ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2012, том 13, № 1, с.7-16

УДК 550.38 550.386

О ПОНДЕРОМОТОРНОЙ СИЛЕ ИОННО-ЦИКЛОТРОННОЙ ВОЛНЫ ВБЛИЗИ ИОННОЙ ГИРОЧАСТОТЫ

© 2012 г. А.В. Гульельми

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

Исследуется пондеромоторная сила в окрестности изолированного полюса показателя преломления ионно-циклотронной волны. Показано, что если плазма содержит электроны и ионы одного сорта, то учет теплового движения ионов устраняет неограниченный рост силы с приближением к полюсу. Задача оказывается более сложной, если плазма многокомпонентная, т.е. содержит ионы нескольких сортов с разным отношением заряда к массе. Подробно проанализирован случай, когда в водородной плазме содержится малая примесь тяжелых ионов, например O^+.

Показано, что при исследовании бесстолкновительной плазмы необходимо разложить полную силу на сумму парциальных сил, действующих раздельно на легкие и тяжелые ионы. Обнаружено, что в плазме с достаточно низкой концентрацией тяжелых ионов учет теплового движения не устраняет сингулярность. Найдена причина появления сингулярности и указан способ регуляризации пондеромоторной силы.

Кратко рассмотрено стационарное течение малой примеси тяжелых ионов в окрестности локальной гирочастоты.

Ключевые слова: магнитосфера, электромагнитные волны, пондеромоторные силы.

Введение

Электромагнитные ионно-циклотронные волны наблюдаются в магнитосфере Земли в диапазоне частот от единиц до сотен герц [*Guglielmi*, *Pokhotelov*, 1996; *Kangas*, *Guglielmi*, *Pokhotelov*, 1998]. Они привлекают внимание теоретиков, прежде всего тем, что содержат информацию о физических процессах в околоземной плазме. Этот информационный аспект исследования описан в монографиях [*Гульельми, Троицкая*, 1973; *Лихтер и др.,* 1988]. Данная статья посвящена другому, а именно "силовому" аспекту теории. Речь пойдет о пондеромоторной силе, действующей на ионы со стороны ионно-циклотронной волны. Ранее этот вопрос обсуждался в рамках модели однокомпонентной холодной плазмы на частотах, не слишком близких к гирочастоте ионов [*Гульельми*, 1992; *Гульельми*, *Фейгин*, *Похотелов*, 1996; *Guglielmi et al*., 1993, 1995, 1996, 1999]. В настоящей статье описаны результаты теоретического исследования пондеромоторной силы ионно-циклотронной волны вблизи ионной гирочастоты в рамках моделей одно- и двухкомпонентной плазмы с учетом и без учета теплового движения ионов. Данное исследование было мотивировано тем соображением, что, во-первых, магнитосферная плазма содержит ионы с различным отношением заряда к массе, и, во-вторых, приближение холодной плазмы, строго говоря, неприменимо, если частота волны достаточно близка к локальной гирочастоте ионов.

Прежде чем приступить к изложению материала, остановимся на вопросе о представлении полной силы, хорошо известной в классической электродинамике [*Ландау*, *Лифшиц*, 1982], в виде суммы парциальных сил, каждая из которых приложена не к среде в целом, а отдельно к совокупности заряженных частиц одного сорта. Возможность такого представления обсуждалась в работе [*Гульельми*, *Лундин*, 2011] в связи с необходимостью раздельного описывания динамики ионов с разным отношением заряда к массе. Напомним, что классическая формула для силы, действующей на среду со стороны быстропеременного электромагнитного поля, применима в случае жидких и твердых диэлектриков, а также в случае однокомпонентной плазмы. Мы приведем аргументы, свидетельствующие, что в случае многокомпонентной плазмы следует, вообще говоря, использовать формулы для парциальных сил.

Холодная однокомпонентная плазма

В приближении холодной бесстолкновительной плазмы квадрат показателя преломления поперечной ионно-циклотронной волны, распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля, равен

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega(\Omega_e + \omega)} + \sum_i \frac{\omega_{0i}^2}{\omega(\Omega_i - \omega)}, \qquad (1)$$

где ω – частота волны, $\omega_0 = (4\pi e^2 N/m)^{1/2}$ – плазменная частота; $\Omega = eB/mc$ – циклотронная частота; e – элементарный электрический заряд; c – скорость света; m и N – масса и концентрация частиц одного сорта; B – величина внешнего магнитного поля. Индекс e означает, что данная величина относится к электронам, i – к ионам. Суммирование в выражении (1) производится по сортам ионов. Для простоты все ионы считаются однозарядными. Напомним, что магнитосферная плазма содержит ионы H^+ солнечного происхождения и относительно небольшую примесь ионов O^+, N^+ и He^+ ионосферного происхождения. Ионы O^+, N^+ и He^+ иногда называют тяжелыми, поскольку у них отношение заряда к массе меньше, чем у H^+; мы также будем употреблять этот не вполне точный термин.

В данном разделе исследуется модель однокомпонентной плазмы, состоящей из электронов и ионов одного сорта. Такая модель приемлема, например, при рассмотрении волн в магнитосфере на частотах ω, близких к Ω_{H^+}, а в ионосфере – близких к Ω_{O^+}. Если $\omega \sim \Omega_i$, то квадрат показателя преломления однокомпонентной плазмы равен

$$n^2 = \frac{\omega_{0i}^2}{(\Omega_i - \omega)\Omega_i} + 1. \qquad (2)$$

При выводе (2) из (1) учтены неравенство $m_e \ll m_i$ и условие квазинейтральности плазмы $N_e = N_i$. Пондеромоторная сила ионно-циклотронной волны параллельна или антипараллельна внешнему магнитному полю **B**:

$$f_{\parallel} = \frac{1}{8\pi}\left[\left(n^2 - 1\right)\nabla_{\parallel} E^2 + E^2 \frac{\partial n^2}{\partial \mathbf{B}} \nabla_{\parallel} \mathbf{B}\right]; \qquad (3)^1$$

здесь E – амплитуда колебаний электрического поля; $\nabla_{\parallel} = B^{-1}\mathbf{B}\cdot\nabla$.

Направим ось z вдоль силовых линий внешнего магнитного поля; для конкретности будем считать, что она направлена в сторону убывания величины B. Разложим функцию $\Omega_i(z)$ в ряд Тейлора в окрестности полюса показателя преломления и ограничимся первыми двумя членами. Тогда

$$n^2 = \frac{\varsigma}{z_\infty - z}, \qquad (4)$$

где $\zeta = \omega_{0i}^2(z_\infty)/\Omega_i(z_\infty)\,|\,\partial\Omega_i/\partial z\,|_{z=z_\infty}$. Положение полюса z_∞ определяется соотношением $\Omega_i(z_\infty) = \omega$. При выбранном направлении оси z волна распространяется в области $z \le z_\infty$.

[1] Выражение (3) будем называть далее формулой Питаевского как непосредственно следующее из теории, предложенной в работе [*Питаевский*, 1960].

Таким образом, для достижения окрестности полюса z_∞ волна должна распространяться в положительном направлении оси *z*, т.е. снизу вверх на ионосферных высотах, как это происходит, например, при распространении так называемых ионных свистов[1].

Пусть задана амплитуда колебаний электрического поля $E_0 = E(0)$ при $z = 0$. В приближении геометрической оптики имеем

$$E(z) = E_0\sqrt{n_0 / n(z)}\,, \tag{5}$$

где $n_0 = n(0)$, причем $0 \le z \le z_\infty$.

Подставляя (4), (5) в формулу Питаевского, при $z \le z_\infty$ получаем

$$f_\parallel = \frac{E_0^2\zeta}{16\pi z_\infty^{1/2}} \frac{1}{(z_\infty - z)^{3/2}}\,. \tag{6}$$

При $z > z_\infty$ имеем $f_\parallel = 0$, так как в область непрозрачности ($n^2 < 0$) волна не проникает. Сингулярность пондеромоторной силы (6) в точке z_∞, вообще говоря, физически недопустима. В дальнейшем мы еще вернемся к этому вопросу.

При выводе (6) неявно предполагалось отсутствие отраженной волны, бегущей в отрицательном направлении оси *z*. Наше предположение об отсутствии отражения вполне приемлемо, если при $0 \le z \le z_\infty$ выполняется приближение геометрической оптики. Между тем, известное условие применимости геометрической оптики

$$\frac{c}{\omega n^2}\left|\frac{\partial n}{\partial z}\right| \ll 1 \tag{7}$$

с учетом (4) имеет вид

$$\frac{c}{2\omega_{0i}} \ll \left|\frac{z_\infty - z}{\partial \ln B / \partial z}\right|^{1/2}$$

и заведомо нарушается при $z \to z_\infty$. Напомним, однако, что универсального критерия применимости геометрической оптики нет. Условие (7) является всего лишь достаточным, но оно отнюдь не обязательно.

Точное решение модельной задачи о падении волны на полюс свидетельствует об отсутствии отражения. При этом оказывается, что в задачах такого рода необходимо вводить предположение о наличии бесконечно малого поглощения волны в окрестности полюса, так как иначе не удается получить физически приемлемую структуру волнового поля (подробности см. в монографии [*Гинзбург*, 1960]).

Учет теплового движения ионов

Вполне понятно, что в реальной плазме ионно-циклотронная волна испытывает не бесконечно малое, а конечное поглощение, возникающее за счет соударений и теплового движения ионов. По-прежнему считая плазму бесстолкновительной, будем рассматривать эффект теплового движения ионов и покажем, что его учет устраняет сингулярность пондеромоторной силы (6).

Воспользуемся решением задачи о структуре ионно-циклотронной волны, которое было найдено в работе [*Будько*, 1979]. Амплитуда колебаний электрического поля описывается формулой

---

[1] Известно, что ионные свисты возбуждаются грозовыми разрядами и их максимальная частота весьма близка к локальной гирочастоте ионов [*Лихтер и др.*, 1988].

$$E(z) = E_0\sqrt{\frac{n_0}{n(z)}}\exp\left[-\frac{\omega}{c}\int_0^z \eta(z)dz\right]. \tag{8}$$

В наших обозначениях действительная n и мнимая η части комплексного показателя преломления $n' = n + i\eta$ описываются следующими формулами:

$$n = \sqrt{\frac{\zeta}{z_\infty - z}}, \quad \eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{c}{w}\left(\frac{\omega_{0i}}{\Omega_i}\right)^2 \frac{z_\infty - z}{\zeta}\exp\left[-\left(\frac{c}{w}\right)^2\left(\frac{z_\infty - z}{\zeta}\right)^3\left(\frac{\omega_{0i}}{\Omega_i}\right)^4\right],$$

где $w = \sqrt{2T/m_i}$ – тепловая скорость движения ионов; T – температура плазмы, которая предполагается изотермической.

Если температура плазмы настолько низкая, что выполняется условие $(c/w)^2(z_\infty/\zeta)^3(\omega_{0i}/\Omega_i)^4 \gg 1$, то подынтегральное выражение в (8) экспоненциально мало при z~0. В этом случае нижний предел интегрирования можно заменить на $-\infty$ и выразить интеграл через неполную гамма-функцию.

Воспользуемся асимптотикой неполной гамма-функции [*Градштейн, Рыжик*, 1962] и преобразуем (8) к следующему виду:

$$E(z) = E_0\left(1-\frac{z}{z_\infty}\right)^{1/4}\exp\left\{-\frac{\sqrt{\pi}}{6}\frac{w\zeta^2\Omega_i^3}{(z_\infty - z)c^2\omega_{0i}^2}\exp\left[-\frac{c^2(z_\infty - z)^3\omega_{0i}^4}{w^2\zeta^3\Omega_i^4}\right]\right\}. \tag{9}$$

Подставляя (4) и (9) в формулу Питаевского, находим пондеромоторную силу, действующую на единицу объема плазмы вблизи локальной гирочастоты ионов:

$$f_\parallel = \frac{E_0^2\zeta}{16\pi z_\infty^{1/2}(z_\infty - z)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\sqrt{\pi}}{3}\frac{w\zeta^2\Omega_i^3}{c^2\omega_{0i}^2(z_\infty - z)}\exp\left[-\frac{c^2\omega_{0i}^4(z_\infty - z)^3}{w^2\zeta^3\Omega_i^4}\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{2\sqrt{\pi}}{3}\frac{w\zeta^2\Omega_i^3}{c^2\omega_{0i}^2}\left[\frac{1}{(z_\infty - z)}+\frac{3c^2\omega_{0i}^4(z_\infty - z)^2}{w^2\zeta^3\Omega_i^4}\right]\exp\left[-\frac{c^2\omega_{0i}^4(z_\infty - z)^3}{w^2\zeta^3\Omega_i^4}\right]\right\}. \tag{10}$$

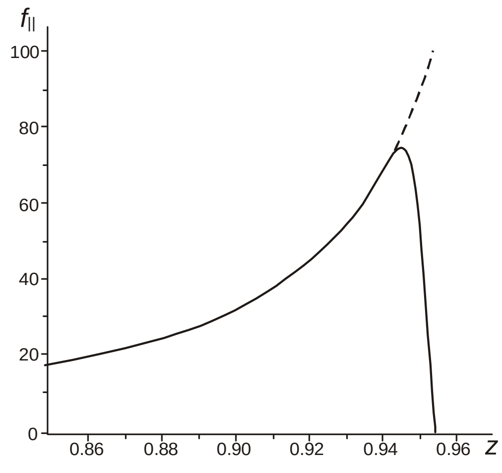

Рис. 1. Распределение пондеромоторной силы в окрестности полюса показателя преломления

Определяемая формулой (10) зависимость $f_\parallel$ от z, полученная с учетом теплового движения ионов, показана на рис. 1 сплошной линией. При вычислениях использовались следующие значения параметров: $\zeta = 6\cdot10^{11}$ см, $z_\infty = 10^8$ см, $\Omega_i = 3\cdot10^3$ с$^{-1}$, $\omega_{0i} = 1.5\cdot10^5$ с$^{-1}$, $w = 8\cdot10^5$ см/с; полюс расположен в точке z=1; величины z и $f_\parallel$ выражены в единицах z_∞ и $E_0^2\varsigma/16\pi z_\infty^2$ соответственно. Штриховой линией для сравнения нанесена зависимость, полученная по формуле (6) без учета теплового движения ионов. Можно видеть, что и при учете теплового движения формула (6) применима вплоть до весьма малых значений разности $z_\infty - z$. По порядку величины минимальное значение этой разности равно

$$(z_\infty - z)_{\min} \sim \zeta(w/c)^{2/3}(\Omega_i/\omega_{0i})^{4/3}. \tag{11}$$

Также видно, что учет теплового движения устраняет неограниченный рост силы $f_{\|}$ с приближением к полюсу. С точностью до коэффициента порядка единицы максимальное значение $f_{\|}$ равно

$$f_{\|\max} \sim \frac{1}{16\pi} \frac{E_0^2}{\sqrt{\zeta z_\infty}} \left(\frac{\omega_{0i}}{\Omega_i} \right)^2 \left(\frac{c}{w} \right). \tag{12}$$

Двухкомпонентная плазма

В холодной плазме, содержащей легкие (i=1) и тяжелые (i=2) ионы, квадрат показателя преломления равен

$$n^2 = 1 + \frac{\omega_{01}^2}{(\Omega_1 - \omega)\Omega_1} + \frac{\omega_{02}^2}{(\Omega_2 - \omega)\Omega_2}. \tag{13}$$

При выводе (13) из (1) были использованы неравенства $\omega \ll \Omega_e$, $m_e \ll m_1 < m_2$ и учтено условие квазинейтральности $N_e = N_1 + N_2$, где $N_{1(2)}$ – концентрация легких (тяжелых) ионов. Нетрудно убедиться, что в двухкомпонентной плазме n^2 как функция частоты ω имеет два полюса (z_1, z_2) и расположенный между ними нуль (z_0).

Нас, однако, интересует n^2 как функция z на фиксированной частоте при условии, что внешнее магнитное поле монотонно зависит от z. В этом случае положение полюсов z_1, z_2 и нуля z_0 определяется неявно следующими уравнениями: $\Omega_1(z_1) = \omega$, $\Omega_2(z_2) = \omega$ и $n(z_0) = 0$.

Положим $z_2 = 0$, что можно сделать без ограничения общности. Используем разложение $\Omega_2(z)$ в малой окрестности точки z=0

$$\Omega_2(z) = \Omega_2(0) - \left| \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} \right|_{z=0} z, \tag{14}$$

подставим (14) в (13) и найдем z_0 из уравнения $n(z_0) = 0$:

$$z_0 = \left(N_2 / N_1 \right)\left(m_2 / m_1 - 1 \right) l. \tag{15}$$

Здесь $l = \left| \partial \ln B / \partial z \right|_{z=0}^{-1}$ – масштаб неоднородности магнитного поля. При выводе (15) использовано условие, которое обычно выполняется на достаточно больших высотах, – $\omega_{01}^2 \gg \Omega_1^2$.

Для конкретности рассмотрим водородную плазму с небольшой примесью ионов кислорода O^+. В этом случае $m_2 \gg m_1$ и выражение (13) преобразуется к виду

$$n^2(z) = n_1^2 \left(1 - \frac{z_0}{z} \right), \tag{16}$$

где $n_1 = \omega_{01} / \Omega_1$ – показатель преломления водородной плазмы; $z_0 = \left(\rho_2 / \rho_1 \right) l$ – ширина полосы непрозрачности, $\rho_{1(2)} = m_{1(2)} N_{1(2)}$ – плотность ионов H^+ (O^+); $\rho_2 \ll \rho_1$.

Получаемая по формуле (16) зависимость $n^2(z)$ показана на рис. 2. Между нулем и полюсом квадрата показателя преломления располагается полоса непрозрачности; величина n нормирована на n_1, z – на z_0. Заметим, что качественно такая же зависимость будет получена, если рассматривать не водородно-кислородную, а водородно-гелиевую плазму.

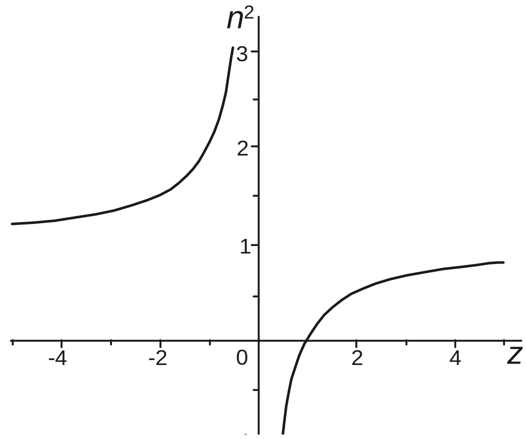

Рис. 2. Вид функции $n^2(z)$ в окрестности полюса

Имея (16), мы можем использовать решение Баддена для расчета пондеромоторной силы по формуле Питаевского. Как известно, решение Баддена выражается через функции Уиттекера и описывает прохождение и отражение электромагнитной волны, падающей на полосу непрозрачности со стороны полюса или нуля показателя преломления (см. например [*Гинзбург*, 1960, с. 349]). Если волна приближается к полосе со стороны полюса, то отражения не происходит. В полосе непрозрачности волна затухает. Амплитудный коэффициент прохождения через полосу равен $\exp(-\beta)$, где $\beta = (\pi/2)(\Omega_2/c) n_1 z_0$. Если же падающая волна приближается к полосе со стороны нуля, то возникают проходящая и отраженная волны, причем их коэффициенты прохождения и отражения равны $\exp(-\beta)$ и $1-\exp(-2\beta)$ соответственно.

Для понимания проблемы пондеромоторного взаимодействия ионно-циклотронной волны с тяжелыми ионами особый интерес представляет анализ предельных случаев широкой ($\beta \gg 1$) и узкой ($\beta \ll 1$) полос непрозрачности. Вполне понятно, что распределение пондеромоторной силы будет таким же, как и в однокомпонентной плазме, если волна приближается к широкой полосе со стороны полюса. Совершенно иная картина наблюдается при падении волны на широкую полосу со стороны нуля. Так как при $\beta \gg 1$ коэффициент отражения неотличим от единицы, то при $z > z_0$ возникает стоячая ионно-циклотронная волна. В окрестности точки отражения стоячая волна описывается функцией Эйри, с помощью которой можно рассчитать пондеромоторную силу по формуле (1), но мы на этом останавливаться не будем .

Случай узкой полосы непрозрачности более интересен. Его анализ позволяет выявить специфические проблемы, возникающие при попытке напрямую применить формулу Питаевского к двухкомпонентной плазме. Указанные выше свойства решения Баддена свидетельствуют, что при достаточно малых значениях β можно пренебречь влиянием тяжелых ионов на распространение волны. Другими словами, если $\beta \ll 1$, то волна проходит через узкую полосу почти без искажений. Это позволяет при $z \ll \sqrt{z_0 l}$ сделать оценку пондеромоторной силы:

$$f_{\parallel} \approx E^2 n_1^2 z_0 / 8\pi z^2 . \tag{17}$$

Мы видим, что сила стремится к бесконечности при $z \to 0$. Устранить бесконечность путем учета поглощения, как это было сделано в случае однокомпонентной плазмы, не удается, поскольку при $\beta \ll 1$ затухание волны экспоненциально мало. Еще одна трудность состоит в следующем. По смыслу формулы Питаевского с учетом принятых нами ограничений сила $f_{\parallel}$ действует на полную массу $\rho = \rho_1 + \rho_2 \approx \rho_1$, заключенную в единице объема. Однако с физической точки зрения, очевидно, что вблизи циклотронной частоты Ω_2 сила (17) фактически действует только на малую примесь тяжелых ионов, т.е. приложена к значительно меньшей массе ρ_2. Отмеченные проблемы будут обсуждаться в следующем разделе.

Обсуждение

Вполне понятно, что при постановке любой конкретной задачи неизбежно используется идеализация, так как учет всех факторов, влияющих на физический процесс, невозможен. Но, по словам Л.И. Мандельштама, “всякая идеализация рано или поздно мстит за себя” (цитируется по книге [*Горелик*, 2008]). Не вызывает сомнения, что проблема сингулярности пондеромоторной силы связана с выходом за пределы применимости теории при идеализации среды и/или волнового поля.

Рассмотрим формулу (6), согласно которой $f_{\|} \to \infty$ при $z \to z_{\infty}$. Эта формула получена в предположении, что температура плазмы равна нулю. Однако в реальной однокомпонентной плазме нельзя пренебрегать эффектом конечной температуры на частотах, достаточно близких к гирочастоте ионов. Тепловое движение ионов приводит к резкому ослаблению амплитуды волны при малых значениях разности $z_{\infty} - z$. Здесь есть нюанс, на который следует обратить особое внимание.

В теории Питаевского поглощение волны не учитывается (см. [*Питаевский*, 1960; *Ландау*, *Лифшиц*, 1982]). При сильном поглощении в узкой полосе, ширина которой определяется формулой (11), названная теория, вообще говоря, неприменима. Однако внутри полосы амплитуда волны экспоненциально быстро уменьшается, что позволяет сделать ориентировочную оценку максимальной силы (12) на границе применимости формулы Питаевского. Заметим, что вне узкой полосы поглощения (11) формула (6) всюду применима с большой точностью (см. рис. 1).

Переходя к обсуждению проблемы сингулярности в двухкомпонентной плазме, прежде всего следует заметить, что с учетом (13) полную силу, представляемую формулой Питаевского, естественно представить в виде суммы $f_{\|} = f_{\|1} + f_{\|2}$, где $f_{\|1}$ и $f_{\|2}$ – парциальные силы, действующие раздельно на легкие и тяжелые ионы [*Гульельми, Лундин*, 2011]. Это приводит нас к следующей оценке парциальной силы:

$$f_{\|2} \approx E^2 n_1^2 z_0 / 8\pi z^2 . \qquad (18)$$

Формально силы (18) и (17) совпадают, но их физический смысл различен, поскольку в отличие от (17) сила (18) действует только на малую примесь тяжелых ионов. Вопрос о том, какая из формул “более правильна”, нельзя решить, исходя из общих соображений, поскольку решение зависит от конкретных свойств среды, в которой распространяется волна. Но если говорить о бесстолкновительной плазме, то без сомнения следует использовать парциальную, а не полную силу.

Остается обсудить вопрос о том, как устранить сингулярность парциальной силы (18). В конце предыдущего раздела было отмечено, что это не удается сделать простым учетом теплового движения тяжелых ионов. Между тем, в физическом отношении сингулярность недопустима. В самом деле, введем пондеромоторный потенциал

$$\phi(z) = -\int_{-\infty}^{z} f_{\|2}(z)dz \approx E^2 n_1^2 z_0 / 8\pi z \qquad (19)$$

и рассмотрим ионы, достигающие точки z=0, приближаясь к ней слева. Мы увидим, что ионы парадоксальным образом приобретают бесконечную энергию на конечном участке перемещения. Если использовать терминологию Биркгофа, то, по-видимому, мы имеем дело с парадоксом аппроксимации [*Биркгоф*, 1954].

Чтобы понять происхождение этого парадокса, рассмотрим предельный случай единичного иона O^+, на который воздействует плоская монохроматическая волна круговой поляризации, распространяющаяся вдоль силовых линий магнитного поля в водородной плазме. Нетрудно убедиться, что при подходящем выборе начальных условий ион O^+ совершает вращательное движение по окружности в плоскости, перпендикулярной силовым линиям. Частота вращения совпадает с частотой волны, а радиус окружности пропорционален ее амплитуде тем больше, чем меньше разность между частотой волны и гирочастотой иона. Усредним ток иона по периоду волны и вычислим эффективный магнитный момент, связанный с вращением иона по окружности; затем учтем неоднородность магнитного поля в продольном направлении. Взаимодействие эффективного магнитного момента с неоднородным магнитным полем описывается пондеромоторной силой, направленной в сторону убывания поля. Если разность между частотой волны и гирочастотой иона O^+ стремится к нулю, то радиус окружности, эффективный магнитный момент и, соответственно, пондеромоторная сила стремятся к бесконечности. Именно таким образом объясняется сингулярность силы (18), действующей на малую примесь тяжелых ионов.

Результаты анализа подсказывают, что для регуляризации силы $f_{\parallel 2}(z)$ и потенциала $\phi(z)$ необходим учет конечного диаметра волнового пучка, т.е. следует отказаться от идеи аппроксимации волнового поля плоской волной. При строгой постановке задачи это приводит к сложным расчетам, но для ориентировочных оценок можно воспользоваться следующим соображением: размах поперечных колебаний тяжелых ионов не превышает диаметра волнового пучка. Ранее это эвристическое соображение было использовано для регуляризации пондеромоторной силы, действующей на единичный (пробный) ион O^+ [*Guglielmi, Lundin*, 2001; *Lundin, Guglielmi*, 2006]. Применительно к совокупности тяжелых ионов оно приводит к следующему выражению для пондеромоторного потенциала:

$$\phi(z) \approx -\frac{E^2 n_1^2}{8\pi}\left(\frac{z_0}{z_*}\right)\arctan\left(\frac{z}{z_*}\right), \tag{20}$$

где $z_* = Elc/Bl_\perp\Omega_2$ – характерная длина резонансного ускорения; $l_\perp$ – диаметр волнового пучка. В этом случае сила $f_{\parallel 2} = -\nabla_\parallel \phi$ всюду регулярна.

Напомним, что до сих пор мы рассматривали ускорение под воздействием гармонического поля накачки E. С учетом введенных выше выражений для z_0 и n_1 из (20) следует, что ион O^+ приобретает продольную энергию $\Delta\varepsilon \approx \pi e E l_\perp/2$ при пересечении области резонанса снизу вверх. Возникает вопрос, как изменится приращение энергии $\Delta\varepsilon$, если поле накачки является бигармоническим? Допустим, что энергия электрического поля E распределена в равных долях между двумя спектральными линиями, расстояние между которыми велико настолько, что соответствующие области резонансного ускорения не перекрываются. В этом случае, как нетрудно убедиться, приращение энергии $\Delta\varepsilon$ увеличится в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с гармоническими колебаниями. Вполне понятно, что если энергия электрического поля равномерно распределена между N спектральными линиями, то $\Delta\varepsilon$ увеличится в $\sqrt{N}$ раз. Число спектральных линий на отрезке длиной L не превышает величины порядка L/z_*. Отсюда следует оценка сверху возможного приращения энергии при движении иона на отрезке L: $\Delta\varepsilon < \Delta\varepsilon_{max} \sim eBLl_\perp^2\Omega_2/lc$. Заметим, что $\Delta\varepsilon_{max}$ не зависит от E.

Заключение

Из многообразия актуальных и часто обсуждаемых вопросов физики магнитосферы мы выделили вопрос о пондеромоторной силе ионно-циклотронной волны вблизи ионной гирочастоты. Он заслуживает внимания, поскольку позволяет ясно увидеть проблему сингулярности, возникающую при использовании классической формулы Питаевского для решения задач о нелинейном взаимодействии между заряженными частицами и волнами. В модели однокомпонентной плазмы проблема сравнительно просто решается путем учета теплового движения ионов. На этом пути получен физически приемлемый результат – формула (10). Ее анализ показал, что влияние теплового движения устраняет неограниченный рост силы с приближением к локальной гирочастоте ионов, а элементарная формула (6), непосредственно следующая из формулы Питаевского, применима с большой точностью всюду, кроме узкой полосы поглощения вблизи локальной гирочастоты.

Влияние многоионного состава магнитосферной плазмы на пространственную структуру пондеромоторной силы проанализировано в рамках двухкомпонентной модели. Во-первых, обнаружено, что при исследовании бесстолкновительной плазмы необходимо представлять полную силу (3) в виде суперпозиции парциальных сил, действующих раздельно на легкие и тяжелые ионы. Во-вторых, анализ выявил, что в плазме с достаточно низкой концентрацией тяжелых ионов учет теплового движения не устраняет сингулярности пондеромоторной силы, недопустимой в физическом отношении. Наконец, найдена причина появления сингулярности и указан способ регуляризации.

Полученные результаты имеют в основном методическое значение. Обнаруженные свойства пондеромоторной силы вблизи ионной гирочастоты полезно учитывать при интерпретации наблюдений взаимодействия волн и частиц в магнитосфере, а также при решении конкретных теоретических задач. В заключение рассмотрим кратко одну из задач такого рода, а именно, задачу о стационарном одномерном течении малой примеси тяжелых ионов в окрестности локальной гирочастоты.

Из уравнения Эйлера с учетом парциального давления $p_2 = N_2 T$ следует уравнение Бернулли:

$$\frac{v_{\|2}^2}{2} + w_2^2 \ln N_2 - \frac{eEl_\perp}{2m_2} \arctan\left(\frac{z}{z_*}\right) = \text{const}. \tag{21}$$

Здесь $v_{\|2}$ – скорость течения; $w_2 = \sqrt{T / m_2}$ – тепловая скорость тяжелых ионов. При выводе (21) мы пренебрегли амбиполярным электрическим полем, что допустимо, если $N_2 \ll N_1$, $m_1 \ll m_2$, $v_{\|1} = 0$. Кроме того, для простоты мы не учли силу тяжести. Добавим к (21) уравнение непрерывности $N_2 v_{\|2} = \text{const}$ и получим оценку скорости течения $v_{\|2} \sim \sqrt{\pi e E l_\perp / m_2}$ при $z > z_*$. Предполагается, что при $z < -z_*$ скорость течения много меньше тепловой скорости. Направленный вверх сверхтепловой поток тяжелых ионов ($v_{\|2} > w_2$) возникает при $E > E_* = T / \pi e l_\perp$. Пусть, например, $T=10^4$ К, $l_\perp = 3 \cdot 10^7$ см; тогда критическая амплитуда волны весьма невелика – E_* = 1 мкВ/м.

Благодарности

Автор выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку данной работы (гранты № 09-05-00048 и № 10-05-00661).

Литература

Биркгоф Г. Гидродинамика. М.: ИЛ, 1954. 183 с.

Будько Н.И. Об амплитудном спектре ионно-циклотронных свистящих атмосфериков вблизи ионной гирочастоты // Геомагнетизм и аэрономия. 1979. Т. 19, № 2. С.363–366.

Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Физматгиз, 1960. 552 с.

Горелик Г.С. Колебания и волны. М.: Физматлит, 2008. 655 с.

Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

Гульельми А.В. Пондеромоторные силы в коре и в магнитосфере Земли // Физика Земли. 1992. № 7. С.35–40.

Гульельми А.В., *Лундин Р.* Пондеромоторное взаимодействие между ионами и ультранизкочастотными волнами в магнитосфере Земли // Геофизические исследования. 2011. Т. 12, № 1. С.77–86.

Гульельми А.В., Троицкая В.А. Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы. М.: Наука, 1973. 208 с.

Гульельми А.В., Фейгин Ф.З., Похотелов О.А. Перераспределение магнитосферных ионов под действием силы Миллера // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 4. С.464–471.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.

Лихтер Я.И., Гульельми А.В., Ерухимов Л.М., Михайлова Г.А. Волновая диагностика приземной плазмы. М.: Наука, 1988. 215 с.

Питаевский Л.П. Электрические силы в прозрачной среде с дисперсией // ЖЭТФ. 1960. Т. 39, вып. 5. С.1450–1458.

Guglielmi A., Lundin R. Ponderomotive upward acceleration of ions by ion cyclotron and Alfvén waves over the polar regions // J. Geophys. Res. 2001. V. 106. P.13219–13236.

Guglielmi A.V., *Pokhotelov O.A.* Geoelectromagnetic waves. Bristol and Philadelphia: IOP Publ. Ltd., 1996. 402 p.

Guglielmi A., Hayashi K., Lundin R., Potapov A. Ponderomotive impact of ion cyclotron waves on the ions in the equatorial zone of the magnetosphere // Earth Planets Space. 1999. V. 51. P.1297–1308.

Guglielmi A., Pokhotelov O., Stenflo L., Shukla P.K. Modifications of the magnetospheric plasma due to ponderomotive forces // Astrophys. Space Sci. 1993. V. 200. P.91–96.

Guglielmi A., Kangas J., Mursula K., Pikkarainen T., Pokhotelov O., Potapov A. Pc1 induced electromagnetic lift of background plasma in the magnetosphere // J. Geophys. Res. 1996. V. 101. N A10. P.21493–21500.

Guglielmi A., Pokhotelov O.A., Feygin F.Z., Kurchashov Yu.P., McKenzie J.F., Shukla P.K., Stenflo L., Potapov A.S. Ponderomotive forces in longitudinal MHD waveguides // J. Geophys. Res. 1995. V. 100, N A5. P.7997–8002.

Kangas J., Guglielmi A., Pokhotelov O. Morphology and physics of short-period magnetic pulsations (A Review) // Space Sci. Rev. 1998. V. 83. P.435–512.

Lundin R., Guglielmi A. Ponderomotive forces in cosmos // Space Sci. Rev. 2006. V. 127. P.1–116.

Сведения об авторе

ГУЛЬЕЛЬМИ Анатолий Владимирович – профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, ИФЗ РАН. 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: 8-916-647-51-76. E-mail: guglielmi@mail.ru

ON THE PONDEROMOTIVE FORCE DUE TO THE ION-CYCLOTRON WAVE NEAR ION GYROFREQUENCY

A.V. Guglielmi

Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. The paper is devoted to the ponderomotive force in the vicinity of an isolated pole of the refractive index of ion cyclotron waves. It is shown that if the plasma contains electrons and ions of one species, then the thermal motion of ions eliminates the unlimited growth of force in the pole. The task is more complicated if the plasma is multicomponent, i.e., contains several species of ions with different charge to mass ratio. The hydrogen plasma containing a small admixture of heavy ions such as O^+ has been analyzed in detail. It is shown that the full force must be decomposed into the partial forces acting separately on the light and heavy ions in the collisionless plasma. It has been found that the thermal motion does not eliminate the singularity in the plasma with a sufficiently low concentration of heavy ions. We found the reason for the appearance of the singularity and the way the regularization of the ponderomotive force. The stationary flow of a small admixture of heavy ions in the vicinity of the local gyrofrequency has been considered briefly.

Keywords: magnetosphere, electromagnetic waves, ponderomotive forces.