

УДК 550.831

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО НЕПРЕРЫВНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПУАССОНА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ АНОМАЛИЙ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

© 2011 г. И.В. Оболенский, А.А. Булычев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Рассмотрены некоторые возможности применения непрерывного вейвлет-преобразования при интерпретации данных потенциальных полей. Предложено использование комплексных вейвлетов Пуассона произвольного порядка. Описана эффективная вычислительная схема непрерывного вейвлет-преобразования с применением быстрого преобразования Фурье. На нескольких простых моделях продемонстрирована локализация особых точек поля с использованием комплексного непрерывного вейвлет-преобразования с ядром Пуассона. Предложен метод определения непрерывного распределения аномальных свойств среды, основанный на непрерывном вейвлет-преобразовании и теореме Кобрунова

Ключевые слова: непрерывное вейвлет-преобразование, потенциальные поля.

Введение

В последнее десятилетие в теории и практике цифровой обработки и анализа сигналов, в том числе и геофизических, активно используется вейвлет-преобразование одной из модификаций которого является непрерывное вейвлет-преобразование [Астафьева, 1996; Добеши, 2001; Дьяконов, 2002; Короновский и др., 2003; Никитин, 2006]. Использование названной модификации для анализа потенциальных (аномальных гравитационных и магнитных) полей было начато после появления работ [Moreau et al., 1997, 1999]. Позже вопросы, связанные с применением такого преобразования для интерпретации аномальных гравитационных и магнитных полей, рассматривались многими как зарубежными, так и российскими исследователями (см., например, [Умёмов и др., 2005; Hornby et al., 1999; Martelet et al., 2001; Sailhac et al., 2000, 2009] и др.). Однако, несмотря на это, возможности рассматриваемого преобразования до сих пор не реализованы в полной мере.

В настоящей статье обсуждается вопрос связи результатов непрерывного вейвлет-преобразования аномалий потенциальных полей с их источниками. Преобразование осуществляется путем свертки анализируемой функции $g(\xi)$ с двухпараметрической вейвлетной функцией $\psi_{h,x}(\xi)$, которая в общем случае может быть комплексной [Астафьева, 1996; Добеши, 2001; Короновский и др., 2003]:

$$W(h, x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \overline{\psi_{h,x}(\xi)} d\xi. \quad (1)$$

Черта над функцией $\psi_{h,x}(\xi)$ в выражении (1) означает ее комплексное сопряжение. Эта функция получается из так называемого базисного (или материнского) вейвлета $\psi_0(\xi)$:

$$\psi_{h,x}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{h}} \psi_0\left(\frac{\xi - x}{h}\right). \quad (2)$$

В выражении (2) параметр h – масштаб вейвлетного преобразования ($h \in \mathbb{R}^+$), отвечающий за ширину вейвлета; x ($x \in \mathbb{R}$) – параметр сдвига, определяющий положение вейвлета на оси 0ξ (оси $0x$).

Функция $\psi_0(\xi)$ может выбираться достаточно произвольно, но при этом она должна удовлетворять определенным требованиям. В частности, должны выполняться два условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\xi) d\xi = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(\xi)|^2 d\xi < \infty, \quad (3)$$

первое из которых означает, что среднее значение функции $\psi_0(\xi)$ и порождаемых ею вейвлетов $\psi_{h,x}(\xi)$ должно быть равно нулю, второе – что функция $\psi_0(\xi)$ ограничена. Кроме того, функция $\psi_0(\xi)$ должна быстро убывать при стремлении аргумента ξ к бесконечности ($\xi \rightarrow \pm\infty$).

В зависимости от поставленной задачи вид используемого вейвлета и его форма могут быть различными, в том числе и несимметричными. Известно большое число вейвлетов, применяемых при решении задач разного рода, включая частотный анализ сигналов, фильтрацию и т.д. [Астафьева, 1996; Дьяконов, 2002; Короновский и др., 2003].

Если разложение сигнала выполнялось с помощью вейвлетов, удовлетворяющих условиям (3), то возможно проведение обратного непрерывного вейвлет-преобразования, т.е. по функции $W(h, x)$ может быть восстановлен исходный сигнал $g(\xi)$ [Астафьева, 1996; Добеши, 2001; Дьяконов, 2002; Короновский и др., 2003]. Такое преобразование описывается следующим соотношением:

$$g(\xi) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} W(h, x) \psi_0\left(\frac{x-\xi}{h}\right) dx \right) dh, \quad (4)$$

где C_ψ – константа, определяемая функцией ψ_0 .

Если определить спектр Фурье функции $\psi_0(x)$ как

$$\hat{\psi}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) e^{-i\omega x} dx, \quad (5)$$

то

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}_0(\omega)|^2}{\omega} d\omega. \quad (6)$$

Следует отметить, что подобная реконструкция возможна только для сигналов $g(\xi)$, среднее значение которых равно нулю.

Одним из вейвлетов, удовлетворяющих отмеченным выше требованиям, является функция, описываемая соотношением [Дьяконов, 2002; Короновский и др., 2003]:

$$\psi_0(\xi) = (\xi^2 - 1) e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Этот вейвлет, называемый “мексиканская шляпа”, получается путем вычисления производной от функции Гаусса. Он является четным, удовлетворяет всем перечисленным выше свойствам и часто используется при анализе сигналов. Вид вейвлета “мексиканская шляпа” и двух других, рассматриваемых в данной работе, представлен на рис. 1.

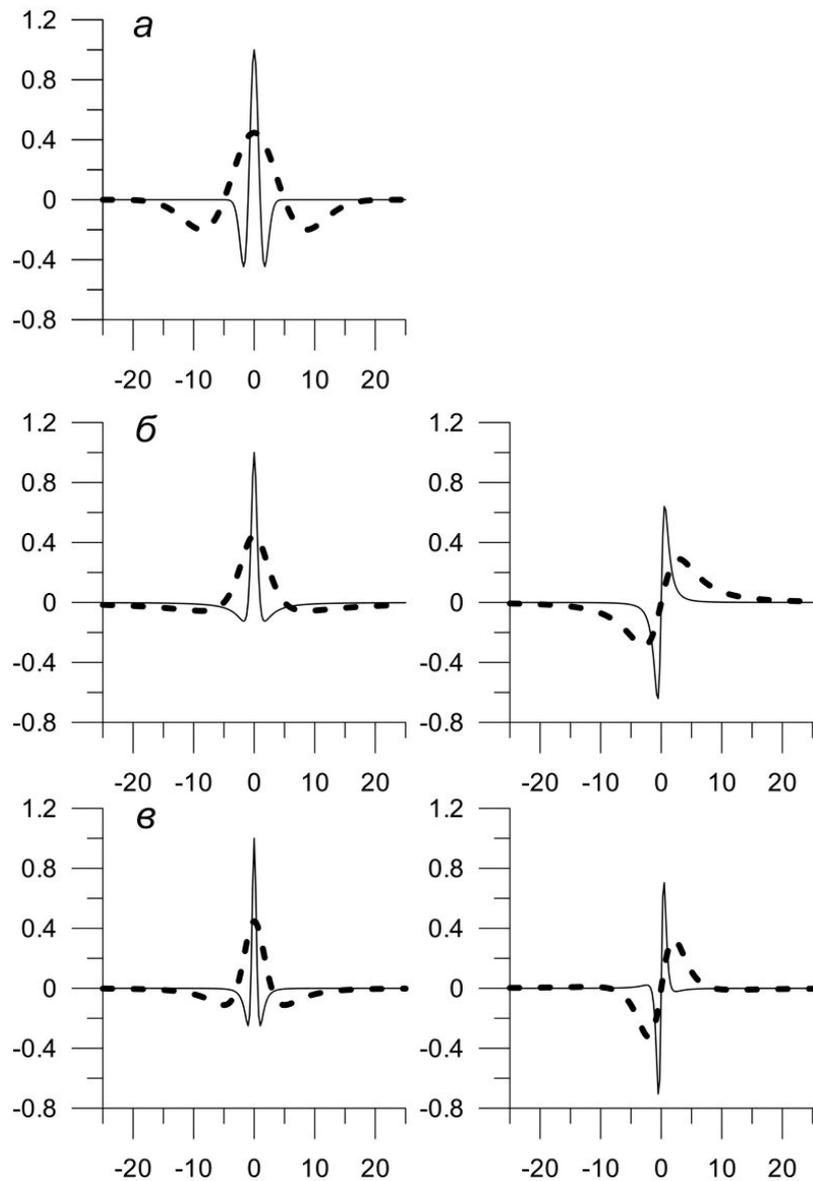


Рис. 1. Вейвлеты, используемые для непрерывного преобразования: *a* – “мексиканская шляпа”; *б* – четный (слева) и нечетный (справа) вейвлеты, полученные на основе ядра Пуассона; *в* – действительная (слева) и мнимая (справа) части комплексного вейвлета $\Psi_{h,x}^{(2)}(\xi)$. Графики представлены для двух значений параметра *h*: сплошная линия – *h* = 1; штриховая – *h* = 5

При анализе аномальных гравитационных и магнитных полей вейвлеты, схожие с “мексиканской шляпой”, могут быть получены на основе вычисления производных от ядра Пуассона. Так, ядро преобразования для вычисления 1-й вертикальной производной исходного поля на высоте *z* представляется соотношением [Гравиразведка, 1990]:

$$K(x, z) = \frac{1}{\pi} \frac{z^2 - x^2}{(x^2 + z^2)^2}.$$

Положив в этой функции *z* = 1 и опустив множитель 1/π, можно записать

$$\Psi_0^z(\xi) = \frac{1 - \xi^2}{(\xi^2 + 1)^2}. \quad (7)$$

Согласно [Утёмов и др., 2005; Martelet et al., 2001; Moreau et al., 1997; Sailhac et al., 2000], вейвлеты, порождаемые функцией (7), будут иметь вид:

$$\Psi_{h,x}^z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{1 - \left(\frac{\xi-x}{h}\right)^2}{\left[\left(\frac{\xi-x}{h}\right)^2 + 1\right]^2} = \frac{1}{\sqrt{h}} h^2 \frac{h^2 - (\xi-x)^2}{\left[(\xi-x)^2 + h^2\right]^2}. \quad (8)$$

Функции (8) являются четными (см. рис. 1, б, слева) и с точностью до коэффициента $\frac{\sqrt{h}}{\pi h^2}$ совпадают с ядром преобразования, осуществляющего вычисление вертикальной производной поля на высоте h . Следовательно, вычисление непрерывного вейвлет-преобразования (1) с ядром (8) с точностью до коэффициента эквивалентно вычислению вертикальной производной исходного поля на высоте h .

Нечетный вейвлет (см. рис. 1, б, справа), соответствующий вычислению горизонтальной производной поля на высоте h , будет иметь вид:

$$\Psi_0^x(\xi) = \frac{2\xi}{(\xi^2 + 1)^2}, \quad (9)$$

$$\Psi_{h,x}^x(\xi) = \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{2\left(\frac{\xi-x}{h}\right)}{\left[\left(\frac{\xi-x}{h}\right)^2 + 1\right]^2} = \frac{1}{\sqrt{h}} h^2 \frac{2(\xi-x)h}{\left[(\xi-x)^2 + h^2\right]^2}. \quad (10)$$

(Графики вейвлетов, полученных на основе ядра Пуассона см. на рис. 1, б.)

Можно рассмотреть вейвлеты, соответствующие вычислению более высоких производных исходного поля на высоте, например вычислению 2-й вертикальной производной. Такой вейвлет представляется в виде:

$$\Psi_0^{zz}(\xi) = \frac{4(1-\xi^2)}{(\xi^2+1)^3} - \frac{2}{(\xi^2+1)^2}, \quad \Psi_{h,x}^{zz}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{h}} h^4 \left(\frac{4(h^2 - (\xi-x)^2)}{\left[(\xi-x)^2 + h^2\right]^3} - \frac{2}{\left[(\xi-x)^2 + h^2\right]^2} \right).$$

Комплексные вейвлеты Пуассона

В настоящей работе исследуется возможность применения комплексных вейвлетов Пуассона к задачам интерпретации. Для анализа двумерных потенциальных полей такие вейвлеты могут быть получены на основе представления ядра Пуассона в виде комплексной функции [Гравирозведка, 1990; Страхов, 1984]:

$$C(s) = i \frac{1}{\sigma - s},$$

где $\sigma = \xi + i\zeta$ – комплексная координата положения двумерного точечного источника, создающего гравитационное поле, $s = x + iz$ – комплексная координата точки наблюдения (i – мнимая единица, ось Ox направлена вправо, ось Oz – вверх). Для производных этой функции по параметру s справедливо:

$$C^{(m)}(s) = i \frac{m!}{(\sigma - s)^{m+1}},$$

где m – порядок производной. Положив $\xi = 0$, $\zeta = -1$, $z = 0$, получим:

$$C^{(m)}(x) = i \frac{m!}{(-i - x)^{m+1}}.$$

Основанный на последнем соотношении базисный (материнский) комплексный вейвлет может быть записан в виде:

$$\Psi_0^{(m)}(\xi) = i \frac{(-1)^{m+1} m!}{(i + \xi)^{m+1}},$$

однако более удобным является другое представление, а именно:

$$\Psi_0^{(m)}(\xi) = \frac{i^{m+1} m!}{(i + \xi)^{m+1}}, \quad \Psi_{h,x}^{(m)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{i^{m+1} m!}{\left(i + \frac{\xi - x}{h}\right)^{m+1}} = \frac{h^{m+1}}{\sqrt{h}} \frac{i^{m+1} m!}{(ih + (\xi - x))^{m+1}}. \quad (11)$$

В этом случае действительная часть комплексного вейвлета – четная функция, а мнимая – нечетная. В частности, при $m = 1$ действительная часть вейвлета $\Psi_{h,x}^{(1)}(\xi)$ соответствует функции $\psi_{h,x}^z(\xi)$, а мнимая – функции $-\psi_{h,x}^x(\xi)$:

$$\Psi_{h,x}^{(1)}(\xi) = \psi_{h,x}^z(\xi) - i\psi_{h,x}^x(\xi).$$

Предлагаемые авторами настоящей статьи вейвлеты отличаются и от вейвлета Паули, рассмотренного в работе [Утёмов и др., 2005] применительно к анализу гравиметрических данных, и от комплексного вейвлета, представленного в работе [Sailhac et al., 2000]. Естественно назвать предлагаемые вейвлеты комплексными вейвлетами Пуассона m -го порядка (пример комплексного вейвлета $\Psi_{h,x}^{(2)}(\xi)$ см. на рис. 1, в).

Определим спектр Фурье для функции $C(x)$ согласно выражению (5). Поскольку функция $C(x)$ является аналитической, спектр самой функции и спектры ее производных удовлетворяют следующим соотношениям [Страхов, 1984]:

$$\hat{C}(\omega) = \begin{cases} -2\pi e^{-|\omega|h}, & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0, \end{cases} \quad \hat{C}^{(m)}(\omega) = (i\omega)^m C(\omega).$$

Соответственно, спектры предложенных вейвлетов (11) примут вид:

$$\hat{\Psi}_0^{(m)}(\omega) = \begin{cases} \omega^m 2\pi e^{-|\omega|h}, & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega \leq 0, \end{cases} \quad \hat{\Psi}_{h,x=0}^{(m)}(\omega) = \begin{cases} \frac{h^{m+1}}{\sqrt{h}} \omega^m 2\pi e^{-|\omega|h}, & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega \leq 0, \end{cases} \quad (12)$$

т.е. действительные части этих функций имеют отличные от нуля значения только при положительных значениях ω , а их мнимые части равны нулю.

Исследование возможностей локализации источников аномалий с использованием комплексного вейвлет-преобразования Пуассона

Рассмотрим результаты вейвлет-преобразования аномальных гравитационных и магнитных полей для нескольких тестовых моделей, предварительно описав этапы используемого нами алгоритма расчета непрерывного вейвлет-преобразования.

Этап I. Расчет поля $g(\xi_k)$ от заданной тестовой модели. Во всех модельных примерах длина профиля составляла 2048 расчетных точек с шагом между ними, равным 1 ($N = 2048, \Delta x = 1$).

Этап II. Вычисление дискретного спектра исходного поля $\hat{g}(\omega_k)$ с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ);

Этап III. Расчет для каждого значения h соответствующей частотной характеристики вейвлет-преобразования $\hat{\Psi}_{h,x=0}^{(m)}(\omega_k)$ по формулам (12). Значения частоты определяются соотношением $\omega_k = \frac{2\pi}{N\Delta x} k, k = \overline{0, N-1}$. С учетом свойств дискретного спектра

[Рабинер, 1978] и того факта, что свертка осуществляется с сопряженной комплексной функцией вейвлета, частотная характеристика рассчитывается для значений $k = 0, N/2$, а значения $\hat{\Psi}_{h,x=0}^{(m)}(\omega_k)$ для k , превышающих $N/2$, полагаются равными нулю. Далее полученные значения частотной характеристики перемножаются с сопряженными значениями дискретного спектра исходного поля $\overline{\hat{g}(\omega_k)}$.

Этап IV. Выполнение обратного дискретного преобразования Фурье с помощью БПФ от полученного дискретного спектра, после чего образуется комплексная функция, действительная часть которой соответствует свертке исходной функции с четным вейвлетом, а мнимая – с нечетным.

Результат таких вычислений – пространственное распределение значений вейвлет-преобразования $W(h,x)$ исходного тестового поля. Следует отметить, что для построения моделей была введена безразмерная система единиц – все значения глубин и горизонтальных координат не имеют размерности.

Поскольку результаты непрерывного вейвлет-преобразования совпадают с вычислением высших производных поля на высоте, которые умножены на нормировочный коэффициент, зависящий от h , то по заданному распределению источников можно выполнить прямой расчет функции, соответствующей непрерывному вейвлет-преобразованию (прямая задача).

Модель 1. Двумерный точечный источник, расположенный на глубине 100

Графики полей, рассчитанных для данной модели, и результаты их непрерывного преобразования с вейвлетом $\Psi_{h,x}^{(1)}(\xi)$ приведены на рис. 2, где фрагмент *a* соответствует полю V_{zz} ; фрагмент *b* – полю V_{xz} ; фрагмент *в* – линейной комбинации двух названных полей $V_{xz} \cos(\pi/4) + V_{zz} \sin(\pi/4)$. Рассчитанные поля можно сопоставить с Z - и X -компонентами магнитного поля, создаваемого моделью с вертикальной намагниченностью, а также с Z -компонентой при наклонной намагниченности дипольной линии (угол наклона намагниченности равен 45°). Отметим, что в точке расположения источника поля имеют особенность, соответствующую полюсу второго порядка.

Для каждого из рассчитанных полей под его графиком по вертикали представлены три функции: W_z – результат применения четного вейвлета, W_x – результат применения нечетного вейвлета; $|W| = \sqrt{W_x^2 + W_z^2}$ – амплитудный вейвлет-спектр. Можно видеть, что максимум функции W_z , полученный от поля V_{zz} , и максимум функции W_x , полученный от поля V_{xz} , совпадают с положением точечного источника. Для объяснения этого результата, выпишем выражение для функции W_z , получаемой в результате вейвлет-преобразования функции V_{zz} с действительной частью ядра $\Psi_{h,x}^{(1)}(\xi)$. Поскольку вычисление вейвлет-преобразования с таким типом ядра аналогично вычислению высшей производной, то полученный результат с точностью до постоянного коэффициента будет соответствовать функции

$$V_{zz}(x, z) = \frac{4((\zeta - z)^2 - (\xi - x)^2)(\zeta - z)}{[(\zeta - z)^2 + (\xi - x)^2]^3} - \frac{2(\zeta - z)}{[(\zeta - z)^2 + (\xi - x)^2]^2},$$

где (ξ, ζ) – координаты точечного источника; (x, z) – координаты точки наблюдения. При $x = \xi$ это выражение приобретает вид:

$$V_{zz}(z) = \frac{2}{(\zeta - z)^3}.$$

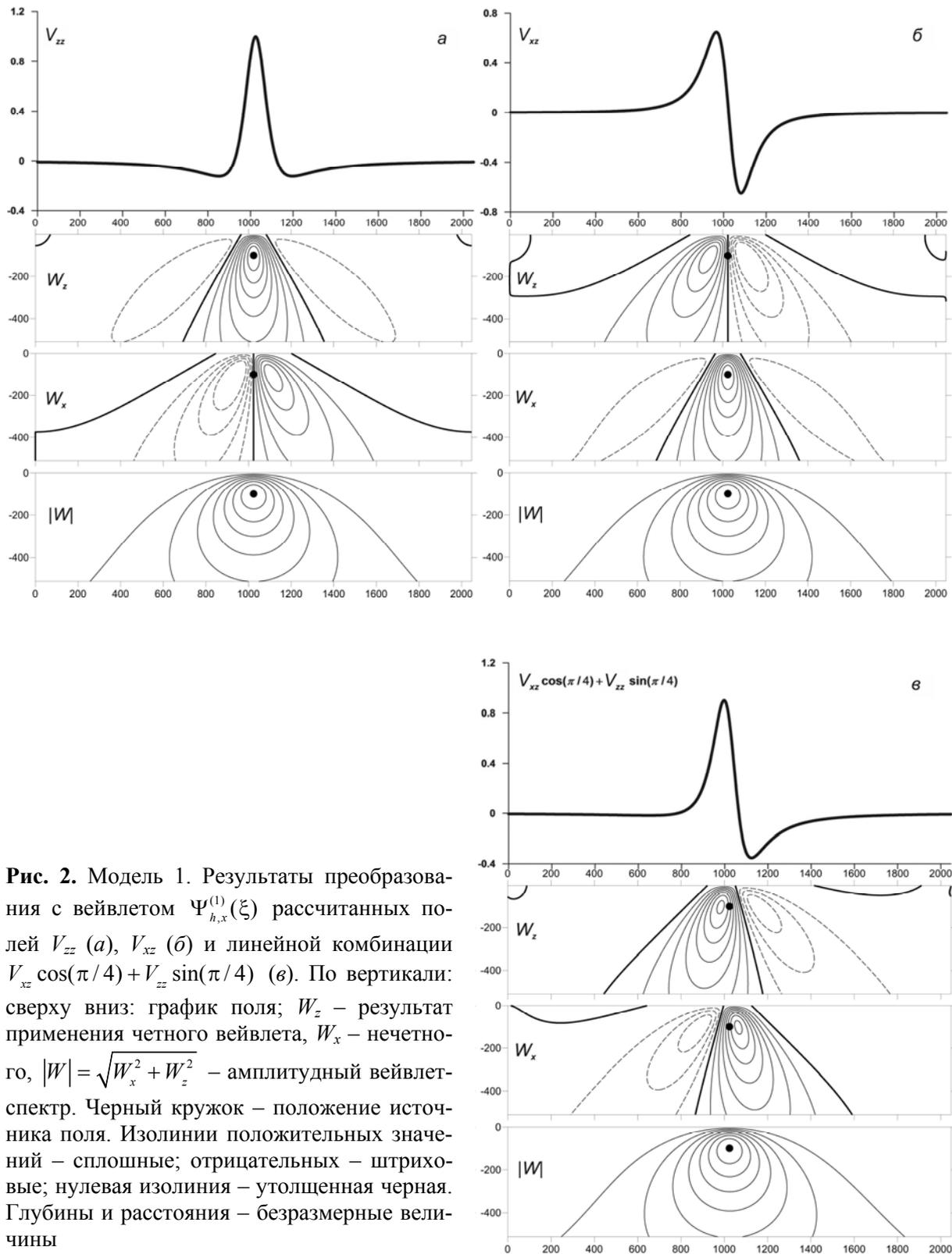


Рис. 2. Модель 1. Результаты преобразования с вейвлетом $\Psi_{h,x}^{(1)}(\xi)$ рассчитанных полей V_{zz} (а), V_{xz} (б) и линейной комбинации $V_{xz} \cos(\pi/4) + V_{zz} \sin(\pi/4)$ (в). По вертикали: сверху вниз: график поля; W_z – результат применения четного вейвлета, W_x – нечетного, $|W| = \sqrt{W_x^2 + W_z^2}$ – амплитудный вейвлет-спектр. Черный кружок – положение источника поля. Изолинии положительных значений – сплошные; отрицательных – штриховые; нулевая изолиния – утолщенная черная. Глубины и расстояния – безразмерные величины

Поскольку в принятых нами обозначениях $z = h$, то для результата вейвлет-преобразования на уровне h можно записать:

$$W_z(h, x = \xi) = \frac{h^2}{\sqrt{h}} \frac{2}{(\xi - h)^3}.$$

Экстремум этой функции будет достигаться при $h = -\zeta$. Естественно, что и экстремум функции $|W|$ совпадает с положением источника.

Для модели 1 было также рассчитано поле V_z , имеющее в точке положения источника особенность, соответствующую полюсу первого порядка. Результаты непрерывного вейвлет-преобразования этого поля с комплексным вейвлетом 1-го порядка ($m = 1$) представлены на рис. 3, а. Как и на рис. 2, функция W_x – результат применения нечетного вейвлета, функция W_z – четного, $|W| = \sqrt{W_x^2 + W_z^2}$ – амплитудный вейвлет-спектр. В отличие от предыдущего случая экстремумы функций W_z и $|W|$ оказались смещенными по глубине относительно положения источника. Аналогично тому, как это было сделано выше, можно показать, что экстремумы функций достигаются при $h = -3\zeta$. В то же время, если в качестве нормировочного коэффициента в формуле (2) взять коэффициент, равный $1/h$, а не $1/\sqrt{h}$, то экстремумы функций W_z и $|W|$ будут совпадать с положением источника (рис. 3, б).

Результат, аналогичный представленному на рис. 3, б, можно получить, рассчитав сначала по исходному полю его вертикальную и горизонтальную производные и применив затем к полученному полю преобразование с вейвлетом 1-го порядка и нормировочным коэффициентом $1/\sqrt{h}$. Тот же результат может быть получен, если к исходному полю V_z применить вейвлет 2-го порядка, соответствующий вычислению вторых вертикальной и горизонтальной производных от исходного поля на высоте h с нормировочным коэффициентом $1/h\sqrt{h}$ (рис. 3, в).

Модель 2. Горизонтальный тонкий пласт (двумерный материальный отрезок), расположенный на глубине 100 и ограниченный по горизонтали координатами 500 и 1500

Для данной модели были рассчитаны поля V_z и V_{zz} , вид которых представлен на рис. 4. Первое из названных полей (рис. 4, слева) на концах отрезка имеет логарифмические особенности, а второе (рис. 4, справа) – полюса первого порядка. Результаты преобразования этих полей с использованием комплексного вейвлета 1-го порядка с нормировочным коэффициентом $1/\sqrt{h}$ приведены на рис. 4, а, б. На графиках, демонстрирующих результаты последовательного расчета функций W_x и W_z , а затем функции $|W|$, можно видеть, что такой способ преобразования не дает желаемого результата.

На рис. 4, в, г сразу представлены результаты в виде функции $|W|$, как наиболее информативные. Поля V_z (рис. 4, в) и V_{zz} (рис. 4, г) были преобразованы с применением нескольких комплексных вейвлетов 1–3-го порядка с разными нормировочными коэффициентами:

- | | |
|-----------------|---|
| поле V_z – | вейвлеты 1-го порядка с нормировочным коэффициентом $1/h\sqrt{h}$, |
| | вейвлеты 2-го порядка с нормировочным коэффициентом $1/h^2$, |
| | вейвлеты 3-го порядка с нормировочным коэффициентом $1/h^2\sqrt{h}$; |
| поле V_{zz} – | вейвлеты 1-го порядка с нормировочным коэффициентом $1/h$, |
| | вейвлеты 2-го порядка с нормировочным коэффициентом $1/h\sqrt{h}$, |
| | вейвлеты 3-го порядка с нормировочным коэффициентом $1/h^2$. |

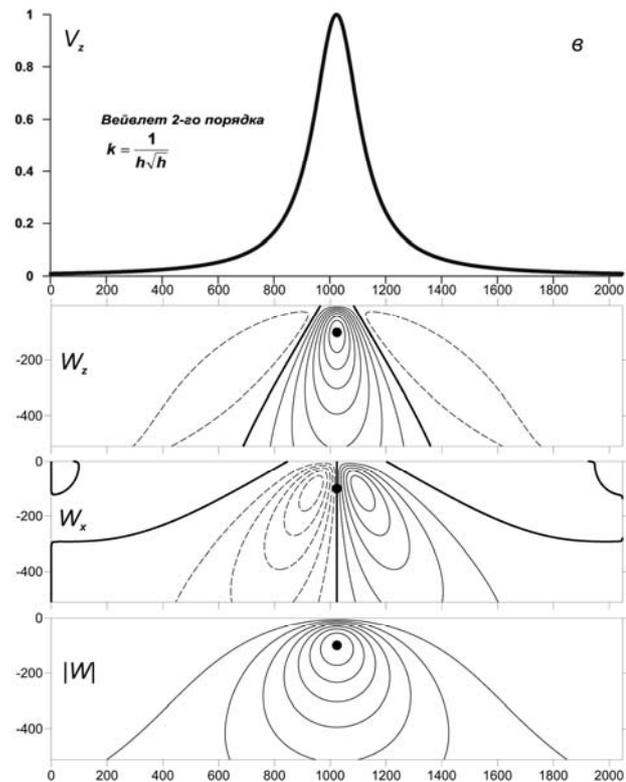
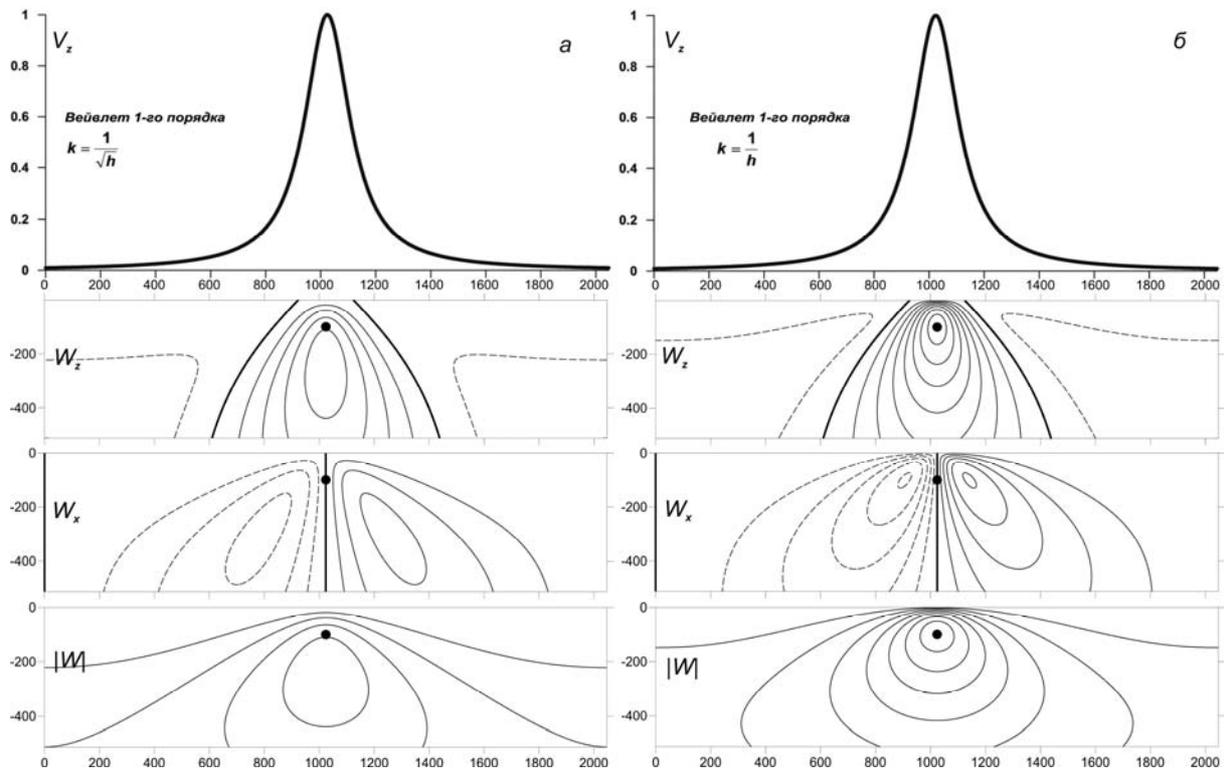


Рис. 3. Модель 1. Результаты преобразования поля V_z вейвлетами 1-го порядка с нормировочными коэффициентами $1/\sqrt{h}$ (а) и $1/h$ (б) и вейвлетом 2-го порядка с коэффициентом $1/h\sqrt{h}$ (в). По вертикали сверху вниз: график поля; W_z – результат применения четного вейвлета, W_x – нечетного, $|W| = \sqrt{W_x^2 + W_z^2}$ – амплитудный вейвлет-спектр. Черный кружок – положение источника поля. Изолинии положительных значений – сплошные; отрицательных – штриховые; нулевая изолиния – утолщенная черная. Глубины и расстояния – безразмерные величины

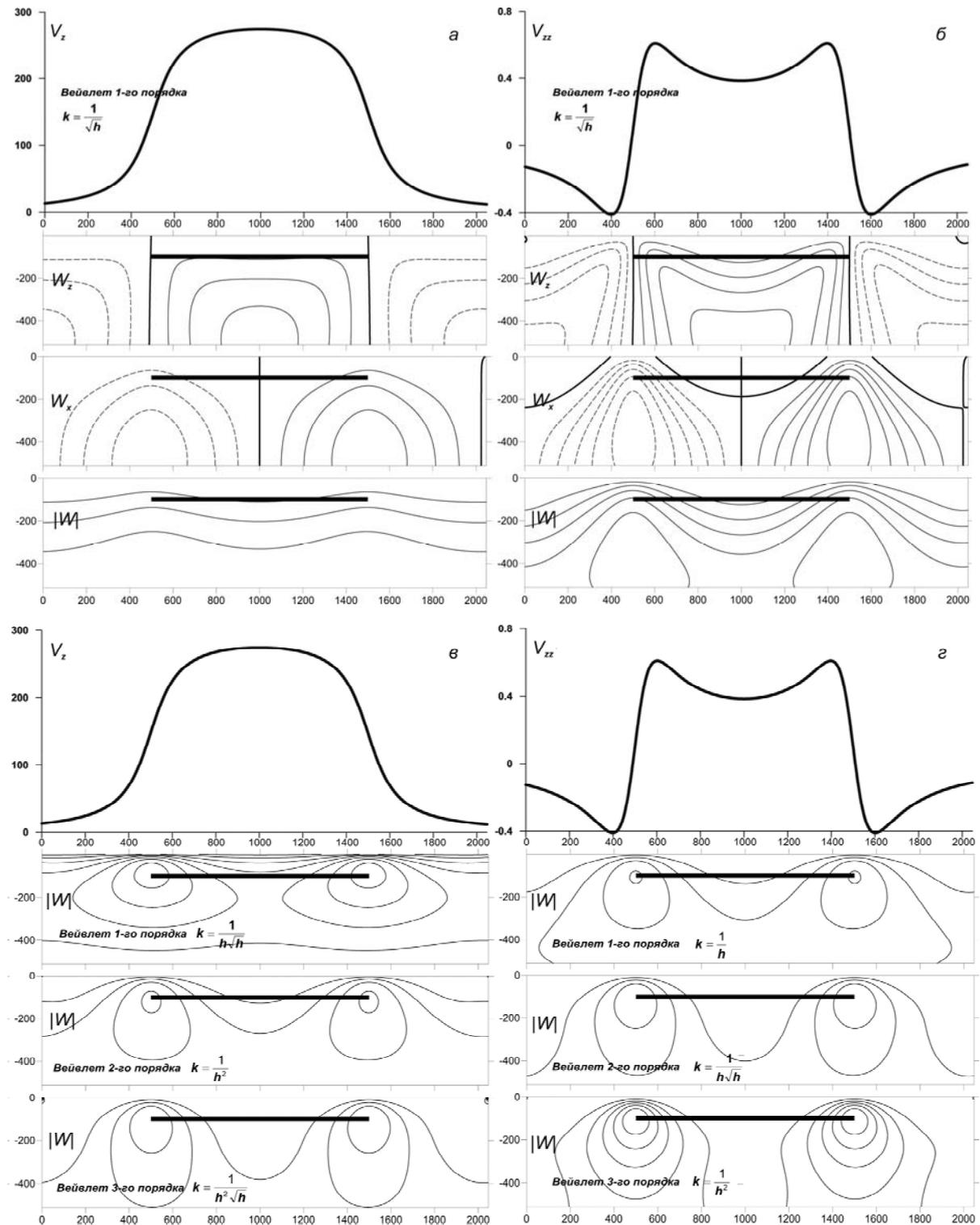


Рис. 4. Модель 2. Результаты преобразования полей V_z (слева) и V_{zz} (справа) вейвлетами 1–3-го порядка с разными нормировочными коэффициентами. По вертикали сверху вниз: на а, б – график поля; результаты последовательного преобразования с вейвлетом 1-го порядка и коэффициентом $1/\sqrt{h}$ (W_z – результат применения четного вейвлета, W_x – нечетного, $|W| = \sqrt{W_x^2 + W_z^2}$ – амплитудный вейвлет-спектр); на в, г – результаты расчетов функции $|W|$ (порядок вейвлетов и нормировочные коэффициенты указаны для каждого результата отдельно). Черный отрезок – положение пласта. Изолинии положительных значений – сплошные; отрицательных – штриховые; нулевая изолиния – утолщенная черная. Глубины и расстояния – безразмерные величины

Приведенные на рис. 4 результаты свидетельствуют, что применение любого из рассмотренных вейвлетов при правильном выборе нормировочных коэффициентов позволяет определить положения концов отрезка.

Модель 3. Горизонтальная полуплоскость, расположенная на глубине 100

Для модели рассчитаны поля V_z (рис. 5, *слева*) и V_{zz} (рис. 5, *справа*). Как и для модели 2, в точке с координатой, определяемой кромкой пласта, поле V_z имеет логарифмическую особенность, а поле V_{zz} – полюс первого порядка.

На рис. 5, *а, б* под графиком поля по вертикали представлены результаты преобразования полей V_z и V_{zz} с комплексным вейвлетом 1-го порядка с нормировочным коэффициентом $1/\sqrt{h}$. Приведены результаты последовательного расчета функций W_x и W_z , затем расчета функции $|W|$. Видно, что такой способ преобразования не дает желаемого результата.

На рис. 5, *в, г* результаты представлены сразу в виде функции $|W|$, поскольку они наиболее информативны. Преобразование выполнено с теми же комплексными вейвлетами 1–3-го порядка с разными нормировочными коэффициентами, что и для модели 2.

Продемонстрировано, что определение положения кромки пласта возможно при помощи любого из использованных вейвлетов при правильном выборе нормировочных коэффициентов. Следует обратить внимание на то, что при расчете преобразований модели 3 использовались те же нормировочные коэффициенты, что и для предыдущей; полученные результаты аналогичны результатам для модели 2.

Были выполнены расчеты и для случаев вертикального и наклонного пластов, которые показали, что по экстремумам функций W_z , W_x и $|W|$ достаточно надежно можно определить положение ближайшей к поверхности кромки пласта.

Модель 4. Прямоугольная призма: глубина верхней стороны – 100, нижней – 200, горизонтальные координаты боковых сторон – 750 и 1250

Рассчитанные для модели поля V_z (рис. 6, *слева*) и $V_{xz} \cos(\pi/4) + V_{zz} \sin(\pi/4)$ (рис. 6, *справа*) имеют логарифмические особенности в вершинах призмы. Это наиболее неблагоприятный случай для определения положения особых точек. Преобразование полей выполнялось с вейвлетами тех же типов и с теми же коэффициентами, что и для моделей 3, 4. Результаты вейвлет преобразования представлены на рис. 6 по схеме, аналогичной приведенной на рис. 4, 5. В случае с призмой ни один из рассмотренных вариантов преобразований не позволяет определить положения ее углов. Однако следует обратить внимание на рис. 6, *в, г*, где можно видеть, что максимумы функции $|W|$ примерно соответствуют боковым сторонам призмы. Таким образом, вейвлеты 1-го–3-го порядка с правильно выбранными нормировочными коэффициентами позволяют определить примерное положение призмы.

Применение непрерывного вейвлет-преобразования к вычислению эквивалентного непрерывного распределения возмущающих масс

Обратим внимание и на следующий момент. Если исходная функция $g(x)$ представляет собой аномальное гравитационное поле $V_z(x)$, то, как было показано А.И. Кобруновым [Кобрунов и др., 1981], пространственное распределение поля, получаемое вычислением вертикальной производной поля в верхнем полупространстве, умноженное на коэффициент $1/(\pi G)$, где G – гравитационная постоянная, и симметрично отраженная относительно оси Ox , совпадает с функцией распределения плотности в нижнем полупространстве, создающем исходное гравитационное поле $V_z(x)$.

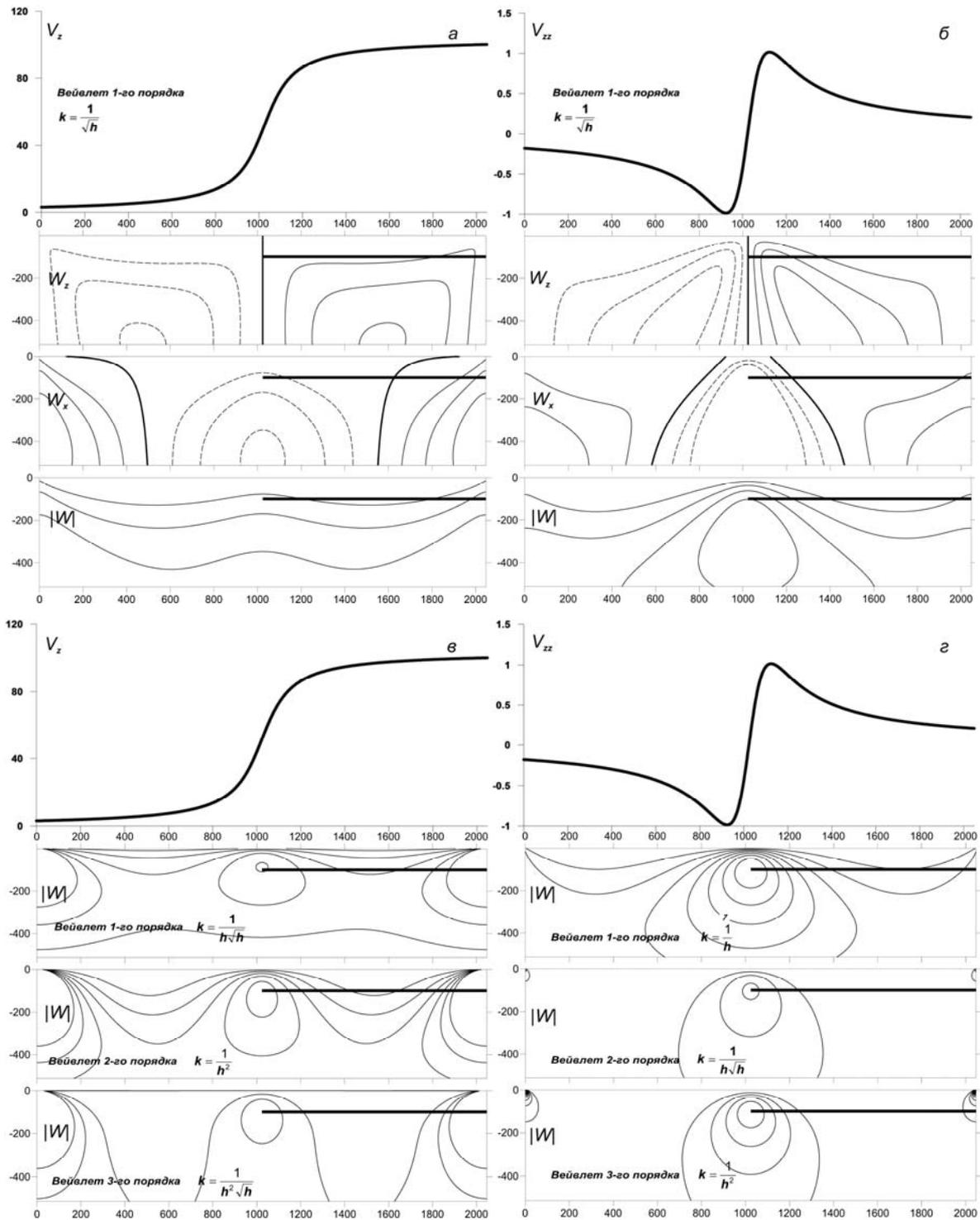


Рис. 5. Модель 3. Результаты преобразования полей V_z (слева) и V_{zz} (справа) вейвлетами 1–3-го порядка с разными нормировочными коэффициентами. По вертикали сверху вниз: на *a*, *б* – графики полей; результаты последовательного преобразования вейвлетом 1-го порядка с коэффициентом $1/\sqrt{h}$ (W_z – результат применения четного вейвлета, W_x – нечетного, $|W| = \sqrt{W_x^2 + W_z^2}$ – амплитудный вейвлет-спектр). На *в*, *г* – графики полей; результаты расчетов функции $|W|$ (порядок вейвлета и нормировочный коэффициент указаны для каждого результата отдельно). Черный отрезок – положение полуплоскости. Изолинии положительных значений – сплошные; отрицательных – штриховые; нулевая изолиния – утолщенная черная. Глубины и расстояния – безразмерные величины

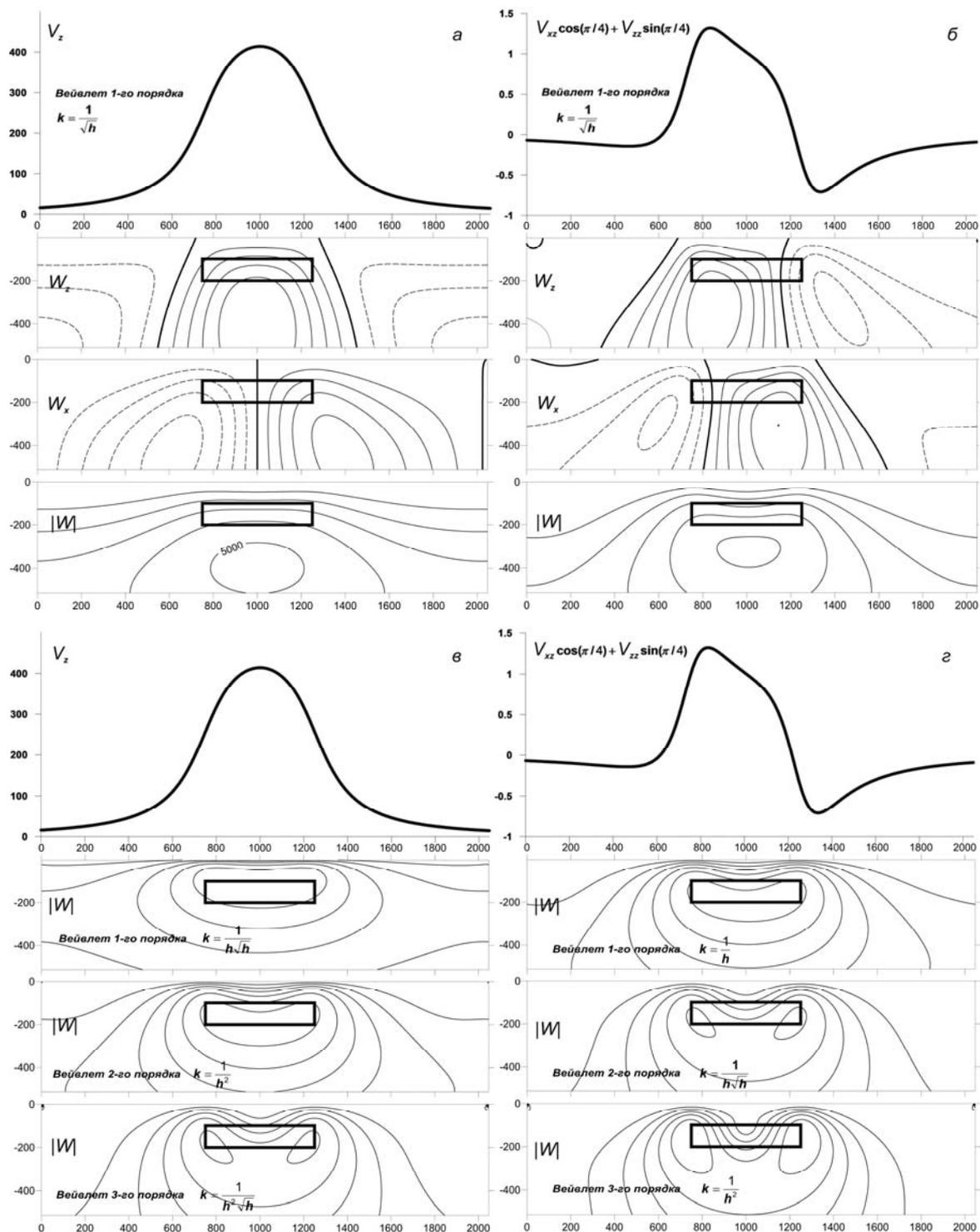


Рис. 6. Модель 4. Результаты преобразования полей V_z (слева) и $V_{xz} \cos(\pi/4) + V_{zz} \sin(\pi/4)$ (справа) вейвлетами 1–3-го порядка с разными нормировочными коэффициентами. По вертикали сверху вниз: на *а, б* – графики полей; результаты последовательного преобразования вейвлетом 1-го порядка с коэффициентом $1/\sqrt{h}$ (W_z – результат применения четного вейвлета, W_x – нечетного, $|W| = \sqrt{W_x^2 + W_z^2}$ – амплитудный вейвлет-спектр). На *в, г* – графики полей; результаты расчетов функции $|W|$ (порядок вейвлета и нормировочный коэффициент указаны для каждого результата отдельно). Черный контур – положение призмы. Изолинии положительных значений – сплошные; отрицательных – штриховые; нулевая изолиния – утолщенная черная. Глубины и расстояния – безразмерные величины

Таким образом, в результате прямого преобразования с вейвлетом $\psi_{h,x}^z(\xi)$ (4, 5), соответствующим вычислению вертикальной производной, получаемый результат можно сопоставить с плотностным распределением масс в нижнем полупространстве $\sigma(x, h)$, создающем исходное аномальное гравитационное поле:

$$\sigma(x, h) = \frac{\sqrt{h}}{\pi G h^2} W(h, x). \quad (14)$$

Если предположить, что исходная функция $g(x)$ соответствует напряженности вертикальной составляющей аномального магнитного поля $Z(x)$, то в результате прямого вейвлет-преобразования получаемое распределение функции $W(x, h)$ будет соответствовать распределению вертикальной намагниченности $I(x, z)$ среды в нижнем полупространстве, создающем поле Z . Переход от функции $W(x, h)$ к модели намагниченности осуществляется путем ее умножения на соответствующие множители, зависящие от параметра h . Так, для поля $Z(x)$, создаваемого вертикальной намагниченностью $I(x, z)$, распределенной в нижнем полупространстве, можно записать (в системе СГС):

$$Z(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} I(\xi, \zeta) \frac{\zeta^2 - (\xi - x)^2}{[(\xi - x)^2 + \zeta^2]^2} d\zeta d\xi. \quad (15)$$

В то же время, используя соотношение (11) для обратного вейвлет-преобразования, получим:

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^{\infty} \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} W(h, x) \psi_0^z \left(\frac{x - \xi}{h} \right) dx \right) dh = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{C_\psi h^2 \sqrt{h}} W(h, x) \left(h^2 \frac{h^2 - (x - \xi)^2}{[(x - \xi)^2 + h^2]} \right) dx dh = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, h) \frac{h^2 - (x - \xi)^2}{[(x - \xi)^2 + h^2]} dx dh = Z(\xi), \end{aligned}$$

где

$$I(x, h) = \frac{1}{C_\psi \sqrt{h}} W(h, x). \quad (16)$$

Значение коэффициента C_ψ определим, воспользовавшись соотношением (6) и используя в качестве вейвлета функцию $\psi_0^z(\xi)$, соответствующую вычислению вертикальной производной поля на высоте h (7). Спектр Фурье такого вейвлета имеет вид [Гравиразведка, 1990]:

$$\hat{\psi}_0^z(\omega) = \pi \omega e^{-|\omega|},$$

Тогда, согласно (6), для коэффициента C_ψ можно записать:

$$C_\psi = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}_0(\omega)|^2}{\omega} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{|\pi \omega e^{-|\omega|}|^2}{\omega} d\omega = \pi^2 \int_0^{\infty} \omega e^{-2|\omega|} d\omega.$$

Взяв этот интеграл по частям, получим $C_\psi = \frac{\pi^2}{4}$.

Значение коэффициента C_ψ можно получить непосредственно, воспользовавшись соотношением для обратного вейвлет-преобразования (4):

$$g(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^\infty W(h, \xi) \psi_0^z \left(\frac{\xi - x}{h} \right) d\xi \right) dh =$$

$$= \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{1}{h^2} \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^\infty W(h, \xi) \left(h^2 \frac{h^2 - (\xi - x)^2}{[(\xi - x)^2 + h^2]^2} \right) d\xi dh.$$

Используя спектральное представление и учитывая, что спектр ядра преобразования равен $\pi|\omega|e^{-|\omega|h}$, последнее выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{1}{h^2} \frac{1}{\sqrt{h}} \hat{W}(h, \omega) h^2 \pi|\omega| e^{-|\omega|h} dh = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{1}{h^2} \frac{1}{\sqrt{h}} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \hat{g}(\omega) h^2 \pi|\omega| e^{-|\omega|h} \right) h^2 \pi|\omega| e^{-|\omega|h} dh =$$

$$= \frac{1}{C_\psi} \hat{g}(\omega) \pi^2 \omega^2 \int_0^\infty h e^{-2|\omega|h} dh = \frac{1}{C_\psi} \hat{g}(\omega) \pi^2 \omega^2 \frac{-1}{2|\omega|} \int_0^\infty h d e^{-2|\omega|h} =$$

$$= \frac{1}{C_\psi} \hat{g}(\omega) \pi^2 \omega^2 \frac{-1}{2|\omega|} \left(h e^{-2|\omega|h} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-2|\omega|h} dh \right) =$$

$$= \frac{1}{C_\psi} \hat{g}(\omega) \pi^2 \omega^2 \frac{-1}{2|\omega|} \left(\frac{1}{2|\omega|} e^{-2|\omega|h} \Big|_0^\infty \right) = \frac{1}{C_\psi} \hat{g}(\omega) \pi^2 \frac{1}{4}.$$

Значение коэффициента C_ψ при выборе в качестве вейвлета функции вида $\psi_0^x(\xi)$ будет также равно $\frac{\pi^2}{4} \left(C_\psi = \frac{\pi^2}{4} \right)$.

Из приведенных выкладок вытекает следующее. Пусть функция $g(x)$ представляет собой поле $Z(x)$, соответствующее вертикальной составляющей аномального магнитного поля. Эту функцию можно разложить с помощью вейвлета $\psi_0^z(\xi)$ и получить функцию $W(h, x)$. Затем путем обратного вейвлет-преобразования, используя вейвлет $\psi_0^x(\xi)$, можно рассчитать функцию, соответствующую горизонтальной напряженности магнитного поля $X(x)$. Таким образом, преобразование пригодно для вычисления трансформаций, в частности, редуцирования аномального магнитного поля к полюсу.

Выводы

Получаемая в результате непрерывного вейвлет-преобразования функция $W(h, x)$ несет в себе информацию об источниках изучаемого аномального поля и может быть сопоставлена с распределением плотности или намагниченности в среде.

Применение вейвлетов Пуассона разных порядков с соответствующими нормировочными коэффициентами в ряде случаев позволяет по характеру поведения функций W_z , W_x и $|W|$ определить положение изолированных источников и особых точек поля.

Для определения полюсов первого порядка следует использовать вейвлеты 1-го порядка с нормировочным коэффициентом $1/h$, 2-го порядка с нормировочным коэффициентом $1/h\sqrt{h}$ и 3-го порядка с нормировочным коэффициентом $1/h^2$; для определения полюсов второго порядка – вейвлет 1-го порядка с нормировочным коэффициентом $1/\sqrt{h}$; для определения логарифмической особенности поля – вейвлеты 1-го порядка с нормировочным коэффициентом $1/h\sqrt{h}$, 2-го порядка с нормировочным коэффициентом $1/h^2$ и 3-го порядка с нормировочным коэффициентом $1/h^2\sqrt{h}$.

Литература

- Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. Т. 166, № 11. С.1145–1170.
- Гравиразведка. Справочник геофизика. М.: Недра, 1990. 607 с.
- Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 464 с.
- Дьяконов В.П.* Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН-Р, 2002. 448 с.
- Кобрунов А.И., Варфоломеев В.А.* Об одном методе ε -эквивалентных перераспределений и его использовании при интерпретации гравитационных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1981. № 10. С.25–44.
- Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлет-анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с.
- Никитин А.А.* Новые приемы обработки геофизических данных и их известные аналоги // Геофизика. 2006. № 4. С.11–15.
- Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.
- Страхов В.Н.* Методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Пермь: Пермский университет, 1984. 72 с.
- Утёмов Э.В., Нургалиев Д.К.* “Естественные” вейвлет-преобразования гравиметрических данных: теория и приложения // Физика Земли. 2005. № 4. С.88–96.
- Hornby P., Boschetti F., Horovitz F.G.* Analysis of potential field data in the wavelet domain // Geophys. J. Int. 1999. V. 137. P.175–196.
- Martelet G., Sailhac P., Moreau F., Diamant M.* Characterization of geological boundaries using 1-D wavelet transform on gravity data: theory and application to the Himalayas // Geophysics. 2001. N 66. P.1116–1129.
- Moreau F., Gibert D., Holschneider M., Saracco G.* Wavelet analysis of potential fields // Inverse Problems. 1997. V. 13. P.165–178.
- Moreau F., Gibert D., Holschneider M., Saracco G.* Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Basic theory // J. Geophys. Res. 1999. V. 104, N B3. P.5003–5013.
- Sailhac P., Galdeano A., Gibert D. et al.* Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Complex wavelets and application to aeromagnetic profiles in French Guiana // J. Geophys. Res. 2000. V. 105, N B8. P.19455–19475.
- Sailhac P., Gibert D., Boukerbout H.* The theory of continuous wavelet transform in the interpretation of potential fields: a review // Geophys. Prospect. 2009. V. 57. P.517–525.

Сведения об авторах

ОБОЛЕНСКИЙ Иван Владимирович – аспирант кафедры геофизических методов исследования земной коры геологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. 119992, Москва, Воробьевы горы, МГУ, Геологический факультет. Тел.: 8 (495) 939-30-13. E-mail: ivan-obolensky@yandex.ru

БУЛЫЧЕВ Андрей Александрович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой геофизических методов исследования земной коры геологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. 119992, Москва, Воробьевы горы, МГУ, Геологический факультет. Тел.: 8 (495) 939-57-66. E-mail: aabul@geophys.geol.msu.ru

COMPLEX CONTINUOUS POISSON WAVELET TRANSFORM FOR IDENTIFYING THE SOURCES OF THE POTENTIAL FIELD ANOMALIES

I.V. Obolensky, A.A. Bulychev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract: Some possibilities of continuous wavelet transform as applied for interpreting the potential field data are considered. The use of complex Poisson wavelets of arbitrary order is suggested. The highly efficient scheme of computing continuous wavelet transform using the fast Fourier transform is described. The possibility of localizing the singularities using the continuous complex wavelet transform with Poisson kernel is explored on several simple models. The way for determining the continuous distributions of anomalous properties of the environment based on the continuous wavelet transform and Kobrunov theorem is demonstrated.

Keywords: continuous wavelet transform, potential fields.