

УДК 550.340

ВОЗМУЩЕНИЯ ФЛЮИДНОГО ПОТОКА ЗЕМЛИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ ТЕКТОНИЧЕСКОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

© 2011 г. И.П. Добровольский

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

В ряде районов Земли наблюдается поток восходящих из ее недр флюидов, прежде всего, газообразных. Фиксируемые перед тектоническими землетрясениями нарушения интенсивности флюидного потока, определяющей причиной которых является деформирование недр Земли при подготовке землетрясения, рассматриваются как предвестники сейсмических событий. Возможны три механизма названных нарушений: изменение проницаемости среды; вариации порового давления; переход газа в свободное состояние, если он был связан в кристаллических решетках или растворен в жидкости.

На основе уравнений механики двухфазной среды развита методика расчета рассматриваемых явлений; для первых двух из названных механизмов рассчитаны изменения интенсивности потока. Процесс описывается линейным параболическим уравнением с переменными коэффициентами, задача массопереноса в полупространстве для которого приведена к интегральному уравнению, решаемому в первом приближении. Выявлены зоны усиления и ослабления потока, что согласуется с результатами полевых наблюдений.

Описанная методика может быть использована при расчете процессов теплопереноса.

Ключевые слова: параболическое уравнение, деформации земной коры, предвестник землетрясения.

Введение

При подготовке любого тектонического землетрясения происходит деформирование среды, которое может рассматриваться как первичный предвестник этого землетрясения. Изменения напряженно-деформированного состояния горных пород влияют на различные природные процессы, нарушая их фоновый режим, характерный для асейсмического периода. Связанные с этим возмущения фонового режима представляют собой предвестники землетрясений вторичной механической или немеханической природы [Добровольский, 2009].

В соответствии с темой статьи из множества предвестников тектонических землетрясений рассматриваются те, которые можно назвать флюидными. Пористая и трещиноватая земная кора является, вообще говоря, двухфазной системой: твердая матрица содержит флюид – жидкость и/или газ. (Вероятно, правильнее говорить о многофазной системе.) Деформирование такой среды меняет многие ее характеристики, влияющие на процесс теплопереноса.

К флюидным следует отнести предвестники, контролируемые электрокинетическим эффектом, поскольку они вызываются изменением порового давления и, следовательно, потоками жидкости. К этой группе относятся также гидродинамические предвестники, проявляющиеся колебанием уровня жидкости в колодцах и скважинах, где флюид изливается через искусственную поверхность (стенку колодца или скважины). Названные предвестники рассматриваются во многих работах; в частности, их расчет выполнен автором настоящей статьи в [Добровольский, 2009].

Наряду с этим, известны публикации (см., например, [Рикитаке, 1979; Зубков, 2002]), в которых описаны фиксируемые на поверхности Земли в период подготовки

землетрясений возмущения глубинных газовых потоков, образующих “газовое дыхание Земли”. Рассмотрению вопросов, связанных с выходом флюидов с естественной поверхности, которые количественно не исследованы, и посвящается настоящая статья.

Наиболее часто обсуждается и анализируется поток тяжелого инертного радиоактивного газа радона. В книге С.И. Зубкова [2002] собраны литературные данные о проявлении радоновых предвестников, выполнена статистическая обработка этих предвестников и рассмотрены предлагаемые разными авторами возможные механизмы их появления.

Остановимся на трех причинах нарушения газового потока из недр Земли.

1. В асейсмичном состоянии на поверхности Земли фиксируется фоновый газовый поток из ее недр. Деформирование коры при подготовке землетрясения меняет проницаемость среды, т.е. эффективный коэффициент массопереноса, следствием чего становится изменение газового потока; при этом, по-видимому, основное влияние оказывают вариации объемной деформации. Такой механизм неплохо объясняет две действительно наблюдаемые особенности радоновых предвестников. Во-первых, поскольку в области подготовки предвестниковая объемная деформация принимает значения разных знаков, то и поток в разных областях может как возрастать, так и убывать. Во-вторых, если поток определяется лишь величиной деформации и следует за ее изменениями, то возмущения потока могут проявляться как в долгосрочных, так и в краткосрочных предвестниках.

2. Среда является двухфазной, в связи с чем независимо от наличия фонового газового потока неоднородное деформирование вызывает перераспределение порового давления, в результате чего возникают соответствующие потоки. Здесь конкурируют два процесса: потоки уравнивают давление, а неоднородное деформирование, напротив, делает его более неоднородным. Преимущество в этом “соревновании” определяется относительной скоростью конкурирующих процессов; на достаточно больших отрезках времени при медленном деформировании преобладает выравнивание, и практически нет надежды на обнаружение долгосрочных предвестников. Говоря о кратковременности этого механизма, следует добавить, что период полураспада радона невелик и составляет около 4 сут.

3. Переход газа в свободное состояние может произойти из-за нарушения кристаллических решеток, возникновения высокочастотных колебаний при развитии трещин, а также быть следствием нагрева. Эти механизмы в настоящее время представляются довольно туманными, но одно очевидно – как и механизм, описанный в п. 2, долговременными они быть не могут. Феноменологически их можно трактовать как возникновение источников флюида в среде и вводить в связи с этим соответствующие слагаемые в дифференциальное уравнение, описывающее массоперенос.

Анализ, который будет проведен ниже, следует рассматривать как имеющий, прежде всего, методологическое значение. Приводимые рассуждения и расчеты выполнены в достаточно общем виде и могут быть отнесены к любому газу (или жидкости). При расчете конкретных предвестников в конкретном районе анализ также следует конкретизировать.

В работе довольно подробно представлены некоторые известные результаты общего характера. Автор считает, что такой подход, не увеличивая чрезмерно объема статьи, придает ей некоторую автономность, избавляя читателя от необходимости искать в литературе соответствующие ссылки.

Цель статьи – разработка методики расчета флюидных потоков при деформировании земной коры, расчет для достаточно типичной конкретной ситуации и оценка степени соответствия теоретических результатов эмпирическим. Заметим, что ранее такая работа не проводилась.

Основные обозначения

Далее в работе используются следующие основные обозначения:

x, y, z – декартова система координат с началом в эпицентре неоднородности, м;
 t – время от начала действия предвестника, с;
 s – касательные напряжения на бесконечности (граничное условие), кг/(м·с²);
 μ – модуль сдвига земной коры, Па;
 α – относительное приращение модуля сдвига в неоднородности;
 ε – объемная деформация;
 H – глубина гипоцентра шаровой неоднородности, м;
 R – радиус шаровой неоднородности, м;
 μ_F – динамическая вязкость флюида, Па·с;
 k – проницаемость, м²;
 m и m_0 – пористость и начальная пористость соответственно;
 \mathbf{V} – скорость движения флюида, м/с;
 \mathbf{U} – скорость движения твердой фазы, м/с;
 \mathbf{W} – скорость Дарси, м/с;
 β – изотермическая сжимаемость порового флюида, 1/Па;
 P – избыточное (надгидростатическое) поровое давление, Па;
 E – функция Хевисайда;
 δ – дельта-функция;
 ∇ – набла-оператор.

Уравнения двухфазной среды

При анализе многих геофизических и геологических явлений, которые могут быть сведены к механическим процессам, среда (в первую очередь, земная кора) рассматривается как сплошная линейно упругая (или осложненная вязкими и пластическими свойствами). Этот подход вполне достаточен для описания изменений в больших объемах и расчета ряда предвестников. Подчеркнем одно важное качество такой модели – рассматривается однофазная среда. Однако существуют некоторые процессы, для которых такое описание оказывается принципиально недостаточным и становится совершенно необходимым рассмотрение, по крайней мере, двухфазной среды.

Пористая и трещиноватая земная кора является, вообще говоря, двухфазной системой: твердая матрица содержит флюид – жидкость и/или газ. В такой среде деформирование меняет многие характеристики, влияющие на процесс теплопереноса. В частности, деформирование среды при подготовке землетрясения вызывает нарушение фоновых флюидных процессов, что воспринимается нами в качестве флюидных предвестников землетрясения. Как отмечалось выше, к флюидным относятся предвестники, контролируемые электрокинетическим эффектом, гидродинамические (колебания уровня жидкости в колодцах и скважинах), вариации газового потока Земли и т.п. Все эти явления описываются одной системой уравнений, которую целесообразно сформулировать в явном виде и провести для нее предварительный анализ.

В линейном приближении система уравнений динамики порового флюида для медленных процессов, когда можно пренебречь инерционными силами, имеет вид [Николаевский, 1984]

$$\text{grad } P + \frac{\mu_F m_0}{k} (\mathbf{V} - \mathbf{U}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{m_0} \frac{\partial m}{\partial t} + \beta \frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (2)$$

Выполним преобразование первого слагаемого в уравнении (2). Для этого выделим элементарный объем до начала деформирования v_0 , в котором поры занимают объем v_{m_0} . Если ε – объемная деформация исходного объема, а ε_m – объемная деформация пор, то текущая пористость m выразится формулой:

$$m = \frac{v_{m_0}(1 + \varepsilon_m)}{v_0(1 + \varepsilon)} = m_0 \frac{1 + \varepsilon_m}{1 + \varepsilon}. \quad (3)$$

Между ε и ε_m существует определенная связь, которую запишем в виде $\varepsilon_m = \gamma \varepsilon$. Как видно из этого соотношения, коэффициент γ отражает деформацию пор, заполненных флюидом, в сравнении с общей деформацией представительного объема. Исходя из сказанного, γ можно назвать *коэффициентом деформации пор*. Если рассматривать совокупность пор как совокупность неоднородностей, то этот коэффициент отражает общую относительную деформацию ансамбля неоднородностей.

Значение γ зависит от геометрии пор, вида напряженного состояния, соотношения свойств твердой фазы и флюида; в некотором приближении этот вопрос рассмотрен в работах [Теркот, Шуберт, 1985б; Добровольский, 2009]. Обратим внимание на то, что сжимаемость флюида, например, воды, на порядок выше сжимаемости горных пород земной коры; для газообразных флюидов это соотношение становится более значительным. Следуя названным работам, можно положить $\gamma = 5-7$.

Приняв в формуле (3) $\varepsilon_m = \gamma \varepsilon$ и $\gamma = \text{const}$, получаем

$$\frac{1}{m_0} \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\gamma - 1}{(1 + \varepsilon)^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \approx (\gamma - 1) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (4)$$

Теперь система уравнений (1), (2) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} P + \frac{\mu_F m_0}{k} (\mathbf{V} - \mathbf{U}) &= 0, \\ (\gamma - 1) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \beta \frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Если первое уравнение системы (5) переписать в форме

$$\mathbf{V} = -\frac{k}{\mu_F m_0} \operatorname{grad} P + \mathbf{U}, \quad (6)$$

то видно, что оно определяет поток флюида и по существу, если пренебречь перемещением твердой фазы, совпадает с законом Дарси [Теркот, Шуберт, 1985б]:

$$\mathbf{W} = -\frac{k}{\mu_F} \operatorname{grad} P. \quad (7)$$

Исключая из системы (5) \mathbf{V} , приходим к уравнению для порового давления P :

$$\operatorname{div} \frac{k}{\mu_F m_0} \operatorname{grad} P - \beta \frac{\partial P}{\partial t} = (\gamma - 1) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{U}. \quad (8)$$

Так как \mathbf{U} – скорость твердой фазы, то $\operatorname{div} \mathbf{U} = \partial \varepsilon / \partial t$. Подставляя это выражение в (8), получаем

$$\operatorname{div} \frac{k}{\mu_F m_0} \operatorname{grad} P - \beta \frac{\partial P}{\partial t} = \gamma \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \quad (9)$$

Полагая $\mu_F m_0 = \text{const}$, из (9) имеем

$$\text{div } k \text{ grad } P - \beta \mu_F m_0 \frac{\partial P}{\partial t} - \gamma \mu_F m_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

В уравнениях (9) и (10) функция $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z, t)$ представляет собой объемную деформацию среды и считается известной. Причины, вызывающие эту деформацию, могут быть различными, т.е. уравнения описывают разные процессы и оказываются довольно общими. В частности, если ε отражает деформирование среды при подготовке землетрясения, то с помощью анализируемых уравнений можно рассчитать вариации порового давления и потоки флюидов, являющиеся долгосрочными или краткосрочными предвестниками.

Чтобы замкнуть задачу, уравнения (9), (10) должны сопровождаться граничным и начальным условиями.

Относительно граничного условия на поверхности полупространства все просто: для свободного излияния флюида давление на поверхности должно быть нулевым, т.е. всегда полагаем $P(x, y, 0, t) = 0$. Кстати, если на поверхности имеется непроницаемый слой, то в этом случае в нуль обращается производная по нормали к поверхности.

Начальное условие должно фиксировать состояние рассматриваемой области в момент времени, принимаемый за начальный, и на этот счет, по-видимому, невозможно дать какие-либо более конкретные рекомендации.

В случае, когда $k = \text{const}$, уравнение (10) превращается в классическое параболическое уравнение теплопроводности или диффузии с постоянными коэффициентами:

$$k \nabla^2 P - \beta \mu_F m_0 \frac{\partial P}{\partial t} - \gamma \mu_F m_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

Это уравнение подробно исследовано (см., например, [Положий, 1964; Тихонов, Самарский, 1977; Владимиров, 1988]); в Приложении к данной статье приводится в явном виде решение первой краевой задачи для полупространства, необходимое для дальнейшего изложения.

Постановка задачи

С феноменологической точки зрения, цикл тектонического землетрясения и, в частности, процесс подготовки состоит в возникновении и эволюции неоднородности свойств в напряженной среде [Добровольский, 2009]. Среда (земная кора) моделируется в декартовой системе координат (x, y, z) полупространством $z \geq 0$. Начало системы координат располагается на поверхности в эпицентре неоднородности.

Проанализируем процесс флюидного потока по следующему сценарию. Рассмотрим три состояния среды. Первое состояние – *начальное*, имеющее место в период, предшествующий появлению и развитию исследуемых предвестников. Будем считать его стационарным, однородным, полагая, что в этом состоянии на поверхности Земли существует постоянный вертикальный флюидный поток. Поровое давление обозначим через $P_0(x, y, z)$.

Второе состояние – *возмущенное*, характеризуемое возникновением предвестникового деформирования среды, которое нарушает исходную проницаемость и вызывает перераспределение флюидных потоков. В сущности, расчет этого состояния – цель решаемой задачи. Поровое давление для этого состояния обозначим через $P(x, y, z, t)$.

Однако в рамках основной задачи особый интерес представляет *чисто предвестниковое возмущение*, определяемое разностью двух указанных состояний: $Q(x, y, z, t) = P - P_0$. Расчет именно такого разностного состояния целесообразен и с ма-

тематической точки зрения: рассматриваемые задачи довольно сложны, решать их приходится приближенно, и в этом случае даже приближенное решение для возмущенного состояния дает нам неплохое представление именно о предвестниковом возмущении. К тому же, предвестники регистрируются с малой точностью (в одну–две значащих цифры), не говоря уже об обилии ложных сведений. Перейдем к постановке и анализу описанных задач.

Выше отмечено, что *начальное состояние* считается однородным и стационарным. Оно характеризуется коэффициентом проницаемости k_0 , не имеет источников, и, следовательно, удовлетворяется системой, получаемой из уравнения (11) с граничным условием свободного излияния на поверхности:

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial z^2} = 0, \quad P_0(x, y, 0) = 0. \quad (12)$$

В стационарном состоянии существует известный поток \mathbf{W}_0 , который обнаруживается при полевых наблюдениях и в соответствии с (7) выражается как

$$\mathbf{W}_0 = -\frac{k_0}{\mu_F} \text{grad } P_0. \quad (13)$$

Этот поток имеет лишь одну ненулевую составляющую (по z), которая в силу выбранной системы координат отрицательна.

Таким образом, из (12) и (13) следует, что начальное состояние описывается функцией

$$P_0 = \frac{\mu_F W_0}{k_0} z. \quad (14)$$

Возмущенное состояние. Будем считать, что во время предвестникового деформирования изменяется лишь коэффициент проницаемости, связывая это изменение с вариацией объемной деформации. В этом состоянии полагаем коэффициент проницаемости $k = k_0(1 + \kappa \varepsilon)$. Безразмерный параметр κ , вообще говоря, может принимать разные значения для положительной и отрицательной деформации, но мы этого учитывать не будем. Подставляя новое выражение для коэффициента проницаемости в уравнение (10) и добавляя начальное и граничное условия, получаем систему для возмущенного состояния в виде:

$$k_0 \nabla^2 P + \kappa k_0 \text{div } \varepsilon \text{ grad } P - \beta \mu_F m_0 \frac{\partial P}{\partial t} - \gamma \mu_F m_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0, \quad (15)$$

$$P(x, y, 0, t) = 0, \quad P(x, y, z, 0) = P_0 = \frac{\mu_F W_0}{k_0} z.$$

Следует обратить внимание на следующее. В полученной системе то, что выше мы назвали *начальным состоянием*, математически является обычным начальным условием и физически не регламентируется столь жестко, как описано ранее.

Чисто предвестниковое возмущение. Чтобы выделить такое возмущение, полагаем в (15) $P = Q + P_0$ и получаем в результате систему для Q :

$$k_0 \nabla^2 Q - \beta \mu_F m_0 \frac{\partial Q}{\partial t} + \kappa k_0 \text{div } \varepsilon \text{ grad } Q + \kappa k_0 \text{div } \varepsilon \text{ grad } P_0 - \gamma \mu_F m_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0, \quad (16)$$

$$Q(x, y, 0, t) = 0, \quad Q(x, y, z, 0) = 0.$$

В дифференциальном уравнении (16) четвертое слагаемое выражает возмущение флюидного потока, определяемое изменением проницаемости вследствие деформации по первому из механизмов, описанных во Введении. Пятое слагаемое отражает перераспределение порового давления независимо от существования начального потока

(второй механизм). Третий механизм тоже может быть учтен еще одним слагаемым, но он вообще неясен, и как функцию источников его следует вводить уже в систему (1)–(2), чего мы здесь делать не будем.

Предвестниковый поток определяется как разность потоков в возмущенном и начальном состояниях и имеет вид:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{W} - \mathbf{W}_0 = -\frac{k_0}{\mu_F} \text{grad } Q - \frac{\kappa \varepsilon k_0}{\mu_F} \text{grad } Q - \frac{\kappa \varepsilon k_0}{\mu_F} \text{grad } P_0. \quad (17)$$

Для дальнейших вычислений целесообразно перейти к безразмерным величинам по следующим формулам:

$$(x, y, z) = (R\xi, R\eta, R\zeta), \quad t = \frac{\mu_F R^2 \beta m_0}{k_0} \tau, \quad Q = \frac{\mu_F W_0 R}{k_0} q, \quad G = \frac{1}{R^3} \Gamma, \quad (18)$$

$$\theta = \frac{\gamma k_0}{\mu_F \beta R W_0}, \quad P_0 = \frac{\mu_F W_0 R}{k_0} p_0, \quad p_0 = \zeta.$$

Необходимо сделать одно замечание. В формулах (18) R – радиус шаровой неоднородности, но при анализе других задач R может быть и иной линейной величиной, характерной для конкретной задачи.

Итак, получена система:

$$\nabla^2 q - \frac{\partial q}{\partial \tau} + \kappa \text{div } \varepsilon \text{grad } q + \kappa \text{div } \varepsilon \text{grad } p_0 - \theta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = 0, \quad (19)$$

$$q(\xi, \eta, 0, \tau) = 0, \quad q(\xi, \eta, \zeta, 0) = 0;$$

относительный поток при этом выражен через безразмерные величины:

$$\frac{\mathbf{\Pi}}{W_0} = \frac{\mathbf{W} - \mathbf{W}_0}{W_0} = -\text{grad } q - \kappa \varepsilon \text{grad } q - \kappa \varepsilon \text{grad } p_0. \quad (20)$$

Задача для предвестникового возмущения в форме интегрального уравнения

Рассматривая сумму слагаемых после производной по времени в уравнении (19) как функцию источников, в соответствии с приводимой в Приложении формулой (П.1) имеем:

$$q(\xi, \eta, \zeta, \tau) - \kappa \int_0^\tau \iiint \Gamma(\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta', \tau') \text{div } \varepsilon \text{grad } q \, dv' d\tau' =$$

$$= \kappa \int_0^\tau \iiint \Gamma \text{div } \varepsilon \text{grad } p_0 \, dv' d\tau' - \theta \int_0^\tau \iiint \Gamma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau'} \, dv' d\tau', \quad (21)$$

где безразмерная функция влияния Γ имеет вид

$$\Gamma(\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta', \tau') = \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau'})^3} \left(e^{-\frac{(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2 + (\zeta-\zeta')^2}{4\tau'}} - e^{-\frac{(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2 + (\zeta+\zeta')^2}{4\tau'}} \right), \quad (22)$$

получаемый из формулы (П.3) в Приложении.

Соотношение между безразмерной функцией влияния Γ и размерной G (формула (П.3) в Приложении) определено в (18).

Выражение (21) является интегральным уравнением относительно функции q и эквивалентно задаче (19). Преобразуем его с помощью формулы Гаусса–Остроградского (формула (П.5) в Приложении). При таком преобразовании интегралы по поверхности полупространства пропадают, и мы получаем

$$\begin{aligned}
 q(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \kappa \int_0^\tau \iiint \varepsilon \operatorname{grad}' q \operatorname{grad}' \Gamma \, dv' d\tau' = \\
 = -\kappa \int_0^\tau \iiint \varepsilon \operatorname{grad}' p_0 \operatorname{grad}' \Gamma \, dv' d\tau' - \theta \int_0^\tau \iiint \Gamma \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau'} \, dv' d\tau',
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

где символ grad' означает, что градиент вычисляется по переменным интегрирования ξ', η', ζ' .

Переход от выражения (21) к интегральному уравнению (23) имел определенный смысл. Дело в том, что деформация ε на поверхности однородной неоднородности терпит разрыв, и прямое применение формулы (21) приводит к возникновению обобщенных функций, сосредоточенных на поверхности неоднородности. Выражение (23) лишено этого неудобства, не являясь одновременно более сложным. Кстати, если возмущающая функция, аналогичная ε , занимает конечную область, то интегрирование в (23) будет также совершаться по этой конечной области.

Интегральное уравнение (23) можно назвать уравнением II рода, поскольку оно содержит известную функцию. Его также можно назвать смешанным, так как по разным переменным оно имеет признаки уравнений Фредгольма, Вольтерра и уравнений типа свертки. В целом уравнение достаточно сложно, и трудно рассчитывать на получение его точного решения в замкнутом виде. Несмотря на наличие операции свертки, применение интегральных преобразований также практически ничего не дает – если бы этот путь был эффективен, то его просто можно было бы применить к исходному дифференциальному уравнению. Однако существует множество различных приближенных методов (см., например, [Верлань, Сизиков, 1978; Добровольский, 1981]), которые в большинстве своем развиваются для одномерных уравнений. Их распространение на уравнения с большим числом измерений хотя и не вызывает принципиальных осложнений, но приводит к довольно громоздким выкладкам. Отметим, что за пределами данной статьи остается представляющее интерес более подробное исследование полученного интегрального уравнения, в частности, рассмотрение вопросов сходимости метода последовательных приближений; обнаружения малого параметра; асимптотики решения при больших и малых временах; возможностей представления ядра в виде вырожденного или в иной аппроксимации и т.п.

Вычисления. Результаты

Выше при выводе интегрального уравнения выкладки совершались в достаточно общем виде; теперь же перейдем к выполнению конкретных расчетов.

Будем рассматривать краткосрочный предвестник по сценарию подготовки, изложенному в [Добровольский, 2009]. Момент начала действия краткосрочного предвестника примем за начальный, соответствующий окончанию действия предвестников долгосрочных. К этому моменту в среде накапливается объемная деформация ε_{\max} ; будем считать, что она сбрасывается внезапно до нуля и далее остается неизменной.

Если отсчитывать ход деформации от начального момента и условно считать среду в этот момент недеформированной, то деформация в интересующий нас период имеет вид

$$\varepsilon(x, y, z, t) = -\varepsilon_{\max}(x, y, z) E(t),$$

где ε_{\max} определяется формулой (П.6) из Приложения. В безразмерных координатах эта функция приобретает вид формулы (П.7) (см. Приложение):

$$\varepsilon(\xi, \eta, \zeta, \tau) = -\varepsilon_0(\xi, \eta, \zeta) E(\tau),$$

которую и нужно внести в уравнение (23), причем $\partial \varepsilon / \partial \tau = -\varepsilon_0 \delta(\tau)$. При вычислениях полагаем однородность немного заглубленной – в формуле (П.7) принимаем $h = 1.5$. Поскольку $p_0 = \zeta$, то в результате уравнение (23) становится более простым:

$$\begin{aligned} q(\xi, \eta, \zeta, \tau) - \kappa \int_0^\tau \iiint \varepsilon_0 \operatorname{grad} q \operatorname{grad}' \Gamma \, dv' d\tau' = \\ = \kappa \int_0^\tau \iiint \varepsilon_0 \Gamma_{,\zeta'} \, dv' d\tau' + \theta \iiint \varepsilon_0 \Gamma(\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta', \tau) \, dv'. \end{aligned} \quad (24)$$

В этом выражении нижний индекс после запятой у Γ означает дифференцирование по соответствующей координате.

Изменяется и формула (20) для относительного (безразмерного) потока:

$$\frac{\Pi}{W_0} = \frac{\mathbf{W} - \mathbf{W}_0}{W_0} = -\operatorname{grad} q + \kappa \varepsilon_0 \operatorname{grad} q + \kappa \varepsilon_0. \quad (25)$$

Если уравнение (24) решать методом последовательных приближений, то первым приближением будет

$$q(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \kappa \int_0^\tau \iiint \varepsilon_0 \Gamma_{,\zeta'} \, dv' d\tau' + \theta \iiint \varepsilon_0 \Gamma(\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta', \tau) \, dv', \quad (26)$$

на котором мы остановимся.

По смыслу задачи нас интересует только поток и только на поверхности, т.е. $\operatorname{grad} q$ при $\zeta = 0$. Несложными вычислениями обнаруживается, что в выражении (26) на поверхности из трех производных, составляющих градиент, остается только одна – производная по ζ . В результате получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} q_{,\zeta}(\xi, \eta, 0, \tau) = \\ = \kappa \int_0^\tau \iiint \varepsilon_0 \Gamma_{,\zeta\zeta'}(\xi, \eta, 0, \xi', \eta', \zeta', \tau) \, dv' d\tau' + \theta \iiint \varepsilon_0 \Gamma_{,\zeta}(\xi, \eta, 0, \xi', \eta', \zeta', \tau) \, dv', \end{aligned} \quad (27)$$

которое можно сделать более удобным для вычислений и общего анализа. В самом деле, из (22) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{,\zeta}(\xi, \eta, 0, \xi', \eta', \zeta', \tau) = \left[\frac{\zeta'}{\tau' (2\sqrt{\pi\tau'})^3} e^{-\frac{\zeta'^2}{4\tau'}} \right] e^{-\frac{(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2}{4\tau'}} \sim F((\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2), \\ \Gamma_{,\zeta\zeta'}(\xi, \eta, 0, \xi', \eta', \zeta', \tau) = \left[\frac{2\tau' - \zeta'^2}{2\tau'^2 (2\sqrt{\pi\tau'})^3} e^{-\frac{\zeta'^2}{4\tau'}} \right] e^{-\frac{(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2}{4\tau'}} \sim F((\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь в конечном переходе отброшены множители, не зависящие от ξ, η, ξ', η' (они заключены в квадратные скобки), а в функции F наоборот – оставлен аргумент, содержащий лишь эти переменные. Аналогичная операция с ε_0 приводит к выражению

$$\varepsilon_0 = \left[\frac{2\alpha s}{3\mu} \right] \xi' \eta' f(\xi'^2 + \eta'^2) \sim \xi' \eta' f(\xi'^2 + \eta'^2). \quad (29)$$

В выражении (27) в тройных интегралах по пространственным координатам можно выделить двойной интеграл по переменным ξ', η' , который в силу (28) и (29) с точностью до отброшенных множителей имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi' \eta' f(\xi'^2 + \eta'^2) F((\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2) d\xi' d\eta'. \quad (30)$$

Если перейти к полярным координатам по формулам $\xi' = \rho' \cos \varphi$, $\eta' = \rho' \sin \varphi$ в переменных интегрирования и по формулам $\xi = \rho \cos \omega$, $\eta = \rho \sin \omega$ во внешних переменных, то двойной интеграл (30) переходит в

$$\int_0^{\infty} \rho' d\rho' \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \rho'^2 \sin 2\varphi f(\rho'^2) F(\rho'^2 + \rho^2 - 2\rho' \rho \cos(\varphi - \omega)) d\varphi. \quad (31)$$

Если сделать замену переменной интегрирования на $\varphi = \varphi' + \omega$, то пределы интегрирования не меняются, поскольку оно идет по целому периоду, и (31) приобретает вид

$$\int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \rho'^3 \sin(2\varphi' + 2\omega) f(\rho'^2) F(\rho'^2 + \rho^2 - 2\rho' \rho \cos \varphi') d\varphi' d\rho' \quad (32)$$

и в конечном итоге разбивается на сумму двух интегралов:

$$\begin{aligned} & \sin 2\omega \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \rho'^3 \cos 2\varphi' f(\rho'^2) F(\rho'^2 + \rho^2 - 2\rho' \rho \cos \varphi') d\varphi' d\rho' + \\ & + \cos 2\omega \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \rho'^3 \sin 2\varphi' f(\rho'^2) F(\rho'^2 + \rho^2 - 2\rho' \rho \cos \varphi') d\varphi' d\rho'. \end{aligned} \quad (33)$$

Подынтегральная функция в первом интеграле является четной по φ' , а во втором – нечетной, в силу чего последний обращается в нуль. Тогда (30) записывается в форме

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi' \eta' f(\xi'^2 + \eta'^2) F((\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2) d\xi' d\eta' = \\ & = \sin 2\omega \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \rho'^3 \cos 2\varphi f(\rho'^2) F(\rho'^2 + \rho^2 - 2\rho' \rho \cos \varphi) d\varphi d\rho'. \end{aligned} \quad (34)$$

Теперь с учетом (34) и других формул выражение (27) записывается в виде:

$$\begin{aligned} q_{,\zeta}(\rho, \omega, 0, \tau) &= \frac{2\alpha s \kappa}{3\mu} \sin 2\omega \int_0^{\tau} \iiint \bar{\varepsilon} \Gamma_{,\zeta\zeta'} d\varphi d\rho' d\zeta' d\tau' + \frac{2\alpha s \theta}{3\mu} \sin 2\omega \iiint \bar{\varepsilon} \Gamma_{,\zeta} d\varphi d\rho' d\zeta' = \\ &= \sin 2\omega \left(\frac{2\alpha s \kappa}{3\mu} I_1(\rho, \tau) + \frac{2\alpha s \theta}{3\mu} I_2(\rho, \tau) \right), \end{aligned} \quad (35)$$

где обозначения I_1 и I_2 очевидны.

Как видно из (35), функция, определяющая распределение потока на поверхности Земли, оказывается в полярной системе координат относительно простой – она состоит из двух сомножителей. Первый сомножитель, особенно несложный по форме зависит от угла, второй – от радиуса и времени. Отсюда сразу следует, что знак потока меняется при переходе от квадранта к квадранту, т.е. в зоне подготовки землетрясения должно иметь место как увеличение потока, так и его уменьшение. При полевых наблюдениях такая ситуация действительно была обнаружена [Зубков, 2002]. Экстремальные по углу значения потока находятся на биссектрисах квадрантов.

На рис. 1, а приведены результаты вычисления интеграла I_1 на биссектрисе первого квадранта для трех моментов времени. При $\tau \geq 1$ кривые графически неразличимы – наступает насыщение. Даже при $\tau = 0.1$ отличие от предельного значения невелико,

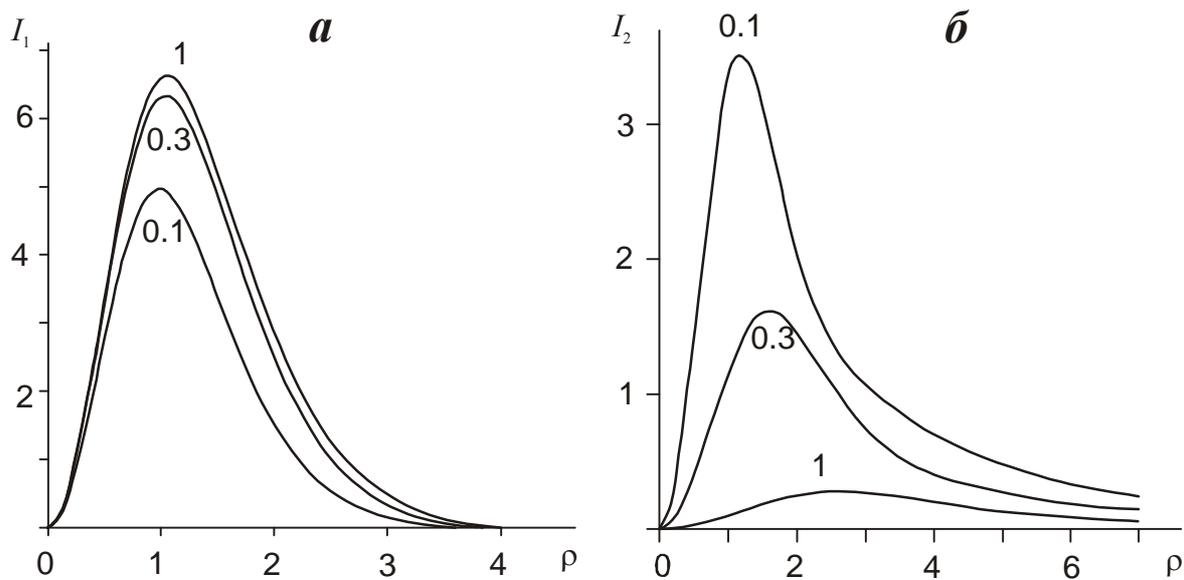


Рис. 1. Значения интеграла I_1 (а) и I_2 (б) из формулы (35) на биссектрисе первого квадранта в функции безразмерного эпицентрального расстояния ρ . 0.1, 0.3, 1 – безразмерное время τ

а при $\tau = 0.3$ оно практически отсутствует. Эти результаты получены при скачкообразном падении деформации, которое не имеет места в природе. В реальности же при более плавном падении деформации значение I_1 будет практически следовать за изменением деформации.

Для интеграла I_2 наблюдается обратная картина во времени (рис. 1, б). В начальный момент интеграл приобретает максимальное значение, которое при $\tau = 0.3$ уменьшается вдвое, а при $\tau = 1$ – в 10 раз. Следовательно, при плавном (не скачкообразном) убывании деформации поровое давление имеет время для выравнивания, интеграл I_2 будет близок к нулю, в связи с чем в дальнейшем его можно не учитывать. Развита здесь методика расчетов позволяет проведенным качественным рассуждениям дать строгую количественную оценку.

Наши рассуждения содержат один недостаток – мы оперировали безразмерными расстоянием и временем. Поскольку геофизические условия и характеристики землетрясений существенно различны для разных районов, то и расчеты следует производить для конкретного района и конкретного землетрясения. Однако интересно получить представление о результатах в числах, используя некоторые характерные оценки.

Будем рассматривать землетрясение с магнитудой $M = 6$. В этом случае радиус шаровой неоднородности $R = 6$ км [Добровольский, 2009]. Остальные геофизические данные возьмем из [Теркот, Шуберт, 1985а; 1985б]; данные для азота – из книги [Физические..., 1991]. В результате, имея набор параметров $R = 6$ км, $k_0 = 10^{-13}$ м², $m_0 = 0.02$, $\beta = 1.4 \cdot 10^{-9}$ 1/Па, $\mu_F = 2 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $\gamma = 6$. $\alpha = 0.1$, $s = 10^8$ Па, $\mu = 2 \cdot 10^{10}$ Па, из (18) получим, что единица безразмерного времени равна 2.33 сут. Следовательно, рассуждения об относительном сопоставлении значений интегралов I_1 и I_2 приобретают достаточное основание.

Остается один неизвестный безразмерный параметр κ , который, вероятно, зависит от геофизического состояния среды и различен в разных районах. Очевидно одно – этот параметр должен быть положительным. Феноменологически его следует определять из сопоставления данных полевых наблюдений с теоретическими расчетами. Относительный поток флюида на поверхности определяется формулой (20). Если предположить,

что в максимальном значении поток изменяется на 50%, то $\kappa = 2600$. Поскольку значение максимальной объемной деформации близко к 10^{-4} и в выбранной модели изменение потока будет заметным при сопоставимых значениях проницаемости и ее приращения, то указанное значение κ оказывается вполне предсказуемым по порядку величины. На рис. 2 приведены значения потока на биссектрисе первого квадранта для двух времен τ в зависимости от безразмерного эпицентрального расстояния ρ . Можно видеть, что поток довольно быстро выходит на предельный уровень.

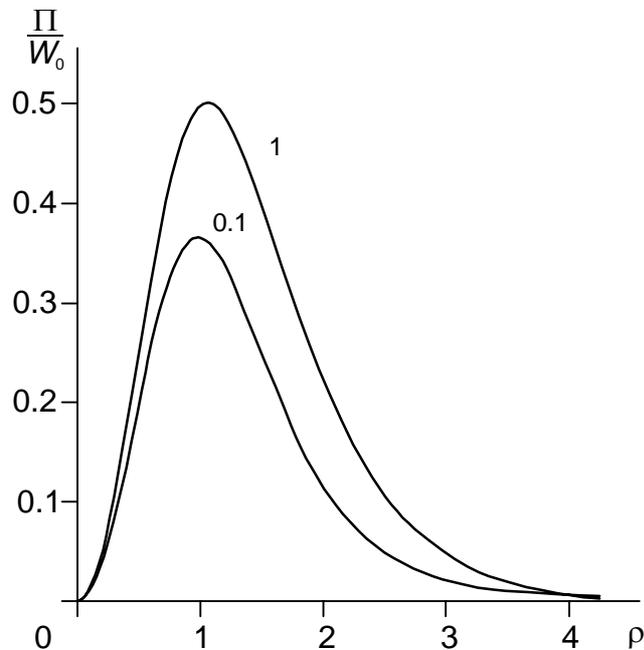


Рис. 2. Значения относительного потока на биссектрисе первого квадранта в функции безразмерного эпицентрального расстояния ρ . 0.1, 1 — безразмерное время τ

Максимальное значение потока наблюдается не в эпицентре, где он нулевой, а почти на краю эпицентральной зоны. Площадь, на которой поток проявляется эффективно, относительно невелика и находится вблизи краев эпицентральной зоны. Поскольку в выбранной системе координат поток, выходящий от поверхности Земли, оказывается отрицательным, то положительное приращение потока означает его ослабление.

Обсуждение

Создана методика расчета флюидных предвестников тектонического землетрясения. Результаты расчетов отражают особенности, отмеченные при полевых наблюдениях. Вероятно, главная особенность — это неравномерное распределение предвестниковых флюидных потоков в зоне подготовки: существуют области как с увеличением, так и с уменьшением интенсивности потоков. Строго говоря, развитая методика относится не только к анализу предвестниковых явлений, но естественно распространяется на тепловые явления и вообще на процессы теплопереноса в неоднородной среде.

Строгая математическая постановка задачи потребовала ясного определения ряда величин, характеризующих как район работ (механические и геофизические свойства земной коры), так и свойства флюидов. Это следует иметь в виду при любых попытках применить рассмотренную методику к конкретному району.

Если вернуться к предвестниковым процессам, то проведенные выкладки следует рассматривать как первое приближение; возможны несколько путей усложнения расчетов при добавлении некоторых деталей в описание процесса. Так, в уравнение (15) или (16) можно ввести слагаемое, которое будет описывать источник флюида при разруше-

нии кристаллических решеток, если, конечно, будет предложен убедительный механизм этого явления. Авторы некоторых публикациях (см., например, [Зубков, 2002]) считают возможным вынос радона углекислым газом, вынос растворенных в жидкости газов и т.п. В таком случае постановка задачи осложнится еще одним уравнением. Мы рассматривали краткосрочный предвестник, но можно рассматривать и долгосрочный и вообще описать вынос флюидов в течение всего процесса подготовки землетрясения, считая деформацию монотонной функцией времени.

При анализе проведенных расчетов возникает один интересный вопрос. Речь идет об исследовании интеграла I_2 в выражении (35) (см. рис. 1). Напомним физическую суть, которую описывает этот интеграл. Независимо от существования потока из недр при деформировании среды при подготовке землетрясения могут возникать потоки как отрицательные, так и положительные. Выходящий поток вроде бы явление естественное, но при противоположном знаке по расчету возникает входящий поток – всасывание. Интересно: можно ли обнаружить при полевых наблюдениях такое явление?

Приложение

I. Первая краевая задача для полупространства

Параболическое уравнение с постоянными коэффициентами, граничное и начальное условия и решение первой краевой задачи для полупространства, когда в начальном условии и на границе полупространства заданы значения функции, с помощью функции влияния G определяются формулами (см., например, [Положий, 1964; Тихонов, Самарский, 1977; Владимиров, 1988])

$$B\nabla^2 u - b \frac{\partial u}{\partial t} + f = 0,$$

$$u(x, y, 0, t) = \Phi(x, y, t), \quad u(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z), \tag{П.1}$$

$$u(x, y, z, t) = \frac{B}{b} \int_0^t \iint \Phi \frac{\partial G}{\partial z'} dS' dt' + \iiint \psi G dv' + \frac{1}{b} \int_0^t \iiint f G dv' dt',$$

где двойной интеграл без обозначения области берется по поверхности полупространства, а тройной – по всему полупространству.

Интегрирование по времени в выражениях (П.1) представляет собой свертку и, как известно, имеет две эквивалентные формы:

$$\int_0^t f(t') G(t-t') dt' = \int_0^t f(t-t') G(t') dt'. \tag{П.2}$$

Функция влияния для второго варианта в (П.2) имеет вид

$$G(x, y, z, x', y', z', t') = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi B t'}} \right)^3 \left(e^{-\frac{b(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4Bt'}} - e^{-\frac{b(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}{4Bt'}} \right). \tag{П.3}$$

При анализе этих решений полезно иметь в виду известное соотношение из [Гельфанд, Шилов, 1959]:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \delta(x). \tag{П.4}$$

Напомним также формулу Гаусса–Остроградского (теорема о дивергенции) для произведения скалярной и векторной функций

$$\iiint_V \operatorname{div}(u\mathbf{w}) dV = \iiint_V u \operatorname{div} \mathbf{w} dV + \iiint_V \mathbf{w} \operatorname{grad} u = \iint_S u \mathbf{w} n dS, \quad (\text{П.5})$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности S области V .

II. Объемная деформация

Процесс подготовки тектонического землетрясения рассматривается как процесс возникновения, развития и распада неоднородности свойств в напряженной среде [Добровольский, 2009]. К концу фазы развития неоднородности (фазы долгосрочных предвестников) в среде накапливается объемная деформация ε_{\max} . Эта фаза сменяется фазой распада (фаза краткосрочных предвестников), на которой деформация уменьшается. В случае шаровой неоднородности при коэффициенте Пуассона, равном 1/4,

$$\varepsilon_{\max} = \frac{2\alpha s R^3}{3\mu} xy \left(\left[\frac{1}{r_1^5} \right]_e + \frac{2}{r_2^5} - \frac{10H(z+H)}{r_2^7} + 2R^2 \left(\frac{7(z+H)^2}{r_2^9} - \frac{1}{r_2^7} \right) \right), \quad (\text{П.6})$$

где $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-H)^2}$, $r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+H)^2}$, а нижний индекс e у квадратных скобок означает, что выражение в скобках имеет указанное значение только вне неоднородности, обращаясь в нуль внутри нее.

В безразмерных координатах $(x, y, z) = (R\xi, R\eta, R\zeta)$ ε_{\max} получает вид:

$$\varepsilon_0 = \frac{2\alpha s}{3\mu} \xi \eta \left(\left[\frac{1}{\rho_1^5} \right]_e + \frac{2}{\rho_2^5} - \frac{2+10h(\zeta+h)}{\rho_2^7} + \frac{14(\zeta+h)^2}{\rho_2^9} \right) = \frac{2\alpha s}{3\mu} \bar{\varepsilon}, \quad (\text{П.7})$$

где $\rho_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta-h)^2}$, $\rho_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta+h)^2}$ и $h = H/R$.

Литература

- Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Киев: Наук. думка, 1978. 292 с.
- Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
- Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: ГИФМЛ, 1959. 470 с.
- Добровольский И.П. Экстраполяция Ричардсона в приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма II рода // ЖВММФ. 1981. Т. 21, № 4. С.952–961.
- Добровольский И.П. Математическая теория подготовки и прогноза тектонического землетрясения. М.: Физматлит, 2009. 240 с.
- Зубков С.И. Предвестники землетрясений. М.: ОИФЗ РАН, 2002. 140 с.
- Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Наука, 1975. 227 с.
- Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.
- Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
- Положий Г.Н. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964. 560 с.
- Рикитаке Т. Предсказание землетрясений. М.: Мир, 1979. 388 с.
- Физические величины: Справочник / Ред. И.С. Григорьев, Е.З. Мелихов. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
- Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. Геологические приложения физики сплошных сред. Ч. 1. М.: Мир, 1985а. 376 с.
- Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. Геологические приложения физики сплошных сред. Ч. 2. М.: Мир, 1985б. 360 с.
- Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

Сведения об авторе

ДОБРОВОЛЬСКИЙ Игорь Петрович – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: (499) 614-06-32. E-mail: dipedip@gmail.com

FLUID FLOW DISTORTION OF THE EARTH DURING THE PREPARATION OF TECTONIC EARTHQUAKE

I.P. Dobrovolsky

Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. The stream of fluids (usually, gaseous) from the Earth's interior observed in some regions on a surface. At the same time, distortions of intensity of this stream are fixed before tectonic earthquakes and they are considered as precursors of seismic events. The deformation of the Earth's interior during the preparation of earthquake is the defining reason of such distortions. They occur on three mechanisms: 1) change of a rock permeability, 2) variations of pore fluid pressure and 3) transition of gas in the free state if it has been connected in crystalline lattices or is dissolved in a liquid. The procedure of calculation of these phenomena is developed on the basis of the equations of mechanics of two-phase medium and calculation of changes of a stream is made in view of first two mechanisms. Process is described by the linear parabolic equation with variable coefficients. The problem of mass transfer in a half-space for this equation is led to an integral equation and its solution is received as the first approximation. Zones of amplification and weakening of stream have been found out in field observations. Calculations have led to the same effect. The described procedure also can be used at calculation of the heat transmission processes.

Keywords: parabolic equation, the Earth's crust deformations, earthquake precursors.