

УДК 551.594

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КЛАССИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОДНОГО ЭФФЕКТА В ПРИЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЕ

© 2010 г. Э.М. Дмитриев, В.А. Филиппов

*Геофизическая обсерватория “Борок” – филиал ИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН,
пос. Борок, Ярославская обл., Россия*

Получено приближенное аналитическое решение краевой задачи для классического электродного эффекта в приземной атмосфере. Показано, что полученное решение является точным аналитическим решением для частного случая рассматриваемой задачи, имеющего место в реальной атмосфере.

Ключевые слова: атмосферное электричество, математическое моделирование, электродный эффект.

Введение

На формирование электрического поля приземной атмосферы в условиях хорошей погоды определяющее влияние оказывает электродный эффект как совокупность процессов вблизи электрода в слабо ионизированной среде, которые приводят к появлению зависимости электрических характеристик среды от расстояния до поверхности электрода [Френкель, 1949; Тверской, 1949].

Впервые электродный эффект был изучен в 1903 г. Дж. Томсоном, который рассмотрел его для двух металлических пластин, помещенных в ионизированный газ [Thomson, 1903]. Полагая, что известны интенсивность ионообразования q , коэффициент рекомбинации ионов α , подвижность положительных b_+ и отрицательных b_- ионов, Дж. Томсон получил дифференциальные уравнения для напряженности электрического поля E , концентраций положительных ионов n_+ и отрицательных ионов n_- , как функций расстояния до поверхности электрода z :

$$\frac{d}{dz}(b_+ n_+ E) = q - \alpha n_+ n_-, \quad -\frac{d}{dz}(b_- n_- E) = q - \alpha n_+ n_-, \quad \frac{d}{dz} E = \frac{e}{\epsilon_0} (n_+ - n_-), \quad (1)$$

где e – элементарный электрический заряд; ϵ_0 – электрическая постоянная. При этом электродный эффект учитывался граничными условиями: $n_+ = 0$ на поверхности положительного электрода и $n_- = 0$ на поверхности отрицательного электрода.

В работе [Thomson, 1903] показано, что для случая равной подвижности ионов ($b_+ = b_- = b$) решение задачи определяется единственным безразмерным параметром $\beta = be/(\alpha\epsilon_0)$. При этом соотношение между напряженностями электрического поля на поверхности электродов E_0 и на равном расстоянии от обоих электродов E_∞ имеет вид:

$$\frac{E_0}{E_\infty} = (2\beta)^{\beta/(2\beta-1)}. \quad (2)$$

В 1908 г. аналогичная задача была впервые рассмотрена Э. Швейдлером применительно к приземной атмосфере в предположении, что земная поверхность в условиях хорошей погоды является отрицательным электродом, а положительный электрод удален на бесконечность [Schweidler, 1908]. В качестве граничного условия задавалось значение напряженности электрического поля на бесконечности E_∞ . Такое рассмотрение вполне корректно, поскольку высота атмосферного слоя обмена, в котором элек-

трическое поле можно считать однородным, составляет ~ 100 м, что значительно превышает эффективную высоту электродного эффекта, составляющую ~ 10 м.

В дальнейшем рядом исследователей были получены приближенные аналитические решения для задачи (1), а также ее обобщений в различных постановках [Chalmers, 1967; Hoppel, 1967]. Электродный эффект, при котором распределение электрических характеристик приземного слоя атмосферы обусловлено только электрическими силами, получил название классического электродного эффекта.

С начала 70-х годов прошлого столетия интерес исследователей сместился в сторону моделирования турбулентного электродного эффекта, который имеет место, когда перенос аэроионов в атмосфере осуществляется наряду с электрическими силами турбулентными потоками воздуха, причем турбулентность может играть основную роль. Турбулентный эффект наблюдается в приземной атмосфере значительно чаще, чем классический [Willett, 1978, 1983], в связи с развитой турбулентностью в атмосферном слое обмена.

С развитием вычислительной техники стало возможным применение численных методов и их приложений для решения краевых задач при моделировании атмосферного электродного эффекта. [Анисимов, Дмитриев, 2008]. В настоящее время используются и более сложные модели электродного эффекта, учитывающие наряду с турбулентностью неоднородность параметров модели по высоте, присутствие в приземной атмосфере аэрозольных частиц и конвективных потоков [Куповых, Морозов, Шварц, 1998]. Тем не менее, аналитическое описание классического электродного эффекта представляет практический интерес как важный частный случай и тестовый пример для апробирования численных методов. Однако и по сей день соотношение (2), полученное в [Thomson, 1903], остается единственным математически точным аналитическим соотношением в теории классического электродного эффекта.

В данной работе будет получено приближенное аналитическое решение задачи (1), пригодное для описания классического электродного эффекта в реальной приземной атмосфере. Будет показано также, что полученное решение является точным для некоторого специального случая рассматриваемой задачи, который, тем не менее, достаточно часто имеет место в реальной приземной атмосфере.

Классический электродный эффект в приземной атмосфере

Краевая задача для классического электродного эффекта в приземной атмосфере при $b_+ = b_- = b$ имеет вид:

$$\frac{d}{dz}(bn_+E) = q - \alpha n_+ n_-, \quad -\frac{d}{dz}(bn_-E) = q - \alpha n_+ n_-, \quad \frac{d}{dz}E = \frac{e}{\varepsilon_0}(n_+ - n_-), \quad (3)$$

$$n_-|_{z=0} = 0, \quad n_+|_{z \rightarrow \infty} = n_-|_{z \rightarrow \infty} = \sqrt{q/\alpha} \equiv n_\infty, \quad E|_{z \rightarrow \infty} = E_\infty. \quad (4)$$

В граничные условия (4) входят соотношения, выражающие отсутствие отрицательных аэроионов на земной поверхности при $z = 0$ и стремление к нулю производных в (3) при $z \rightarrow \infty$.

Введем безразмерные переменные

$$n'_+ = n_+ / n_\infty, \quad n'_- = n_- / n_\infty, \quad E' = E / E_\infty, \quad z' = z / z_\infty, \quad z_\infty = -E_\infty \varepsilon_0 / (en_\infty). \quad (5)$$

Тогда задача (3, 4) примет вид:

$$\frac{d}{dz'}(n'_+ E') = -\frac{\alpha \varepsilon_0}{eb}(1 - n'_+ n'_-), \quad \frac{d}{dz'}(n'_- E') = \frac{\alpha \varepsilon_0}{eb}(1 - n'_+ n'_-), \quad -\frac{dE'}{dz'} = n'_+ - n'_-, \quad (6)$$

$$n'_-|_{z'=0} = 0, \quad n'_+|_{z' \rightarrow \infty} = n'_-|_{z' \rightarrow \infty} = 1, \quad E'|_{z' \rightarrow \infty} = 1. \quad (7)$$

Теперь видно, что решение (6)–(7) зависит от единственного безразмерного параметра β :

$$\beta = be/(\alpha\varepsilon_0), \quad (8)$$

что согласуется с [Thomson, 1903].

Складывая первые два уравнения (6), находим, что

$$\frac{d}{dz'}(n'_+ E' + n'_- E') = 0. \quad (9)$$

Равенство (9) есть не что иное, как уравнение непрерывности для плотности электрического тока атмосферы. Из (7) и (9) немедленно следует, что

$$n'_+ E' + n'_- E' = (n'_+ E' + n'_- E')|_{z \rightarrow \infty} = 2. \quad (10)$$

Из третьего уравнения (6) и соотношения (10) получим выражения для n'_+ и n'_- :

$$n'_+ = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{E'} - \frac{dE'}{dz'} \right), \quad n'_- = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{E'} + \frac{dE'}{dz'} \right). \quad (11)$$

Подставив (11) в (6), находим дифференциальное уравнение второго порядка для функции $E'(z')$

$$\beta \frac{d}{dz'} \left(E' \frac{dE'}{dz'} \right) = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{4}{E'^2} - \left(\frac{dE'}{dz'} \right)^2 \right). \quad (12)$$

С учетом граничных условий (7) и выражений (11), получаем граничные условия для функции $E'(z')$

$$\left(\frac{2}{E'} + \frac{dE'}{dz'} \right) \Big|_{z'=0} = 0, \quad \left(\frac{2}{E'} + \frac{dE'}{dz'} \right) \Big|_{z' \rightarrow \infty} = \left(\frac{2}{E'} - \frac{dE'}{dz'} \right) \Big|_{z' \rightarrow \infty} = 2, \quad E' \Big|_{z' \rightarrow \infty} = 1. \quad (13)$$

Из (12), (13) для функции $u(z') = E'^2(z')$ получаем

$$\beta \frac{d^2 u}{4 dz'^2} = 1 - \frac{1}{4u} \left(4 - \frac{1}{4} \left(\frac{du}{dz'} \right)^2 \right), \quad \frac{du}{dz'} \Big|_{z'=0} = -4, \quad \frac{du}{dz'} \Big|_{z' \rightarrow \infty} = 0, \quad u \Big|_{z' \rightarrow \infty} = 1. \quad (14)$$

Введем новую неизвестную функцию $f(u) = (du/dz')^2$ и получим для нее краевую задачу из (14):

$$\frac{\beta}{8} \frac{df}{du} = 1 - \frac{1}{4u} \left(4 - \frac{f}{4} \right), \quad f \Big|_{u=1} = 0. \quad (15)$$

Решение (15) имеет вид

$$f(u) = \frac{8}{\beta} u^{\frac{1}{2\beta}} \int_1^u \left(x^{-\frac{1}{2\beta}} - x^{-\frac{1}{2\beta}-1} \right) dx = 16 \left(\frac{u}{2\beta-1} + 1 - \frac{2\beta}{2\beta-1} u^{\frac{1}{2\beta}} \right). \quad (16)$$

Из (16) и (14) следует, что

$$u \Big|_{z'=0} = (2\beta)^{2\beta/(2\beta-1)}, \quad (17)$$

что равносильно соотношению (2), впервые полученному в работе [Thomson, 1903].

Аналитическое решение

Приведенный выше анализ задачи (3)–(4) следует работе [Thomson, 1903], в которой указано также, что полное аналитическое решение задачи в общем виде не представляется возможным. Ниже будет получена приближенная оценка решения задачи при $\beta > 1$. Из (16) следует уравнение

$$\frac{du}{dz'} = -4 \sqrt{\frac{u}{2\beta-1} + 1 - \frac{2\beta}{2\beta-1} u^{1/2\beta}}, \quad (18)$$

где перед квадратным корнем поставлен знак минус, поскольку функция $u(z')$ убывает с высотой. Из (18) с учетом соотношения (17) находим

$$z'(u) = \frac{\sqrt{2\beta-1}}{4} \int_{u^{1/(2\beta)}}^{(2\beta)^{1/(2\beta-1)}} \frac{2\beta x^{2\beta-1} dx}{\sqrt{x^{2\beta} - 2\beta x + 2\beta - 1}}, \quad (19)$$

где сделана замена переменной интегрирования $u = x^{2\beta}$.

Интегрируя (19) по частям, имеем

$$\begin{aligned} z'(u) &= \frac{\sqrt{2\beta-1}}{2} \left[\sqrt{x^{2\beta} - 2\beta x + 2\beta - 1} \Big|_{u^{1/(2\beta)}}^{(2\beta)^{1/(2\beta-1)}} + \int_{u^{1/(2\beta)}}^{(2\beta)^{1/(2\beta-1)}} \frac{\beta dx}{\sqrt{x^{2\beta} - 2\beta x + 2\beta - 1}} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{2\beta-1}}{2} \left[\sqrt{2\beta-1} - \sqrt{u-1-2\beta(u^{1/(2\beta)}-1)} + I(u) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Положив $x = 1+y$, преобразуем интеграл $I(u)$ в правой части (20) и получим

$$I(u) = \int_{u^{1/(2\beta)}-1}^{(2\beta)^{1/(2\beta-1)}-1} \frac{\beta dy}{\sqrt{(1+y)^{2\beta} - 2\beta(1+y) + 2\beta - 1}}. \quad (21)$$

Из граничных условий (14) следует, что в интеграле (21) нижний предел интегрирования $u^{1/(2\beta)} - 1 > 0$, а верхний предел $(2\beta)^{1/(2\beta-1)} - 1 < 1$ при $\beta > 1$, поэтому заведомо $0 < y < 1$. Тогда при $\beta > 1$ в подынтегральном выражении бином $(1+y)^{2\beta}$ может быть представлен в виде абсолютно сходящегося ряда. При этом (21) примет вид

$$I(u) = \int_{u^{1/(2\beta)}-1}^{(2\beta)^{1/(2\beta-1)}-1} \frac{\beta dx}{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} \binom{2\beta}{n} y^n}}, \quad (22)$$

где $\binom{2\beta}{n} = 2\beta(2\beta-1)\dots(2\beta-n+1)/n!$ – биномиальные коэффициенты.

Заменяя ряд в подынтегральном выражении в правой части (22) суммой первых двух его членов, приближенно получим

$$I(u) \approx \int_{u^{1/(2\beta)}-1}^{(2\beta)^{1/(2\beta-1)}-1} \frac{\beta dy}{y \sqrt{\sum_{n=2}^3 \binom{2\beta}{n} y^n}} = \sqrt{\frac{\beta}{2\beta-1}} \int_{u^{1/(2\beta)}-1}^{(2\beta)^{1/(2\beta-1)}-1} \frac{dy}{y \sqrt{1 + \frac{2}{3}(\beta-1)y}}. \quad (23)$$

Интегрируя (23), получаем приближенную оценку для $I(u)$

$$I(u) \approx \sqrt{\frac{\beta}{2\beta-1}} \left[\ln \sqrt{1 + \frac{2\beta-2}{3} (2\beta^{1/(2\beta-1)} - 1) - 1} - \ln \sqrt{1 + \frac{2\beta-2}{3} (u^{1/(2\beta)} - 1) - 1} \right]. \quad (24)$$

Для функций, являющихся решением исходной задачи (3)–(4), выполнены соотношения:

$$E' = \sqrt{u}, \quad n'_+ = \frac{1}{E'} - \frac{1}{2} \frac{dE'}{dz'} = \frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{f(u)}{2}, \quad n'_- = \frac{1}{E'} + \frac{1}{2} \frac{dE'}{dz'} = \frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{f(u)}{2}. \quad (25)$$

Таким образом, формулы (25) вместе с (16), (20), (24) задают параметрическое представление искомых функций $E'(z')$, $n'_+(z')$ и $n'_-(z')$.

Заметим, что при $\beta = 3/2$ биномиальный ряд в формуле (22) содержит лишь два ненулевых члена, следовательно, при $\beta = 3/2$ построенное приближенное решение задачи является точным. Для значений параметров задачи $b = (1.3-1.4) \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \text{В}^{-1} \text{с}^{-1}$ и $\alpha = 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3 \text{с}^{-1}$, характерных для приземной атмосферы в условиях хорошей погоды, получаем $\beta = 1.43-1.54$, что достаточно близко к $3/2$.

Графики вычисленных по полученным формулам при $\beta = 3/2$ различных электрических величин, включая плотности тока положительных $j'_+ = n'_+ E'$ и отрицательных $j'_- = n'_- E'$ аэроионов, приведены на рис. 1.

Вычисленные по приближенным формулам (20), (24), (25) графики напряженности электрического поля как функции высоты для разных значений параметра β представлены на рис. 2. (На обоих рисунках все величины нормированы на их характерные значения.)

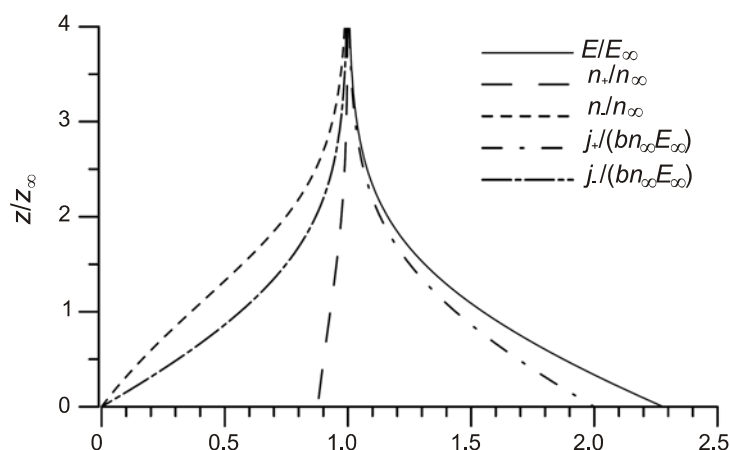


Рис. 1. Зависимость от высоты z' напряженности электрического поля атмосферы (E'), концентрации положительных (n'_+) и отрицательных (n'_-) аэроионов и плотности токов положительных (j'_+) и отрицательных (j'_-) аэроионов

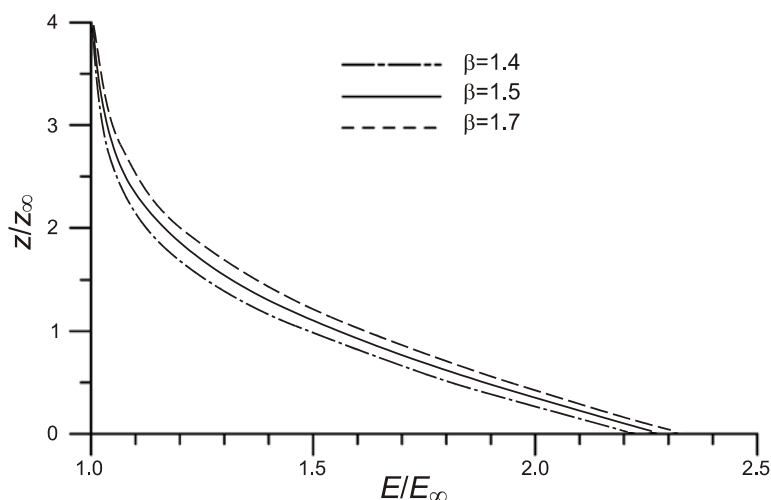


Рис. 2. Зависимости от высоты z' напряженности электрического поля атмосферы (E') для разных значений параметра β , вычисленные по приближенным формулам (20), (24), (25)

Сравнение представленных на рис. 2 данных с соответствующими численными решениями задачи (6)–(7), полученными с высокой степенью точности методом Рунге–Кутты пятого порядка, показало, что их относительная разность не превышает 0.001. Столь высокая точность полученного приближенного решения не позволила отобразить на рис. 2 соответствующие графики численных решений, поскольку они бы слились с уже изображенными кривыми.

Таким образом, полученное приближенное аналитическое решение краевой задачи (6)–(7) практически точно описывает классический электродный эффект в реальной приземной атмосфере.

Заключение

В работе рассмотрена задача моделирования классического электродного эффекта в приземной атмосфере, приведенная к безразмерному виду. Продемонстрировано, что вид решения задачи определяется единственным безразмерным параметром β (см. выражение (8)).

Получено приближенное аналитическое решение при $\beta > 1$; показано, что оно является точным при $\beta = 3/2$. Приведены результаты вычислений по приближенным формулам для различных значений β , соответствующих наблюдаемым в натуральных экспериментах параметрам атмосферы. Тем самым показана пригодность приближенного решения для описания классического электродного эффекта в реальной приземной атмосфере.

Следует отметить, что аналитическое решение задачи классического электродного эффекта является необходимым первым шагом в применении приближенных методов к турбулентному электродному эффекту. Математически отличие турбулентного электродного эффекта от классического выражается в появлении в уравнениях (1) членов, описывающих турбулентную диффузию аэроионов. Увеличение порядка дифференциальных уравнений (1) ведет к необходимости задания дополнительного граничного условия $n_+|_{z=0} = 0$. При этом вблизи земной поверхности возникает тонкий переходный слой, в котором резко меняется значение n_+ .

Благодарности

Авторы благодарны доктору физико-математических наук С.В. Анисимову за ценные замечания и рекомендации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-05-00888) и программы фундаментальных исследований ОНЗ РАН №7.

Литература

- Анисимов С.В., Дмитриев Э.М. Численное моделирование электричества приземной атмосферы // Геофизические исследования. 2008. Т. 9, № 3. С.7–15.
- Куповых Г.В., Морозов В.Н., Шварц Я.М. Теория электродного эффекта в атмосфере. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1998. 123 с.
- Тверской П.Н. Атмосферное электричество. Л.: Гидрометеиздат, 1949. 252 с.
- Френкель М.Т. Теория явлений атмосферного электричества. Л.; М.: Гостехиздат, 1949. 155 с.
- Chalmers J.A. Atmospheric Electricity. 2-nd ed. New-York: Pergamon Press, 1967. 450 p.
- Hoppel W.A. Theory of the electrode effect // J. Atm. Terr. Phys. 1967. V. 29, N 6. P.709–721.
- Schweidler E.R. Über die Ionenverteilung in den untersten Schichten der Atmosphäre // Sitz. ber. math.-naturw. Kl. Akad. d. Wissensch. in Wien, Abt. IIa. 1908. Bd. 117. S.653–664.

Thomson J.J. Conduction of electricity through gases. Cambridge, 1903. 566 p.

Willett J.C. An analysis of the electrode effect in the limit of strong turbulent mixing // *J. Geophys. Res.* 1978. V. 83. P.402–408.

Willett J.C. The turbulent electrode effect as influenced by interfacial ion transfer // *J. Geophys. Res.* 1983. V. 88. P.8453–8469.

Сведения об авторах

ДМИТРИЕВ Эльдар Михайлович – кандидат физико-математических наук, ученый секретарь ГО “Борок” ИФЗ РАН. 152742, Ярославская обл., Некоузский р-н, пос. Борок, ГО “Борок” ИФЗ РАН. Тел.: (48547) 241-96. E-mail: eldar@borok.yar.ru

ФИЛИПPOB Василий Андреевич – научный сотрудник, ГО “Борок” ИФЗ РАН. 152742, Ярославская обл., Некоузский р-н, пос. Борок, ГО “Борок” ИФЗ РАН. Тел.: (48547) 243-61. E-mail: invite@borok.yar.ru

THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE SURFACE ATMOSPHERE CLASSICAL ELECTRODE EFFECT PROBLEM

E.M. Dmitriev, V.A. Filippov

*Borok Geophysical observatory of Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Science,
Borok (Yaroslavl region), Russia*

Abstract. There is obtained an approximate analytical solution of the differential boundary problem of the surface atmosphere classical electrode effect. The solution is exact for the problem under some special case, applicable for the electrode effect in the real atmosphere.

Keywords: atmospheric electricity, mathematical modeling, electrode effect.