

УДК 551.594

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРИЗЕМНОГО ЭЛЕКТРОДНОГО ЭФФЕКТА ПРИ СЛАБОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПЕРЕМЕШИВАНИИ

© 2011 г. Э.М. Дмитриев

Геофизическая обсерватория "Борок", пос. Борок (Ярославская обл.), Россия

Рассмотрена краевая задача, описывающая турбулентный электродный эффект в приземной атмосфере; получены ее приближенные асимптотические решения при слабом турбулентном перемешивании для случаев устойчивой и нейтральной атмосферной стратификации. Найденные асимптотические решения для разных типов стратификации приземной атмосферы сравниваются с соответствующими численными решениями. Показана пригодность асимптотических решений для описания электродного эффекта в реальной приземной атмосфере при слабом турбулентном перемешивании.

Ключевые слова: атмосферное электричество, математическое моделирование, электродный эффект.

Введение

Электродным эффектом называют совокупность процессов вблизи электрода в ионизированной среде, которые приводят к появлению зависимости электрических характеристик среды от расстояния до поверхности электрода. Первая модель электродного эффекта для двух металлических пластин в ионизированном газе описана в работе [Thomson, 1903], где получено аналитическое выражение для величины электродного эффекта, под которым понимается отношение напряженности электрического поля на поверхности электрода к напряженности на удалении от него. Довольно скоро эта модель электродного эффекта была приложена к атмосфере, рассматриваемой как слабоионизированная среда с легкими аэроионами в качестве основных носителей электрического заряда [Schweidler, 1908]. В приземной атмосфере в условиях хорошей погоды электродный эффект имеет место вблизи земной поверхности (отрицательного электрода). Позже в ряде работ, например [Chalmers, 1967; Hoppel, 1967; Tuomi, 1981], были получены приближенные аналитические решения задачи электродного эффекта в различных постановках.

Совершенствование методов измерений атмосферных электрических параметров, применение цифровых технологий для сбора и обработки данных позволило изучать динамику и статистические характеристики электричества приземной атмосферы [Anisimov et al., 2002; Анисимов и др., 2003]. Численное моделирование дает возможность эффективно использовать данные непрерывных аэроэлектрических и метеорологических наблюдений для расчета параметров квазистационарного электрического состояния приземной атмосферы на основе уравнений электродного эффекта [Анисимов, Дмитриев, 2008]. При этом современные модели электродного эффекта учитывают атмосферную турбулентность, изменение параметров атмосферы с высотой, присутствие в приземной атмосфере аэрозольных частиц и конвективных потоков. Ввиду возрастающей ресурсоемкости численных расчетов особый интерес представляет получение приближенных аналитических решений, пригодных для описания электродного эффекта при наличии развитой турбулентности, что чаще всего имеет место в реальной приземной атмосфере.

В ряде работ (см., например, [Willett, 1978; Куновых, Морозов, Шварц, 1998]) рассмотрены приближенные различные аналитические решения для задачи электродного эффекта при сильном турбулентном перемешивании. В работе [Дмитриев, Филиппов, 2010а] построено аналитическое решение для задачи классического электродного эффекта, использованное в другой работе тех же авторов [Дмитриев, Филиппов, 2010б] для получения приближенного решения задачи электродного эффекта при слабом турбулентном перемешивании для не зависящего от высоты коэффициента турбулентной диффузии. В настоящей работе приводится асимптотическое решение этой задачи для коэффициента турбулентной диффузии, зависящего от высоты. Заметим, что при слабом турбулентном перемешивании решение соответствующей краевой задачи численными методами вызывает наибольшие трудности [Hoppel, 1971].

Формулировка задачи в безразмерном виде

Стационарный турбулентный электродный эффект, описывается системой уравнений [Willett, 1978]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz'} E' &= \frac{e'}{\varepsilon'_0} (n'_+ - n'_-), \quad \frac{d}{dz'} \left(b' n'_+ E' - D'(z') \frac{dn'_+}{dz'} \right) = q' - \alpha' n'_+ n'_-, \\ -\frac{d}{dz'} \left(b' n'_- E' + D'(z') \frac{dn'_-}{dz'} \right) &= q' - \alpha' n'_+ n'_- \end{aligned} \quad (1)$$

где z' – высота; E' – напряженность атмосферного электрического поля; n'_+ и n'_- – концентрации положительных и отрицательных аэроионов; q' – интенсивность ионообразования; α' – коэффициент рекомбинации ионов; b' – подвижность ионов; D' – коэффициент турбулентной диффузии; e' – элементарный электрический заряд; ε'_0 – электрическая постоянная. Здесь и далее штрихи означают, что соответствующие величины имеют физическую размерность.

Зависимость коэффициента турбулентной диффузии от высоты может быть аппроксимирована выражением [Зилитинкевич, 1970]:

$$D'(z') = D'_m (h' + z')^m. \quad (2)$$

В этом выражении D'_m – параметр аппроксимации; h' – параметр шероховатости; m принимает значения 0, 1 или 4/3 в зависимости от атмосферной стратификации ($m = 1$ соответствует нейтральной стратификации, $m = 0$ – устойчивой, $m = 4/3$ – неустойчивой).

Запишем граничные условия для функций $E'(z')$, $n'_+(z')$ и $n'_-(z')$ в виде выражений

$$E' |_{z' \rightarrow \infty} = -E'_\infty, \quad n'_+ |_{z'=0} = n'_- |_{z'=0} = 0, \quad n'_+ |_{z' \rightarrow \infty} = n'_- |_{z' \rightarrow \infty} = \sqrt{q'/\alpha'} \equiv n'_\infty, \quad (3)$$

в которых n_∞ – концентрация аэроионов, E_∞ – напряженность электрического поля вне электродного слоя. Знак минус в первом из выражений отражает тот факт, что электрическое поле в условиях хорошей погоды направлено вниз, следовательно, E' отрицательно.

Обычно нижние граничные условия в (3) задают для $z' = h'$; тогда основанием ступени в выражении (2) служит z' . Сдвиг начала отсчета высоты на величину h' позволяет исключить этот параметр из граничных условий, что упрощает дальнейший анализ.

Если $D'_m = 0$, то система (1) описывает так называемый классический электродный эффект. При этом в граничных условиях (2) следует опустить равенство $n'_+ |_{z'=0} = 0$. Наличие турбулентности приводит к возникновению вблизи земной поверхности слоя с резко меняющимися значениями n'_+ . Математически отличие турбулентного электрод-

ного эффекта от классического состоит в изменении порядка дифференциальных уравнений (1), что ведет к необходимости задания дополнительного граничного условия $n'_+|_{z'=0} = 0$.

Приведем задачу, описываемую выражениями (1)–(3), к безразмерному виду с помощью замены переменных:

$$E = E' / E'_\infty, \quad n_+ = n'_+ / n'_\infty, \quad n_- = n'_- / n'_\infty, \quad z' = z / z'_\infty, \quad (4)$$

где z'_∞ – некоторая характерная высота. Из (1) получим

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dz} = -\frac{z'_\infty}{L'_E}(n_+ - n_-), \quad \frac{d}{dz} \left(-\left(\frac{L'_m}{z'_\infty}\right)^{2-m} \left(\frac{h'}{z'_\infty} + z\right)^m \frac{dn_+}{dz} - \frac{L'_b}{z'_\infty} E n_+ \right) = 1 - n_+ n_-, \\ \frac{d}{dz} \left(-\left(\frac{L'_m}{z'_\infty}\right)^{2-m} \left(\frac{h'}{z'_\infty} + z\right)^m \frac{dn_-}{dz} + \frac{L'_b}{z'_\infty} E n_- \right) = 1 - n_+ n_-. \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнениях (5) введены характерные масштабы задачи:

$$L_b = bE_\infty \tau, \quad L_E = \varepsilon_0 E_\infty / e n_\infty, \quad L_m = (D_m \tau)^{1/(2-m)}, \quad \tau = 1 / \sqrt{q\alpha}. \quad (6)$$

Оценка введенных масштабов (6) для наблюдаемых параметров приземной атмосферы дает значения $L'_b = 0.3\text{--}4.9$ м, $L'_E = 0.22\text{--}2.62$ м, $L'_0 = 1.6\text{--}18.7$ м, $L'_1 = 1\text{--}70$ м, $L'_{4/3} = 230\text{--}380$ м, при этом $L'_b / L'_E = 1.36\text{--}2.11$. Для неустойчивой стратификации ($m = 4/3$) характерный масштаб турбулентности значительно превышает остальные характерные масштабы задачи ($L_m \gg L_b$), обеспечивая сильное турбулентное перемешивание. Для нейтральной ($m = 1$) или устойчивой ($m = 0$) стратификации в зависимости от параметров атмосферы может иметь место как сильное ($L_m \gg L_b$), так и слабое ($L_m \ll L_b$) турбулентное перемешивание. Причем в случае слабого турбулентного перемешивания наибольшим характерным масштабом задачи будет L_b .

Выбирая в качестве характерного масштаба задачи $z'_\infty = L'_b$, запишем (5) в виде уравнений:

$$\frac{dE}{dz} = \beta(n_- - n_+), \quad \frac{d}{dz} \left(E n_+ + \varepsilon (\delta + z)^m \frac{dn_+}{dz} \right) = n_+ n_- - 1, \quad \frac{d}{dz} \left(E n_- - \varepsilon (\delta + z)^m \frac{dn_-}{dz} \right) = 1 - n_+ n_-, \quad (7)$$

в которые введены безразмерные параметры

$$\beta = \frac{L'_b}{L'_E} \approx 1.36 - 2.11, \quad \delta = \frac{h'}{L'_b} = 0.001 - 0.1, \quad \varepsilon = \left(\frac{L'_m}{L'_b}\right)^{2-m} = 0.2 - 160.$$

Граничные условия (3) с учетом (4) примут вид

$$E|_{z \rightarrow \infty} = 1, \quad n_+|_{z=0} = n_-|_{z=0} = 0, \quad n_+|_{z \rightarrow \infty} = n_-|_{z \rightarrow \infty} = 1. \quad (8)$$

Краевая задача (7)–(8) описывает классический электродный эффект при $\varepsilon = 0$, сильное турбулентное перемешивание при $\varepsilon \gg 1$ и слабое турбулентное перемешивание при $\varepsilon \ll 1$.

Асимптотическое решение для устойчивой стратификации

Рассмотрим сначала наиболее простой случай устойчивой стратификации, когда $m = 0$ и в уравнения (7) не входит зависимость от z [Дмитриев, Филиппов, 2010б]. Асимптотическое решение (7)–(8) для $\varepsilon \ll 1$ можно искать в виде разложения по степеням ε . Однако при этом не удастся удовлетворить дополнительному граничному условию $n'_+|_{z'=0} = 0$.

Для учета имеющегося вблизи земной поверхности пограничного слоя введем мелкомасштабную переменную $\zeta = z/\varepsilon$, полагая $E = E(z, \zeta)$, $n_+ = n_+(z, \zeta)$, $n_- = n_-(z, \zeta)$ [Найфэ, 1984]. Учитывая что $d/dz = \partial/\partial z + (1/\varepsilon)\partial/\partial\zeta$, из (7) получим систему уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial E}{\partial \zeta} = \varepsilon \beta(n_- - n_+), \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(E n_+ + \frac{\partial n_+}{\partial \zeta} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(E n_+ + 2 \frac{\partial n_+}{\partial \zeta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 n_+}{\partial z^2} = \varepsilon(n_+ n_- - 1), \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(E n_- - \frac{\partial n_-}{\partial \zeta} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(E n_- - 2 \frac{\partial n_-}{\partial \zeta} \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 n_-}{\partial z^2} = \varepsilon(1 - n_+ n_-). \end{aligned} \quad (9)$$

Будем искать решение полученной системы (9) в виде разложения по степеням ε :

$$E = E_0(z, \zeta) + \varepsilon E_1(z, \zeta) + \dots, \quad n_+ = n_{+0}(z, \zeta) + \varepsilon n_{+1}(z, \zeta) + \dots, \quad n_- = n_{-0}(z, \zeta) + \varepsilon n_{-1}(z, \zeta) + \dots \quad (10)$$

Подставим разложения (10) в уравнения (9), раскроем скобки и приведем подобные члены при степенях малого параметра ε . Из равенства нулю коэффициентов при ε^0 получим уравнения:

$$\frac{\partial E_0}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(E_0 n_{+0} + \frac{\partial n_{+0}}{\partial \zeta} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(E_0 n_{-0} - \frac{\partial n_{-0}}{\partial \zeta} \right) = 0, \quad (11)$$

а из равенства нулю коэффициентов при ε^1 – уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial \zeta} = \beta(n_{-0} - n_{+0}) - \frac{\partial E_0}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(E_1 n_{+0} + E_0 n_{+1} + \frac{\partial n_{+1}}{\partial \zeta} \right) = n_{+0} n_{-0} - 1 - \frac{\partial}{\partial z} \left(E_0 n_{+0} + 2 \frac{\partial n_{+0}}{\partial \zeta} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(E_1 n_{-0} + E_0 n_{-1} - \frac{\partial n_{-1}}{\partial \zeta} \right) = 1 - n_{+0} n_{-0} - \frac{\partial}{\partial z} \left(E_0 n_{-0} - 2 \frac{\partial n_{-0}}{\partial \zeta} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Интегрируя по ζ уравнения (11) с учетом граничных условий (8), находим:

$$E_0 = E_0(z), \quad n_{+0} = N_{+0}(z) \left[1 - e^{-E_0(z)\zeta} \right], \quad n_{-0} = N_{-0}(z), \quad (13)$$

где функции $E_0(z)$, $N_{+0}(z)$, $N_{-0}(z)$ – константы интегрирования. Подставляя выражения (13) в (12) и интегрируя получившиеся уравнения по ζ , имеем:

$$\begin{aligned} E_1 = f_E(z) - \left[\beta(N_{+0} - N_{-0}) + \frac{dE_0}{dz} \right] \zeta - \frac{N_{+0}}{E_0} e^{-E_0\zeta}, \\ E_0 n_{+1} + \frac{\partial n_{+1}}{\partial \zeta} = f_+(z) - \left[(1 - N_{+0} N_{-0}) + \frac{d}{dz} (E_0 N_{+0}) \right] \zeta + \\ + \frac{\partial}{\partial z} (N_{+0} e^{-E_0\zeta}) + \left(N_{+0} f_E + \frac{N_{+0} N_{-0}}{E_0} + \frac{N_{+0}^2}{E_0} \right) e^{-E_0\zeta} - \frac{N_{+0}^2}{E_0} e^{-2E_0\zeta}, \\ E_0 n_{-1} - \frac{\partial n_{-1}}{\partial \zeta} = f_-(z) + \left[(1 - N_{+0} N_{-0}) - \frac{d}{dz} (E_0 N_{-0}) \right] \zeta, \end{aligned} \quad (14)$$

где константами интегрирования являются функции $f_E(z)$, $f_+(z)$, $f_-(z)$.

В силу граничных условий (8) выражения в правых частях (14) должны быть ограничены на бесконечности. Этого можно добиться, приравняв к нулю выражения в квадратных скобках в членах, пропорциональных ζ , что приводит к соотношениям:

$$\frac{dE_0}{dz} = \beta(N_{-0} - N_{+0}), \quad \frac{d}{dz} (E_0 N_{+0}) = N_{+0} N_{-0} - 1, \quad \frac{d}{dz} (E_0 N_{-0}) = 1 - N_{+0} N_{-0}. \quad (15)$$

Из граничных условий (8) следует, что

$$E_0 \Big|_{z \rightarrow \infty} = 1, \quad N_{-0} \Big|_{z=0} = 0, \quad N_{+0} \Big|_{z \rightarrow \infty} = N_{-0} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 1. \quad (16)$$

Краевая задача (15)–(16) для функций $E_0(z)$, $N_{+0}(z)$ и $N_{-0}(z)$ есть не что иное, как задача (7)–(8) при $\varepsilon = 0$, что соответствует классическому электродному эффекту. Если ее решение известно, то приближенное асимптотическое решение задачи (7)–(8) при $\varepsilon \ll 1$ для случая $m = 0$ дается выражениями (13), где $\zeta = z/\varepsilon$.

Асимптотическое решение для нейтральной стратификации

Перейдем к рассмотрению случая нейтральной стратификации, когда $m = 1$ и коэффициент турбулентной диффузии линейно зависит от z . Заменой переменной $x(z) = \ln(1 + z/\delta)$ задача (7)–(8) приводится к виду:

$$f(x) \frac{dE}{dx} = \beta(n_- - n_+), \quad f(x) \frac{d}{dx} \left(En_+ + \varepsilon \frac{dn_+}{dx} \right) = n_+ n_- - 1, \quad f(x) \frac{d}{dx} \left(En_- - \varepsilon \frac{dn_-}{dx} \right) = 1 - n_+ n_-, \quad (17)$$

$$E|_{x \rightarrow \infty} = 1, \quad n_+|_{x=0} = n_-|_{x=0} = 0, \quad n_+|_{x \rightarrow \infty} = n_-|_{x \rightarrow \infty} = 1, \quad (18)$$

где $f(x) = e^{-x/\delta}$.

Теперь уравнения не содержат независимую переменную x под знаком производной. Как и в предыдущем случае, введем мелкомасштабную переменную $\xi = x/\varepsilon$ и будем искать решение в виде разложений по малому параметру ε :

$$E = E_0(x, \xi) + \varepsilon E_1(x, \xi) + \dots, \quad n_+ = n_{+0}(x, \xi) + \varepsilon n_{+1}(x, \xi) + \dots, \quad n_- = n_{-0}(x, \xi) + \varepsilon n_{-1}(x, \xi) + \dots \quad (19)$$

Подставляя (19) в (17) и приводя подобные члены при степенях малого параметра ε , из равенства нулю коэффициентов при ε^0 имеем уравнения:

$$\frac{\partial E_0}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(E_0 n_{+0} + \frac{\partial n_{+0}}{\partial \xi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(E_0 n_{-0} - \frac{\partial n_{-0}}{\partial \xi} \right) = 0, \quad (20)$$

а из равенства нулю коэффициентов при ε^1 – уравнения:

$$\frac{\partial E_1}{\partial \xi} = \frac{\beta(n_{-0} - n_{+0})}{f(x)} - \frac{\partial E_0}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(E_1 n_{+0} + E_0 n_{+1} + \frac{\partial n_{+1}}{\partial \xi} \right) = \frac{n_{+0} n_{-0} - 1}{f(x)} - \frac{\partial}{\partial z} \left(E_0 n_{+0} + 2 \frac{\partial n_{+0}}{\partial \xi} \right), \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(E_1 n_{-0} + E_0 n_{-1} - \frac{\partial n_{-1}}{\partial \xi} \right) = \frac{1 - n_{+0} n_{-0}}{f(x)} - \frac{\partial}{\partial z} \left(E_0 n_{-0} - 2 \frac{\partial n_{-0}}{\partial \xi} \right).$$

Полученные уравнения (20), (21) аналогичны рассмотренным выше уравнениям (11), (12). Интегрируя уравнения (20) по ξ с учетом граничных условий (18), находим:

$$E_0 = E_0(x), \quad n_{+0} = N_{+0}(x) \left[1 - e^{-E_0(x)\xi} \right], \quad n_{-0} = N_{-0}(x), \quad (22)$$

где функции $E_0(x)$, $N_{+0}(x)$ и $N_{-0}(x)$ – константы интегрирования. Подставляя (22) в (21) и интегрируя получившиеся уравнения по ξ , приходим к соотношениям, аналогичным соотношениям (14). Приравнявая в них к нулю члены, пропорциональные ξ , находим:

$$f(x) \frac{dE_0}{dx} = \beta(N_{-0} - N_{+0}), \quad f(x) \frac{d}{dx} (E_0 N_{+0}) = N_{+0} N_{-0} - 1, \quad f(x) \frac{d}{dx} (E_0 N_{-0}) = 1 - N_{+0} N_{-0}. \quad (23)$$

Из граничных условий (18) следует, что

$$E_0|_{x \rightarrow \infty} = 1, \quad N_{-0}|_{x=0} = 0, \quad N_{+0}|_{x \rightarrow \infty} = N_{-0}|_{x \rightarrow \infty} = 1. \quad (24)$$

Перейдя к переменной $z = \delta(e^x - 1)$, из уравнений (23), (24) для функций $E_0(z)$, $N_{+0}(z)$ и $N_{-0}(z)$ вновь получим краевую задачу (15)–(16), описывающую классический электродный эффект. Если ее решение известно, то асимптотическое решение задачи (7)–(8) для случая нейтральной стратификации дается выражениями (22). Переходя в них к переменной $z = \delta(e^x - 1) = \delta(e^{\xi/\varepsilon} - 1)$, получим

$$E_0 = E_0(z), \quad n_{+0} = N_{+0}(z) \left[1 - (1 + z/\delta)^{-E_0(z)/\varepsilon} \right], \quad n_{-0} = N_{-0}(z). \quad (25)$$

Результаты расчетов и выводы

Используя приближенное аналитическое решение задачи (15)–(16), полученное в работе [Дмитриев, Филиппов, 2010а] и объединяя формулы (13), (25), асимптотическое решение задачи (7)–(8) можно представить в параметрическом виде:

$$z(E) = \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) [1 - F(E)] + \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \left[\ln \frac{G\left((2\beta)^{1/(2\beta-1)}\right)}{G(E^{1/\beta})} \right], \quad (26)$$

$$n_+(E) = \left[\frac{1 + F(E)}{E} \right] [1 - g_m(E, z)], \quad n_-(E) = \frac{1 - F(E)}{E}, \quad 1 \leq E \leq (2\beta)^{\beta/(2\beta-1)},$$

где

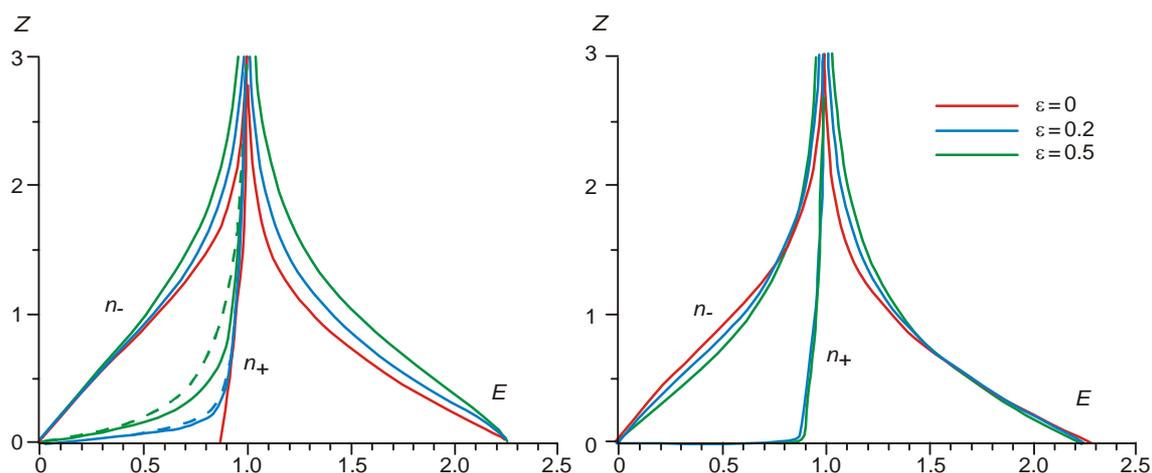
$$F(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2\beta-1} + 1 - \frac{2\beta x^{1/\beta}}{2\beta-1}}, \quad G(x) = \frac{\sqrt{1 + \frac{2(\beta-1)}{3}(x-1) - 1}}{\sqrt{1 + \frac{2(\beta-1)}{3}(x-1) + 1}}, \quad (27)$$

$$g_m(E, z) = \begin{cases} e^{-\frac{Ez}{\varepsilon}}, & m = 0, \\ \left(1 + \frac{z}{\delta}\right)^{-\frac{E}{\varepsilon}}, & m = 1. \end{cases}$$

Построенное выше асимптотическое решение в нулевом приближении отражает влияние турбулентности только на высотный профиль концентрации положительных аэроионов n_+ . Высотные профили концентрации отрицательных аэроионов n_- и напряженности электрического поля E соответствуют классическому электродному эффекту. Для нахождения более точного аналитического решения необходим учет членов первого порядка по ε в разложениях (10), (19), что требует более громоздких выкладок. Однако для малых значений ε асимптотические решения (26), (27) описывают реальные высотные профили с приемлемой точностью, что подтверждается их сравнением с численными решениями соответствующих задач.

Примеры графиков приближенных и численных решений задачи (7)–(8) в случае устойчивой стратификации для разных значений параметра ε приведены на рисунке слева. Графики $E(z)$ и $n_-(z)$ точного решения задачи классического электродного эффекта для $\varepsilon = 0$ достаточно близки к соответствующим кривым, рассчитанным численно для $\varepsilon = 0.2$ и $\varepsilon = 0.5$. Кривая асимптотического решения $n_+(z)$ для $\varepsilon = 0.2$ практически совпадает с соответствующей кривой, рассчитанной численно, а для $\varepsilon = 0.5$ близка к рассчитанной численно кривой. Видно, что с ростом параметра ε толщина пограничного слоя, в котором происходит резкое изменение $n_+(z)$, увеличивается, а величина сосредоточенного вблизи земной поверхности объемного заряда уменьшается. При этом величина электродного эффекта ($E(0)/E(\infty)$) практически не изменяется.

Приведенные на рисунке справа графики приближенных и численных решений той же задачи для случая нейтральной стратификации при разных значениях параметра ε демонстрируют хорошее соответствие приближенных решений численным. При этом кривые приближенных асимптотических решений $n_+(z)$ полностью накладываются на соответствующие кривые, рассчитанные численно. Следует отметить, что толщина пограничного слоя для случая нейтральной стратификации практически не зависит от величины ε . Действительно, как следует из формул (26), (27), она определяется значением другого безразмерного параметра задачи – δ .



Графики напряженности электрического поля атмосферы $E(z)$, концентраций положительных $n_+(z)$ и отрицательных $n_-(z)$ аэроионов при устойчивой (слева) и нейтральной (справа) стратификации, построенные для разных значений параметра турбулентности ε . Все величины безразмерные; значения параметров задачи: $\beta = 1.5$ и $\delta = 0.1$. Сплошные линии – точное решение для классического электродного эффекта ($\varepsilon = 0$), численные решения при $\varepsilon = 0.2$ и $\varepsilon = 0.5$; штриховые – асимптотические приближения для n_+ при $\varepsilon = 0.2$ и $\varepsilon = 0.5$

Таким образом, приведенное в работе приближенное асимптотическое решение задачи турбулентного электродного эффекта может быть с успехом использовано при построении высотных профилей электрических параметров реальной приземной атмосферы в случае слабого турбулентного перемешивания, критерием которого служит малость параметра ε . Асимптотическое решение эффективно описывает все характерные особенности возникающего вблизи земной поверхности пограничного слоя, ранее исследованного только численными методами.

Полученное решение может быть полезно для оптимизации расчетов высотных аэроэлектрических профилей по данным наземных аэроэлектрических и метеорологических наблюдений в оперативном режиме [Анисимов, Дмитриев, 2008].

Благодарности

Автор благодарен доктору физико-математических наук С.В. Анисимову за постановку задачи, ценные замечания и рекомендации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-05-00888) и программы фундаментальных исследований ОНЗ РАН №7 “Физические поля и внутреннее строение Земли”.

Литература

- Анисимов С.В., Дмитриев Э.М. Численное моделирование электричества приземной атмосферы // Геофизические исследования. 2008. Т. 9, № 3. С.7–15.
- Анисимов С.В., Шихова Н.М., Мареев Е.А., Шаталина М.В. Структуры и спектры турбулентных пульсаций аэроэлектрического поля // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 39, № 6. С.765–780.
- Дмитриев Э.М., Филиппов В.А. Аналитическое решение задачи классического электродного эффекта в приземной атмосфере // Геофизические исследования. 2010. Т. 11, № 4. С.53–59.
- Дмитриев Э.М., Филиппов В.А. Приближенное решение для задачи турбулентного электродного эффекта в приземной атмосфере // Состав атмосферы. Атмосферное электричество. Климатические эффекты: Труды XIV Всероссийской школы-конференции молодых ученых. Нижний Новгород, 2010. С.118–122.

- Зилитинкевич С.С.* Динамика пограничного слоя атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1970. 290 с.
- Куповых Г.В., Морозов В.Н., Шварц Я.М.* Теория электродного эффекта в атмосфере. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1998. 123 с.
- Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
- Anisimov S.V., Mareev E.A., Shikhova N.M., Dmitriev E.M.* Universal spectra of electric field pulsations in the atmosphere // *Geophys. Res. Lett.* 2002. V. 29, N 12. P.2217–2220.
- Chalmers J.A.* Atmospheric Electricity. 2-nd ed. New-York: Pergamon Press, 1967. 450 p.
- Hoppel W.A.* Theory of the electrode effect // *J. Atm. Terr. Phys.* 1967. V. 29, N 6. P.709–721.
- Hoppel W.A., Gathman S.G.* Determination of Eddy Diffusion Coefficients from Atmospheric Electrical Measurements // *J. Geophys. Res.* 1971. V. 76. P.1467–1477.
- Schweidler E.R.* Uber die Ionenverteilung in den untersten Schichten der Atmosphere // *Sitz. d. Akad. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Kl. Abt. IIa*, 1908. Bd. 117, N 2. S.653–664.
- Thomson J.J.* Conduction of electricity through gases. Cambridge, 1903. 566 p.
- Tuomi T.J.* Atmospheric electrode effect: approximate theory and wintertime observations // *Pure Appl. Geophys.* 1981. V. 119. P.31–45.
- Willet J.C.* An analysis of the electrode effect in the limit of strong turbulent mixing // *J. Geophys. Res.* 1978. V. 83. P.402–408.
- Willet J.C.* The turbulent electrode effect as influenced by interfacial ion transfer // *J. Geophys. Res.* 1983. V. 88. P.8453–8469.

Сведения об авторе

ДМИТРИЕВ Эльдар Михайлович – кандидат физико-математических наук, ученый секретарь Геофизической обсерватории “Борок” – филиала Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 152742, Ярославская обл., Некоузский р-н, пос. Борок. Тел.: 8-(48547)-243-61. E-mail: eldar@borok.yar.ru

AN ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE SURFACE ATMOSPHERE ELECTRODE EFFECT PROBLEM UNDER WEAK TURBULENT MIXING

E.M. Dmitriev

Borok Geophysical observatory, Borok (Yaroslavl region), Russia

Abstract. The boundary problem describing turbulent electrode effect in surface atmosphere is considered. The approximate asymptotic solutions are designed under weak turbulent mixing for stable and neutral atmosphere stratifications. Finding asymptotic solutions for various types of surface atmosphere stratification are compared with corresponding numerical solutions. It is shown asymptotic solution suitability to describe a real surface atmosphere electrode effect under weak turbulent mixing.

Keywords: atmospheric electricity, mathematical modeling, electrode effect.