ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2010, том 11, № 4, с.69-78

УДК 550.34.01

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСА И ЧАНДЛЕРОВСКАЯ АНОМАЛИЯ НАЧАЛА XX ВЕКА

© 2010 г. И.Я. Цуркис[1], Е.А. Спиридонов[1], М.С. Кучай[2]

[1] *Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия*
[2] *Геофизическая служба РАН, г. Москва, Россия*

Показано, что временной ход амплитуды чандлеровского движения полюса, в частности, ее резкое кратковременное уменьшение в начале XX века, может быть объяснен в рамках вероятностной модели, предложенной Колмогоровым.

Ключевые слова: чандлеровское движение, добротность мантии, марковский процесс, задача о достижении границы.

Введение

Работа посвящена анализу колебаний амплитуды чандлеровского движения полюса (ЧДП) в рамках вероятностной модели.

За последние 150 лет амплитуда ЧДП принимала значения от шести сотых до трех десятых угловой секунды (в линейной мере – от полутора до семи с половиной метров); отдельного упоминания заслуживает кратковременное падение амплитуды, имевшее место в 20-е – 30-е годы прошлого века [*Colaczek, Kosek,* 1999; *Guo et al.,* 2005]. Ранее предпринимались попытки связать эти вариации с нерегулярными изменениями углового момента атмосферы и океана (см., например, [*Gross*, 2000]). Полученные в данной работе вероятностные оценки позволяют утверждать, что эти колебания, включая аномалию, имевшую место в начале прошлого века, ни в каком специальном объяснении не нуждаются.

Основные уравнения. Вероятностный подход к описанию движения полюса

Движение полюса описывается уравнением Лиувилля, которое выражает закон сохранения момента импульса для двухосного самогравитирующего вязкоупругого вращающегося эллипсоида. Линеаризованный вариант этого уравнения представляет собой систему:

$$\dot{x}_1 + \frac{1}{2Q}\dot{x}_2 + \omega x_2 = f_1,\ \ \dot{x}_2 - \frac{1}{2Q}\dot{x}_1 - \omega x_1 = f_2, \tag{1}$$

где x_1, x_2 – координаты полюса; $\omega \approx 0.0145$ сут$^{-1}$ – так называемая чандлеровская частота; Q – безразмерная константа (добротность), характеризующая интенсивность диссипации в мантии на частоте ω (по современным оценкам Q =50–500); f_α, α=1, 2, – компоненты возмущающего углового момента, которые в рамках вероятностной модели представляют собой случайные функции времени. Закон, по которому эти функции распределены, и корреляционные соотношения между ними определяют свойства решения x_1, x_2.

Первой работой, посвященной такому описанию движения полюса, была статья [*Арато*, *Колмогоров*, *Синай*, 1962]. В этой работе рассматривается система уравнений первого порядка, левые части которых несущественно отличаются от левых частей уравнений системы (1). Основное допущение состоит в том, что величины f_α представляют собой независимые реализации белого шума, т.е. нормально распределены и удовлетворяют тождествам:

$$< f_1(t) > = < f_2(t) > = 0\,, \qquad (2.1)$$

$$< f_1(t_1) f_1(t_2) > = < f_2(t_1) f_2(t_2) > = F\delta(t_2 - t_1)\,, \qquad (2.2)$$

$$< f_1(t_1) f_2(t_2) > = 0 \;\forall t_1, t_2\,. \qquad (2.3)$$

Следуя М. Арато [*Arato*, *Baran*, *Ispany*, 1999]), соотношения (1), (2.1)–(2.3) будем называть моделью Колмогорова.

Сведения из теории случайных процессов

Пользуясь аппаратом случайных процессов, можно показать, что решение задачи (1), (2.1)–(2.3) представляет собой двумерный изотропный гауссовский процесс. Кроме того, этот процесс является марковским: если положение полюса в момент времени t известно, предысторию (информацию о том, как он туда попал) можно стереть – прогностической ценности она не имеет. Классическим примером марковского процесса является броуновское движение; если пренебречь диссипацией, полюс в модели Колмогорова тоже ведет себя как (двумерная) броуновская частица, которая блуждает по вращающемуся с угловой скоростью ω жесткому диску.

Общее определение марковского процесса имеет вид:

$$p\left(z_3 \mid z_2,\, z_1\right) = p\left(z_3 \mid z_2\right), \qquad (3)$$

где $z_n = z(t_n)$, n=1, 2, 3, причем $t_1 < t_2 < t_3$.

Пусть $z(t)$ – марковская случайная величина; $t_0, t_1, ..., t_N$ – последовательные моменты времени и $p(z_1, z_2, ..., z_N \mid z_0)$ – совместная плотность вероятности события $z(t_n) = z_n$, n = 1, …, N при условии $z(t_0) = z_0$. Из (3) следует, что совместную плотность вероятности можно вычислить, зная плотность условной вероятности:

$$p(z_1, z_2, .., z_N \mid z_0) = p(z_N \mid z_{N-1}) \cdot p(z_{N-1} \mid z_{N-2}) \cdot ... \cdot p(z_1 \mid z_0) \qquad (4)$$

[*Тихонов, Миронов,* 1977]. Почему это важно?

Пусть нам известна плотность условной вероятности одномерной величины, например, амплитуды чандлеровского движения $A = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и начальное значение $A_0 = A(0)$, и требуется решить задачу о достижении границы, т.е. найти вероятность $P(A_0, T)$ того, что за время T процесс не выйдет за пределы отрезка $I = [A_{\min}, A_{\max}]$. Разобьем временной интервал на элементарные сегменты N равноотстоящими друг от друга точками. При достаточно большом N искомая вероятность равна N-кратному интегралу от плотности совместной вероятности:

$$P(A_0, T) = \int p(A_1, A_2, ..., A_N \mid A_0) d\Omega\,,$$

где $d\Omega$ – элемент объема N-мерного куба $\Omega = I^N$. Проблема в том, что подынтегральная функция нам, вообще говоря, неизвестна. Если же процесс является марковским, ее можно вычислить, пользуясь свойством (4) и сведя интеграл к повторному:

$$P(A_0, T) = \int p(A_1 \mid A_0) dA_1 \int p(A_2 \mid A_1) dA_2 ... \int p(A_N \mid A_{N-1}) dA_N\,,$$

тем самым решив задачу.

Чтобы проверить, является ли процесс $z(t)$ марковским, достаточно проверить условие согласованности, представляющее собой интегральное тождество относительно плотности условной вероятности:

$$p(z_3 \mid z_1) = \int p(z_3 \mid z_2) p(z_2 \mid z_1) dz_2 \ ,$$

где интегрирование идет по всей области изменения величины z.

Если известно, что процесс удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка с правой частью в виде белого шума (как, например, радиус-вектор полюса в модели Колмогорова), он является марковским заведомо – в этом состоит одна из центральных теорем теории случайных процессов – теорема Дуба [*Тихонов, Миронов,* 1977].

Является ли марковским реальное движение полюса? Используя принцип наибольшего правдоподобия, авторы проанализировали двадцатитрехлетний ряд данных Международной службы вращения Земли. Оказалось, что движение полюса действительно можно интерпретировать как марковский процесс, точнее, как марковскую последовательность с шагом по времени не менее ста суток. Это ограничение носит принципиальный характер: оно связано с тем, что процессы, влияющие на движение полюса, имеют в отличие от белого шума ненулевое время корреляции [*Цуркис, Спиридонов,* 2009].

Амплитуда чандлеровского движения как случайный процесс

Начнем с вывода формулы для плотности условной вероятности амплитуды, для чего вернемся к уравнению Лиувилля. Уже было сказано, что в модели Колмогорова его решение представляет собой изотропный гауссовский процесс, т.е. координаты x_1, x_2 некоррелированы, нормально распределены и имеют одинаковую дисперсию. Плотность условной вероятности такого процесса имеет вид:

$$p\big(x_1(t), x_2(t) \mid x_1(0), x_2(0)\big) = \frac{1}{\pi D} \exp\left(-\frac{\big(x_1(t) - \langle x_1(t) \rangle\big)^2 + \big(x_2(t) - \langle x_2(t) \rangle\big)^2}{D} \right), \tag{5}$$

где $D = 2D(x_1) = 2D(x_2)$.

При этом средние значения координат – это решение задачи Коши для однородного уравнения Лиувилля, имеющее вид:

$$\langle x_1 \rangle = \left(x_1(0) \cos\frac{\omega t}{\beta} - x_2(0) \sin\frac{\omega t}{\beta} \right) k(t), \ \langle x_2 \rangle = \left(x_1(0) \sin\frac{\omega t}{\beta} + x_2(0) \cos\frac{\omega t}{\beta} \right) k(t). \tag{6}$$

В этом решении $k(t)$ – экспоненциально убывающая функция времени, описывающая затухание,

$$k(t) = \exp\left(-\frac{\omega t}{2\beta Q} \right), \tag{7}$$

а β – константа, близкая к единице при реальных значениях добротности:

$$\beta = 1 + \frac{1}{4Q^2}. \tag{8}$$

Дисперсия $D(t)$ двумерного распределения, которая тоже войдет в выражение для плотности условной вероятности амплитуды, равна удвоенной дисперсии каждой из координат и пропорциональна интенсивности белого шума F [*Цуркис, Спиридонов,* 2009]:

$$D(t) = \frac{2FQ}{\omega}\left(1 - k^2(t)\right). \tag{9}$$

Теперь мы можем написать ответ: плотность условной вероятности того, что в момент времени *t* амплитуда $A=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ примет значение $A(t)$, равна

$$p\big(A(t)\,|\,A(0)\big)=2\frac{A(t)}{D(t)}\exp\left(-\frac{A^2(t)+k^2(t)A^2(0)}{D(t)}\right)J_0\big(2ik(t)A(t)A(0)/D(t)\big), \qquad (10)$$

где $J_0(ix)$ – основная цилиндрическая функция (мнимого аргумента):

$$J_0(ix)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Для доказательства запишем условную плотность вероятности (5) в полярных координатах. Введем обозначения: $A=A(t),\varphi=\varphi(t);\,A_0=A(0),\varphi_0=\varphi(0)$. Кроме того, обозначим через A' и φ' амплитуду и угол, соответствующие точке $\langle x_1(t)\rangle,\langle x_2(t)\rangle$:

$$\langle x_1\rangle=A'\cos\varphi',\langle x_2\rangle=A'\sin\varphi';$$

из (6) следует, что

$$A'=k(t)A_0. \qquad (11)$$

Имеем

$$p\left(A,\varphi\,|\,A_0,\varphi_0\right)=\frac{A}{\pi D}\exp\left(-\frac{A^2+A'^2-2AA'\cos(\varphi-\varphi')}{D}\right).$$

Интегрируя по углу, получим плотность условной вероятности амплитуды, которая не зависит от φ_0:

$$p\left(A\,|\,A_0,\varphi_0\right)=\frac{A}{\pi D}\exp\left(-\frac{A^2+A'^2}{D}\right)\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(\frac{2AA'\cos\theta}{D}\right)d\theta. \qquad (12)$$

Используя обозначение (11) и известное интегральное представление бесселевой функции $J_0\left(ix\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(x\cos\theta)\,d\theta$, из (12) получаем (10).

Можно рассуждать иначе, в терминах энергии, т.е. квадрата амплитуды. Сами координаты полюса – некоррелированные гауссовские величины с одинаковой дисперсией. Если их средние значения равны нулю, энергия подчиняется распределению χ^2 с двумя степенями свободы. В общем случае получим нецентральное распределение χ^2, для которого плотность вероятности тоже известна (на это нам указал А.А. Любушин). Перейти от распределения по энергиям к распределению по амплитудам легко; формула, конечно, получается та же.

Из (10) следуют асимптотики для случаев $t\to 0$ и $t\to\infty$.

На малых временах аргумент под знаком цилиндрической функции стремится к бесконечности, и можно воспользоваться формулой:

$$J_0(ix)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^x,\quad x>>1.$$

В результате получим

$$p(A\,|\,A_0)\sim\sqrt{\frac{A}{\pi A_0 D}}\exp\left(-\frac{(A-A_0)^2}{D}\right),$$

т.е. распределение близко к нормальному, с дисперсией, равной дисперсии координаты, и средним значением A_0.

В противоположном – стационарном – случае имеем

$$k(t) \to 0, D(t) \to D_\infty = 2\frac{FQ}{\omega},$$

а плотность условной вероятности распределена “почти по Максвеллу” и не зависит не только от “старого” угла φ_0, но и от “старой” амплитуды A_0:

$$p_\infty(A) = \frac{2A}{D_\infty}\exp\left(-\frac{A^2}{D_\infty}\right). \quad (13)$$

Этот предельный случай для нас более важен, так как стационарная и полная вероятность, очевидно, одно и то же, в чем можно убедиться непосредственно, проверив тождество:

$$p_\infty(A) = \int p_\infty(A')p(A \mid A')dA'.$$

Кроме того, с асимптотикой при $t \to \infty$ связана стационарная амплитуда A_∞, т.е. среднее значение распределения $p_\infty(A)$, которым оно вполне определяется:

$$A_\infty = \lim_{t\to\infty}\langle A(t)\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\pi D_\infty}.$$

В терминах стационарной амплитуды дисперсия D, выражаемая формулой (9), равна

$$D(t) = \frac{4A_\infty^2}{\pi}\left(1 - k^2(t)\right), \quad (14)$$

а стационарное распределение (13) записывается в виде:

$$p_\infty(A) = \frac{\pi A}{2A_\infty^2}\exp\left(-\frac{\pi A^2}{4A_\infty^2}\right). \quad (15)$$

Важным является то обстоятельство, что в рамках колмогоровской модели амплитуда движения полюса – марковский процесс. Действительно, пусть $z_n = (x_1(t_n), x_2(t_n))$, $A_n = A(t_n)$, $\varphi_n = \varphi(t_n)$, $n = 1,\ 2,\ 3$, причем $t_1 < t_2 < t_3$. Поскольку марковским (в силу теоремы Дуба) является само чандлеровское движение полюса, плотность условной вероятности $p(z_3 \mid z_2,\, z_1)$ не зависит от z_1:

$$p(z_3 \mid z_2,\, z_1) = p(z_3 \mid z_2).$$

Следовательно,

$$p(A_3 \mid z_2,\, z_1) = p(A_3 \mid z_2).$$

Но, как мы видели, плотность условной вероятности амплитуды в силу изотропии не зависит от “старого” угла; поэтому $p(A_3 \mid z_2,\, z_1) = p(A_3 \mid A_2)$ и, в частности, $p(A_3 \mid A_2, A_1) = p(A_3 \mid A_2)$, т.е. процесс $A(t)$ – марковский.

Мы опускаем более строгое доказательство, состоящее в проверке условия согласованности

$$p(A_3 \mid A_1) = \int_0^\infty p(A_3 \mid A_2)p(A_2 \mid A_1)dA_2.$$

Заметим, что если “белые шумы” f_1 и f_2, фигурирующие в правых частях уравнений системы (1), коррелированы или имеют разную интенсивность, движение полюса будет оставаться марковским процессом, а амплитуда – нет.

Достижение границы процессом $A(t)$. Временные вариации амплитуды чандлеровского движения полюса

Теперь мы располагаем всем необходимым для того, чтобы в рамках вероятностной модели проанализировать реальные колебания амплитуды чандлеровского движения полюса. Ниже будут рассмотрены две задачи:

Задача 1. Какова вероятность того, что за 150 лет амплитуда движения полюса хотя бы однажды упадет более чем в 5 раз по сравнению с исходным значением?

Задача 2. Какова вероятность того, что за те же 150 лет амплитуда сначала упадет в пять раз, а потом за 20 лет достигнет первоначального уровня?

Обе они являются частными случаями рассмотренной ранее задачи о достижении границы: зная начальное состояние $A_0 = A(0)$, найти вероятность $P(A_0, T)$ того, что за время T марковский процесс не выйдет за пределы отрезка $[A_{\min}, A_{\max}]$. В самом общем случае эта задача сводится к уравнению в частных производных второго порядка (см. [*Тихонов, Миронов*, 1977]), но мы, коль скоро нам известна плотность условной вероятности $p\big(A(t)\,|\,A(0)\big)$, можем действовать иначе. Именно, будем следовать намеченному плану: разобьем временной промежуток на равные отрезки; при достаточно мелком разбиении искомая вероятность равна кратному интегралу, который сводится к повторному:

$$P(A_0, T) = \int p(A_1\,|\,A_0)dA_1 \int p(A_2\,|\,A_1)dA_2 \ldots \int p(A_N\,|\,A_{N-1})dA_N\ ; \tag{16}$$

все интегралы берутся по отрезку $[A_{\min}, A_{\max}]$ (выше мы установили, что в модели Колмогорова амплитуда – марковский процесс). При этом:

$$p\big(A_n\,|\,A_{n-1}\big) = \frac{2A_n}{D(\Delta)} \exp\left(-\frac{A_n^2 + k^2(\Delta)\,A_{n-1}^2}{D(\Delta)}\right) J_0\big(2ik(\Delta)\,A_n A_{n-1} / D(\Delta)\big), \tag{17}$$

где, согласно (8) ,(7) и (14),

$$k(\Delta) = \exp\left(-\frac{\omega\Delta}{2\beta Q}\right),\ \beta = 1 + \frac{1}{4Q^2},\ D(\Delta) = \frac{4A_\infty^2}{\pi}\big(1 - k^2(\Delta)\big). \tag{18}$$

С другой стороны, шаг разбиения $\Delta = T/N$ не должен быть меньше 100 суток – это условие, при котором реальное движение полюса можно трактовать как марковский процесс. Тем самым, для искомой вероятности мы получим оценку сверху, не учитывающую того, что в течение элементарного времени Δ процесс может покинуть область и опять в нее вернуться.

Наличие явной формулы для плотности условной вероятности позволяет сделать ряд качественных выводов о свойствах решения. Прежде всего, при умножении величин A_0, A_∞, $A_{\min}$ и $A_{\max}$ на одно и то же число вероятность $P(A_0, T)$ остается прежней; иными словами, она зависит от трех отношений амплитуд, а если считать известными $A_0 / A_{\min}$ и $A_0 / A_{\max}$ – от отношения A_0 / A_∞, которое мы будем называть безразмерной начальной амплитудой.

Коль скоро это так, полная вероятность “невыхода из области” $P(T) = \int_0^\infty p_\infty(A_0) P(A_0, T) dA_0$, где значение плотности стационарной вероятности $p_\infty(A)$ может быть вычислено по формуле (15), будет зависеть только от добротности, – результат естественный, но не очевидный заранее.

Обратимся к задаче 1. Приняв амплитуду $A_{\max} = \infty$, шаг дискретизации $\Delta = 1$ год, воспользуемся формулами (16)–(18) и вычислим условную вероятность альтернативного события, которое состоит в том, что амплитуда *не* достигнет значения $0.2A_0$, как функцию добротности и безразмерной начальной амплитуды A_0 / A_∞. Область изменения последнего параметра удобно разбить на две: “меньше единицы” (рис. 1, *а*) и “больше единицы” (рис. 1, *б*).

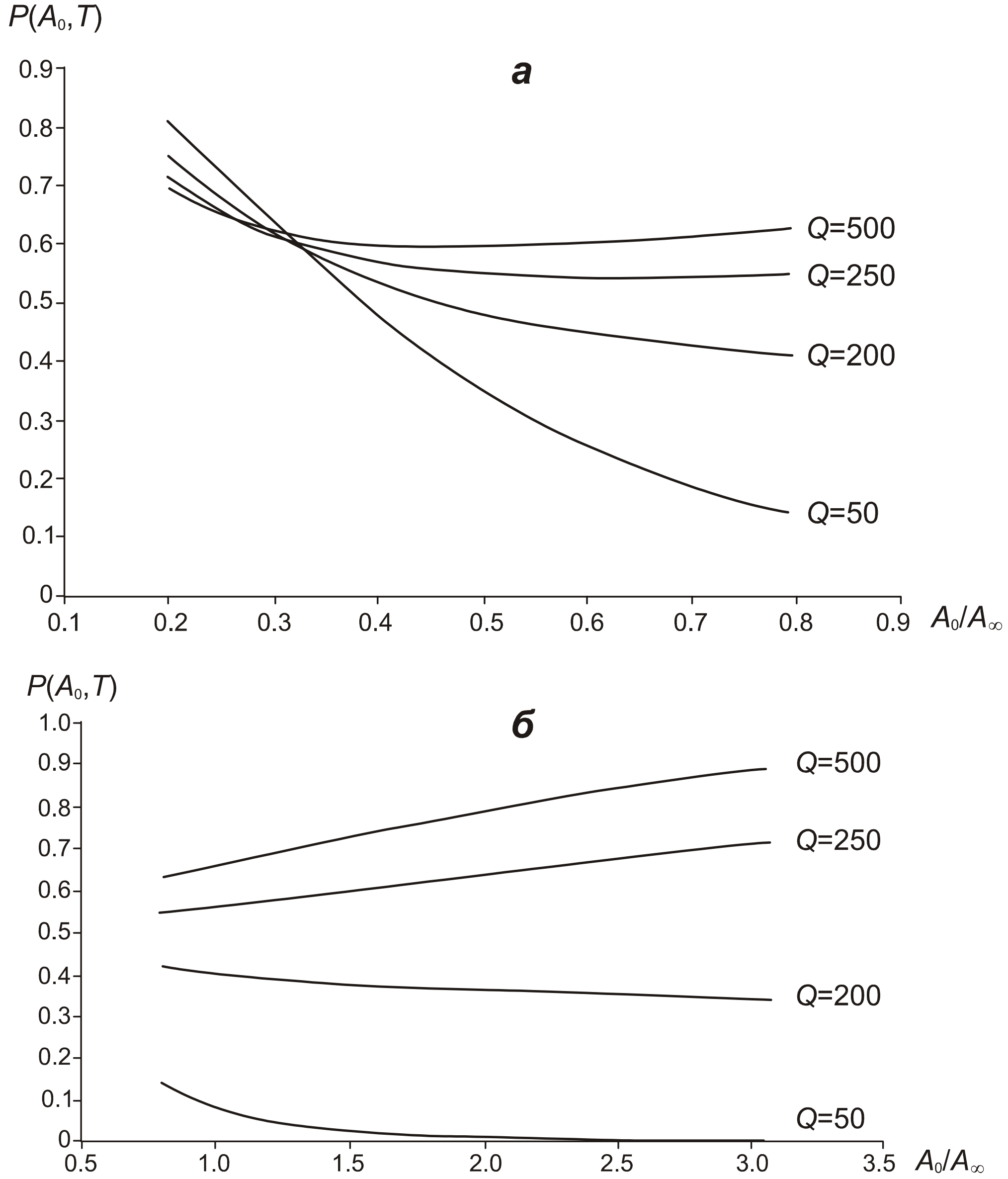

Рис. 1. Вероятность $P(A_0, T)$ как функция A_0 и добротности Q: $a - A_0 / A_\infty < 0.3$; $б - A_0 / A_\infty > 0.3$; длина временного ряда T=150 лет

По графикам, представленным на рис. 1, прослеживаются две закономерности.

1. При стремлении безразмерной начальной амплитуды к нулю, условная вероятность при всех значениях добротности стремится к единице.

2. При стремлении начальной амплитуды к бесконечности вероятность стремится к единице, если добротность больше некоего критического значения, приблизительно равного 250, и к нулю – в противоположном случае.

Обе эти закономерности можно объяснить, используя асимптотические свойства бесселевой функции.

Отметим, что при значениях безразмерной начальной амплитуды <0.3 зависимость вероятности от Q аномальна – чем больше добротность, (и, следовательно, большей инерцией обладает процесс), тем *больше* вероятность того, что он выйдет за пределы области. Это связано с тем, что мы рассматриваем процесс с дискретным временем: при относительно малых значениях Q он чаще выходит за пределы области (в данном случае, луча), но почти всегда возвращается до окончания элементарного промежутка времени – амплитуда, упав, как бы отражается от нулевого уровня.

Теперь по формуле

$$P^*(T) = 1 - P(T) \;= 1 - \int_0^\infty p(A_0)P(A_0,T)dA_0$$

мы можем вычислить зависящую только от добротности полную вероятность *выхода* процесса с дискретным временем за границу области $[A_0/5,\ \infty]$ и, тем самым, оценить снизу полную вероятность того, что за 150 лет амплитуда хоть однажды упадет более чем в пять раз по сравнению с первоначальным значением. Результаты вычислений представлены в табл. 1. Из них следует, что в пятикратном изменении амплитуды чандлеровского движения нет ничего неожиданного: полная вероятность такого события >0.5, если Q<250; она близка к единице при Q=50, но отнюдь не мала и при Q=500.

Таблица 1. Вероятность пятикратного падения амплитуды как функция добротности

Q	50	200	350	500
P^*	0.81	0.56	0.42	0.31

Перейдем к задаче 2, т.е. к рассмотрению аномалии в поведении полюса, наблюдавшейся в начале прошлого века. Ее можно трактовать как сложное событие, состоящее в пятикратном (примерно) падении амплитуды чандлеровского движения с последующим возвращением к первоначальному значению, длившемся T_{lift}=20 лет (время восстановления).

Пусть $A(0) = A_0$. Предположим, что в какой-то момент времени амплитуда равна $0.2A_0$; обозначим через $P_{\text{lift}}(A_0, T_{\text{lift}})$ вероятность того, что в дальнейшем за время T_{lift}=20 лет функция $A(t)$ ни разу не достигнет значения A_0. Величину $P_{\text{lift}}(A_0, T_{\text{lift}})$ можно вычислить по формуле, аналогичной (16):

$$P_{\text{lift}}(A_0, T_{\text{lift}}) = \int_0^{A_0} p(A_1 \,|\, 0.2A_0)dA_1 \int_0^{A_0} p(A_2 \,|\, A_1)dA_2 \ldots \int_0^{A_0} p(A_N \,|\, A_{N-1})dA_N \;.$$

Зависимость вероятности “невосстановления” P_{lift} от A_0/A_∞ и Q показана на рис. 2. Можно видеть, что при любых значениях начальной амплитуды вероятность P_{lift} – монотонно возрастающая функция добротности. Это объясняется тем, что процесс может покинуть область $[0,\ A_0]$ только через верхнюю границу, а “виртуальные” выходы через нее маловероятны при всех реальных значениях Q.

Условная вероятность $P^*_{comp}(A_0)$ того, что такая аномалия реализуется, может быть вычислена по формуле для вероятности сложного события:

$$P^*_{comp}(A_0) = \left(1 - P(A_0, T)\right)\left(1 - P_{\text{lift}}(A_0, T_{\text{lift}})\right), \tag{19}$$

где величина $P(A_0, T)$ найдена ранее (см. рис. 1).

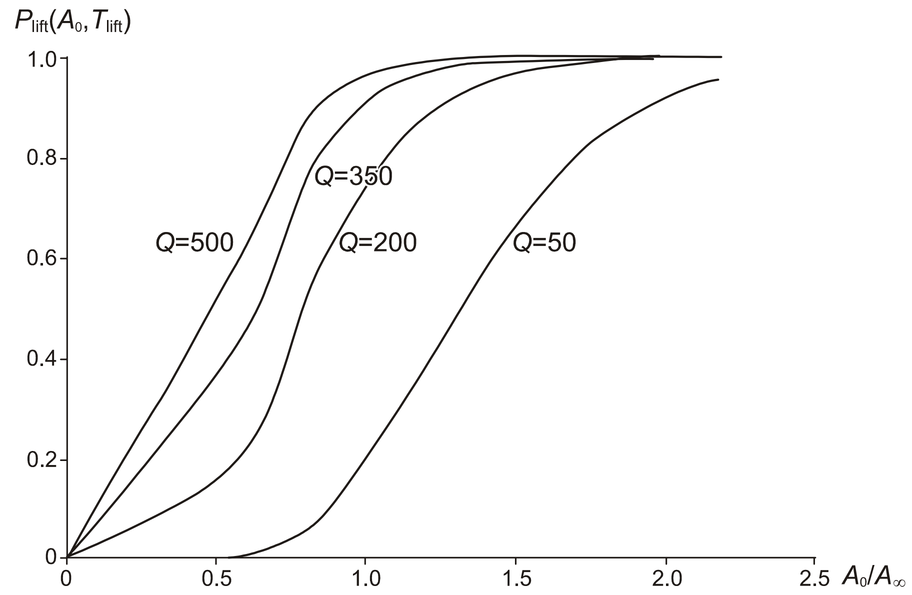

Рис. 2. Вероятность $P_{\text{lift}}(A_0, T_{\text{lift}})$ как функция A_0 и Q; "время восстановления" T_{lift} =20 лет

Полная вероятность, не зависящая от A_0, равна

$$P^*_{comp} = \int_0^\infty p_\infty(A_0) P^*_{comp}(A_0) dA_0 \quad , \tag{20}$$

где стационарная плотность $p_\infty(A_0)$ дается формулой (15). Подчеркнем, что при фиксированных значениях T=150 лет и T_{lift} =20 лет она зависит только от добротности Q, как и вероятность P^* пятикратного падения амплитуды.

Результаты вычислений по формулам (19), (20) представлены в табл. 2. Из них следует, что при Q=50 вероятность осуществления такого события превышает 1/2; при Q=200 ее также нельзя назвать исчезающе малой – следовательно, при Q=50–200 событие, о котором идет речь, аномалией не является. При менее правдоподобных в рамках вероятностной модели значениях Q, превышающих 350, $P^*_{comp} < 1/10$.

Таблица 2. Зависимость полной вероятности P^*_{comp} от Q

Q	50	200	350	500
P^*_{comp}	0.52	0.18	0.09	0.05

Значения P^*_{comp}, приведенные в табл. 2, соответствуют шагу дискретизации Δ=100 суток и определяют вероятность сложного события снизу. Однако при "больших" значениях добротности Q=350–500 они, по-видимому, близки к истинным: вычисления показывают, что при таких значениях Q величина P^*_{comp} от шага дискретизации почти не зависит.

Результаты

Подводя итог сказанному, отметим два важных момента.

1. Амплитуда чандлеровского движения полюса в рамках модели Колмогорова является марковским процессом. Полная вероятность n-кратного увеличения (умень-

шения) амплитуды по сравнению с первоначальным значением зависит только от добротности мантии на чандлеровской частоте.

2. Пятикратное изменение амплитуды движения полюса за период с 1850 г. по настоящее время не противоречит вероятностным оценкам. При значениях добротности Q=50–200 аномалия первой половины XX века также не нуждается в специальном объяснении; менее правдоподобны значения Q >350.

Литература

Арато М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г. Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 4. С.13–17.

Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.

Цуркис И.Я., Спиридонов Е.А. О применимости аппарата марковских процессов к описанию чандлеровского движения полюса // Физика Земли. 2009. № 4. С.3–16.

Arato M., Baran S., Ispany M. Functionals of Complex Ornstein-Uhlenbeck Processes // Computers and Mathematics with Applications. 1999. V. 37. P.1–13.

Colaczek B., Kosek W. Variations of the amplitude of the Chandler wobble // Proc. of conf. Journees 1998 – Systemes de reference spatio-temporels: Conceptual, conventional and practical studies related to Earth rotation. 1999. P.215–220.

Gross R. The excitation of the Chandler wobble // Geophys. Res. Lett. 2000. V. 27, N 15. P.2329–2332.

Guo J.Y., Greiner-Mai H., Ballani L., Jochmann H., Shum C.K. On the double-peak spectrum of the Chandler wobble // J. Geodesy. 2005. V. 78, N 11/12. P.654–659.

Сведения об авторах

ЦУРКИС Илья Яковлевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10. Тел.: (499) 254-53-30. E-mail: tsurkis@ifz.ru

СПИРИДОНОВ Евгений Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10. Тел.: (499) 254-53-30. E-mail: sp287@mail.ru.

КУЧАЙ Марк Соломонович – старший инженер. ГС РАН, 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10. Тел.: (499) 254-99-50. E-mail: kuchay@ifz.ru.

ON THE POLE MOTION STOCHASTIC MODEL IN CONNECTION WITH THE CHANDLER ANOMALY OF THE BEGINNING OF THE XXth CENTURY

I.Ya. Tsurkis[1], E.A. Spiridonov[1], M.S. Kuchay[2]

[1] *Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[2] *Geophysical Survey of Russian academy of Sciences, Moscow, Russia*

Abstract. Temporary dependence of the amplitude of Chandler Wobble (in particular, abrupt increasing of this amplitude was taking place approximately 100 years ago) is analyzed in the frameworks of stochastic approach, proposed by Kolmogorov.

Keywords: Chandler Wobble, quality factor of the mantle, Markovian process, problem of passage to the boundary.