

УДК 550.383

АНИЗОТРОПИЯ В ГЕОСТРОФИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

© 2010 М.Ю. Решетняк

Институт физики Земли им. О.Ю.Шмидта РАН, г. Москва, Россия

Для описания конвекции в жидком ядре Земли рассмотрена трехмерная модель Буссинеска в плоском слое. Исследованы эффекты анизотропии в физическом и волновом пространствах, вызванные быстрым вращением. Продемонстрировано подавление процессов энергопереноса вращением. Исследованы свойства волновых треугольников при нелинейном взаимодействии. Диапазон параметров модели соответствует режимам тепловой конвекции в моделях геодинамо.

Ключевые слова: жидкое ядро Земли, тепловая конвекция, геострофический баланс, каскадные процессы.

Введение

Приближение однородной и изотропной турбулентности является весьма грубым при описании конвекции во многих геофизических приложениях. Для случая без вращения отклонение от изотропии вызвано наличием выделенного направления, связанного с силой тяжести. При оценке спектров полей отклонение наклона спектра от колмогоровского закона $-5/3$ может быть и не большим, поскольку для задачи в слое форма конвективной ячейки на пороге генерации близка к кубической [Chandrasekhar, 1981], а возможные отклонения от куба уменьшаются при переходе к малым масштабам [Frisch, 1995]. Однако спектральные оценки не являются исчерпывающими характеристиками. Согласно модели Колмогорова мы были бы вправе ожидать изотропии и в потоках кинетической энергии в спектральном пространстве. Последнее не выполнимо для задач с подогревом снизу хотя бы уже потому, что работа силы Архимеда по всему объему не равна нулю.

Возвращаясь к специфике геофизической конвекции, необходимо отметить роль вращения. Если влияние сил Кориолиса для конвекции в мантии еще пренебрежимо мало, то для задач метеорологии, физики океана их влияние оказывается принципиальным [Gill, 1982]. Более того, для конвекции в жидком ядре Земли сила Кориолиса превосходит нелинейный член на три порядка, в корне меняя баланс сил в уравнении Навье–Стокса и спектральные свойства его решения при больших числах Рейнольдса Re .

Введение вращения приводит к существенной перестройке течений как в физическом пространстве, так и в волновом. Несмотря на тот факт, что сама сила Кориолиса не совершает работы, за счет появления условий для обратного каскада энергии, наблюдаемого в прямых вычислениях [Hossain, 1994] и предсказанного теорией [McComb, 1992], амплитуда крупномасштабных течений может увеличиваться. Как следствие, наклон спектра кинетической энергии также увеличивается от $-5/3$ до -2 [Zhou, 1995; Constantin, 2002]. Данное изменение связано с блокированием передачи энергии по спектру [Zhou, 1995].

При переходе к задаче с тепловой конвекцией в уравнение Навье–Стокса добавляется член, соответствующий силе плавучести, а также вводится уравнение теплопроводно-

сти. При этом возникают условия для появления циклонической конвекции с интенсивными вертикальными скоростями. В физическом пространстве задача уже достаточно изучена в работах по геодинamo. Быстрое вращение приводит к появлению равновесия между силой Кориолиса и градиентом давления (геострофический баланс) [Pedlosky, 1987]: $\mathbf{1}_z \times \mathbf{V} \sim \nabla p$, откуда следует, что градиенты полей вдоль оси вращения z малы¹: $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \sim 0$. Возникают циклоны (антициклоны), вытянутые вдоль оси вращения. Если взять жидкое ядро Земли и уменьшить амплитуду источников тепла до уровня начала возникновения конвекции, то диаметр d_c таких циклонов будет на 5 порядков меньше их высоты. В действительности, за счет того, что конвекция в ядре Земли турбулентна (число Рейнольдса достигает $Re \sim 10^9$), в волновом пространстве существует целый пакет таких циклонов, но оценки по порядку величины показывают, что как минимум для первых трех-четырех порядков по k геострофический баланс выполняется. Это существенно превосходит протяженность спектра геомагнитного поля и учитываться при построении моделей динамо.

Для динамики передачи энергии в волновом пространстве появление силы Кориолиса также важно. Если ранее нелинейный член, бывший одного порядка с градиентом давления, беспрепятственно передавал энергию по спектру (например, за счет вихревой части нелинейного члена), то при появлении силы Кориолиса возможна следующая ситуация: давление компенсирует потенциальную составляющую силы Кориолиса. Вихревая же компонента силы Кориолиса блокирует перенос энергии нелинейным членом. Как следствие, спектр становится круче. Так обстоит дело на малых масштабах $l \ll d_c$. На больших же масштабах $l \gg d_c$ система может находиться в состоянии статистического равновесия: диссипация практически отсутствует, а обмен энергиями между масштабами пренебрежимо мал.

Ниже на примере трехмерной модели тепловой конвекции в плоском слое мы рассмотрим свойства анизотропии, вызванные вращением, как в физическом пространстве, так и в волновом для режимов, характерных для моделей конвекции в жидком ядре Земли, и сравним их с режимами без вращения.

Уравнения конвекции

Рассмотрим тепловую конвекцию несжимаемой жидкости $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ во вращающемся с угловой скоростью Ω относительно вертикальной оси z прямоугольном ящике. Введем для скорости \mathbf{V} , времени t и давления P следующие единицы измерения: κ/L , L^2/κ и $\rho\kappa^2/L^2$, где L – единица длины, κ – коэффициент молекулярной теплопроводности, ρ – плотность вещества. Система уравнений динамо в декартовой системе координат (x, y, z) примет вид:

$$\text{E Pr}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) \right] = -\nabla P - \mathbf{1}_z \times \mathbf{V} + \text{Ra } T \mathbf{1}_z + \text{E} \Delta \mathbf{V} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) (T + T_0) = \Delta T.$$

Безразмерные числа Прандтля, Экмана, Рэлея и Робертса вводятся как $\text{Pr} = \nu/\kappa$, $\text{Ra} = \alpha g_0 \delta T L / 2\Omega \kappa$, $\text{E} = \nu / 2\Omega L^2$, где ν – коэффициент кинематической вязкости, α – коэффициент объемного расширения, g_0 – ускорение свободного падения, δT – единица возмущения температуры T относительно “диффузионного” распределения температуры

¹ Обратим внимание, что имеется в виду баланс потенциальной компоненты силы Кориолиса.

$T_0 = 1 - z$. Число Россби введем как $Ro = EPr^{-1}$. Задача (1) решалась в прямоугольном ящике с периодическими граничными условиями по координатам x, y . Для границ $z = 0, z = 1$ возмущения температуры T равны нулю, что с учетом выбранного профиля T_0 эквивалентно заданию температуры $\tilde{T} = T + T_0$ на границах: $\tilde{T}(z = 0) = 1, \tilde{T}(z = 1) = 0$ (подогрев снизу).

Для поля скорости принимаем условие непроникновения и равенство нулю градиентов тангенциальных компонент на границах $z = 0, z = 1$: $V_z = \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0$. Такая постановка граничных условий гарантирует равенство нулю тангенциальных компонент тензора вязких напряжений, а также нулевые значения гидродинамической спиральности. Для решения (1) использовался псевдоспектральный код (см. подробнее [Orszag, 1971; Meneguzzi, Pouquet, 1989; Cattaneo, Emonet, Weis 2003]), адаптированный для параллельных процессоров с использованием MPI [Решетняк, 2007]. Вычисления проводились на сетке $N^3, N = 64$.

Потоки в k -пространстве

Подробнее с понятием потоков в волновом пространстве можно ознакомиться в работах [Frisch, 1995; Решетняк, 2008] и в цитируемых в них первоисточниках. Для описания обменных взаимодействий в Фурье-пространстве удобно разделить волновое пространство на оболочки (*shells*), такие, что $k_i < k < k_{i+1}, k_{i+1}/k_i = \gamma$ (обычно принимают $\gamma = 2$). Далее нас будет интересовать обмен энергиями между такими оболочками (каскадные процессы). Введем разложение поля f на высоко- и низкочастотную компоненты: $f(\mathbf{r}) = f^<(\mathbf{r}) + f^>(\mathbf{r})$, где

$$f^<(\mathbf{r}) = \sum_{|k| \leq K} \hat{f}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad f^>(\mathbf{r}) = \sum_{|k| > K} \hat{f}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (2)$$

соответственно. Для периодических полей f и g имеем (см. подробнее [Frisch, 1995]):

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x} \rangle = 0, \quad \langle g \frac{\partial f}{\partial x} \rangle = - \langle f \frac{\partial g}{\partial x} \rangle, \quad \langle f^> g^< \rangle = 0, \quad (3)$$

где

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \mathcal{V}^{-1} \int_{\mathcal{V}} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}^3 \quad (4)$$

означает осреднение поля f по объему \mathcal{V} . Умножая уравнение Навье–Стокса на $\mathbf{V}^<$, имеем выражение для среднего по объему изменения кинетической энергии в сфере радиуса K :

$$2^{-1} EPr^{-1} \left[\frac{\partial \langle V_i^< V_i^< \rangle}{\partial t} + \Pi(K) \right] = Ra \langle T^< V_z^< \rangle - E \langle (\nabla \boldsymbol{\omega}^<)^2 \rangle, \quad (5)$$

где интегральный поток кинетической энергии из области $k > K$ в область $k \leq K$ задан в виде

$$\Pi(K) = \langle V_i^< \cdot (V_j \cdot \nabla_j) V_i \rangle \quad (6)$$

и по повторяющимся индексам $i = 1, 2, 3$ проводится суммирование. Удобно ввести локальный поток кинетической энергии T_K :

$$T_K(k) = -\frac{\partial \Pi(k)}{\partial k}, \quad \int_{k=0}^{\infty} T_K(k) dk = 0. \quad (7)$$

Тогда для уравнения Навье–Стокса имеем:

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = T_K(k) + F(k) + D(k), \quad (8)$$

где $E(k) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial k} \langle \mathbf{V}_k^2 \rangle$ – изменение кинетической энергии на волновом числе k , $F(k) = \frac{\text{Ra Pr}}{\text{E}} \frac{\partial}{\partial k} \langle TV_z^< \rangle$ – работа силы Архимеда, $D(k) = -\text{Pr } k^2 E(k)$ – диссипация. Выражение (8) описывает суммарный поток кинетической энергии через волновое число k .

Для изучения детальной структуры триадного механизма можно задаться вопросом о виде энергетического уравнения, описывающего передачу энергии от оболочек Q и P оболочке K :

$$\frac{\partial E(K)}{\partial t} = T_3 + A(K) + D(K), \quad (9)$$

где $E(K)$ и $D(K)$ имеют тот же вид, что и в (8), а $T_3 = \langle V_i(K) \cdot (V_j(P) \cdot \nabla_j) V_i(Q) \rangle$, $A(K) = \frac{\text{Ra Pr}}{\text{E}} \langle T(K) V_z(K) \rangle$.

Полезно также ввести функцию $T_2(K, Q) = \int T_3(K, Q, P) dP$. Вообще говоря, последнее требует пояснения. Можно показать, что T_2 означает поток энергии от гармоники Q к гармонике K (см. ссылки в [Alexakis, Mininni, Pouquet, 2007]). Анализ T_2 позволяет оценить локален или нет перенос энергии, но не локальность самого взаимодействия. Изучение же T_3 позволяет полностью восстановить структуру волнового треугольника и выяснить, является ли само взаимодействие локальным или нет. Отметим также полезные свойства функции T_2 : в общем случае для произвольных периодических (или случайных однородных) бездивергентных полей $\mathbf{u}(Q)$, $\mathbf{w}(K)$ и \mathbf{V} имеем [Alexakis, Mininni, Pouquet, 2005]:

$$T_2^{uw}(Q, K) = -T_2^{wu}(K, Q), \quad (10)$$

где $T_2^{uw}(Q, K) = \langle u_i(K) \cdot (V_j \cdot \nabla_j) w_i(Q) \rangle$, $T_{wu}(Q, K) = \langle w_i(Q) \cdot (V_j \cdot \nabla_j) u_i(K) \rangle$, что соответствует равенству энергии, полученной оболочкой K от оболочки Q , и энергии, отданной оболочкой Q оболочке K . Ниже мы рассмотрим свойства потоков T_K , T_2 , T_3 на примере системы (1) и выясним, как они меняются при введении вращения.

Поведение в физическом пространстве

Возникновение конвекции в бесконечном плоском слое является пороговым явлением, происходящим при увеличении числа Рэлея до критического значения Ra^{cr} . Рассмотрим три режима конвекции (рис. 1):

1. Режим NR (без вращения, сила Кориолиса равна нулю): $\text{Ra} = 9 \cdot 10^5$, $\text{Pr} = 1$, $\text{E} = 1$, $\text{Re} \sim 700$.

2. Режим $R1$ (с вращением): $Ra = 4 \cdot 10^2$, $Pr = 1$, $E = 2 \cdot 10^{-5}$, $Re \sim 200$.

3. Режим $R2$ (с вращением): $Ra = 1 \cdot 10^3$, $Pr = 1$, $E = 2 \cdot 10^{-5}$, $Re \sim 10^4$.

Первый режим, представленный на рис. 1, *а, б*, соответствует турбулентной конвекции без вращения² с квазипериодическим поведением кинетической энергии во времени $E_K(t)$. Обратим внимание на появление мелкомасштабной гидродинамической спиральности $\mathcal{H}^H = \mathbf{V} \cdot \text{rot} \mathbf{V}$. Для случая без вращения, в силу отсутствия выделенного направления, среднее значение спиральности $\overline{\mathcal{H}^H}$ по z равно нулю (рис. 2). Подробнее этот вопрос изложен в работах по теории динамо средних полей [Moffat, 1978; Krause et al., 1980]; результаты прямых расчетов даны в [Meneguzzi, Pouquet, 1989].

Тепловая конвекция с вращением характеризуется появлением большого числа вертикальных вращающихся колонок (циклонов-антициклонов). Их число зависит от числа Экмана как $k_c \sim E^{-1/3}$ [Chandrasekhar, 1981; Busse, 1970; Jones, Roberts, 2000].

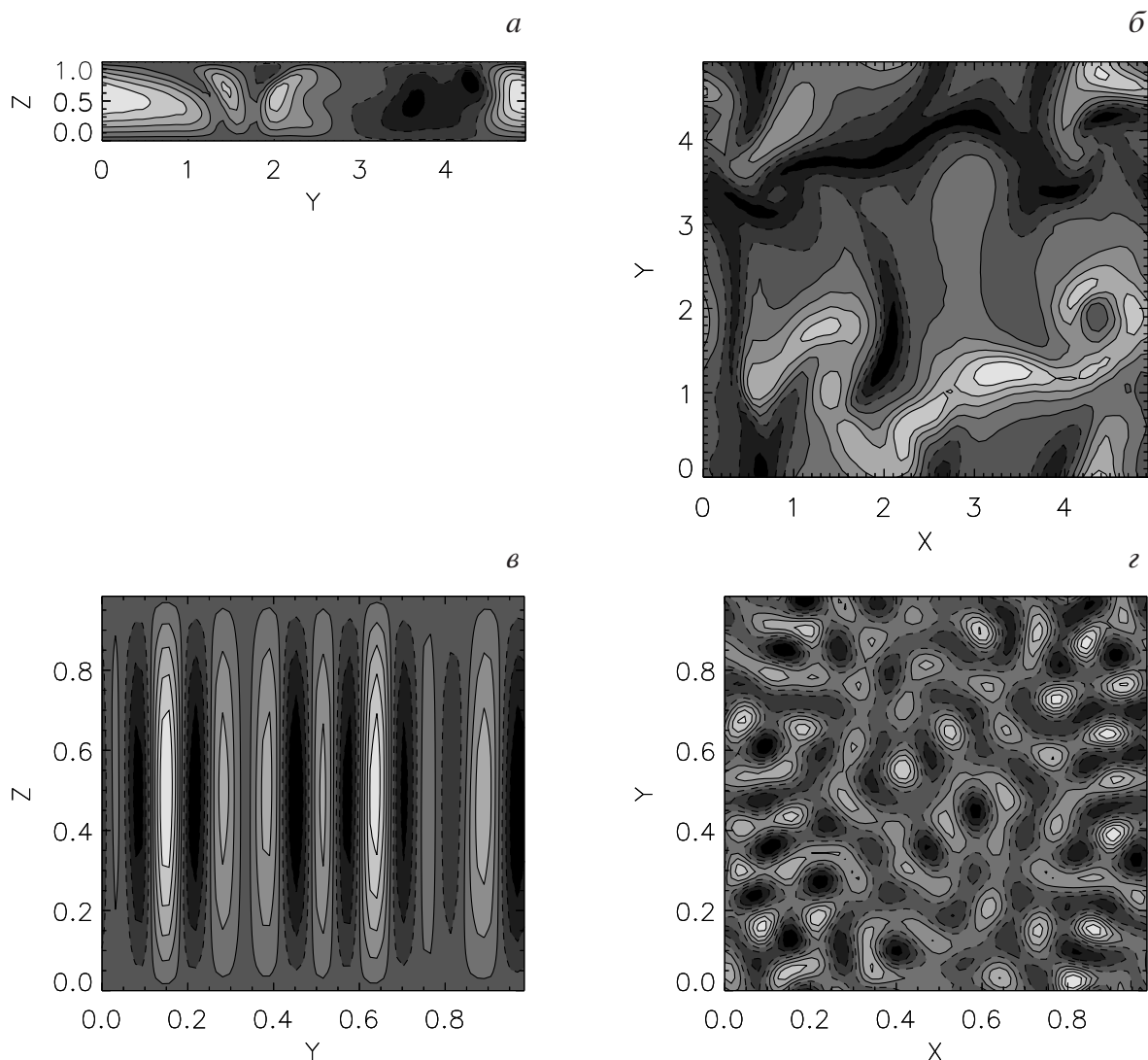


Рис. 1. Распределение вертикальной компоненты скорости V_z без вращения (*а, б*: режим NR , диапазоны полей: $(-257 \div 506)$ и $(-254 \div 572)$) и с вращением (*в, г*: режим $R1$, диапазоны полей: $(-88 \div 127)$ и $(-55 \div 86)$) для сечения $x = 4.3$, $z = 0.8$

² Поскольку на пороге генерации горизонтальный размеры $L_x = L_y$ конвективной ячейки больше, чем вертикальный L_z , обычно используется вытянутый в горизонтальном направлении ящик. В расчетах $L_x = L_y = 5L_z \equiv 5L$.

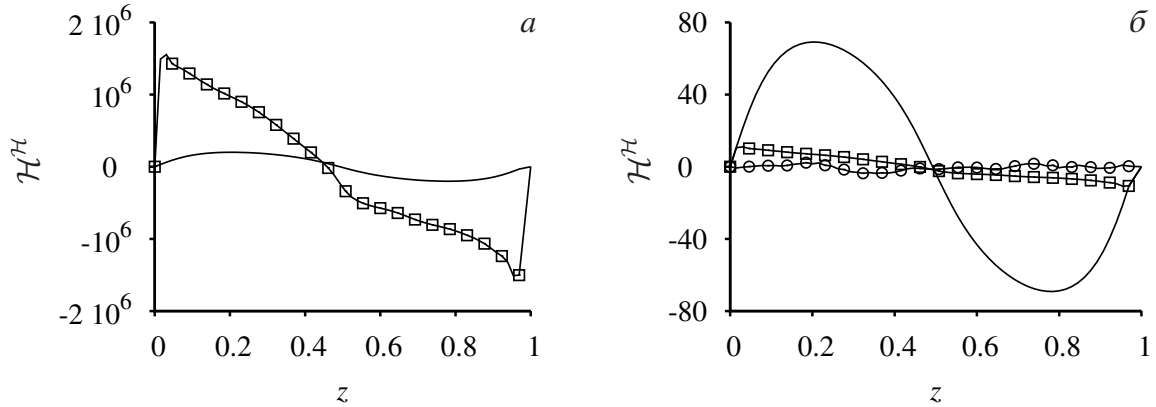


Рис. 2. Профиль гидродинамической спиральности $\mathcal{H}^{\mathcal{H}}$ для $E = 3 \cdot 10^{-5}$, $Pr = 1$, $Ra = 4 \cdot 10^2$ (сплошная линия) и $Ra = 1.2 \cdot 10^3$ (квадратики) (а). Значения нормированы на среднюю по объему кинетическую энергию ($\overline{E_K}$) (б). Кривая с кружочками соответствует случаю без вращения

Для жидкого ядра Земли $E \sim 10^{-15}$, что очевидно не позволяет проводить вычисления при реалистичных значениях параметра. Обычно удается добиться режимов с $E = 10^{-4} \div 10^{-6}$ [Jones, 2000]. Целью численных экспериментов является получение асимптотического режима с последующей экстраполяцией результатов к параметрам жидкого ядра Земли. Также из линейного анализа известно, что критическое число Рэлея, при котором начинается конвекция, зависит от числа Экмана как $Ra^{cr} \sim E^{-1/3}$. Увеличение Ra^{cr} связано с появлением циклонической конвекции, приводящей к повышенной диссипации.

Режим *R1* соответствует геострофическому состоянию конвекции вблизи порога генерации, характеризуемого регулярной пространственной структурой циклонов (см. рис. 1, в, г). Увеличение Ra (режим *R2*) приводит к нарушению упорядоченности циклонов, появлению мелкомасштабных течений в направлении z , отклонению от геострофии. Нелинейный член становится ближе по амплитуде к силе Кориолиса и градиенту давления, временное поведение становится более хаотическим. В обоих случаях с вращением наблюдается появление гидродинамической спиральности $\mathcal{H}^{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{V} \cdot \text{rot} \mathbf{V} \rangle_{xy}$ (осреднение проведено в плоскости (x, y)) [Решетняк, 2007]; эксперименты показывают, что $\mathcal{H}^{\mathcal{H}} \sim -(z - 0.5)$ (см. рис. 2). Для режима *NR*, как уже было отмечено выше, $\overline{\mathcal{H}^{\mathcal{H}}}$ равно нулю.

Рассмотрим подробнее поведение кинетической энергии для различных компонент скорости вдоль координаты z (рис. 3). Разное поведение двух компонент энергии – поперечной $E_K^{\perp} = (V_x^2 + V_y^2) / 2$ и продольной $E_K^{\parallel} = V_z^2 / 2$ – связано с используемыми граничными условиями. Для режима *NR* в основном объеме компоненты энергии сравнимы: $\lambda_{NR} = \left(E_K^{\perp} / 2E_K^{\parallel} \right) \Big|_{z=0.5} \sim 0.8$, где коэффициент 2 появляется за счет суммирования по двум горизонтальным направлениям. Для *R1*, напротив, при приближении к центральной области происходит смена знака вращения и E_K^{\perp} обращается в ноль: $\lambda_{R1} \sim 8$. Интересно, что увеличение Ra (режим *R2*) приводит к увеличению анизотропии во всем объеме: $\lambda_{R1} \sim 0.1$, т.е. при достаточно больших Ra и сильном вращении происходит вырождение потоков кинетической энергии в вертикальном направлении. Это так называемое вырождение трехмерной конвекции в двумерную предсказано в [Betchelor, 1953]; аналогичное вырождение под действием крупномасштабного магнитного поля описано в [Kraichnan, 1965]. Также при увеличении Re (*R2*) хорошо видно появление слоевых структур при $z = 0$, $z = 1$. Последнее связано как с существованием теплового пограничного слоя с толщиной $\delta_T \sim Ra^{-1/3}$, так и с невязкими граничными условиями для V_x и V_y .

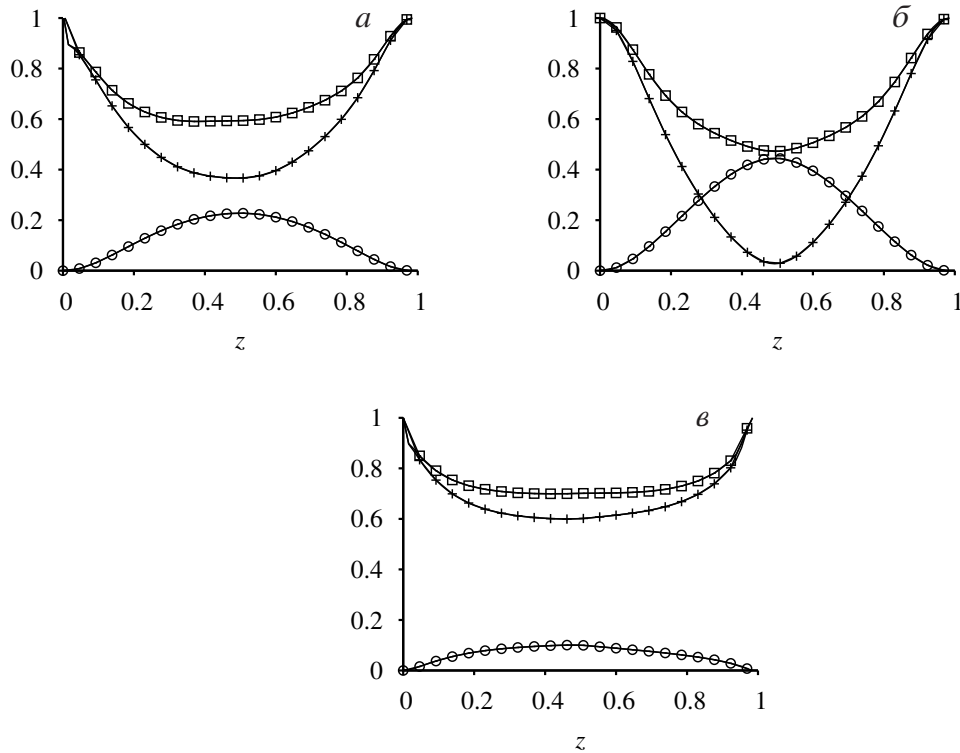


Рис. 3. Зависимость поперечной E_K^\perp (крестики), продольной E_K^\parallel (кружочки) и интегральной E_K (ромбики) кинетической энергии от высоты для трех режимов NR (а), $R1$ (б), $R2$ (в)

Спектры полей и потоки в волновом пространстве

Рассмотрим для всех трех режимов спектры полной кинетической энергии $E_K(k)$, ее продольной $E_K^\parallel(k_\parallel) = \iint E_K(k_x, k_y, k_z) dk_x dk_y$ и поперечной $E_K^\perp(k_\perp) = \int E_K(k_x, k_y, k_z) dk_z$ компонент, где $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$, $k_\parallel \equiv k_z$.

Для режима NR спектральные свойства конвекции близки к колмогоровской зависимости $\sim k^{-5/3}$ (рис. 4). Поведение же спектров E_K^\parallel и E_K^\perp отличается лишь нормировочным множителем $\sim k$, что свидетельствует о высокой степени изотропии режима без вращения. Данный результат хорошо согласуется с тем фактом, что форма конвективных ячеек на пороге возникновения конвекции близка к изотропной.

Спектры конвекции с вращением отличаются от спектров без вращения. Режим $R1$ близок к пороговому. На интегральном спектре (рис.4,а) хорошо виден пик $k_c \sim 8$, соответствующий циклоническим течениям. При увеличении Ra (режим $R2$) провал в спектре начинает заполняться и интегральный спектр становится похожим на спектр без вращения. Заполнение спектра также наблюдается в задачах со сферической геометрией [Peshetnyak, 2006] и в каскадных моделях турбулентности [Reshetnyak, Steffan, 2006].

Для режима $R1$ спектры E_K^\perp и E_K^\parallel сильно различаются: спектр E_K^\parallel не чувствует границы $k = k_c$, в то время как для $k < k_c$ поведение E_K^\perp близко к белому спектру, а для больших k_\perp спектр E_K^\perp резко падает. При переходе к большим Ra E_K^\parallel приближается к колмогоровскому спектру, а трансверсальный спектр по-прежнему остается белым для малых k_\perp и близким по наклону к спектру без вращения для $k_\perp > k_c$. Обратим внимание, что для режимов $R1$, $R2$ форма интегральных спектров E_K полностью определяется формой трансверсальных спектров E_K^\perp .

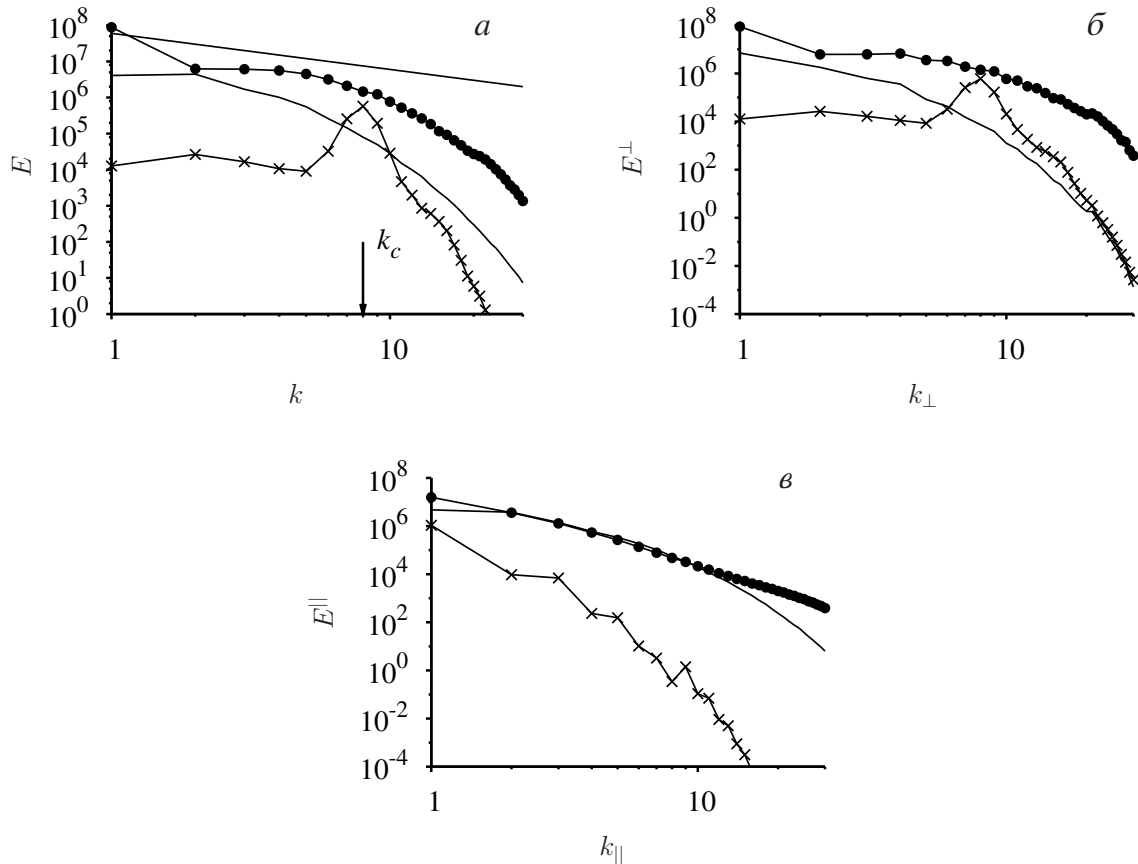


Рис. 4. Спектры кинетической энергии E_K , E_K^{\perp} , E_K^{\parallel} как функция k (а), k_{\perp} (б) и k_{\parallel} (в) для режимов NR (сплошная линия), R1 (крестики) и R2 (кружочки). Прямая линия на а соответствует спектру Колмогорова $\sim k^{-5/3}$

Наблюдаемое сходство в поведении спектров R2 и NR еще не свидетельствует о сходстве физических процессов: известно, что в двумерной турбулентности [Kraichnan, Montgomery, 1980] также наблюдается спектр кинетической энергии $\sim k^{-5/3}$, но передача энергии происходит не от больших масштабов к меньшим, а наоборот. Приведенные оценки членов для R2 [Решетняк, 2008] свидетельствуют о выполнении геострофического баланса.

Рассмотрим поведение $T_K(k)$. Режим NR демонстрирует хорошо известную картину колмогоровского прямого каскада кинетической энергии (рис. 5). Для больших масштабов T_K отрицательно, что означает отток энергии к малым масштабам. По мере перехода в инфракрасную часть спектра знак потока меняется на положительный – энергия потребляется. Для двумерной турбулентности наблюдается зеркально симметричная картина потока [Kraichnan, Montgomery, 1980] – в этом случае вместо прямого каскада энергии наблюдается обратный.

Вращение существенно меняет поведение потоков энергии. Энергонесущим волновым числом является k_c . Для $k > k_c$ мы также наблюдаем прямой каскад энергии ($T_K > 0$). Максимум T_K смещен относительно максимума спектра вправо тем больше, чем больше Re. Для $k < k_c$ картина существенно сложнее: для небольших волновых чисел наблюдается обратный каскад энергии ($T_K < 0$). В то же время, в большей части области волновых чисел $0 < k < k_c$ каскад прямой ($T_K > 0$).

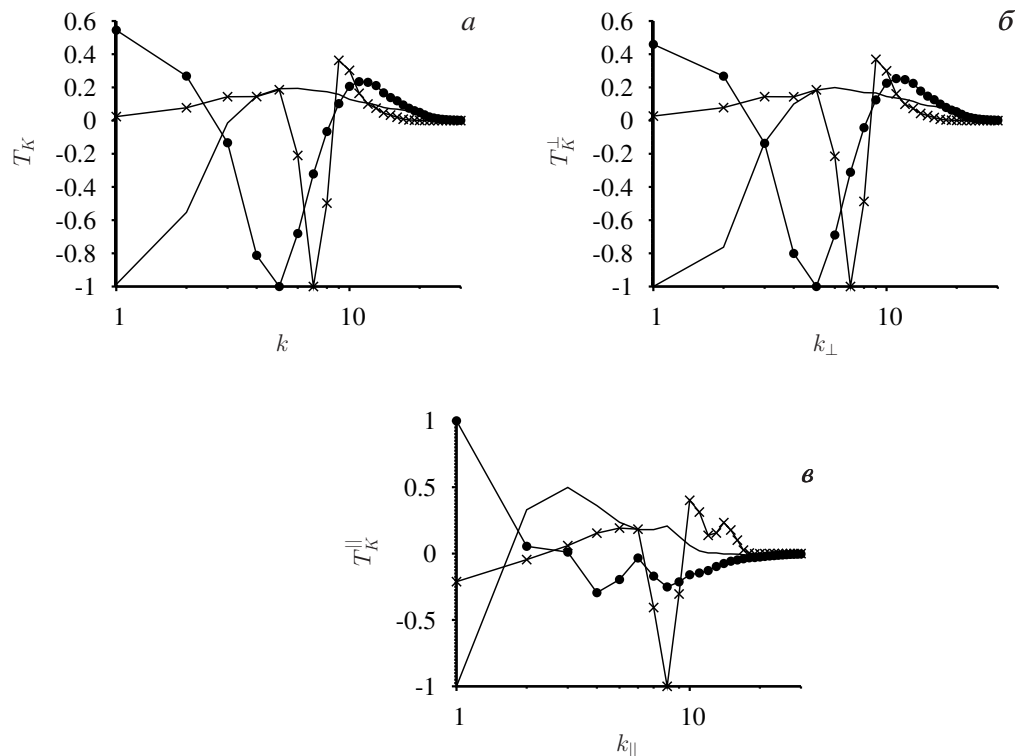


Рис. 5. Потоки кинетической энергии T_K как функция k (а), k_{\perp} (б) и k_{\parallel} (в) для режимов NR (сплошная линия), $R1$ (крестики) и $R2$ (кружочки). Значения нормированы на величины экстремумов $c_{NR} = 1.5 \cdot 10^{13}$, $c_{R1} = 5.8 \cdot 10^{11}$, $c_{R2} = 2.7 \cdot 10^{13}$ (для а), $c_{NR}^{\perp} = 1.2 \cdot 10^{13}$, $c_{R1}^{\perp} = 5.8 \cdot 10^{11}$, $c_{R2}^{\perp} = 2.6 \cdot 10^{13}$ (для б), $c_{NR}^{\parallel} = 2.9 \cdot 10^{12}$, $c_{R1}^{\parallel} = 8.3 \cdot 10^9$, $c_{R2}^{\parallel} = 2.5 \cdot 10^{12}$ (для в)

Для оценки эффектов анизотропии представим поток T_K в виде суммы поперечного T_K^{\perp} и продольного T_K^{\parallel} потоков, где в выражении (6) при суммировании по индексу j брались значения 1...2 и 3, соответственно, и $i = 1, 2, 3$ для обоих потоков. Для режима NR качественно поведение потоков T_K^{\perp} и T_K^{\parallel} одинаково. Оценим анизотропию потоков через отношение амплитуд потоков $\mathcal{A} = \frac{c^{\perp}}{2c^{\parallel}}$. Тогда для режима NR $\mathcal{A}_{NR} \sim 2$. Для двух других рассмотренных случаев $\mathcal{A}_{R1} \sim 35$ и $\mathcal{A}_{R2} \sim 5$. Очевидно, что при ярко выраженном состоянии геострофии ($R1$) потоки энергии вдоль оси z блокируются. Также из графика видно, что при увеличении Ra исчезает минимум для T_K^{\parallel} ; последнее связано с дроблением циклонов по направлению z . В то же время, горизонтальный масштаб $1/k_c$ по-прежнему остается энергонесущим (см. рис. 5,б).

Локальность потока энергии

Перейдем к вопросу о структуре триадных взаимодействий. На рис. 6 представлена диаграмма антисимметричных относительно диагонали $K = Q$ потоков T_2 для рассмотренных выше режимов.

В целом картина напоминает результаты с вынужденной силой в работе [Alexakis, Mininni, Pouquet, 2007]: гармоники с $K > Q$ отбирают энергию у гармоник с $K < Q$ (прямой каскад энергии). Максимум потока приходится на близкие к диагонали гармоники с $K \sim Q$, т.е. присутствует локальный перенос энергии.

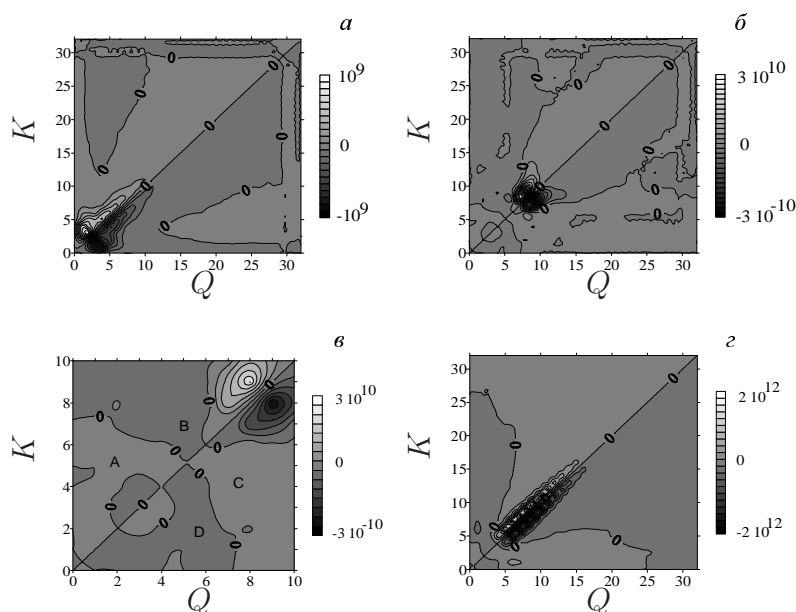


Рис. 6. Поток кинетической энергии $T_2(k)$ для режимов NR (а), R1 (б, в), R2 (г)

Обратим внимание на существование областей (например, $Q = 5, K = 20$), для которых наблюдается и нелокальный обратный каскад энергии (см. обсуждение во введении), интегрально же картина близка к идеализированному колмогоровскому сценарию. Удобно представить диаграмму, приведенную на рис. 6, в виде интеграла по Q и K как функцию $K - Q$ (рис. 7). Рисунок отчетливо демонстрирует наличие прямого каскада, а также локального взаимодействия и локального переноса энергии.

Вращение меняет поведение T_2 для $k < k_c$, оставляя его практически без изменения для высокочастотной области $k > k_c$. Рассмотрим появившиеся изменения более подробно. Положение абсолютных максимумов (минимумов) приходится на область, близкую к k_c , т.е. энергия передается в область больших k от лидирующей моды. С другой стороны, для $k < k_c$ наблюдается резкое уменьшение потока энергии, что соответствует приближению системы к статистическому равновесию, аналогично представленному на рис. 5. В увеличенном варианте (см. рис. 6,в) наблюдается более тонкая структура для малых k : область A с прямым каскадом энергии и с равновероятным ее переносом как от малых $Q \sim K$, так и от сравнительно больших $Q \sim 4K$. Область B с обратным каскадом энергии (и также, как и у области A, небольшой амплитудой потока энергии порядка 1/10 от абсолютного максимума) имеет протяженную полосообразную форму от $Q \sim K$ до $Q \sim 10K$. На рис. 7,б это соответствует появлению небольшого отрицательного минимума для $K > Q^3$.

Увеличение Ra (режим R2) приводит к смещению области с обратным каскадом энергии в направлении малых Q и $K > Q$. Данный режим характеризуется более длинным интервалом в области $k > k_c$ с локальным переносом энергии и прямым каскадом. Относительный вклад области с обратным каскадом становится меньше (рис. 7,в). В то же время этот вклад переносится на крупномасштабную область $k \ll k_c$, что может быть

³ Мы не комментируем поведение кривой для $K < Q$ (области C и D), поскольку данная зависимость антисимметрична.

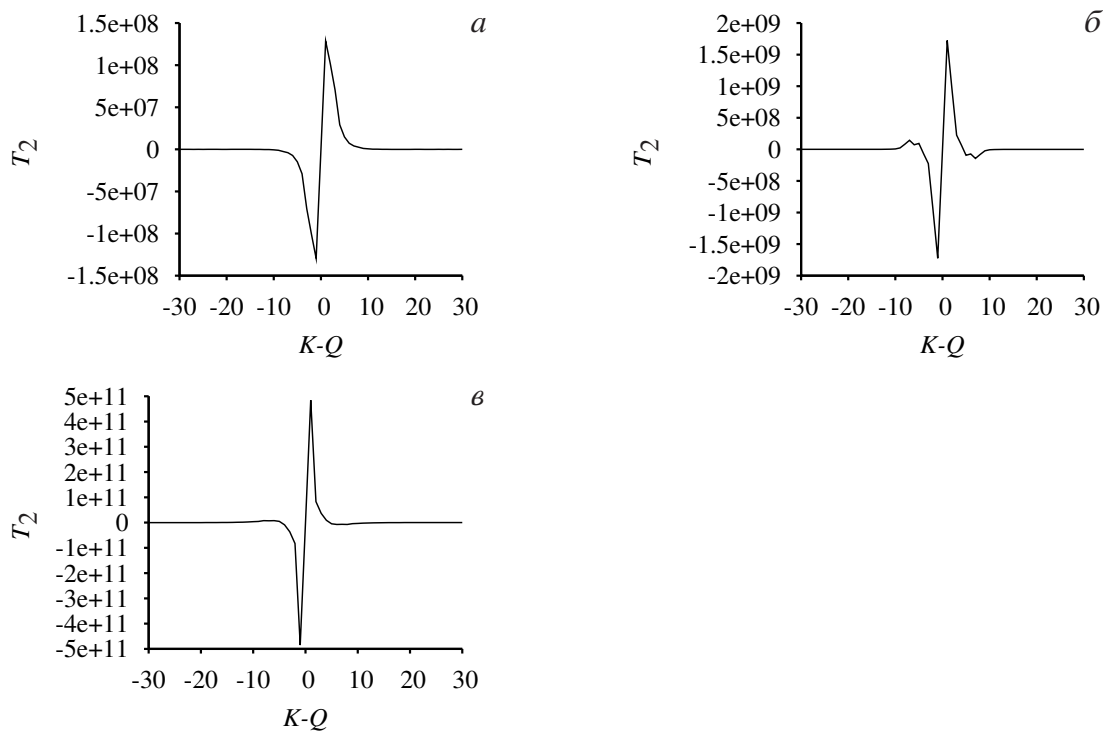


Рис. 7. Поток кинетической энергии $T_2(K - Q)$ для режимов NR (а), $R1$ (б), $R2$ (в)

интересно для задач геодинamo, в которых $k_c \sim 10^5$ и область генерации магнитного поля (при современных оценках магнитного числа Рейнольдса $R_m \sim 10^2 \div 10^3$ область генерации магнитного поля лежит в диапазоне $k \sim 1 \div 10^3$) разнесены как минимум на несколько порядков.

Локальность взаимодействия

Остановимся подробнее на свойствах функции T_3 для рассмотренных выше режимов. По соображениям симметрии мы ожидаем, что $T_3(K, P, Q) = T_3(K, Q, P)$ (это было использовано в построении дискретного аналога оператора). Случай без вращения (рис. 8, а, б) демонстрирует крайне интересный результат: наибольший вклад в поток энергии, приходящийся на гармонику K , исходит от двух источников – от волн с $P \lesssim K, Q \ll P$ и $Q \lesssim K, P \ll Q$.

Другими словами, волновой треугольник является равнобедренным с небольшим углом между равными сторонами (K, P или K, Q). Учитывая тот факт, что согласно рис. 7 энергия передается K от близлежащего меньшего волнового числа, можно прийти к выводу, что третий, малый по амплитуде вектор является катализатором. Участвуя в обменном процессе, эта высокочастотная гармоника сама энергию волне K не дает. Полученный результат не укладывается в классическое представление теории Колмогорова, согласно которой волновой треугольник должен быть равносторонним, т.е. не только перенос энергии является локальным, но и само триадное взаимодействие отвечает этому свойству, что вызвано двумя причинами. Во-первых, учитывая результаты работы [Alexakis, Mininni, Pouquet, 2007], мы связываем это с недостаточной длиной рассматриваемого спектра, поскольку для используемого разрешения для режима NR мы имеем лишь несколько вертикальных плюмов; с другой стороны, – с существованием самих плюмов и, как следствие, анизотропией системы. В этой связи известно, что даже при существенно боль-

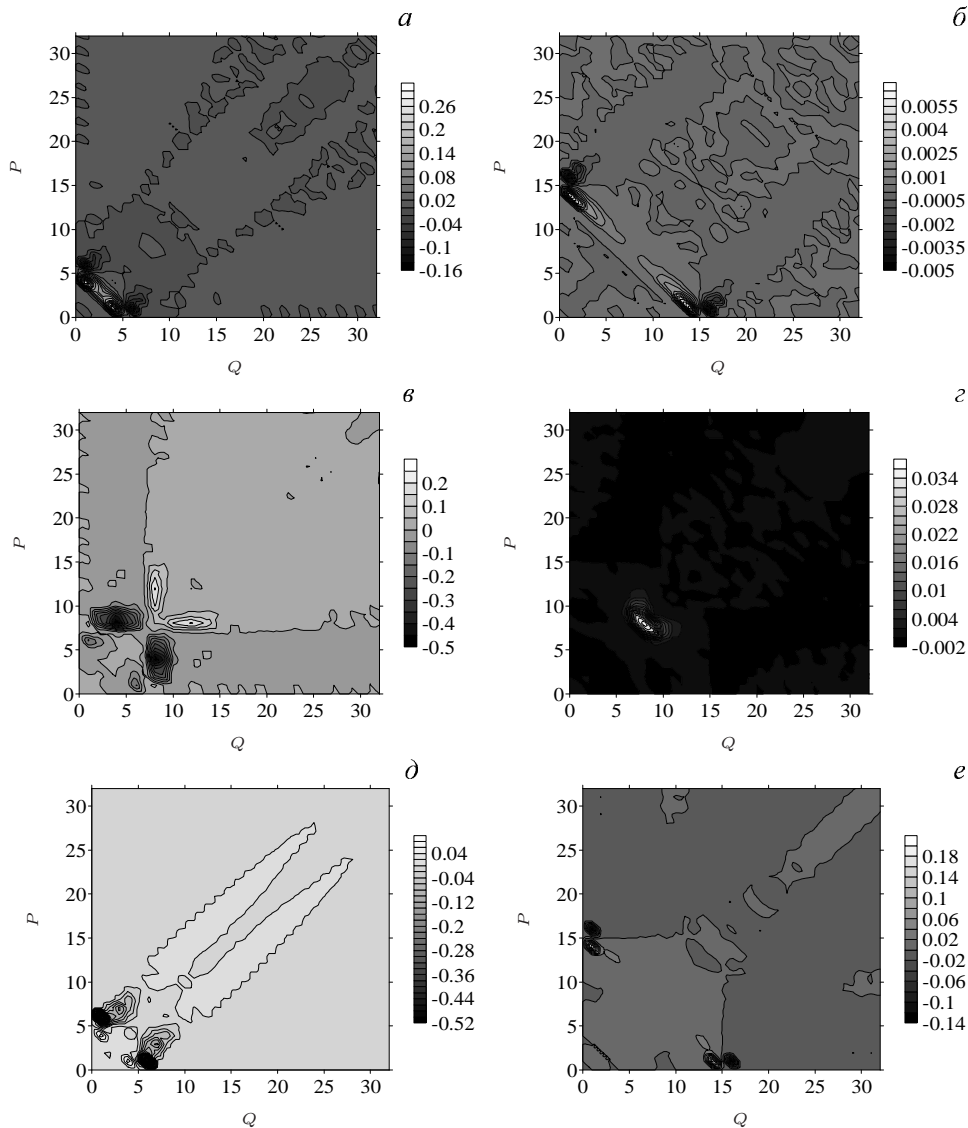


Рис. 8. Амплитуды потоков T_3 для фиксированного k . Режим NR: $k = 5$ (а); $k = 15$ (б); режим R1: $k = 7$ (в); $k = 15$ (з); режим R2: $k = 5$ (д), $k = 15$ (е)

ших числа Рейнольдса в задачах с вынужденной силой, анизотропия течения на малых масштабах оказывается существенной [Zhou, Yeung, 1996]. Наше моделирование свидетельствует, что существует высокая корреляция потоков энергии на малых масштабах с масштабом силы плавучести на большом масштабе. Сказанное хорошо демонстрируется поведением функции $r(K) = \int T_3 \cdot \max(P/Q, Q/P) dP dQ / \int T_3 dP dQ$ ($P, Q > 0$) (рис. 9).

Практически для всех K угол $\alpha(K) = \int f \cdot T_3 dP dQ / \int T_3 dP dQ$ ($f = (P^2 + Q^2 - K^2)/2PQ$) между векторами \mathbf{p} и \mathbf{q} составляет порядка 100° , т.е. моды, участвующие во взаимодействии, близки к ортогональным в волновом пространстве.

Обратимся к случаю с вращением. Структура триад для небольших Ra сильно отличается от режима без вращения. Одна и та же гармоника взаимодействует с целым волновым пакетом: диаграмма имеет крестообразное строение. Последнее возможно за счет

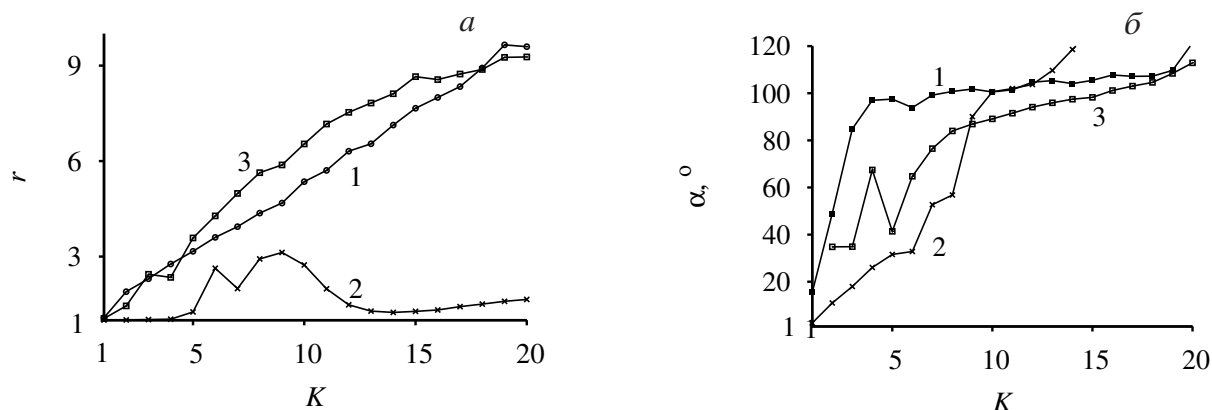


Рис. 9. Зависимость максимума отношений волновых чисел P/Q , Q/P (а) и угла между векторами \mathbf{p} и \mathbf{q} (б), входящих в триадное взаимодействие как функция волнового числа K результирующей гармонике для режимов: NR (1), $R1$ (2), $R2$ (3)

увеличения угла между векторами \mathbf{p} и \mathbf{q} . Обратим внимание, что для небольших K и $P \sim Q$ (см. рис.9). Хорошо прослеживается обратный каскад энергии для небольших K (см. рис.8): гармоника с $K = 7$ получает энергию от волновых чисел с большими номерами, отдавая ее в коротковолновую часть спектра. По мере увеличения K мы снова приближаемся к состоянию, когда $P \sim Q$, а $\alpha \sim 100^\circ$. Но в отличие от случая без вращения, энергия, приходящаяся на волну K , передается от волн с $P \sim Q \approx 0.7K$. Увеличение Ra приводит систему в режим, промежуточный между рассмотренными выше.

Обсуждение и выводы

Остановимся на основных результатах работы. Вращение существенно меняет как морфологию течений в физическом пространстве, так и спектральные свойства системы. При введении вращения характерная картина рэлей–бенаровской конвекции трансформируется в конвекцию циклонического вида. В целом вращение подавляет процесс конвекции за счет усиления диссипации: горизонтальный масштаб циклонов меньше вертикального в $E^{-1/3}$ раз. Более того, вращение приводит к избирательному подавлению движения вдоль оси вращения ($\lambda_{R2} \ll 1$), а также нарушению зеркально-отражательной симметрии системы, выражающемуся в появлении ненулевой средней гидродинамической спиральности $\overline{\mathcal{H}^H} \neq 0$.

В спектральном пространстве при вращении и небольших Ra положение максимумов спектров сильно отличается от k_c . Для мод с $k < k_c$ наблюдается небольшой обратный каскад энергии, взаимодействие становится нелокальным. Можно говорить о состоянии статистического равновесия, когда обмен энергиями между соседними Фурье-модами мал или полностью отсутствует. Для мод с $k > k_c$ каскад энергии становится прямым, однако возможен нелокальный переброс энергии от малых $k \sim k_c$. Сами спектры сильно отличаются для $k < k_c$ и $k > k_c$. Для длинных волн спектр близок к белому шуму, для области больших k спектр убывает.

Рассмотренные выше подходы демонстрируют многообразие взаимодействия отдельных мод в еще достаточно простой с точки зрения полной задачи геодинamo системе без магнитного поля. Использование такого анализа позволит настроить разрабатываемые модели с турбулентными коэффициентами переноса так, чтобы для масштабов, больших масштаба осреднения d_a , значения потоков совпадали с рассмотренными выше в прямом

численном моделировании. Только такое поэтапное сравнение может гарантировать правильность вводимой полуэмпирической модели турбулентности. Нетривиальным является воссоздание обратного каскада энергии, когда $d_c < d_a$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N03-05-64074).

Литература

- Решетняк М.Ю.* Тепловая конвекция и динамо при быстром вращении // *Физика Земли*. 2007. № 8. С.23–32.
- Решетняк М.Ю.* Некоторые свойства циклонической турбулентности в жидком ядре Земли // *Геомагнетизм и Аэрономия*. 2008. Т. 48. № 3. С.416–423.
- Alexakis A., Mininni P.D., Pouquet A.* Shell to shell energy transfer in MHD. I. Steady state turbulence // *Phys. Rev.* 2005. V. E 72 P.046301–046309.
- Alexakis A., Mininni P.D., Pouquet A.* Turbulent cascades, transfer, and scale interactions in magnetohydrodynamics // *New Journal of Physics*. 2007. V. 298. № 9. P. 1–20.
- Batchelor G.K.* *The Theory of Homogeneous Turbulence*. Cambridge: Cambridge University Press. 1953. 197 p.
- Busse F.H.* Thermal instabilities in rapidly rotating systems // *J. Fluid Mech.* 1970. V.44. P.441–460.
- Cattaneo F., Emonet T., Weis N.* On the interaction between convection and magnetic fields // *ApJ*. 2003. V.588. P.1183–1198.
- Chandrasekhar S.* *Hydrodynamics and hydromagnetic stability*. NY.: Dover Publications. Inc. 1981. 654 p.
- Constantin P.* Energy spectrum of quasigeostrophic turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 89. N 18. P.184501–1–184501-4.
- Frisch U.* *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge: Cambridge University Press. 1995. 296 p.
- Gill A. E.* *Atmosphere-ocean dynamics*. NY: Academic Press. 1982. 645 p.
- Hossain M.* Reduction in the dimensionality of turbulence due to a strong rotation // *Phys. Fluids*. 1994. V.6, N 4 P.1077–1080.
- Jones C.A.* Convection-driven geodynamo models // *Phil. Trans. R. Soc. London*. 2000. V.A358. P.873–897.
- Jones C.A., Roberts P.H.* Convection Driven Dynamos in a Rotating Plane Layer // *J. Fluid Mechanics*. 2000. V.404. P.311–343.
- Kraichnan R.H.* Inertial-range spectrum of hydromagnetic turbulence // *Phys. Fluids*. 1965. V.8. P.1385–1387.
- Krause F., Rädler K.-H.* *Mean field magnetohydrodynamics and dynamo theory*. Berlin: Akademie-Verlag. 1980. 271 p.
- Kraichnan R.H., Montgomery D.* Two-dimensional turbulence // *Re p. Prog. Phys.* 1980. V.43. P.547–619.
- McComb W.D.* *The physics of fluid turbulence*. Oxford: Clarendon Press. 1992. 595 p.
- Meneguzzi M., Pouquet A.* Turbulent dynamos driven by convection // *J. Fluid Mech.* 1989. V.205. P.297–318.
- Moffatt H.K.* *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge: Cambridge University Press. 1978. 343 p.

- Orszag S.A. Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries. I. Galerkin (spectral) representations // Stud. Appl. Math. 1971. V.L. № 51. P.293–327.
- Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. NY: Springer-Verlag. 1987. 720 p.
- Reshetnyak M., Steffen B. Shell models in rapidly rotating dynamo systems // Numerical Methods and Programming. 2006. V.7. P. 85-92.
<http://www.srcc.msu.su/num-meth/english/index.html>
- Zhou Y. A phenomenological treatment of rotating turbulence // Phys. Fluids. 1995. V. 7. N8. P.2092–2094.
- Zhou Y., Yeung P.K. Scale disparity and spectral transfer in anisotropic numerical turbulence // Phys. Rev. 1996. V. E 53, P.1261– 1264.

Сведения об авторах

РЕШЕТНЯК Максим Юрьевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник. Институт физики Земли им. О.Ю.Шмидта РАН. 123995, ГСП-5, Москва, Д-242, ул. Большая Грузинская, д. 10. Тел.: (499)254-92-14. E-mail: m.reshetnyak@gmail.com

ANISOTROPY IN GEOSTROPHIC TURBULENCE

M.Yu. Reshetnyak

Schmidt Institute of the Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. The Boussinesq model of the thermal convection in the flat layer is considered. We discuss effects of anisotropy caused with a rapid rotation in the physical and wave spaces. Suppression of the energy transfer with rotation is demonstrated. We study structure of the triangles in the wave spaces when the nonlinear interactions take place. The regimes of the thermal convection considered in the paper are close to that ones in the geodynamo models.

Keywords: liquid core of the Earth, thermal convection, geostrophic balance, cascade processes.