRACE, в настоящей работе учитывается специфика данных аэрогравиметрии, заданных на небольшом (обычно прямоугольном) участке местности. В основе методики трансформации лежит итерационный алгоритм, выполняющий вейвлет-аппроксимацию аномального поля, комбинируя данные аэрогравиметрии с данными глобальной модели.

Показано, что алгоритм почти свободен от методических погрешностей. В качестве иллюстрации предлагаемого подхода приводятся численные результаты продолжения аномального гравитационного поля на уровень геоида путем комбинирования с данными глобальной модели *EGM96*.

Определение аномального гравитационного поля Земли по данным аэрогравиметрии

Аномальное гравитационное поле Земли – это разность гравитационного и нормального полей [Heiskanen, Moritz, 1967]. Поле характеризуется потенциалом $T = V - V_0$, где T – потенциал аномального поля (так называемый возмущающий потенциал); V – гравитационный потенциал; V_0 – нормальный гравитационный потенциал. Аномалией силы тяжести в свободном воздухе называется градиент возмущающего потенциала $\mathbf{g} = \text{grad}T$. В скалярной аэрогравиметрии рассматривается вертикальная составляющая аномалии силы тяжести, которую ниже для краткости будем обозначать g .

Измерения аномалии силы тяжести в аэрогравиметрии обычно проводятся на постоянной высоте h над референц-эллипсоидом: $g = g(\lambda_{geo}, \varphi_{geo}, h)$, где λ_{geo} , φ_{geo} , h – географические долгота, широта и высота соответственно. При решении задачи трансформации удобно использовать сферические координаты точки: $r = R + h$, $\lambda = \lambda_{geo}$, $\varphi = \varphi_{geo}$, где R – радиус аппроксимирующей сферы $\Omega_R \subset \mathbb{R}^3$. Поскольку сжатие земного эллипсоида незначительно, представление Земли в виде сферы приемлемо в аэрогравиметрии при решении задачи трансформации.

Трансформации аномального гравитационного поля Земли сводятся к решению неполной краевой задачи для шара и возмущающего потенциала T , который вне шара является гармонической функцией:

$$\Delta T(x) = 0, \quad |x| > R, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial T(x)}{\partial |x|} \right|_h = -g|_h(x), \quad |x| = R + h, \quad (2)$$

где T удовлетворяет условию: $|T(x)| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, $x \in \mathbb{R}^3$.

Обозначим через $T|_0$ искомое значение возмущающего потенциала на поверхности сферы Ω_R и предположим, что функция $T|_0$ принадлежит гильбертову пространству суммируемых с квадратом функций $L^2(\Omega_R)$, а функция $g|_h$ – гильбертову пространству $L^2(\Omega_{R+h})$. Обозначив интегральное ядро дифференциального оператора $\Lambda : L^2(\Omega_R) \rightarrow L^2(\Omega_{R+h})$ в (2) через K_Λ , приходим к

$$g|_h(x) = \Lambda T|_0(x) = \int_{\Omega_R} K_\Lambda(x, y) T|_0(y) d\omega(y). \quad (3)$$

Ядро имеет вид $K_\Lambda(x, y) = -\frac{\partial G(x, y)}{\partial |x|}$, где G – функция Грина внешней задачи Дирихле (1) (в этом случае G – ядро Пуассона) с граничным условием $T|_{\Omega_R} = T|_0$. В (3) $d\omega(y)$ – мера на сфере. Тогда формулы основных трансформаций могут быть получены обращением оператора Λ в (3) [Heiskanen, Moritz, 1967]:

$$T|_0(x) = \int_{\Omega_{R+h}} g|_h(y) K_{\Lambda^{-1}}(x, y) d\omega(y),$$

$$g|_0(x) = - \int_{\Omega_{R+h}} g|_h(y) \frac{\partial K_{\Lambda^{-1}}(x, y)}{\partial |x|} d\omega(y),$$

$$\xi|_0(x) = -\gamma^{-1}(x) \int_{\Omega_{R+h}} g|_h(y) \frac{\partial K_{\Lambda^{-1}}(x, y)}{\partial x_1} d\omega(y),$$

$$\eta|_0(x) = -\gamma^{-1}(x) \int_{\Omega_{R+h}} g|_h(y) \frac{\partial K_{\Lambda^{-1}}(x, y)}{\partial x_2} d\omega(y).$$

Здесь γ – нормальная сила тяжести; ξ , η – северное и восточное отклонения отвесной линии; $K_{\Lambda^{-1}}$ – интегральное ядро обратного оператора.

Функции, заданные на сфере Ω_R , имеют классическое представление в виде разложения в ряд по сферическим функциям (сферическим гармоникам) [Heiskanen, Moritz, 1967]:

$$\frac{1}{R} Y_{nk} \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad |k| = 0, 1, \dots, n,$$

которые образуют ортонормированный базис в $L^2(\Omega_R)$ относительно скалярного произведения

$$\left(\frac{1}{R} Y_{nk}, \frac{1}{R} Y_{ml} \right)_{L^2(\Omega_R)} = \frac{1}{R^2} \int_{\Omega_R} Y_{nk} \left(\frac{x}{|x|} \right) Y_{ml} \left(\frac{x}{|x|} \right) d\omega(x) = \delta_{nm} \delta_{kl}.$$

Гармонические функции могут быть выражены в виде суммы шаровых функций. Приведем выражение для возмущающего потенциала:

$$T(x) = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{|x|} \right)^{n+1} \sum_{k=-n}^n T_{nk} Y_{nk} \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad (4)$$

где $x \in \overline{\Omega_R^{ext}} = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| \geq R\}$, GM – гравитационная постоянная; T_{nk} – безразмерные коэффициенты разложения потенциала:

$$T_{nk} = \frac{1}{GM \cdot R} \int_{\Omega_R} T(x) Y_{nk} \left(\frac{x}{|x|} \right) d\omega(x). \quad (5)$$

Частичные суммы ряда (4) сходятся по норме в L^2 . Равномерная сходимости имеет место на каждом подмножестве $K \subset \Omega_R^{ext}$ таком, что $\overline{K} \cap \Omega_R = \emptyset$. Справедливо равенство Парсеваля:

$$\|T\|_{L^2(\Omega_R)}^2 = GM^2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=-n}^n T_{nk}^2.$$

В сферических координатах ряд для возмущающего потенциала имеет вид:

$$T(\lambda, \varphi, r) = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\Delta \overline{C}_{nm} \cos m\lambda + \overline{S}_{nm} \sin m\lambda) \overline{P}_{nm}(\cos \varphi), \quad (6)$$

где λ и φ – сферические долгота и широта; \overline{P}_{nm} – полностью нормированные присоединенные полиномы Лежандра степени n и порядка m ; $\Delta \overline{C}_{nm} = \overline{C}_{nm}$, за исключением зональных гармоник четных степеней, для которых $\overline{C}_{n0} = \overline{C}_{n0} - \overline{C}_{n0}^0$, где \overline{C}_{n0}^0 – коэффициенты разложения нормального гравитационного потенциала; \overline{C}_{nm} , \overline{S}_{nm} – полностью нормированные коэффициенты разложения гравитационного потенциала.

В данной работе при вычислении нормальной силы тяжести используются параметры модели Земли GRS80.

Выражение для аномалии силы тяжести получается дифференцированием ряда для возмущающего потенциала (4) по внутренней нормали к сфере:

$$-g(x) = \frac{\partial T}{\partial |x|} = \frac{GM}{R|x|} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{|x|} \right)^{n+1} \sum_{k=-n}^n T_{nk} Y_{nk} \left(\frac{x}{|x|} \right). \quad (7)$$

Имеет место выражение для интегрального ядра K_{Λ} оператора Λ из (3) [Heiskanen, Moritz, 1967]:

$$K_{\Lambda}(x, y) = -\frac{1}{R(R+h)} \sum_{n=2}^{\infty} s_n \sum_{k=-n}^n Y_{nk} \left(\frac{x}{|x|} \right) Y_{nk} \left(\frac{y}{|y|} \right), \quad (8)$$

где s_n – сингулярные числа оператора Λ , определяемые формулой:

$$s_n = \frac{n+1}{R} \left(\frac{R}{R+h} \right)^{n+1}.$$

Известно, что Λ – компактный оператор с бесконечномерным образом $\dim \text{Im } \Lambda = \infty$ [Kress, 1989]. Откуда следует, что обратный оператор Λ^{-1} не ограничен в $L^2(\Omega_{R+h})$ и задача (3) является некорректно поставленной по Адамару (уравнение Фредгольма первого рода). Согласно критерию Пикара [Kress, 1989], для разрешимости необходимо и достаточно, чтобы:

$$g|_h \in \text{Im } \Lambda \subset L^2(\Omega_{R+h}). \quad (9)$$

Для выполнения этого условия прибегают к различным методам регуляризации задачи.

Рассмотрим вкратце известные подходы к решению задачи трансформации данных аэрогравиметрии: методы усеченного сингулярного разложения (TSVD) [Novak, 2003], коллокаций [Tscherning, 1985], Фурье на плоскости [Тихонов, Гласко, Литвиненко, 1968; Schwarz, Sideris, Forsberg, 1990] и на сфере [Blaha et al., 1996].

В методе TSVD ограничивается число членов ряда в (8), что приводит к корректности обратной задачи. Для компенсации маскировки частот данные подвергаются предварительному сглаживанию. Недостаток метода – большой объем вычислений и краевые эффекты, вызванные конечным числом членов ряда.

Метод коллокаций требует очень большого даже для современных компьютеров объема вычислений и нуждается в корреляционной модели аномального поля, которая часто оказывается недостоверной.

Достоинство метода Фурье, как на плоскости, так и на сфере заключается в возможности диагонализации операторов трансформаций. Существенная его проблема – краевые эффекты, вызванные нестыковкой локальной авиационной модели с глобальной моделью на границах области съемки.

Разрабатываемый в настоящей работе подход к решению задачи трансформации аномального гравитационного поля Земли основан на сферическом вейвлет-разложении [Freedon, Schneider, 1998]. Вейвлеты регуляризуют обратную задачу (3) и позволяют за счет хорошей локализации на сфере ограничить влияние краевых эффектов.

Сферическое вейвлет-разложение

Понятие сферического вейвлета тесно связано с понятием скейлинг-функции.

Определение 1. [Freedon, Schneider, 1998]. Скейлинг-функцией уровня j называется ряд

$$\Phi_j(x, y) = \frac{1}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j(n) \left(\frac{R^2}{|x||y|} \right)^{n+1} \sum_{k=-n}^n Y_{nk} \left(\frac{x}{|x|} \right) Y_{nk} \left(\frac{y}{|y|} \right), \quad (10)$$

где $(x, y) \in \overline{\Omega_R^{ext}} \times \overline{\Omega_R^{ext}}$ – декартово произведение; параметр j – масштабный уровень ($j=0, 1, 2, \dots$); $\varphi_j(n)$ – символ скейлинг-функции.

Скейлинг-функция полностью определяется выбором символа $\varphi_j(n)$, который должен удовлетворять условиям, обеспечивающим сходимость ряда (10), и более специальным условиям, гарантирующим стремление скейлинг-функции с ростом уровня j к дельта-функции по L^2 -норме [Freedon, Schneider, 1998]. Можно показать, что скейлинг-функция является радиальной, т.е. зависит только от угла между векторами x, y при фиксированных $|x|, |y|$. Вне шара по каждому из аргументов x, y скейлинг-функция гармоническая.

Определение 2. [Freedon, Schneider, 1998]. Сферическим вейвлетом и его двойственным вейвлетом уровня j называются соответственно функции:

$$\Psi_j(x, y) = \Phi_{j+1}(x, y) - \Phi_j(x, y), \quad (11)$$

$$\tilde{\Psi}_j(x, y) = \Phi_{j+1}(x, y) + \Phi_j(x, y). \quad (12)$$

Символы $\psi_j(n)$ и $\tilde{\psi}_j(n)$ определяются выражениями $\psi_j(n) = \varphi_{j+1}(n) - \varphi_j(n)$ и $\tilde{\psi}_j(n) = \varphi_{j+1}(n) + \varphi_j(n)$, где $n=0, 1, 2, \dots$

Вейвлет-разложение произвольной функции $F \in L^2(\Omega_R)$ состоит в вычислении двух коэффициентов – скейлинг-коэффициента $a_{j_0}(y)$ и вейвлет-коэффициента $c_j(y)$ – по формулам свертки

$$a_{j_0}(y) = (\Phi_{j_0} F)(y) = \int_{\Omega_R} \Phi_{j_0}(y, z) F(z) d\omega(z), \quad (13)$$

$$c_j(y) = (\Psi_j F)(y) = \int_{\Omega_R} \Psi_j(y, z) F(z) d\omega(z), \quad (14)$$

и в результате имеет вид [Freedon, Schneider, 1998]

$$F_j(x) = (\Phi_{j_0} a_{j_0})(x) + \sum_{j=j_0}^{J-1} (\tilde{\Psi}_j c_j)(x). \quad (15)$$

Ряд (15) сходится по норме в L^2 . Равномерная сходимость имеет место на каждом подмножестве $K \subset \Omega_R^{ext}$ при условии $\bar{K} \cap \Omega_R = \emptyset$.

Для сферического вейвлет-разложения (15) имеет место кратно-масштабный анализ [Freedon, Schneider, 1998]. Сначала определяют так называемые масштабирующее V_j и детализирующее W_j пространства. Первое из них – образ свертки функций из $L^2(\Omega_R)$ со скейлинг-функцией $V_j = \{\Phi_j a_j \mid a_j = \Phi_j F, \forall F \in L^2(\Omega_R)\}$; второе – образ свертки функций с вейвлетами $W_j = \{\tilde{\Psi}_j c_j \mid c_j = \Psi_j F, \forall F \in L^2(\Omega_R)\}$. Введенные пространства определяют кратно-масштабный анализ $L^2(\Omega_R)$ со свойствами:

$$1) V_0 \subset \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots \subset L^2(\Omega_R); \quad 3) V_j = V_{j-1} + W_{j-1};$$

$$2) \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j \text{ плотно в } L^2(\Omega_R); \quad 4) V_J = V_{j_0} + \sum_{j=j_0}^{J-1} W_j.$$

Сумма подпространств в свойствах 3, 4, вообще говоря, не является прямой или ортогональной.

Из перечисленных свойств следует, что F_j , являясь результатом вейвлет-аппроксимации F , принадлежит подпространству V_j и, таким образом, верно представление $F_j = \Phi_j a_j$, где $a_j = \Phi_j F$; V_j образуют последовательность вложенных аппроксимирующих подпространств (переход к более высокому уровню j означает более подробную детализацию функции, к низкому – более грубую). Кроме того, имеет место аналогия вейвлетов с фильтрами: $F_j = \Phi_j a_j$ есть результат низкочастотной фильтрации F ; $\tilde{\Psi}_j c_j$ – результат полосовой фильтрации F .

Выбор вейвлета

Для задания вейвлет-разложения необходимо выбрать символ скейлинг-функции $\phi_j(n)$. Выбор осуществляется в соответствии с принципом неопределенности, которому подчиняются вейвлеты. В данной работе удобнее использовать вейвлеты Абеля–Пуассона, задаваемые символом

$$\phi_j(n) = e^{-2^{-j}n}. \quad (16)$$

Вид символа скейлинг-функции Абеля–Пуассона для двух значений j приведен на рис. 1.

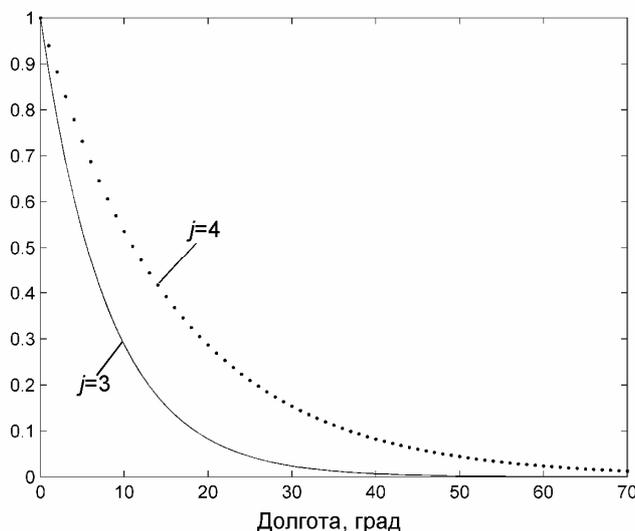


Рис. 1. Символ скейлинг-функции Абеля–Пуассона $\phi_j(n)$ для $j=3$ (сплошная линия) и $j=4$ (пунктирная линия)

Вейвлеты этого типа имеют хорошую локализацию в пространстве, что важно в решаемой задаче трансформации данных аэрогравиметрии, для которой характерны краевые эффекты и малые размеры области анализа данных. Скейлинг-функция Абеля–Пуассона (рис. 2) определена на декартовом произведении $\Omega_R^{ext} \times \Omega_R^{ext}$ и имеет вид элементарной функции [Fengler, Freedен, Gutting, 2004]:

$$\Phi_j(x, y) = \frac{1}{4\pi|x||y|} \frac{1 - b_j^2}{(1 + b_j^2 - 2b_j t)^{3/2}}, \text{ где } b_j = e^{-2^{-j} \frac{R^2}{|x||y|}}, t = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|}. \quad (17)$$

Возможность такого представления рассматриваемой функции существенно упрощает алгоритмы.

Для вейвлет-разложения (15) в этом случае имеет место оценка:

$$\|F - F_j\|_{L^2(\Omega_R)} \leq \varepsilon_J^{SWT} \|F\|_{L^2(\Omega_R)}, \quad (18)$$

где $\varepsilon_J^{SWT} = C \cdot 2^{-J}$ – погрешность вейвлет-аппроксимации, $C > 0$ [Fengler, Freedен, Gutting, 2004].

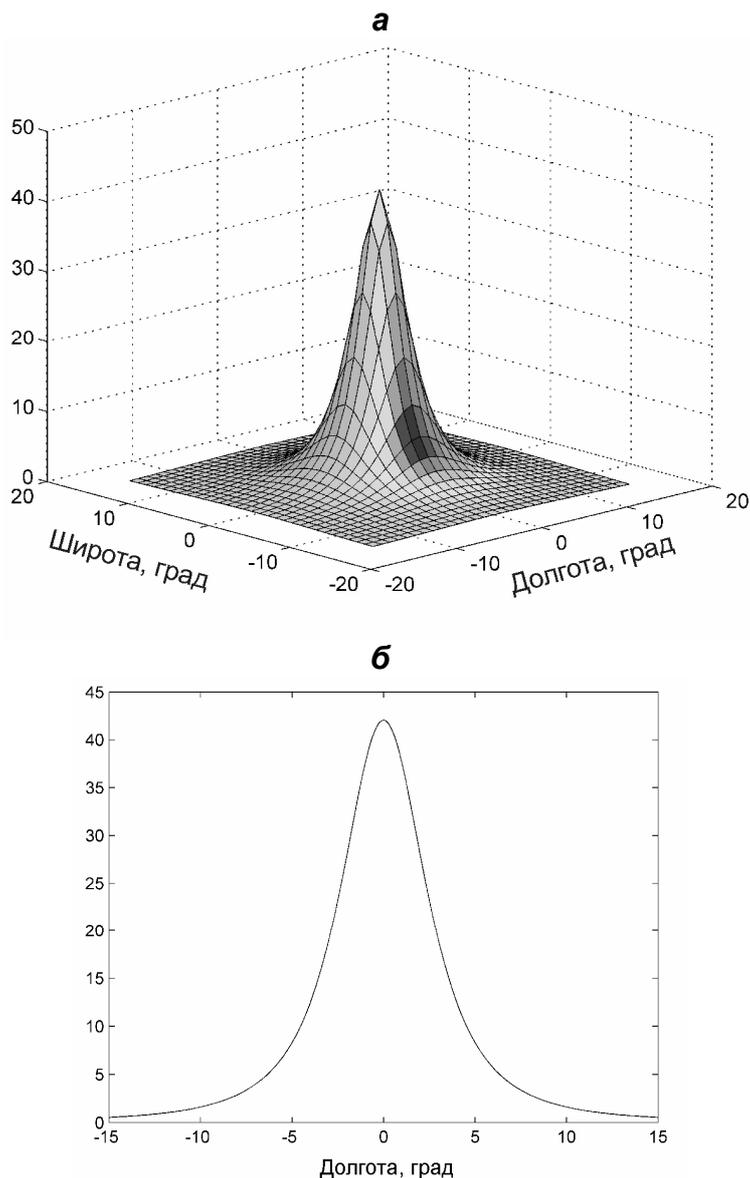


Рис. 2. Скейлинг-функция Абеля–Пуассона Φ_j для $j=4$ (а) и сечение через ее максимальное значение (б)

Выбор масштабного уровня вейвлет-разложения

Выясним, как выбирается уровень J вейвлет-разложения (15). С одной стороны, как следует из (18), чем выше J , тем точнее вейвлет-аппроксимация функции. Однако на практике существует ограничение.

Рассмотрим вейвлет-разложение аномалии силы тяжести g , полученной по авиационным измерениям, которые характеризуются минимальной определяемой длиной волны λ_{\min} и максимальной частотой определяемой гармоники $M_{\max} = 2\pi R / \lambda_{\min}$. С учетом свойств кратно-масштабного анализа вейвлет-разложение (15) аномалии g может быть записано в виде двойной свертки g со скейлинг-функцией максимального уровня J :

$$g_J(x) = (\Phi_J a_J)(x) = (\Phi_J (\Phi_J g))(x). \quad (19)$$

Операция вейвлет-разложения (19) является низкочастотной фильтрацией g . Значимая полоса пропускания частот гармоник состоит из целых неотрицательных n , для которых $\varphi_J^2(n) \geq \alpha$, где α – уровень среза, задаваемый пользователем. С ростом J полоса пропускания частот увеличивается.

Таким образом, возникает естественное ограничение на выбор J : фильтр (19) должен пропускать частоты вплоть до M_{\max} и подавлять более высокие недостоверные частоты. Для этого уровень J следует определять как наибольшее целое, удовлетворяющее неравенству:

$$\varphi_J^2(M_{\max}) \leq \alpha, \quad (20)$$

где α выбрано пользователем. В силу убывания $\varphi_J^2(n)$ с ростом n неравенство (20) верно также для всех $n > M_{\max}$. С помощью (16) из (20) максимальный уровень вейвлет-разложения J определяется как

$$J = \left\lceil \log_2 \left| \frac{M_{\max}}{\log \alpha} \right| \right\rceil + 1. \quad (21)$$

Формула (21) предлагается в [Fengler, Freedden, Gutting, 2004] и приводится авторами данной работы без пояснений.

Представим аномалию силы тяжести g в виде суммы:

$$g = g_{M_{\max}} + \delta g, \quad (22)$$

где $g_{M_{\max}}$ – составляющая аномалии, содержащая гармоники с частотами не выше M_{\max} ; δg – “хвост” ряда, содержащий гармоники с более высокими (недостоверными) частотами. Потребуем, чтобы преобразование (19) подавляло составляющую δg , т.е. чтобы $\delta g_J = \Phi_J(\Phi_J \delta g)$ – результат низкочастотной вейвлет-фильтрации δg – был бы сколь угодно мал в зависимости от выбора уровня среза α .

Утверждение 1. Имеет место неравенство

$$\max_{x \in \Omega_R^{ext}} |\delta g_J(x)| \leq \varepsilon(\alpha), \quad \text{где} \quad \varepsilon(\alpha) = \alpha \max_{x \in \Omega_R} |\delta g(x)|, \quad (23)$$

которое легко доказывается с помощью неравенства Гельдера для L^2 -нормы функции δg_J и принципа максимума для гармонической вне шара функции $|x| \delta g_J(x)$ и не приводится авторами в данной работе.

Утверждение 1 позволяет определять величину α по заданной абсолютной ошибке $\varepsilon(\alpha)$, обычно выражаемой в аэрогравиметрии в милигаллах ($1 \text{ мГал} = 10^{-5} \text{ м/с}^2$).

В качестве примера вычислим уровень J для измерений аномалии силы тяжести с минимальной длиной волны $\lambda_{\min} = 5$ км. Максимальная частота M_{\max} равна примерно 8000; величина высокочастотной составляющей аномалии δg в (22) не превышает 5 мГал. Из (21) находим значение максимального уровня $J=12$ при $\alpha=2 \cdot 10^{-2}$ и получаем по (23) значение абсолютной ошибки $\varepsilon(\alpha)=0.1$ мГал.

Дискретизация сферического вейвлет-разложения

На местности аэрогравиметрические съемки проводятся обычно в пределах небольших прямоугольных участков по галсам (прямолинейным параллельным отрезкам), ориентированным, как правило, в направлении север–юг. После проведения предварительных этапов постобработки авиационных измерений можно считать, что данные заданы в узлах равномерной прямоугольной сетки.

Скейлинг- и вейвлет-коэффициенты могут быть вычислены путем дискретизации интегралов (13), (14) по квадратурным формулам, состоящим из набора интегральных весов и узловой сетки. В квадратурной формуле, применяемой нами, используется стандартная эквиангулярная сетка, недостатком которой является уплотнение разбиения на высоких широтах, не позволяющее корректно отображать точки авиационных

измерений. Однако в силу малого размера участка съемки эта проблема легко устраняется сдвигом начала отсчета широты узлов, благодаря чему можно всегда добиться равномерности эквиангулярной сетки для данного участка съемки.

Утверждение 2. Квадратурная формула для скейлинг-коэффициента имеет вид

$$a_j(y) = \int_{\Omega_r} \Phi_j(y, z) g(z) d\omega(z) \approx \sum_{s=1}^N \omega_s \Phi_j(y, z_s) g(z_s). \quad (24)$$

Здесь z_s – узлы эквиангулярной сетки ($s = 1, \dots, N$, $N = 2M_{\max}^2$), представляемые как $z_s = z_{k,m} = r(\cos \lambda_k \cos \varphi_m, \sin \lambda_k \cos \varphi_m, \sin \varphi_m)^T$; ω_s – интегральные веса, зависящие только от сферической широты $\omega_s = \omega_{k,m} = \frac{\pi^2 r^2}{M_{\max}^2} \cos \varphi_m$; $r = R + h$; сферические долгота λ_k и широта φ_m задаются формулами $\lambda_k = \frac{k\pi}{M_{\max}}$, $\varphi_m = -\frac{\pi}{2} + \frac{(2m-1)\pi}{2M_{\max}}$, где $k=0, \dots, 2M_{\max}-1$, $m=1, \dots, M_{\max}$. Как и ранее, M_{\max} – максимальная частота определяемой гармонике аномалии силы тяжести. Квадратурная формула точна для всех сферических функций степени не выше $2M_{\max}$.

При выводе вышеприведенной квадратурной формулы использовались метод трапеций и квадратура Гаусса–Чебышева (доказательство авторами в данной работе не приводится).

Теперь остановимся на выборе квадратурной формулы для вычисления интегральных сверток в (15). Существует множество квадратурных формул с разными типами узловых сеток (скейлинг- и вейвлет-коэффициенты могут быть вычислены в любой точке на сфере). Наиболее известные рассмотрены в [Schmidt, Fengler, 2007].

Нами используется квадратурная формула с узлами на эквиангулярной сетке [Fengler, Freedon, Gutting, 2004]. Преимуществом выбранной нами квадратурной формулы перед большинством других является наличие аналитических выражений для интегральных весов.

Утверждение 3 [Fengler, Freedon, Gutting, 2004]. Формула дискретного вейвлет-разложения имеет вид

$$g_J(x) = \sum_{i=1}^{N_{j_0}} \omega_{i_0} a_{ij_0} \Phi_{j_0}(x, y_{ij}) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{i=1}^{N_j} \omega_{ij} c_{ij} \tilde{\Psi}_j(x, y_{ij}), \quad (25)$$

где $a_{ij} = a_j(y_{ij})$ и $c_{ij} = c_j(y_{ij})$ – скейлинг- и вейвлет-коэффициенты соответственно; y_{ij} – узлы эквиангулярной сетки, $i = 1, \dots, N_j$, $N_j = (2M_j + 1) \cdot 2M_j$, задаваемые формулами

$$y_{ij} = y_{k,m}^j = r(\cos \lambda_{kj} \cos \varphi_{mj}, \sin \lambda_{kj} \cos \varphi_{mj}, \sin \varphi_{mj})^T, \quad (26)$$

$$\lambda_{kj} = \frac{k\pi}{M_j}, \quad \varphi_{mj} = -\frac{\pi}{2} + \frac{m\pi}{2M_j}, \quad (27)$$

в которых λ_{kj} , φ_{mj} – сферические долгота и широта соответственно; $k = 0, \dots, 2M_j - 1$; $m = 1, \dots, 2M_j$, $M_j = \lceil 2^j |\log \alpha| \rceil$, α определено в (23); ω_{sj} – интегральные веса, зависящие только от сферической широты φ_{mj} :

$$\omega_{sj} = \omega_{k,m}^j = \frac{2\pi r^2}{M_j^2} \cos \varphi_{mj} \sum_{n=0}^{M_j-1} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1)\varphi_{mj}. \quad (28)$$

Квадратурная формула точна для всех сферических функций степени не выше $2M_{\max}$.

Оптимальная пространственная локализация сферического вейвлета

Поскольку скейлинг-функция Абеля–Пуассона конечным носителем не обладает, то формально интегрирование и суммирование в (24) и (25) должны проводиться по всей сфере, что довольно трудоемко. Однако скейлинг-функция $\Phi_j(x, \cdot)$ имеет хорошую локализацию в пространстве в том смысле, что она быстро убывает при удалении от своего центра $x \in \Omega_r$. Таким образом, $\Phi_j(x, \cdot)$ можно “обрезать”, считая, что вне некоторого сферического сегмента $D_j(x)$ с центром x на Ω_r скейлинг-функция равна нулю при заданной относительной ошибке ε_{Φ_j} . Зависимость сферического радиуса θ_j сегмента D_j от ошибки ε_{Φ_j} установлена авторами в Утверждении 4 (см. ниже).

Будем обозначать разность между исходным вейвлет-разложением функции g и вейвлет-разложением g , полученным с помощью “обрезанной” скейлинг-функции, через Δg_j . Через θ_j обозначим сферический радиус сегмента $D_j(x) \subset \Omega_r$ с центром x :

$$D_j(x) = \left\{ y \in \Omega_r \mid \cos \theta_j \leq \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \right\}.$$

Утверждение 4. Пусть задана относительная погрешность ε_{Φ_j}

$$\max_{x \in \Omega_r} |\Delta g_j(x)| \leq \varepsilon_{\Phi_j} \max_{x \in \Omega_r} |g(x)|. \quad (29)$$

Тогда минимальный радиус носителя скейлинг-функции $r_j = r\theta_j$ достигается при значении сферического радиуса θ_j , определяемом формулой:

$$\theta_j = \arccos \left(\frac{1 + b_j^2}{2b_j} - \frac{(1 - b_j^2)^2}{2b_j(1 - b_j + \varepsilon_{\Phi_j})^2} \right), \quad (30)$$

где $b_j = e^{-2^{-j}}$.

Методика трансформации аномального гравитационного поля Земли, построенного по данным аэрогравиметрии

Выше была проведена адаптация метода сферического вейвлет-разложения [Fengler, Freedon, Gutting, 2004] для аппроксимации аномального поля, построенного по данным аэрогравиметрии. Ниже излагается алгоритм аппроксимации и исследуется его методическая погрешность. Оказывается, что методическую погрешность можно уменьшить, проводя вейвлет-разложение итерационно по уровню j вместо вычисления по (25).

Итерационный алгоритм вейвлет-аппроксимации аномального поля

Обозначим через g_{air} аномальное поле, построенное по данным аэрогравиметрии. При решении задачи трансформации обычно вместо g_{air} рассматривают остаточное аномальное поле, вычитая из g_{air} длинноволновую составляющую g_{low} , получаемую, как правило, по данным глобальной модели. Для простоты предположим, что авиационные измерения и данные глобальной модели свободны от погрешностей измерений.

Доопределим остаточное аномальное поле, положив его вне области съемки E равным нулю:

$$\bar{g}_{res} = \begin{cases} g_{air} - g_{low}, & E \subset \Omega_r, \\ 0, & \Omega_r \setminus E \end{cases}$$

где введена разность множеств $\Omega_r \setminus E$. Итерационный алгоритм вейвлет-аппроксимации включает следующие шаги.

1. Вейвлет-аппроксимация остаточной аномалии \bar{g}_{res} на уровне j_0 :

$$\bar{g}_{res}^{j_0}(x) = \sum_{y_{j_0} \in D_{j_0}(x_k)} \omega_{y_{j_0}} a_{y_{j_0}} \Phi_{j_0}(x, y_{j_0}), \quad (31)$$

где $x \in \Omega_r$.

Скейлинг-коэффициенты и интегральные веса в (31) вычисляются по (24) и (28). Результат вейвлет-разложения (31) равен нулю вне области E_{j_0} , получаемой расширением границ E на ширину носителя D_{j_0} скейлинг-функции.

2. Вычисление остаточной высокочастотной составляющей аномалии $\bar{g}_{res}^{(j_0)}$ в узлах z_{s, j_0+1} в E_{j_0} :

$$\bar{g}_{res}^{(j_0)}(z_{s, j_0+1}) = \bar{g}_{res}(z_{s, j_0+1}) - \bar{g}_{res}^{j_0}(z_{s, j_0+1}). \quad (32)$$

3. Повторение шагов 1–2 при замене j_0 на j_0+1 и \bar{g}_{res} на $\bar{g}_{res}^{(j_0)}$.

4. Итерации прекращаются при $j_0 = J$ на шаге 1.

Для завершения алгоритма суммируем вычисленные компоненты $\bar{g}_{res}^{j_0}, \dots, \bar{g}_{res}^J$:

$$\tilde{g}_{res}^J(x) = \sum_{j=j_0}^J \bar{g}_{res}^j(x), \quad (33)$$

где $x \in \Omega_r$. Вне области E_J , получаемой расширением границ E на суммарную ширину носителей скейлинг-функций, т.е. на $2r_{j_0} + \dots + 2r_J$, $\tilde{g}_{res}^J = 0$.

Оценивая методическую погрешность алгоритма вейвлет-аппроксимации, авторы получили результат, показывающий, в частности, что погрешность минимальна внутри области съемки E и возрастает с удалением от нее. Каждое слагаемое в (33) содержит ошибки, вызванные разрывностью \bar{g}_{res} на краях области съемки (краевые эффекты, аналогичные эффектам Гиббса). Обозначим через g_{res} истинное остаточное аномальное поле и через $g_{res}^{(J-1)}$ истинную высокочастотную составляющую поля.

Утверждение 5. Пусть $j_0 < J$. Тогда имеет место оценка рассматриваемой методической погрешности:

$$\Delta(x) = |g_{res}(x) - \tilde{g}_{res}^J(x)| \leq (\varepsilon_J^{SWT} + \varepsilon_{\Phi_J}) \|g_{res}^{(J-1)}\|_{C(\Omega_r)} + \alpha \|\delta g\|_{C(\Omega_r)} + V_E^J(x) \|g_{res}\|_{C(\Omega_r)}, \quad (34)$$

где $x \in \Omega_r$; ε_J^{SWT} , ε_{Φ_J} – относительные погрешности вейвлет-аппроксимации (18) и “обрезания” скейлинг-функции (29) соответственно; α – относительная погрешность вейвлет-фильтрации (23), δg – коротковолновая составляющая аномалии, определенная в (22); $\|\cdot\|_{C(\Omega_r)}$ – норма в пространстве непрерывных функций $C(\Omega_r)$, определяемая формулой $\|f\|_{C(\Omega_r)} = \max_{\Omega_r} |f|$; V_E^J – неотрицательная, монотонно возрастающая при удалении от области съемки E функция (скорость роста погрешности), имеющая вид

$$V_E^J(x) = 1 - \int_{D_j(x)} \Phi_J(x, y) \left(\int_{D_j(y) \cap E} \Phi_J(y, z) d\omega(z) \right) d\omega(y) \quad (35)$$

и достигающая максимума (равного 1) на расстоянии ширины носителя скейлинг-функции $2r_j$.

Заметим, что предлагаемый итерационный алгоритм имеет меньшую методическую погрешность, чем алгоритм вейвлет-аппроксимации (25), что достигается благодаря аппроксимации на каждом шаге остаточных высокочастотных составляющих аномалии, тогда как в (25) за один шаг аппроксимируется аномалия, содержащая весь рассматриваемый частотный диапазон.

Вейвлет-трансформация аномального гравитационного поля Земли

Трансформации аномального гравитационного поля Земли сводятся к решению обратной задачи определения возмущающего потенциала $T|_0$ из соотношения

$$g|_h(x) = \Lambda T|_0(x) = \int_{\Omega_R} K_\Lambda(x, y) T|_0(y) d\omega(y), \quad (36)$$

где, напомним, Λ – компактный оператор; $\Lambda : L^2(\Omega_R) \rightarrow L^2(\Omega_r)$; $r = R + h$; K_Λ – интегральное ядро оператора; $g|_h$ – аномалия силы тяжести на высоте съемки. Сферическое вейвлет-разложение регуляризует задачу (36), так как

$$\begin{aligned} \|\Lambda^{-1} g|_h^J\|_{L^2(\Omega_r)}^2 &= \sum_{n=2}^{\infty} s_n^{-2} \varphi_J^4(n) \sum_{k=-n}^n g_{nk}^2 \leq \|g|_h\|_{L^2(\Omega_r)}^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^2}{(n+1)^2} \left(\frac{r}{R} e^{-2^{-j+1}} \right)^{2n} < \infty, \text{ если} \\ &\frac{r}{R} e^{-2^{-j-1}} < 1, \end{aligned} \quad (37)$$

т.е. условие (9) выполняется. Напомним также, что $\varphi_J(n)$ – символ скейлинг-функции Абеля–Пуассона; s_n^{-1} – сингулярные числа обратного оператора Λ^{-1} ; g_{nk} – коэффициенты разложения аномалии $g|_h$ по сферическим гармоникам. Применяя Λ^{-1} к результату вейвлет-аппроксимации (33) и вводя обозначение $\tilde{T}|_0^J = \Lambda^{-1} \tilde{g}_{res}^J$, определим методическую погрешность вейвлет-трансформации. Обозначим пространственное разрешение данных аэрогравиметрии через s .

Утверждение 6. Пусть $j_0 < J$ и выполняется соотношение (37). Тогда методическая погрешность определения возмущающего потенциала ограничена величиной

$$\begin{aligned} \Delta_0(x) = \left| T|_0(x) - \tilde{T}|_0^J(x) \right| &\leq s\pi^{-1} e^{\frac{\pi h}{s}} \left((\varepsilon_J^{SWT} + \varepsilon_{\Phi_J}) \|g_{res}^{(J-1)}\|_{C(\Omega_r)} + \alpha \|\delta g\|_{C(\Omega_r)} \right) + \\ &+ \varepsilon_{\tilde{\Phi}_J} R \|g_{res}\|_{C(\Omega_r)} + \tilde{V}_E^J(x) R \|g_{res}\|_{C(\Omega_r)}, \end{aligned} \quad (38)$$

где $x \in \Omega_R$; ε_J^{SWT} , ε_{Φ_J} , $\varepsilon_{\tilde{\Phi}_J}$ – относительные погрешности вейвлет-аппроксимации (18), “обрезания” скейлинг-функции (29) и функции $\tilde{\Phi}_J = \Lambda^{-1} \Phi_J$ соответственно; α – относительная погрешность вейвлет-фильтрации (23); δg – коротковолновая составляющая аномалии (22); \tilde{V}_E^J – неотрицательная, монотонно возрастающая при удалении от области съемки E функция (скорость роста погрешности)

$$\tilde{V}_E^J(x) = 1 - \int_{\tilde{D}_J(x)} \tilde{\Phi}_J(x, y) \left(\int_{D_J(y) \cap E} \Phi_J(y, z) d\omega(z) \right) d\omega(y), \quad (39)$$

достигающая максимума (равного 1) на расстоянии суммы радиусов носителей скейлинг-функции и функции $\tilde{\Phi}_J$.

Утверждение 7. Оценка (остаточного) возмущающего потенциала имеет вид

$$\tilde{T}|_0^J(x) = \sum_{j=J_0}^J \sum_{y_{ij} \in \tilde{D}_j(x)} \omega_{ij} a_{ij} \tilde{\Phi}_j(x, y_{ij}); \quad (40)$$

в этом выражении коэффициенты a_{ij} вычислены по (24); $\tilde{D}_j(x)$ – носитель функции $\tilde{\Phi}_j$, определяемой формулой

$$\tilde{\Phi}_j(x, y) = \frac{1}{2\pi R^2} \frac{1}{\sqrt{1+b_j^2-2b_j t}} - \frac{1}{4\pi R^2 b_j} \ln \left| \frac{b_j - t + \sqrt{1+b_j^2-2b_j t}}{1-t} \right|, \quad (41)$$

где $b_j = \frac{r}{R} e^{-2^{-j}}$; $t = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|}$.

Выражение для полного возмущающего потенциала на поверхности геоида получается возвращением в (40) низкочастотной составляющей.

Здесь целесообразно сделать ряд замечаний.

1. Из вида оценки (38) следует, что погрешность трансформации можно минимизировать. С уменьшением области E от каждого края на ширину носителя последнее слагаемое в (38) (вызванное краевыми эффектами) оказывается равным нулю. Величина предпоследнего слагаемого зависит от выбора радиуса носителя: чем больше радиус, тем меньше ошибка, но меньше и область, свободная от краевых эффектов. Первое слагаемое в (38) есть проявление некорректности решаемой задачи трансформации, вследствие которой экспоненциально увеличивается ошибка вейвлет-аппроксимации. Это слагаемое зависит, главным образом, от отношения высоты съемки к разрешению данных h/s – чем больше высота и лучше разрешение, тем выше ошибка трансформации и ниже устойчивость решения. Аэрогравиметрические съемки обычно выполняются на высотах от 0.5 до 5 км при разрешении от 1 до 2.5 км, т.е. отношение h/s меняется от 0.2 до 5.

2. С помощью гармонического продолжения входящей в (40) функции $\tilde{\Phi}_j$ (результата свертки скейлинг-функции с функцией Грина) можно найти значение возмущающего потенциала в любой точке x вне сферы Ω_R , приняв в формуле (41)

$$b_j = \frac{r}{|x|} e^{-2^{-j}}, \quad \text{где } |x| > R.$$

3. Аналогично получению оценки возмущающего потенциала в (40) могут быть вычислены другие основные трансформации. Выпишем, например, оценку для остаточного аномального поля на поверхности геоида:

$$\tilde{g}_0^J(x) = \sum_{j=J_0}^J \sum_{y_{ij} \in \tilde{D}_j(x)} \omega_{ij} a_{ij} \tilde{\Phi}_j(x, y_{ij}), \quad (41)$$

где функция $\tilde{\Phi}_j$ (результат свертки скейлинг-функции с соответствующей функцией Грина) имеет вид:

$$\tilde{\Phi}_j(x, y) = -\frac{1}{4\pi R^2} \frac{1-b_j^2}{(1+b_j^2-2b_j t)^{3/2}},$$

где b_j и t определены в (41).

Далее приводятся результаты численной реализации алгоритма трансформации аномального гравитационного поля Земли.

Результаты расчетов

Представленный выше алгоритм был тестирован на модельных данных, полученных в результате пересчета реальных наземных гравиметрических измерений на высоту $h=500$ м. Для учета влияния дальних зон нами использовались данные глобальной модели *EGM96*. Выполнялись две трансформации – пересчет поля вниз с уровня наблюдения на поверхность геоида и вычисление северной компоненты уклонения отвесной линии.

Описание данных

Приведенное на рис. 3 аномальное гравитационное поле построено по исходным наземным данным ($h=0$ м), полученным в районе Черного моря для участка размером $1^\circ \times 1^\circ$ по эквиангулярной сетке с шагом 0.02° (2.2 км), и использовано в данной работе для сравнения с результатом реализованных вейвлет-трансформаций.

Вейвлет-аппроксимация аномального поля, полученного в результате пересчета наземных данных на высоту $h=500$ м, проводилась по итерационному алгоритму (33) для значений начального уровня $j_0=10$ и конечного $J=12$. Радиус носителя скейлинг-функции уровня $J=12$ выбран равным 5 км. Продолжение результата вейвлет-аппроксимации поля вниз на поверхность геоида (рис. 4) было получено по формуле (41).

Сравнение с наземными данными

Результат продолжения аномального поля вниз на поверхность геоида в сравнении с исходными наземными данными имеет среднеквадратическое отклонение 0.1 мГал (в уменьшенной из-за влияния краевых эффектов области). На рис. 5 изображена разность исходного аномального поля и результата трансформации. Краевые эффекты (выбросы порядка 20 мГал) заметны на расстоянии не более 0.1° , что согласуется с теоретическим результатом (38) (краевые эффекты на расстоянии не более ширины носителя). Абсолютная погрешность внутри области не превосходит 2 мГал.

На рис. 6 представлены долготные сечения полей вдоль серединной широты рассматриваемого участка.

Результат второй трансформации сравнивался с северной компонентой уклонения отвесной линии, вычисленной по исходным наземным данным.

Статистические характеристики ошибок обеих трансформаций для всего исследуемого участка и для участка, уменьшенного на 0.1° от каждого края, приведены в таблице на с. 48.

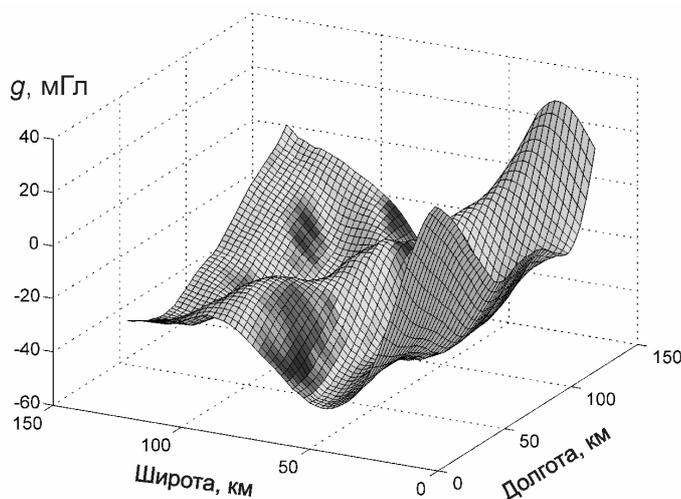


Рис. 3. Аномальное гравитационное поле g , построенное по исходным данным ($h=0$ м)

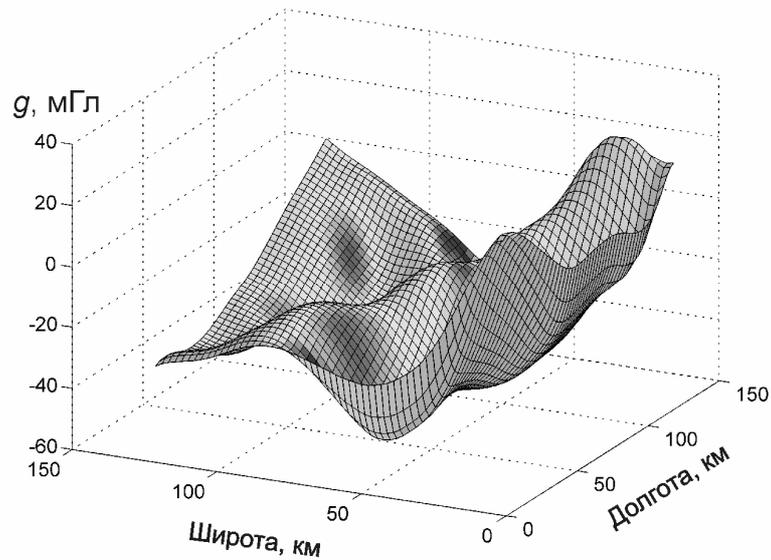


Рис. 4. Аномальное гравитационное поле, полученное в результате вейвлет-трансформации (вейвлеты Абеля–Пуассона), $J=12$ ($h=0$ м)

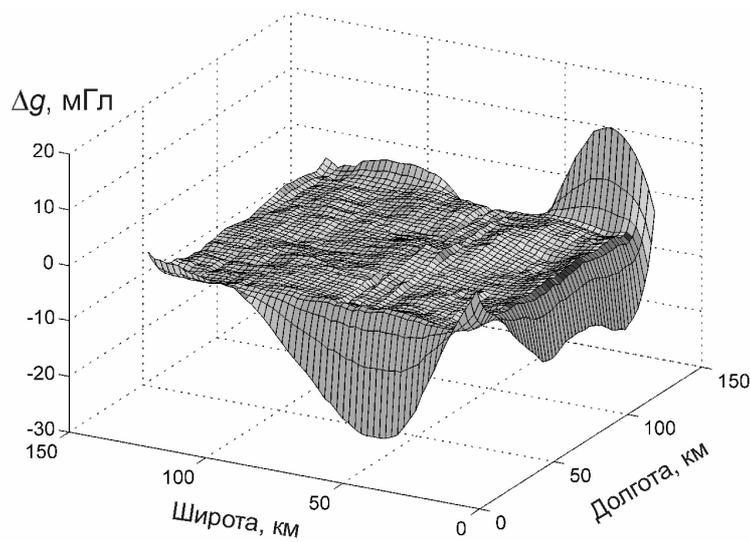


Рис. 5. Разность исходного аномального гравитационного поля и поля, полученного в результате вейвлет-трансформации

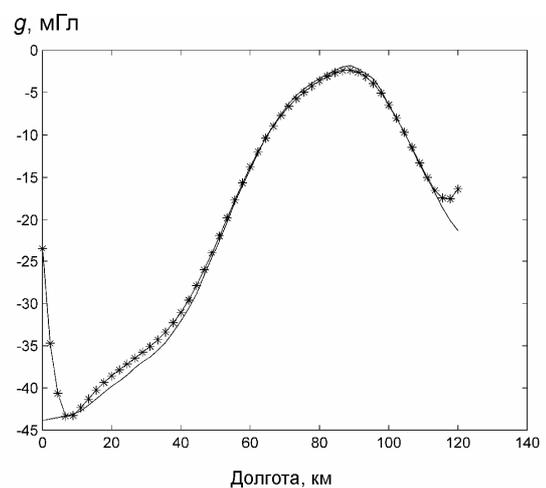


Рис. 6. Графики исходного аномального поля (сплошная линия) и поля, полученного в результате вейвлет-трансформации (звездочки) в зависимости от долготы

Статистические характеристики ошибок двух выполненных трансформаций

	Разности аномального поля, построенного по наземным данным, и поля, полученного в результате трансформации, мГал		Разности северного уклонения отвесной линии, построенного по наземным данным, и полученного в результате трансформации, угл.с	
	Исходный участок	Уменьшенный участок	Исходный участок	Уменьшенный участок
Максимальное значение	20.69	1.87	35.20	5.85
Среднее значение	-0.43	-0.22	-0.24	-0.86
Среднеквадратическое отклонение	1.46	0.10	1.36	0.15

Заключение

В данной работе предлагается методика трансформации аномального гравитационного поля, построенного по данным аэрогравиметрии, на основе их комбинирования с данными глобальной модели (*EGM96*). Математическим инструментом в данной методике является аппарат сферического вейвлет-разложения, предложенный в работах В. Фредена [*Fengler, Freedен, Gutting, 2004; Freedен, Schneider, 1998*]. За счет выбора масштаба пространственно-частотного окна вейвлета появляется возможность минимизировать влияние краевых эффектов, возникающих при комбинировании данных.

Алгоритмы методики были реализованы численно и тестированы на модельных данных. Полученные результаты позволяют говорить о более высокой точности трансформации по данной методике в сравнении с традиционным методом Фурье на плоскости [*Тихонов, Гласко, Литвиненко, 1968*]. Более высокая точность достигается, главным образом, за счет лучшей аппроксимации аномального поля, как внутри, так и вне области съемки. В методе Фурье используется доопределение вне области съемки по 2π -периодичности, что порождает при трансформации более существенные краевые эффекты, снижающие точность получаемых карт.

В работе установлены аналитические выражения для зависимостей погрешностей алгоритмов трансформации от разрешения s аэрогравиметрических данных и высоты h съемки. Решение задачи трансформации устойчиво при небольших значениях h/s .

Итерационный алгоритм вейвлет-разложения аномалии, используемый в методике трансформации, может быть адаптирован для решения задачи совместного оценивания вейвлет-коэффициентов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00703а) и гранта РНП 2.1.1.12635.

Литература

- Болотин Ю.В., Голован А.А., Парусников Н.А. Уравнения аэрогравиметрии. Алгоритмы и результаты испытаний. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2002. 96 с.
- Дробышев Н.В., Конешов В.Н., Папуша И.А., Попеленский М.Ю., Рожков Ю.Е. Рекуррентный алгоритм определения уклонений отвесной линии по данным гравиметрической съемки, основанный на стохастическом подходе // Гироскопия и навигация. 2006. № 2. С.26–34.
- Тихонов А.Н., Гласко В.Б., Литвиненко О.К., Мелихов В.Р. О продолжении потенциала в сторону возмущающих масс в гравиметрической и магнитной разведке на основе метода регуляризации // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1968. № 12. С.30–48.

- Blaha T., Hirsch M., Keller W., Scheinert M.* Application of a spherical FFT approach in airborne gravimetry // *J. Geod.* 1996. V. 70. P.663–672.
- Fengler M.J., Freedon W., Gutting M.* Multiscale modeling from EIGEN-1S, EIGEN-2, EIGEN-GRACE01S, GGM01S, UCPH2002_0.5, EGM96: wavelet coefficients, variances and reconstruction. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2004. P.145–150.
- Fengler M.J., Freedon W., Kohlhaas A., Michel V., Peters T.* Wavelet Modeling of Regional and Temporal Variations of the Earth's Gravitational Potential Observed by GRACE // *J. Geod.* 2008. V. 81. P.5–15.
- Freedon W., Schneider F.* Wavelet approximation on closed surfaces and their application to boundary-value problems of potential theory // *Math. Meth. in the Appl. Sci.* 1998. V. 21. P.129–165.
- Heiskanen W., Moritz H.* Physical geodesy. San Francisco: Freeman, 1967. 375 p.
- Kress R.* Linear integral equations. New York: Springer-Verlag, 1989. 373 p.
- Novak P.* Regional gravity field modeling // *Proceedings of the 50th anniversary of the establishment of the Research Institute of Geodesy, Topography and Cartography.* Prague, 2003. P.105–110.
- Schmidt M., Fengler M.* Regional gravity modeling in terms of spherical base functions // *J. Geod.* 2007. V. 81. P.17–38.
- Schwarz K.P., Sideris M.G., Forsberg R.* The use of FFT in physical geodesy // *Geophys. J. Inter.* 1990. V. 100. P.485–514.
- Tscherning C.C.* Local approximation of the gravity potential by least squares collocation // *Proceedings of the International Summer School on Local Gravity Field Approximation.* Calgary, 1985. P.277–362.

Сведения об авторах

ВЯЗЬМИН Вадим Сергеевич – аспирант, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. 119234, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, уч. корпус 2, комн. 340. Тел.: 8 (495) 939-59-33. E-mail: v.vyazmin@navlab.ru

БОЛОТИН Юрий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, МГУ им. М.В. Ломоносова. 119234, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, уч. корпус 2, комн. 340. Тел.: 8 (495) 939-59-33. E-mail: ybolotin@yandex.ru

ANALYSIS OF AIRBORNE GRAVIMETRY DATA USING SPHERICAL WAVELETS

Yu.V. Bolotin, V.S. Vyazmin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. In airborne gravimetry the data received from an airborne survey system is used to construct maps of gravity anomaly and to calculate their transformations, such as the anomalous gravity at the geoid surface, the disturbing potential, the plumb-line deflections etc. Most of the above are the inverse ill-posed problems. Thereby the quality of the maps depends largely on the methods of transformations. The paper discusses application of the spherical wavelet expansion technique and proposes an algorithm of transformation which is almost free from the method errors.

Keywords: gravimetry, gravity disturbance, wavelets.