

УДК 550.34.01

## АКТИВНАЯ ЛУЧЕВАЯ СЕЙСМИЧЕСКАЯ ТОМОГРАФИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АДАПТИВНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ СИСТЕМОЙ ВЭЙВЛЕТ-ФУНКЦИЙ

© 2011 г. С. А. Тихоцкий, И. В. Фокин, Д. Ю. Шур

*Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва*

Поступила в редакцию 20.05.2010 г.

В результате настоящего исследования разработан и опробован алгоритм решения обратной кинематической задачи активной лучевой сейсмической томографии, предназначенный для восстановления трехмерных скоростной модели типа “слой на полупространстве”. Алгоритм рассматривает нижнюю границу слоя как сейсмическую границу первого рода (разрыв скорости), положение которой неизвестно и определяется в ходе инверсии одновременно с вариациями скорости в объеме вышележащего слоя и граничными скоростями. Для инверсии могут быть использованы данные о временах пробега рефрагированных, головных и отраженных волн. В основе алгоритма лежит идея адаптивной параметризации среды посредством разложения характеристик модели в разреженный ряд по вэйвлет-функциям Хаара. Для исключения членов разложения, соответствующих плохо обусловленным неизвестным, предлагается использовать совокупность двух эмпирических мер разрешающей способности: числа сейсмических лучей, проходящихся на носитель соответствующей базисной функции, и углового покрытия — разброса азимутов этих лучей. Проведено исследование адекватности предлагаемых мер разрешающей способности, для чего на тестовых примерах значения указанных мер рассчитывались одновременно с матрицей разрешения. В результате их сопоставления показано, что предлагаемые меры действительно могут быть использованы для статистической оценки разрешающей способности и отбраковки плохо обусловленных неизвестных, а также что наилучшие результаты достигаются при одновременном использовании числа лучей, нормированного на размер носителя базисной функции, и углового покрытия. Разработан алгоритм отбраковки неизвестных, параметры которого позволяют изменять детальность восстанавливаемой модели. Результаты опробования алгоритма на синтетическом модельном примере “шахматного” типа демонстрируют его эффективность. Алгоритм может быть использован при решении широкого круга задач активным сейсмическим методом, включая региональные сейсмические исследования, разведочные и инженерно-геофизические исследования. Применение данного метода наиболее оправдано в тех случаях, когда имеет значение трехмерная неоднородность среды, и когда применение традиционных сейсмических методов, требующих расположения регулярной системы наблюдений непосредственно над изучаемой структурой (таких, как метод ОГТ), невозможно: в частности, при сейсмическом просвечивании оснований зданий и сооружений и в условиях пересеченной местности.

### ВВЕДЕНИЕ

Активная лучевая сейсмическая томография является одним из основных методов изучения внутреннего строения Земли в различных масштабах: от региональных сейсмических экспериментов [Zelt, Barton, 1996; Evangelidis et al., 2004], до локальных инженерно-геофизических исследований [Yordkayhun et al., 2007; Schijns et al., 2009]. Несмотря на то, что волновое поле содержит несравнимо больше информации, чем используемые в лучевой томографии времена пробега сейсмических волн, инверсия волновых форм пока еще не в состоянии вытеснить лучевые методы. Это связано с несравненно большими трудностями как принципиального, так и вычислительного характера, которые, в частности, делают результат инверсии волновых форм кардинальным образом зависящим от правильности выбора модели начального приближения [Pratt, 1999]. Важнейшим средством создания таких моделей остается лучевая

сейсмическая томография. Поэтому развитие методов лучевой томографии по сей день является актуальной задачей, над которой активно работают научные коллективы всего мира. Ежегодно публикуются многочисленные исследования, посвященные применению этих методов к изучению различных геоструктур [Vermeesch et al., 2009; Evain et al., 2010 и др.].

В обзорной работе [Яновская, 1997] обозначены ряд ключевых проблем лучевой сейсмической томографии, большинство из которых не решены до настоящего времени. В качестве основной трудности указывается на необходимость привлекать очень большой объем данных, что приводит к затратам оперативной памяти ЭВМ и времени, необходимого для проведения вычислений. Несмотря на то, что за прошедшие 13 лет возможности вычислительной техники многократно возросли, указанная проблема остается актуальной, поскольку одновременно возросли и объемы данных, получаемые в сейсмиче-

ском эксперименте, а также требования к детальности и качеству результата. Кроме того, геофизическая практика требует, чтобы алгоритм инверсии мог применяться оперативно и зачастую — в полевых условиях (с использованием портативного компьютера), для коррекции методики и геометрии эксперимента. Таким образом проблема оптимизации вычислительных затрат путем создания эффективных алгоритмов и их программных реализаций остается одной из наиболее важных. Другой важной проблемой лучевой сейсмической томографии, также обозначенной в [Яновская, 1997], а также в недавно опубликованной монографии [Nolet, 2008], является оценка разрешающей способности данных и построение адекватных этой разрешающей способности моделей среды. Указанные проблемы в значительной мере взаимосвязаны, поскольку высокие требования к вычислительным мощностям зачастую обусловлены избыточной детальной параметризацией модели, не отвечающей реальной разрешающей способности. Исследование, которому посвящена настоящая работа, направлено, в частности, на поиск решения этих проблем.

Известно, что в реальных сейсмических экспериментах разрешающая способность, определяемая числом независимых сейсмических лучей, а также их направлением, как правило весьма неоднородна в изучаемом объеме. В ходе инверсии желательна получать информацию о распределении сейсмических скоростей с максимально возможной детальностью, что на практике означает выбор аппроксимирующей системы узлов (“сетки”) с достаточно малым расстоянием между узлами (“шагом сетки”). Если при этом шаг сетки постоянен во всем объеме модели, а реальная разрешающая способность меняется, то в областях плохо освещенных сейсмическими лучами весьма вероятно возникновение артефактов: ложных аномалий скорости, не обусловленных данными. Кроме того, с вычислительной точки зрения обратная задача становится зачастую переопределенной и во всяком случае — плохо обусловленной, что требует применения специальных численных методов ее решения.

Наиболее распространенным подходом к решению таких задач является использование регуляризации [Тихонов, Арсенин, 1986], в качестве регуляризирующего функционала, как правило, используется мера гладкости искомого распределения скорости (напр., [Hobro et al., 2003]). Регуляризация с использованием меры гладкости успешно подавляет возникновение осцилляций скорости, не подкрепленных данными, и улучшает обусловленность систем уравнений, однако обладает рядом недостатков. Во-первых, требование гладкости одновременно применяется ко всем частям модели, независимо от разрешающей способности, а, следовательно, дополнительно сглаживается, и решение в хорошо освещенных лучами областях, что не позволяет по-

лучить здесь модели с максимально возможной степенью детальности. Во-вторых, число неизвестных остается неизменным и заведомо избыточным (поскольку в плохо разрешенных областях модели число узлов детальной сетки избыточно), а число уравнений входящих в систему увеличивается за счет дополнительных условий на гладкость (на утроенное число узлов для трехмерной модели). Это выдвигает еще более высокие требования к объему оперативной памяти и вычислительной мощности компьютера и дополнительно увеличивает время счета.

Альтернативный подход состоит в использовании неоднородной параметризации среды, согласованной с локальной разрешающей способностью. В настоящей работе предложен алгоритм, основанный на принципе разложения представленного на “базовой” сетке скоростного поля в разреженный ряд по системе вэйвлет-функций. При использовании семейства вэйвлетов Хаара наш подход оказывается эквивалентен построению неоднородной аппроксимации путем укрупнения ячеек базовой сетки в плохо освещенных сейсмическими лучами областях, однако обладает значительными алгоритмическими преимуществами. К настоящему времени вэйвлет-разложение широко применяется в самых разных областях, включая решение обратных задач и, в частности, в медицинской томографии [Rantala et al., 2006]. Однако примеры применения вэйвлет-разложения для решения обратных задач сейсмической томографии до настоящего времени ограничивались отдельными работами, посвященными двумерной томографии поверхности ядра-мантии [Chiao, Kuo, 2001] и пассивной локальной сейсмотомографии [Chiao, Liang, 2003]. Как отмечено в недавно опубликованной фундаментальной монографии одного из основателей и ведущих мировых специалистов в области сейсмической томографии Густава Ноле [Nolet, 2008], создание “многомасштабных” (т.е., с неоднородной разрешающей способностью, адаптированной к возможностям конкретного набора данных) алгоритмов на основе вэйвлет-разложения должно стать предметом исследований в ближайшие годы.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе рассмотрен алгоритм, осуществляющий решение обратной задачи активной лучевой сейсмической томографии в рамках трехмерной модели среды вида слой на полупространстве. Верхняя граница слоя задана и ее положение не изменяется в процессе инверсии. Определяемыми параметрами являются: объемные вариации скорости сейсмических волн в слое, положение нижней границы слоя, а также граничные скорости (т.е. скорости распространения головных волн в нижнем полупространстве вдоль границы слоя). Для инверсии используются данные о вступлениях трех типов волн: (а) волн, рефрагированных в слое,

(б) головных волн, распространяющихся в нижнем полупространстве вдоль границы слоя и (в) волн, однократно отраженных от нижней границы слоя.

Такой алгоритм является основным блоком для определения строения среды в рамках слоистой модели (с параметризацией границ в виде однозначных функций горизонтальных координат) на основе принципа “снятия слоев”. Принцип снятия слоев состоит в последовательном определении скоростей и положения границ в слоях начиная с верхнего. При определении структуры каждого последующего слоя строение вышележащей части среды считается заданным. Такой подход в настоящее время является наиболее распространенным в тех немногочисленных алгоритмах трехмерной активной лучевой сейсмотомографии, которые в явной форме включают представление о границах раздела слоев, как о разрывах скорости (сейсмических границах первого рода) (напр., [Hobro et al., 2003]). Несмотря на очевидные алгоритмические преимущества принцип снятия слоев имеет и ряд недостатков, среди которых необходимо отметить два основных. Во-первых, для его успешного применения необходима правильная идентификация фаз на сейсмограммах и их отнесение к соответствующим типам волн и порождающим их слоям и границам, что при сложном строении среды представляет нетривиальную задачу. Во-вторых, в рамках принципа снятия слоев волны, проникающие в подстилающее слой полупространство, считаются головными, т.е. распространяющимися вдоль границы слоев. Преломленно-рефрагированные волны при этом, в лучшем случае, исключаются из рассмотрения на данном этапе, либо ошибочно идентифицируются как головные, что может вести к искажениям результатов инверсии. Для преодоления указанной трудности нами был разработан специальный алгоритм трассировки сейсмических лучей, автоматически классифицирующий их по типам волн, тем не менее результаты классификации зависят от вертикального градиента скорости в нижнем полупространстве, который задается *a priori*. Поэтому следует помнить, что корректность результата весьма чувствительна к правильному выбору модели начального приближения. На практике мы предпочитаем исключать из рассмотрения те проникающие в нижнее полупространство лучи, для которых имеются сомнения в правильности идентификации фаз на сейсмограммах, либо в корректности отнесения соответствующего луча к головной волне. Данный процесс может быть автоматизирован путем задания допусков на близость точки преломления к критической.

Одновременно рассматриваемый алгоритм может быть без какой-либо модификации использован для осуществления инверсии в рамках традиционной параметризации среды в терминах объемных вариаций скорости без явного задания положения границ как разрывов скорости. При этом все волны

трактуются как рефрагированные, а положение границ параметризуется при помощи зон высокого вертикального градиента скорости. На этом принципе основано большинство ныне применяемых трехмерных алгоритмов активной лучевой сейсмической томографии [Дитмар, 1993; Hole, 1992; Zelt, Barton, 1996; Jordan, 2003]. Недостатком указанного подхода является его частое несоответствие геологической реальности и приближенное описание строения среды, преимуществом – отсутствие каких-либо сложностей с идентификацией фаз и классификацией сейсмических лучей. На практике полезно при изучении конкретных структур использовать оба подхода: принцип “снятия слоев” и параметризацию без явного задания сейсмических границ. Общие черты строения среды, выявленные с использованием этих двух подходов, следует считать наиболее достоверными.

Отметим, что наиболее последовательный подход состоит в аппроксимации среды как совокупности слоев с неизвестным положением набора отражающих и преломляющих границ и одновременной инверсии всех зарегистрированных вступлений, включая те, что соответствуют лучам, проходящим через несколько слоев и испытывающим преломление на совокупности границ. Однако практическая реализация такого алгоритма в трехмерном случае наталкивается на сложности принципиального и вычислительного характера. Первые связаны с существенной нелинейностью зависимости времен пробега от положения границ и приграничных скоростей, определяющих величины углов преломления и тип взаимодействия волны с границей (докритическое или закритическое преломление). Уже в случае одной сейсмической границы первого рода ее восстановление (при неизвестном распределении скоростей) представляет сложную задачу. С увеличением числа границ успех инверсии критически зависит от правильного выбора модели начального приближения и простейшая горизонтально-слоистая модель оказывается недостаточной. В двумерном случае описанные сложности могут быть преодолены при помощи полу-интерактивного режима интерпретации, при котором положение границ раздела коррелируется интерпретатором на основе геологических представлений и имеющегося опыта, а автоматически определяются вариации скорости в пределах блоков среды [Zelt, Smith, 1992]. В трехмерном случае алгоритмом, который принципиально допускает параметризацию среды как совокупности слоев с произвольными границами является алгоритм JIVE [Hobro et al., 2003], однако демонстрация его возможностей на модельных данных приведена только для случая “слой на полупространстве”, а при его практическом использовании для изучения многослойных структур используют принцип снятия слоев [Evangelidis et al., 2004]. Таким образом, проблема создания полноценного алгоритма трехмерной инверсии данных активной сейсмической томогра-

фии для многослойных сред с границами первого рода остается открытой. По всей видимости, к ее решению разумно приступать одновременно с переходом от использования лучевого приближения к моделированию в рамках представления о конечной частоте сейсмических волн.

### АДАПТИВНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ СРЕДЫ

Условимся называть *оптимальной параметризацией* изучаемой среды ее описание такой совокупностью параметров, что (а) все эти параметры могут быть определены из решения обратной задачи (по заданному набору данных и с учетом имеющейся априорной информации) единственным образом, устойчиво и с допустимой, по условиям задачи, погрешностью; и одновременно (б) в результате решения обратной задачи осуществляется наиболее полное извлечение из данных геологически содержательной информации. Из условия (а) в частности следует, что указанная совокупность параметров составляет множество корректности [Тихонов, Арсенин, 1979]. Для некорректных линейных обратных задач вида  $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{d}$ , где  $\mathbf{p}$  — вектор (искомых) параметров модели,  $\mathbf{A}$  — оператор прямой задачи, соответствующий этому набору параметров и вектору данных  $\mathbf{d}$ , указанное условие может определяться близостью так называемого разрешающего оператора  $\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{A}$  к единичному;  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$  — псевдообратный оператор, возникающий как следствие применения того или иного метода регуляризации и обычно не вычисляемый в явном виде [напр., Жданов, 2007; Nolet, 2008]. Отметим, что в общем случае возможно описать среду таким (как правило — небольшим) объемом параметров, что все они могут быть определены единственным образом и независимо, а соответствующая обратная задача оказывается условно-корректной по Тихонову и без применения каких-либо методов регуляризации. Однако такая параметризация обычно оказывается геологически малосодержательной: полученные значения параметров практически не изменяют априорные представления о строении среды, а потому не является оптимальной в смысле данного выше определения.

Задачи сейсмической томографии являются нелинейными и, в общем случае, — некорректно поставленными. Одновременно, практически все алгоритмы их решения [Zelt, Smith, 1992; Дитмар, 1993; Hobro et al., 2003; Jordan, 2003] основаны на принципе линейаризации: в серии последовательных итераций решается линейная обратная задача вида

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{p}^{(i)} = \delta\mathbf{t}^{(i-1)}, \quad (1)$$

где  $\delta\mathbf{p}^{(i)}$  — малое изменение параметров относительно модели  $\mathbf{p}^{(i-1)}$ , определенной на предыдущей итерации;  $\delta\mathbf{t}^{(i-1)} = \mathbf{t}^{(obs)} - \mathbf{t}^{(i-1)}$  — отклонение наблюдаемых времен пробега сейсмических волн  $\mathbf{t}^{(obs)}$  от

вычисленных  $\mathbf{t}^{(i-1)}$  для модели, полученной на предыдущей итерации. Возможность линейаризации основана на принципе Ферма, согласно которому первая вариация времени пробега вдоль сейсмического луча определяется вариацией скорости вдоль траектории луча, построенной для модели начального приближения [см. Яновская, 1997; Nolet, 2008]. При этом задача (1) в общем случае также некорректно поставлена.

Под *адаптивной параметризацией* среды в задачах сейсмической томографии будем понимать ее описание (на каждой итерации) подмножеством параметров  $\mu$ , из заданного класса  $M$ , количество и конкретный набор которых определяются алгоритмически на основании анализа имеющихся данных, таким образом, чтобы возникающая обратная задача (1) была оптимально параметризована, как определено выше.

Следовательно, задача построения адаптивной параметризации среды сводится к выбору класса параметров  $M$  и алгоритма определения подмножества  $\mu \subseteq M$ . Класс  $M$  должен обладать следующими свойствами: (а) быть полным, т.е. обеспечивать воспроизведение строения среды с заданной точностью и детальностью, и (б) предоставлять возможность варьировать детальность описания в зависимости от локальной разрешающей способности.

Традиционные описания строения среды при помощи регулярных сеток (ячеек) либо совокупностью ортогональных полиномов перечисленным требованиям не удовлетворяют, так как позволяют варьировать детальность описания только глобально, т.е. для всего объема модели одновременно. Поэтому получили распространение алгоритмы, основанные на описании строения среды нерегулярными сетками, детальность которых изменяется в объеме по заданному правилу. Один из первых алгоритмов, работающих по этому принципу, описан в работе [Abers, Roser, 1991], где было предложено в интерактивном режиме укрупнять плохо освещенные сейсмическими лучами ячейки путем их объединения в “макроячейки”. В работе [Spakman, Bijwaard, 2001] предложен аналогичный, но уже автоматический алгоритм, который укрупняет ячейки на основе анализа произвольной скалярной функции, в частности — плотности сейсмических лучей. В работах [Кулаков, 2008; Kulakov et al., 1995 и др.] развивается подход, основанный на параметризации скорости ее значениями в узлах нерегулярной сети, густота которых пропорциональна плотности сейсмических лучей в данной области. Исследуемый объем при этом разбивается на систему тетраэдрических ячеек, скорость в которых определяется путем линейной интерполяции между узлами, составляющими вершины ячейки. В работе [Sambridge, Gudmundsson, 1998] описан алгоритм, в котором иррегулярная аппроксимация среды строится на основе тетраэдрической решетки, дальнейшее развитие эта идея получила в рабо-

тах [Sambridge, Faletti, 2003], а также [Zhang, Thurber, 2005], где для определения оптимальных параметров аппроксимации используется принцип диаграмм Вороного. Преимущество не прямоугольных сеток состоит в их большей гибкости, недостаток — в необходимости использовать специальные методы трассирования сейсмических лучей.

В настоящей работе предлагается для достижения той же цели использовать описание среды при помощи разложения по системе вэйвлет-функций, в частности — вэйвлетов Хаара. Как будет продемонстрировано ниже, этот метод эквивалентен использованию нерегулярной аппроксимирующей конструкции, однако более удобен и эффективен в алгоритмическом отношении. Рассмотрим, в качестве примера, разложение вариации глубины сейсмической границы  $dz(i, j)$ , где  $i, j$  — индексы ячеек равномерной сетки в направлениях осей  $X$  и  $Y$  соответственно. Размер ячейки базовой сетки  $dx \times dy$  определяет максимальную разрешающую способность (детальность) модели и должен выбираться исходя из известных ограничений лучевого метода: размер ячейки не может быть меньше размера зоны Френеля при используемых частотах зондирующего импульса. В качестве более точной оценки минимально возможного размера ячейки можно использовать [Nolet, 2008]:

$$D_{min} = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda L}, \quad (2)$$

где  $\lambda$  — доминирующая длина волны в сейсмическом сигнале,  $L$  — максимальная длина сейсмического луча. Кроме того, ограничения на минимальный размер ячейки могут налагаться исходя из представлений о характерных размерах изучаемой неоднородности и параметров конфигурации источников и приемников.

Разложение по системе вэйвлет-функций Хаара имеет вид:

$$dz(i, j) = c_0 + \sum_{l=1}^J \sum_{m,n=0}^{2^{l-1}-1} \sum_{k=1}^3 c_{l,m,n}^k \Psi_{l,m,n}^k(i, j), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{l,m,n}^k(i, j) &= \\ &= 2^{-l} \tilde{\Psi}^{(k)}(\lfloor (i-1)/2^{l-1} \rfloor - 2m, \lfloor (j-1)/2^{l-1} \rfloor - 2n), \quad (4) \\ i, j &= 1, \dots, N = 2^J \end{aligned}$$

где  $\lfloor x \rfloor$  обозначает целую часть  $x$ , “материнские” функции, определяющие построение базиса Хаара:

$$\tilde{\Psi}^{(1)}(p, q) = \begin{cases} 1/4, & q = 1, \quad p = 0, 1, \\ -1/4, & q = 0, \quad p = 0, 1, \\ 0, & q, \quad p \neq 0, 1; \end{cases} \quad (5)$$

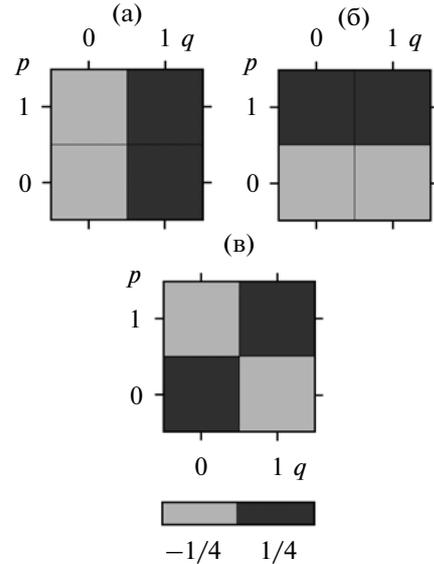


Рис. 1. Материнские вэйвлет-функции Хаара (см. уравнение (7)): (а)  $k = 1$ ; (б)  $k = 2$ ; (в)  $k = 3$ .

$$\tilde{\Psi}^{(2)}(p, q) = \begin{cases} 1/4, & p = 1, \quad q = 0, 1, \\ -1/4, & p = 0, \quad q = 0, 1, \\ 0, & q, \quad p \neq 0, 1; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\Psi}^{(3)}(p, q) = \\ &= \begin{cases} 1/4, & q = 0, \quad p = 0 \text{ или } q = 1, p = 1, \\ -1/4, & q = 0, \quad p = 1 \text{ или } q = 1, p = 0, \\ 0, & q, \quad p \neq 0, 1. \end{cases} \quad (7) \end{aligned}$$

Вид материнских функций (5)–(7) представлен на рис. 1. Индексы  $m$  и  $n$  в формуле (4) определяют сдвиг базисной функции (“вэйвлета Хаара”) в направлении, задаваемым индексами  $i$  и  $j$  соответственно. Индекс  $l$  соответствует масштабу вэйвлета: чем больше  $l$ , тем больше размер носителя базисной функции. Вэйвлеты с  $l = J$  имеют ненулевые значения во всех ячейках сетки, с  $l = J - 1$  — в 1/4 части ячеек,  $l = J - 2$  — в 1/16 части и т.д.; вэйвлеты с  $l = 1$  имеют ненулевые значения на 4 ячейках сетки, и, благодаря форме базисных функций (см. (5)–(7) и рис. 1) позволяют аппроксимировать детали модели вплоть до единичной ячейки. Подробное обсуждение вэйвлет-базиса Хаара дано, например, в [Mallat, 1989; Stolz, 1995].

Аналогичным образом разложение (3) используется и для представления вариаций медленности в объеме слоя  $ds_u(x, y, z)$  и в приграничной области нижележащего полупространства  $ds_l(x, y)$ . Обобщение двумерного разложения по системе вэйвлет-функций Хаара на трехмерный случай тривиально, однако в описываемом алгоритме инверсии трехмерные вариации скорости в объеме верхнего слоя представлены в виде совокупности горизонталь-

ных слоев, в каждом из которых вариация медленности представлена в виде двумерного разложения по функциям Хаара (3). Такой способ аппроксимации был выбран, поскольку позволяет более гибко регулировать степень гладкости и детальности модели отдельно в горизонтальном и вертикальном направлениях, что отвечает обычно имеющему месту различию разрешающей способности по горизонтали и вертикали.

Эффективность представления (3) для решения задачи адаптивной аппроксимации определяется тем, что вэйвлет-разложение позволяет одновременно выделять в изучаемой функции как компоненты с различной частотой (неоднородности с различным характерным размером), так и с различной локализацией в пространстве. При этом, в отличие от традиционных представлений в виде ряда Фурье по тригонометрическим функциям, различные части изучаемого объема могут быть аппроксимированы с разной детальностью: для тех  $m$  и  $n$ , которые соответствуют областям, требующим детальной аппроксимации, в (3) сохраняются слагаемые со всеми  $l$ , а в прочих элементах объема — только слагаемые с  $l > l_0$ , где  $l_0$  определяет максимальную детальность аппроксимации для данной области. Иначе говоря, вэйвлет-разложение функции неоднородного частотного состава может быть сделано разреженным за счет приравнивания к нулю тех коэффициентов  $c_{l,m,n}^k$  в сумме (3), которые соответствуют вэйвлет-функциям размер носителя которых (определяемый порядком  $l$ ) меньше, чем установленная для данного положения носителя (определяемого коэффициентами  $m$  и  $n$ ) детальность представления искомой функции. На этом принципе основано широкое применение вэйвлетов для сжатия изображений: в зависимости от наличия деталей в том или ином участке изображения для его представления требуются вэйвлет-функции разного порядка  $l$ , поэтому изображение, сочетающее участки высокой и низкой детальности, может быть практически без потери информации представлено сокращенным набором коэффициентов его вэйвлет-разложения. Аналогичным образом вэйвлет-разложение может быть использовано и для неоднородной по степени детальности (адаптивной) аппроксимации среды при решении обратной задачи, при этом в качестве функции, определяющей требуемую степень детальности аппроксимации должна выступать какая-либо оценка локальной разрешающей способности данных.

Как упомянуто выше, адекватной оценкой разрешающей способности могут служить величины диагональных элементов разрешающего оператора  $\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{A}$ : чем ближе  $r_{ii}$  к единице, тем более достоверно определяется из решения обратной задачи значение неизвестного  $p_j$ . Если  $\mathbf{R} = \mathbf{E}$ , то решение единственно и все неизвестные полностью разре-

шены [Яновская, 1997]. При параметризации среды при помощи вэйвлет-разложения (3) неизвестными являются значения коэффициентов  $c_{l,m,n}^k$ , каждому из которых соответствует определенный размер и положение носителя вэйвлет-функции  $\psi_{l,m,n}^k$ . Таким образом, величины диагональных элементов  $\mathbf{R}$  могут служить оценкой разрешающей способности в соответствующей области. Тогда алгоритм адаптивной параметризации может состоять в вычислении  $\mathbf{R}$  и исключении из суммы (3) тех слагаемых, для которых соответствующие  $r_{ii}$  меньше заданного порога. Отметим, что при исключении части слагаемых из (3) значения прочих элементов  $r_{ii}$  также изменятся, поэтому в идеале процедуру перепараметризации и вычисления  $\mathbf{R}$  следует повторять несколько раз, до тех пор, пока все диагональные элементы  $r_{ii}$  не станут достаточно велики и приблизительно равны между собой, что означает, что все неизвестные восстанавливаются с близкими погрешностями.

К сожалению, описанная процедура наталкивается на сложности вычислительного характера. На практике, для решения обратной задачи выполняется минимизация функционала:

$$\Phi_{\alpha}[p] = \|\mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{d}\| + \alpha\Omega[p], \quad (8)$$

где  $\Omega[p]$  — регуляризатор, вид которого определяется априорной информацией и требованиями к свойствам модели [Тихонов, Арсенин, 1979]. Вычисление псевдообратного оператора, соответствующего условию  $\min_p \Phi_{\alpha}[p]$  в явной форме нестабильно и требует больших вычислительных ресурсов, поэтому минимизация (8), как правило, выполняется численными итеративными методами [Paige, Saunders, 1982], которые являются устойчивыми и одновременно эффективными в вычислительном плане. Для оценки  $\mathbf{R}$  в этом случае могут быть использованы различные приемы, простейший из которых состоит в том, чтобы при помощи того же алгоритма, который используется для минимизации (8) найти решение, соответствующее вектору правой части  $\mathbf{d} = \mathbf{a}_{(j)}$ , где  $\mathbf{a}_{(j)}$  —  $j$ -й столбец матрицы  $\mathbf{A}$ . Найденный вектор решения совпадает с  $j$ -й строкой матрицы  $\mathbf{R}$  [Яновская, 1997]. Таким образом, для того, чтобы вычислить  $\mathbf{R}$  необходимо найти  $\min_p \Phi_{\alpha}[p]$   $N$  раз, где  $N$  — число неизвестных. В трехмерных задачах сейсмической томографии число неизвестных может составлять порядка нескольких миллионов и более, что делает указанный способ практически неприемлемым. В настоящее время разработаны более совершенные способы оценки разрешающего оператора, наиболее эффективным из которых является алгоритм PROPACK [Larsen, 1998; Zhang, Thurber, 2007], но и он требует на два порядка большего времени рас-

четов по сравнению с необходимым для минимизации (8).

Поэтому остается актуальной проблема построения эмпирического правила оценки локальной разрешающей способности в задачах сейсмической томографии. Наиболее распространенным методом подобного рода является оценка разрешающей способности на основании плотности сейсмических лучей в конкретном объеме среды [Kulakov et al., 1995; Vijwaard et al., 1998 и др.]. Поскольку каждому сейсмическому лучу в задачах сейсмической томографии соответствует одно уравнение, то чем больше число лучей в объеме среды, тем лучше можно определить сейсмические скорости в этом объеме. Однако поскольку в лучевой сейсмике аномалия времени пробега – суть интеграл вдоль траектории луча:

$$\delta t_i = \int_{T_i} ds(x, y)dl, \quad (9)$$

то увеличение числа лучей с близкими параллельными траекториями не приводит к увеличению разрешающей способности: соответствующая аномалия скорости может быть локализована в любом конечном объеме, который пересекают все эти лучи. Поэтому другим важнейшим параметром, характеризующим разрешающую способность, является “угловое покрытие” сейсмических лучей, т.е. степень разброса их направлений в объеме среды. В качестве меры углового покрытия удобно использовать представление о среднеквадратическом разбросе азимута лучей относительно их среднего направления, применяемом в статистике Фишера, которая, в частности, применяется при палеомагнитном анализе [Храмов и др., 1982].

Рассмотрим элемент изучаемой среды, совпадающий с носителем конкретной вэйвлет-функции ( $\text{supp } \psi_{l, m, n}^k$ ). В качестве эмпирических оценок меры разрешающей способности, отвечающей данному объему среды, примем: число сейсмических лучей, пересекающих данный объем –  $N_r(l, m, n)$  и разброс азимутов сейсмических лучей в данном объеме –  $\mathcal{Q}(l, m, n)$ . Для вычисления последней характеристики воспользуемся следующим алгоритмом. Пусть  $\mathbf{f}_j$  – геометрический вектор, начало которого совпадает с точкой “входа”  $j$ -го сейсмического луча в объем  $\text{supp } \psi_{l, m, n}^k$ , конец – с точкой, где луч покидает носитель. Пусть  $a_j, b_j, c_j$  – направляющие косинусы  $\mathbf{f}_j$ . Тогда разброс азимутов определяется как:

$$\mathcal{Q}(l, m, n) = \arccos\left(\frac{R}{n_r}\right), \quad (10)$$

где

$$R = \sqrt{\left(\sum_1^{N_r} a_j\right)^2 + \left(\sum_1^{N_r} b_j\right)^2 + \left(\sum_1^{N_r} c_j\right)^2}. \quad (11)$$

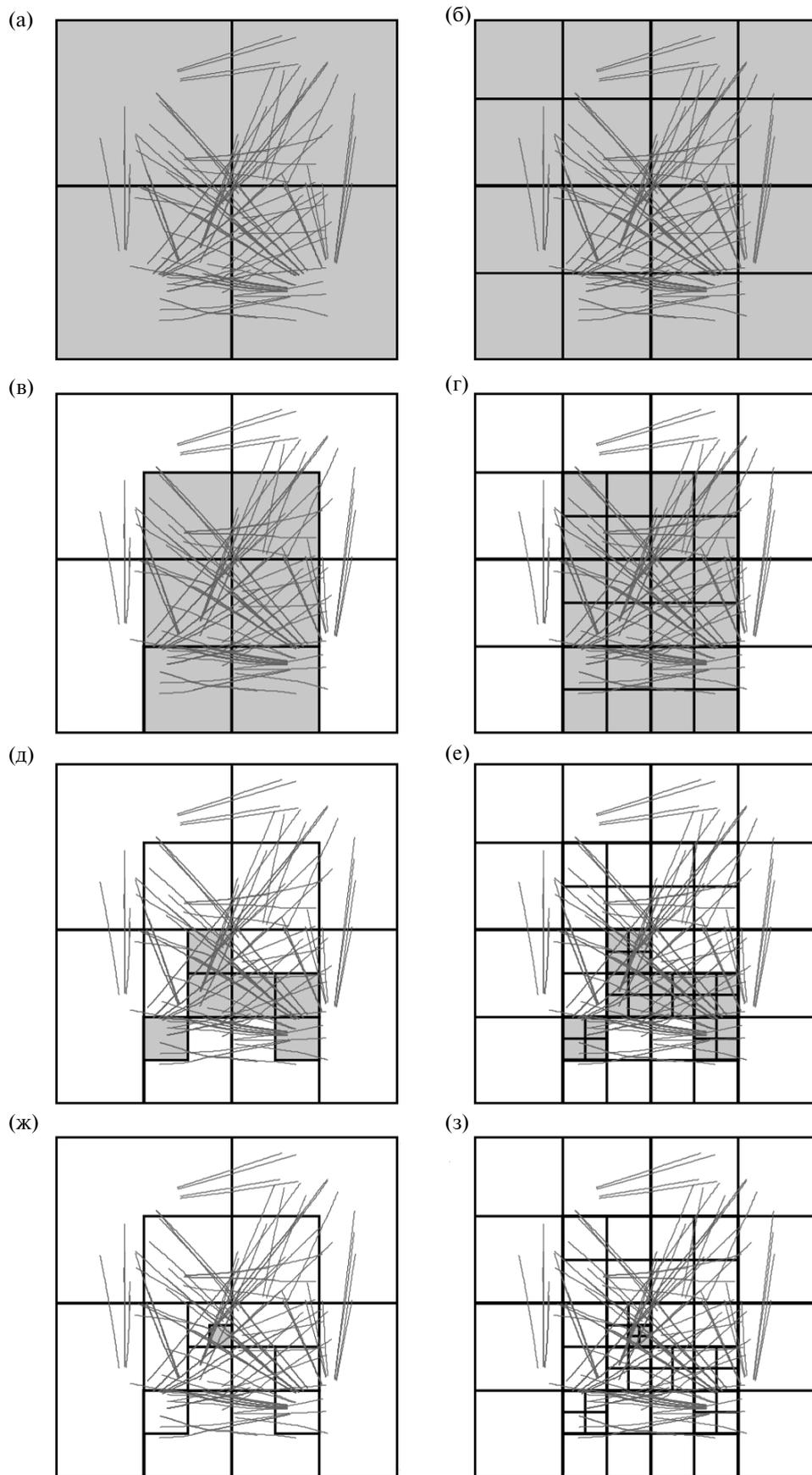
Разброс азимутов  $\mathcal{Q}(l, m, n)$  – суть величина телесного угла, являющаяся эквивалентом среднеквадратического отклонения для скалярной случайной величины.

Тогда простейший алгоритм адаптивной параметризации с использованием вэйвлет-разложения Хаара сводится к следующему: для каждой базисной функции  $\psi_{l, m, n}^k$  вычисляются  $N_r(l, m, n)$  и  $\mathcal{Q}(l, m, n)$ . В случае, когда значения каждой из этих характеристик превосходят заданные пороговые значения  $N_r^{\text{min}}$  и  $\mathcal{Q}^{\text{min}}$ , соответствующие слагаемые (для  $k = 1, 2, 3$ ) входят в (3), а коэффициенты  $c_{l, m, n}^k$  являются неизвестными, определяемыми из решения обратной задачи; в противном случае полагаем  $c_{l, m, n}^k \equiv 0$ . Работу алгоритма иллюстрирует рис. 2, на котором показано последовательное увеличение детальности аппроксимации в зависимости от предложенных оценок разрешающей способности. Рис. 2, в частности, наглядно демонстрирует, что предлагаемый алгоритм адаптивной параметризации принципиально эквивалентен построению неравномерной аппроксимирующей сетки, размер и форма ячеек которой определяются локальной разрешающей способностью данных.

В рассматриваемом алгоритме одновременно со скоростями в объеме среды восстанавливаются и глубины сейсмической границы, которые также параметризуются в виде вэйвлет-разложения (3). Разрешающая способность по глубине границы определяется плотностью точек отражения и преломления сейсмических лучей. Поэтому в качестве меры разрешающей способности для отдельного коэффициента разложения (3) естественно использовать число таких точек, приходящееся на  $\text{supp } \psi_{l, m, n}^k - N_p(l, m, n)$ . Аналогичным образом соответствующие слагаемые включаются в сумму (3), если  $N_p(l, m, n) > N_p^{\text{min}}$ , иначе полагаем  $c_{l, m, n}^k \equiv 0$ .

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ МЕР РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ И ПРОБЛЕМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ АЛГОРИТМА

Работа предлагаемого алгоритма регулируется двумя основными параметрами: пороговыми значениями  $N_r^{\text{min}}$  и  $\mathcal{Q}^{\text{min}}$ . Их увеличение ведет к “заглублению” аппроксимации, уменьшение – к увеличению числа деталей при одновременном снижении достоверности и устойчивости решения. Настройка алгоритма сводится к определению оптимальных значений этих параметров.



Одновременно остается открытым вопрос об адекватности предлагаемых мер разрешающей способности. Для исследования этого вопроса, а также для выработки рекомендаций относительно выбора оптимальных пороговых значений  $N_r^{min}$  и  $\mathfrak{G}^{min}$  была проведена серия численных экспериментов на синтетических примерах, в ходе которых одновременно со значениями мер  $N_r(l, m, n)$  и  $\mathfrak{G}(l, m, n)$  вычислялась и матрица разрешения  $\mathbf{R}$ . Сопоставляя индивидуальные значения мер с диагональными элементами  $\mathbf{R}$ , отвечающими соответствующему неизвестному  $c_{i, m, n}^k$ , можно судить об адекватности предлагаемых мер для оценки разрешающей способности.

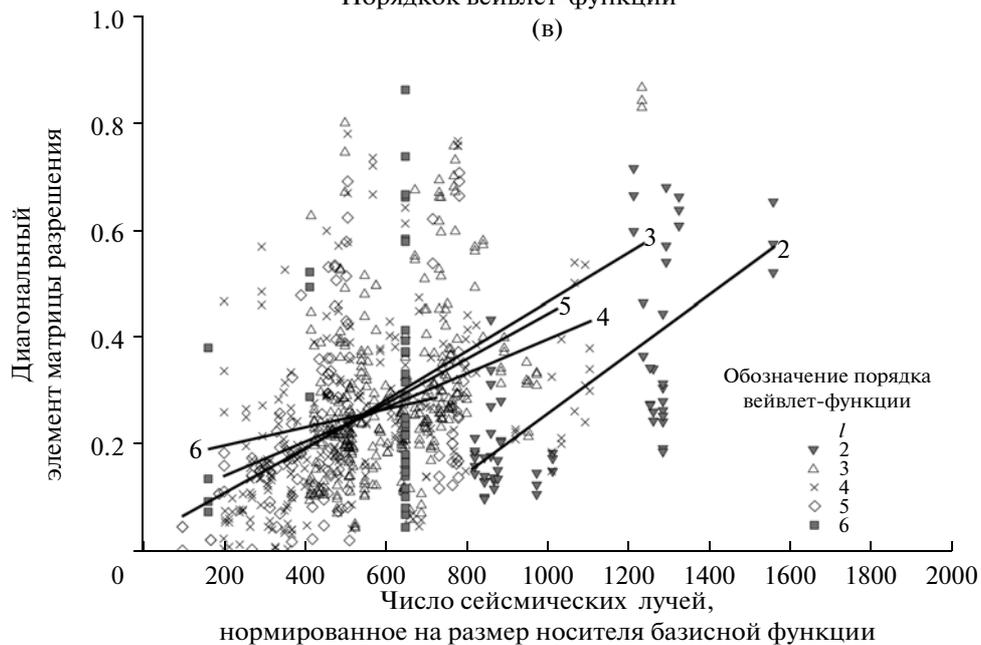
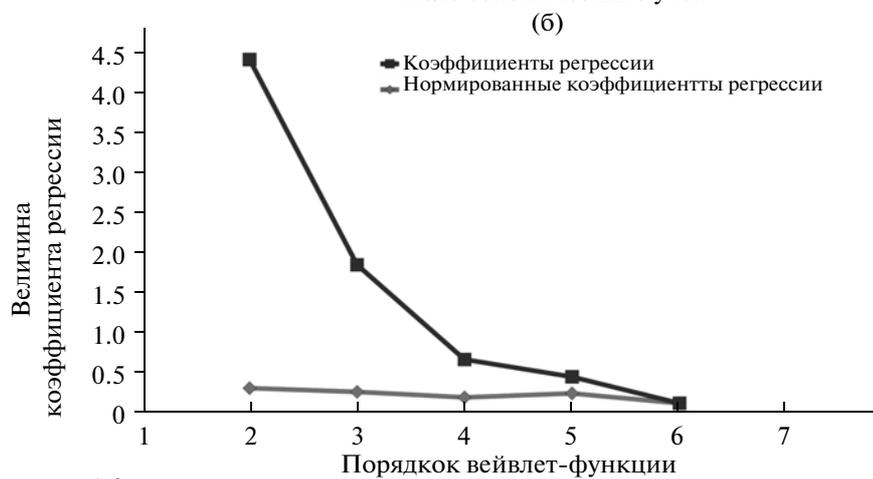
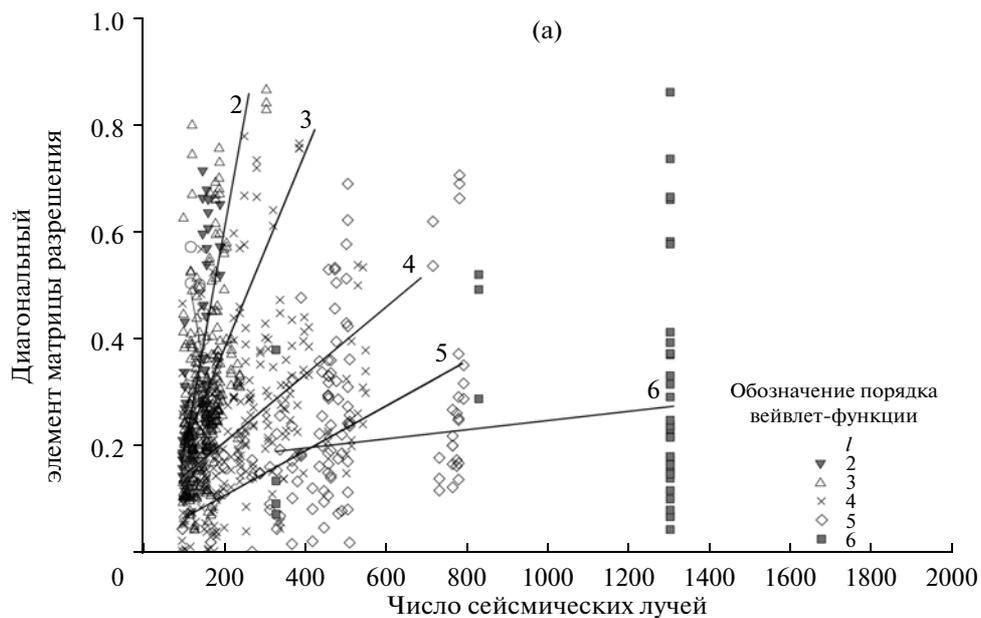
В результате экспериментов установлено, что во всех случаях имеется статистически значимая зависимость между эмпирическими мерами  $N_r^{min}$  и  $\mathfrak{G}^{min}$  и значениями  $r_{ii} = r(l, m, n)$  ( $i = i(l, m, n)$  – сквозная нумерация неизвестных коэффициентов) диагональных элементов  $\mathbf{R}$ , которые можно рассматривать как теоретически строгую оценку разрешающей способности (на каждой итерации). На рис. 3–рис. 5 приведены примеры соответствующих зависимостей для различных типов неизвестных. Все приведенные здесь примеры рассчитаны при анализе синтетической модели “шахматного” типа, описанной в следующем разделе настоящей статьи, однако качественный характер приведенных зависимостей является общим для всех проведенных нами вычислительных экспериментов [Tikhotsky, Achauer, 2008a; 2008b; Tikhotsky et al., 2009], как с использованием синтетических данных (т.е., имитационного моделирования), так и с использованием данных реальных полевых экспериментов.

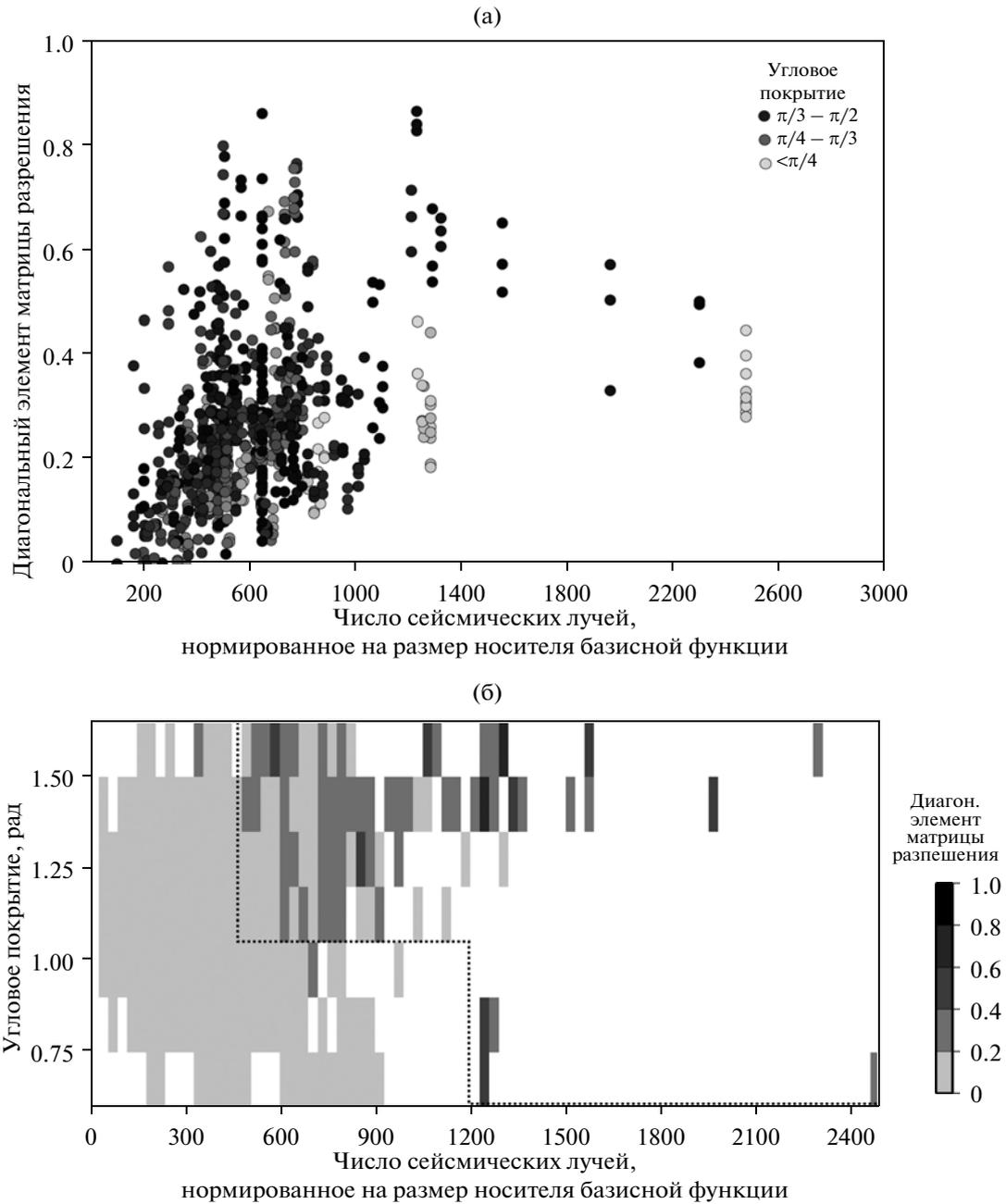
На рис. 3а изображена зависимость  $r(l, m, n)$  от числа лучей, приходящихся на носитель вэйвлета –  $N_r(l, m, n)$ . На первый взгляд какой-либо связи между этими параметрами не обнаруживается. Однако анализируя по отдельности группы точек, соответствующие различным порядкам вэйвлет-функции  $l$ , можно видеть, что для каждой такой группы имеется статистическая связь между  $r(m, n)$  и  $N_r(m, n)$ . Линиями на рис. 3а изображены функции  $r(m, n) = a(l) \times N_r(m, n) + b(l)$ , наилучшим образом аппроксимирующие эти связи для каждого  $l$ . Видно, что величины коэффициентов регрессии  $a(l)$ , определяющие угол наклона прямых, закономерно уменьшаются с увеличением  $l$ . Обнаруженная закономерность имеет естественное истолкование: порядок вэйвлета  $l$  определя-

ет размер его носителя ( $L \sim 2^{(J-l)}$ ), при этом чем больше размер носителя, тем больше независимых уравнений (т.е., сейсмических лучей, пересекающих носитель) требуется для устойчивого определения соответствующего коэффициента разложения (3). Сказанное подтверждает рис. 3б, на котором дана зависимость коэффициента регрессии  $a(l)$  от  $l$  и те же коэффициенты, нормированные на величину  $2^{(J-l)}$ . Таким образом, для того, чтобы сделать близким характер зависимости между  $r(l, m, n)$  и  $N_r(l, m, n)$  для различных  $l$  необходимо преобразовать число лучей, приходящихся на носитель вэйвлета, по формуле  $\tilde{N}_r(l, m, n) = N_r(l, m, n)/2^{(J-l)}$ , т.е. рассматривать число лучей нормированное на линейный размер носителя вэйвлет-функции. Зависимость между  $r(l, m, n)$  и  $\tilde{N}_r(l, m, n)$  приведена на рис. 3в, который демонстрирует наличие статистической связи для всего набора неизвестных. В частности, из графика ясно, что задавшись пороговым значением  $\tilde{N}_r^{min} \approx 500$  удастся исключить из разложения (3) большинство (60%) членов, для которых  $r(l, m, n) < 0.2$ , при этом доля “хороших” (таких, для которых при  $\tilde{N}_r(l, m, n) > 500$  величина  $r(l, m, n) > 0.2$ ) членов составляет около 25%. Таким образом оказывается возможным выбрать такое пороговое значение  $\tilde{N}_r^{min}$ , при котором отбрасывается большинство условно “плохих” членов разложения, при сохранении большинства “хороших”. Следует также понимать, что после применения этого порогового значения к отбраковке базисных функций диагональные элементы  $r(l, m, n)$ , соответствующие оставшимся членам разложения (3), возрастут.

С другой стороны, анализ рис. 3в показывает, что разброс значений  $r_{ii}$  относительно линейного тренда достаточно велик, а следовательно – при любом выборе  $\tilde{N}_r^{min}$  в разложении (3), будут сохраняться члены, которым соответствуют низкие значения  $r_{ii}$ , а также будут отбрасываться члены, которым соответствуют высокие  $r_{ii}$ . Иначе говоря, разбраковка базисных функций на основе одной лишь меры  $\tilde{N}_r(l, m, n)$  является хотя и допустимым, но не вполне совершенным способом построения оптимальной параметризации. Как упоминалось выше, наблюдаемый разброс  $r_{ii}$  может объясняться, в частности – различием в “угловом покрытии”, т.е. диапазоне разброса направлений сейсмических лучей в пределах носителя  $\text{supp}_{l, m, n}$ .

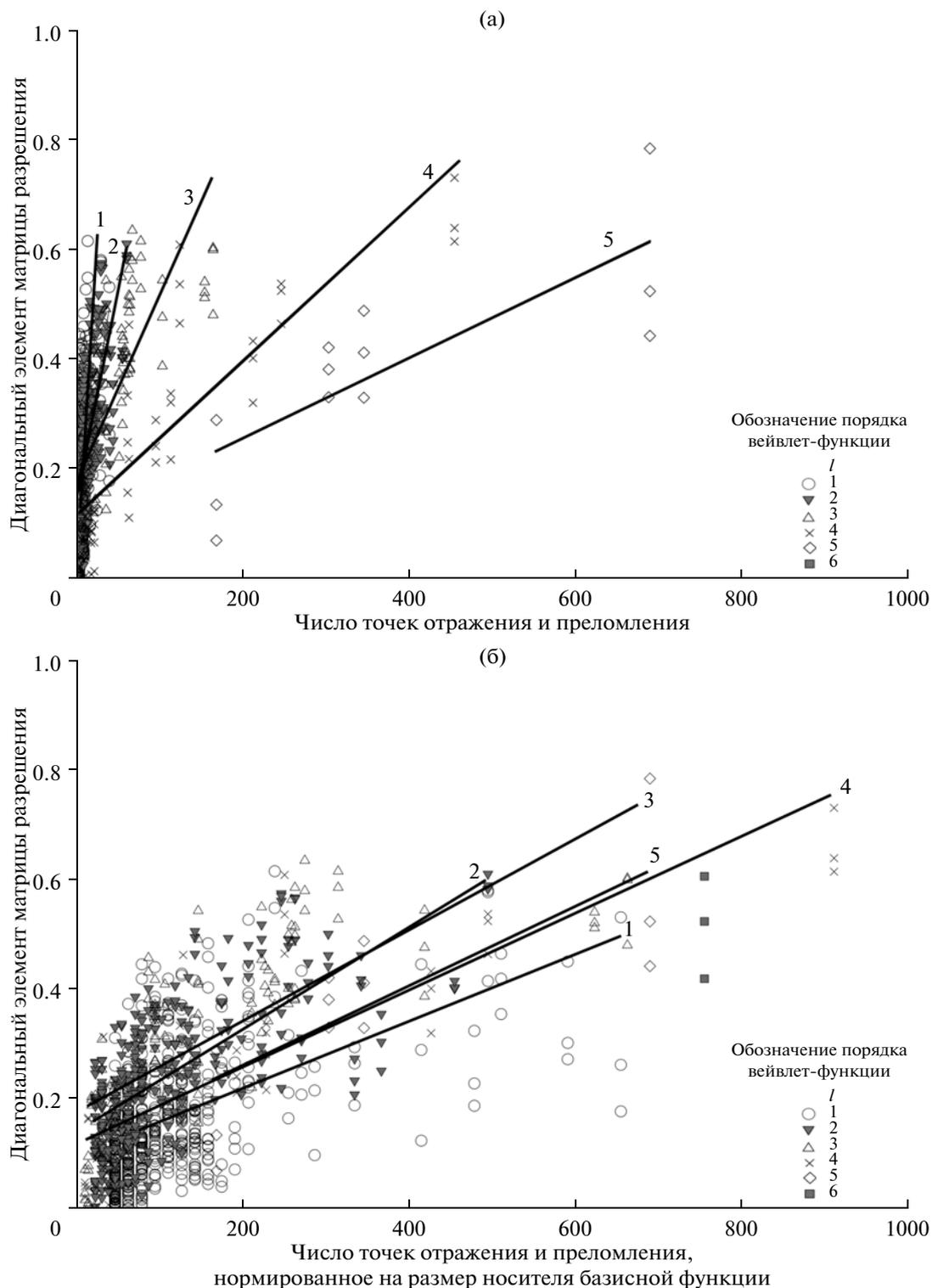
**Рис. 2.** Процесс адаптивной аппроксимации. Тонкими серыми линиями даны траектории сейсмических лучей. Серой заливкой дано положение носителей базисных функций, добавленных к разложению (3) на текущем уровне детализации. В левой колонке (а), (в), (д), (ж) представлены границы носителей вэйвлет-функций; в правой колонке (б), (г), (е), (з) – соответствующая этому положению носителей эквивалентная параметризация системой квадратных ячеек; (а), (б) – уровень детализации  $l = 5$ ; (в), (г) –  $l = 4$ ; (д), (е) –  $l = 3$ ; (ж), (з) –  $l = 2$ ; На уровне  $l = 1$  дополнительных членов разложения добавлено не было.





**Рис. 4.** Совместный анализ двух эмпирических мер разрешающей способности: (а) – соотношение  $N_{p_i} - r_{ii}$ , где цветом символа показана величина соответствующего данному носителю углового покрытия; (б) – величина диагонального элемента матрицы разрешения (показана интенсивностью серого цвета), как функция двух координат: числа сейсмических лучей, нормированного на размер носителя базисной функции, и углового покрытия (разброса азимутов лучей в пределах носителя).

**Рис. 3.** Сопоставление эмпирической меры разрешающей способности – числа сейсмических лучей, приходящихся на носитель вэйвлет-функции – и оценки разрешающей способности на основе величины диагонального элемента матрицы разрешения, для соответствующего неизвестного коэффициента разложения медленности: (а) – соотношение  $N_{r_i} - r_{ii}$ , различными символами изображены точки, соответствующие различным порядкам вэйвлет-функции  $l$ , индекс прямых обозначает порядок вэйвлет-функции  $l$ , для которого построена соответствующая линейная регрессионная зависимость; (б) – величины коэффициентов регрессии для различных  $l$  и результат их нормировки на величину  $2^{(J-l)}$  пропорциональную линейному размеру носителя вэйвлет-функции; (в) – соотношение  $\tilde{N}_{r_i} - r_{ii}$ , различными символами изображены точки, соответствующие различным порядкам вэйвлет-функции  $l$ , индекс прямых обозначает порядок вэйвлет-функции  $l$  для которого построена соответствующая линейная регрессионная зависимость.



**Рис. 5.** Сопоставление эмпирической меры разрешающей способности – числа точек отражения и преломления, приходящихся на носитель вейвлет-функции – и оценки разрешающей способности на основе величины диагонального элемента матрицы разрешения, для соответствующего неизвестного коэффициента разложения глубины границы: (а) соотношение  $N_{p_i} - r_{ii}$ , различными символами изображены точки, соответствующие различным порядкам вейвлет-функции  $l$ , индекс прямых обозначает порядок вейвлет-функции  $l$  для которого построена соответствующая линейная регрессионная зависимость; (б) – соотношение  $\tilde{N}_{p_i} - r_{ii}$ , различными символами изображены точки, соответствующие различным порядкам вейвлет-функции  $l$ , индекс прямых обозначает порядок вейвлет-функции  $l$ , для которого построена соответствующая линейная регрессионная зависимость.

Как показали численные эксперименты, значения  $r_{ii}$  не обнаруживают выраженной зависимости от  $\mathcal{Q}(l, m, n)$ , хотя можно констатировать наличие сгущения (кластера) точек в области околонулевых значений  $r_{ii}$  и  $\mathcal{Q}(l, m, n)$ . Очевидно, необходимо одновременно анализировать обе меры:  $\tilde{N}_r(l, m, n)$  и  $\mathcal{Q}(l, m, n)$ , что иллюстрирует рис. 4. На рис. 4а интенсивность цвета символа на диаграмме обозначает величину  $\mathcal{Q}(l, m, n)$ : черный цвет соответствует максимуму  $\mathcal{Q} = \pi/2$ , белый – минимуму  $\mathcal{Q} = 0$ . Видно, что значительное количество точек, которым соответствуют низкие значения  $r_{ii}$  при высокой плотности сейсмических лучей  $\tilde{N}_r$ , характеризуются пониженными значениями углового покрытия  $\mathcal{Q}$  и могут быть отбракованы по этому признаку, кроме того многие точки, с высокими  $r_{ii}$  и низкими  $\tilde{N}_r$ , напротив характеризуются высокими значениями  $\mathcal{Q}$ . На диаграмме (рис. 4б) цветом показана величина  $r_{ii}$  как функция двух переменных:  $\tilde{N}_r$  и  $\mathcal{Q}$ . Обнаруживается, что подавляющее большинство базисных функций, которым соответствуют низкие значения  $r_{ii}$  группируются в левом нижнем углу диаграммы, т.е. при одновременно низких  $\tilde{N}_r$  и  $\mathcal{Q}$ , а также в области наиболее низких  $\tilde{N}_r$  (независимо от  $\mathcal{Q}$ ) и наиболее низких  $\mathcal{Q}$ , даже и при высоких  $\tilde{N}_r$ . При этом разрешающая способность закономерно увеличивается с одновременным увеличением плотности сейсмических лучей и разброса их азимутов. Вид зависимости  $r(\tilde{N}_r, \mathcal{Q})$ , приведенный на рис. 4б, является закономерным для различных наборов данных. Его анализ приводит к усовершенствованному эмпирическому алгоритму адаптивной параметризации в виде: соответствующие набору индексов  $(l, m, n)$  слабые входят в параметризацию (3), если:

$$\begin{cases} \mathcal{Q}(l, m, n) > \mathcal{Q}_1^{min} & \text{и} & \tilde{N}_r(l, m, n) > N_2^{min}, \\ & \text{или} & \\ \mathcal{Q}(l, m, n) > \mathcal{Q}_2^{min} & \text{и} & \tilde{N}_r(l, m, n) > N_1^{min}. \end{cases} \quad (12)$$

Соответствующее этому решающему правилу разбиение множества  $(\mathcal{Q}, \tilde{N}_r)$  изображено на рис. 4б ломаной пунктирной линией. Очевидно, при  $\mathcal{Q}_1^{min} = \mathcal{Q}_2^{min}$  и  $N_1^{min} = N_2^{min}$  имеем простое решающее правило, сформулированное выше.

В результате численных экспериментов было обнаружено, что качественный характер зависимости  $r(\tilde{N}_r, \mathcal{Q})$  не зависит от конкретного набора данных. Напротив, величины пороговых значений  $\mathcal{Q}_{1,2}^{min}$  и  $N_{1,2}^{min}$  определяются как геометрией эксперимента, общим числом сейсмических лучей, выбранной де-

тальностью базовой сетки  $dx \times dy$ , так и скоростной структурой среды. Поэтому для каждого конкретного набора данных стоит задача подбора оптимальных пороговых значений. Для ее решения могут быть использованы различные подходы, включая традиционный метод проб и ошибок и имитационное моделирование на моделях, воспроизводящих геометрию экспериментальных расстановок и имитирующих ожидаемое строение среды. Мы предлагаем использовать паллиативный подход, состоящий в следующем: в качестве первого приближения используются пороговые значения  $\mathcal{Q}_{1,2}^{min} = \pi/4$  и  $N_{1,2}^{min} = 10$ . Как показывают результаты численных экспериментов, при меньших пороговых значениях возникновение артефактов в модели в виде высокочастотных осцилляций и аномалий скорости вытянутых вдоль преимущественного направления сейсмических лучей практически неизбежно. Одновременно, указанные пороговые значения позволяют отбраковать в типичных случаях порядка 90% неизвестных, после чего оказывается возможным вычислить матрицу разрешения  $\mathbf{R}$  для этого усеченного набора неизвестных. Далее, анализируя зависимость  $r(\tilde{N}_r, \mathcal{Q})$ , возможно более точно установить оптимальные пороговые значения  $\mathcal{Q}_{1,2}^{min}$  и  $N_{1,2}^{min}$  и выполнять дальнейшие вычисления уже с их использованием.

На рис. 5 показаны зависимости величины диагональных элементов матрицы  $\mathbf{R}$ , соответствующих неизвестным коэффициентам в разложении глубины восстанавливаемой границы, от числа точек отражения и преломления  $N_p$ , приходящихся на носитель соответствующей вэйвлет-функции. На рис. 5а по горизонтальной оси отложено число точек  $N_p$ , на рис. 5б – число точек, нормированное на размер носителя соответствующей вэйвлет-функции:  $\tilde{N}_p = N_p / 2^{(J-l)}$ . Видно, что характер зависимостей аналогичен таковому для числа сейсмических лучей (рис. 3а, 3в). Таким образом, для отбраковки членов вэйвлет-разложения функции  $z(x, y)$ , отвечающих плохо разрешенным неизвестным, необходимо использовать нормированные значения числа точек отражения и преломления, приходящихся на носитель вэйвлета  $\tilde{N}_p$ : соответствующий коэффициент  $c_{l,m,n}^k$  полагается равным нулю при  $\tilde{N}_p(l, m, n) > N_p^{min}$ , где пороговое значение  $N_p^{min}$  – параметр алгоритма. Определение оптимального значения  $N_p^{min}$  может быть выполнено способами, аналогичными выше описанным подходам к определению  $\mathcal{Q}_{1,2}^{min}$  и  $N_{1,2}^{min}$ .

Таким образом, в результате численных экспериментов показано, что предлагаемые эмпирические меры  $\tilde{N}_r$ ,  $\mathcal{Q}$  и  $\tilde{N}_p$ , могут быть использованы для

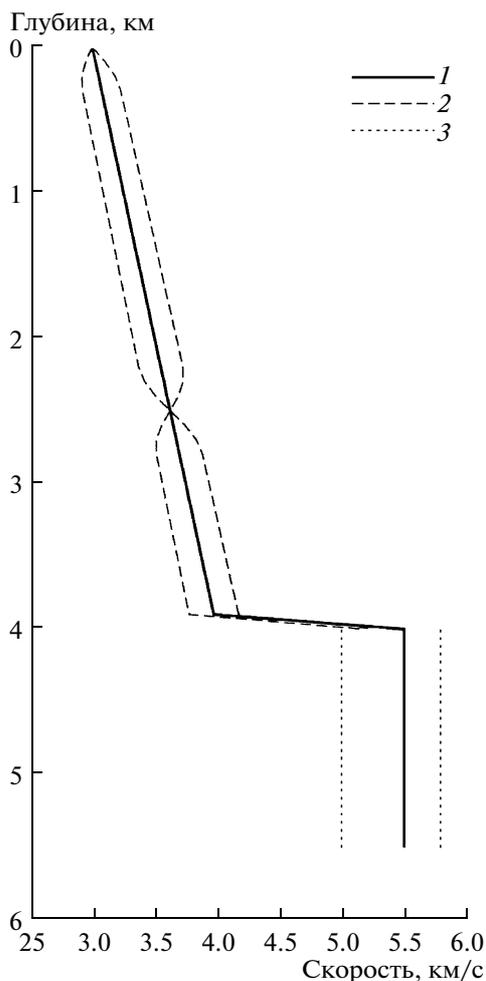


Рис. 6. Вертикальный профиль скорости в синтетическом примере и начальной модели. Условные обозначения: 1 – профиль скорости в начальной модели; 2 – диапазон изменения скорости в синтетическом примере в пределах верхнего слоя; 3 – диапазон изменения граничных скоростей в синтетическом примере в пределах нижнего полупространства.

экспресс-оценки разрешающей способности и разбраковки членов вэйвлет-разложения (4). При этом предлагаемые меры по своей сути являются статистическими, т.е. позволяют отбросить большинство условно “плохих” членов разложения, при сохранении большинства “хороших”, однако всегда сохраняется относительно меньшее, но ненулевое число “плохих” членов и наоборот. Однако применение предлагаемых эмпирических мер, по нашему мнению, оправдано, поскольку позволяет как минимум на два порядка увеличить скорость счета, что делает алгоритм применимым не только в научной, но и в реальной полевой и производственной практике. Отметим, что предлагаемый алгоритм адаптивной параметризации на основе разреженного разложения по вэйвлет-функциям может быть использован с любыми иными мерами разрешающей способности, в частности – на основе вычисления разрешающего оператора  $\mathbf{R}$ .

## ОПРОБОВАНИЕ АЛГОРИТМА

В настоящей работе приводятся результаты опробования алгоритма на синтетическом модельном примере типа “шахматный тест” (рис. 7–рис. 10), широко применяемом в практике сейсмотомографии для изучения разрешающей способности в конкретных экспериментах. Стандартом является использование 2D “шахматных тестов” – моделей, в которых положительные и отрицательные двумерные аномалии скорости располагаются в шахматном порядке [Leveque et al., 1993]. Поскольку данное исследование посвящено алгоритму 3D сейсмической инверсии в рамках модели “слой на полупространстве”, где важнейшей задачей является восстановление вариаций скорости в объеме слоя и положения его нижней границы, а также граничных скоростей, для тестирования алгоритма был разработан комбинированный тест, где скорость в пределах верхнего слоя испытывает объемные вариации в шахматном порядке по всем направлениям ( $x, y, z$ ):

$$v(x, y, z) = v^{(0)}(z) \left( 1 + af_{ch}(x; x_0, W_x, S_x) \times \right. \quad (13)$$

$$\left. \times f_{ch}(y; y_0, W_y, S_y) f_{ch}(z; z_0, W_z, S_z) \right),$$

где

$$f_{ch}(p, p_0, W_p, S_p) = (-1)^{\lfloor (p - p_0)/W_p \rfloor} \varphi \times \quad (14)$$

$$\times (p - (p_0 + \lfloor (p - p_0)/W_p \rfloor W_p), W_p, S_p; p),$$

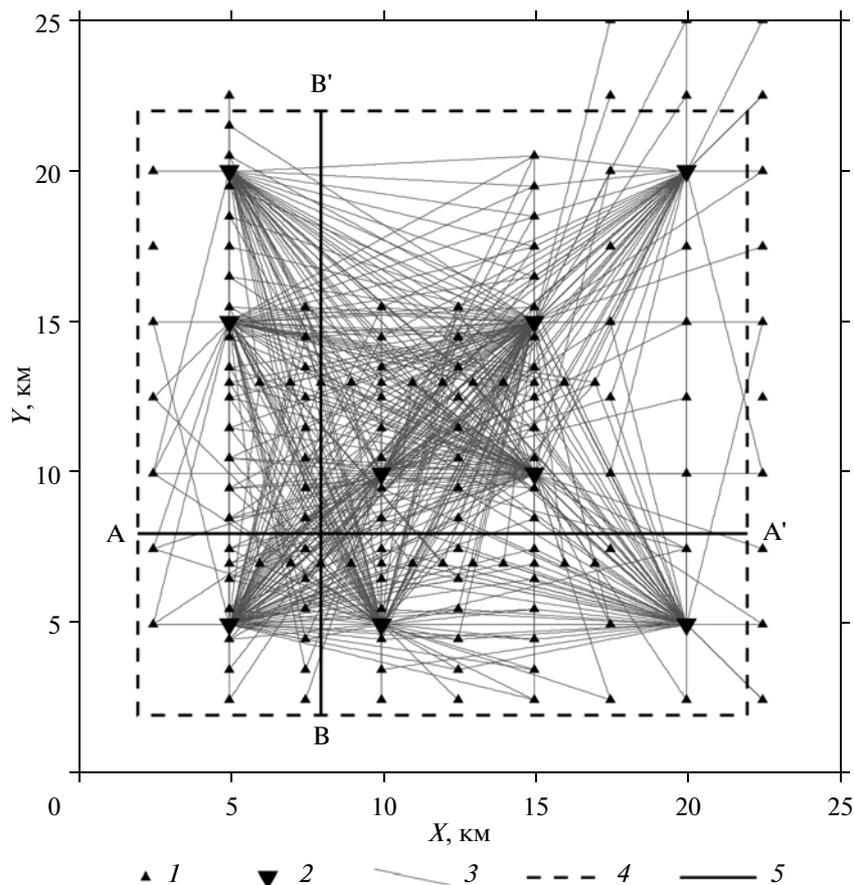
и

$$\varphi(dp, W_p; p) = \begin{cases} 1, & S_p \leq dp \leq W_p - S_p, \\ \sin(\pi dp / 2S_p), & dp < S_p, \\ \sin(\pi(W_p - dp) / 2S_p), & dp > W_p - S_p. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь  $v^{(0)}(z)$  – средняя скорость в слое, относительно которой вводятся относительные аномалии скорости амплитудой  $a$ .  $W_p(p = x, y, z)$  – ширина “клетки” шахматной модели (размер аномалии скорости) по соответствующему направлению,  $p_0$  – начальная фаза модели, определяющая смещение “клеток” по направлению,  $2S_p$  – ширина интервала сглаживания (т.е. переходной зоны на границе клеток где относительная аномалия скорости изменяется плавно от  $-a$  до  $a$ ) по соответствующему направлению. Введение интервала сглаживания необходимо исходя из предположения о гладком распределении скорости в пределах слоя, в пределе при  $W_p \rightarrow 0$  получаем резкую границу клеток. В рассматриваемой модели величины перечисленных параметров равны:

$$v^{(0)}(z) = 3.0 + 0.25z \text{ км/с}; \quad (16)$$

$W_x = W_y = 5.0$  км;  $W_z = 2.5$  км;  $S_x = S_y = S_z = 0.3$  км;  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$  км. Граница предполагалась наклонно падающей в направлении оси  $Y$  под углом  $5^\circ$ , ее глубины изменяются в пределах от 3 до 5 км.



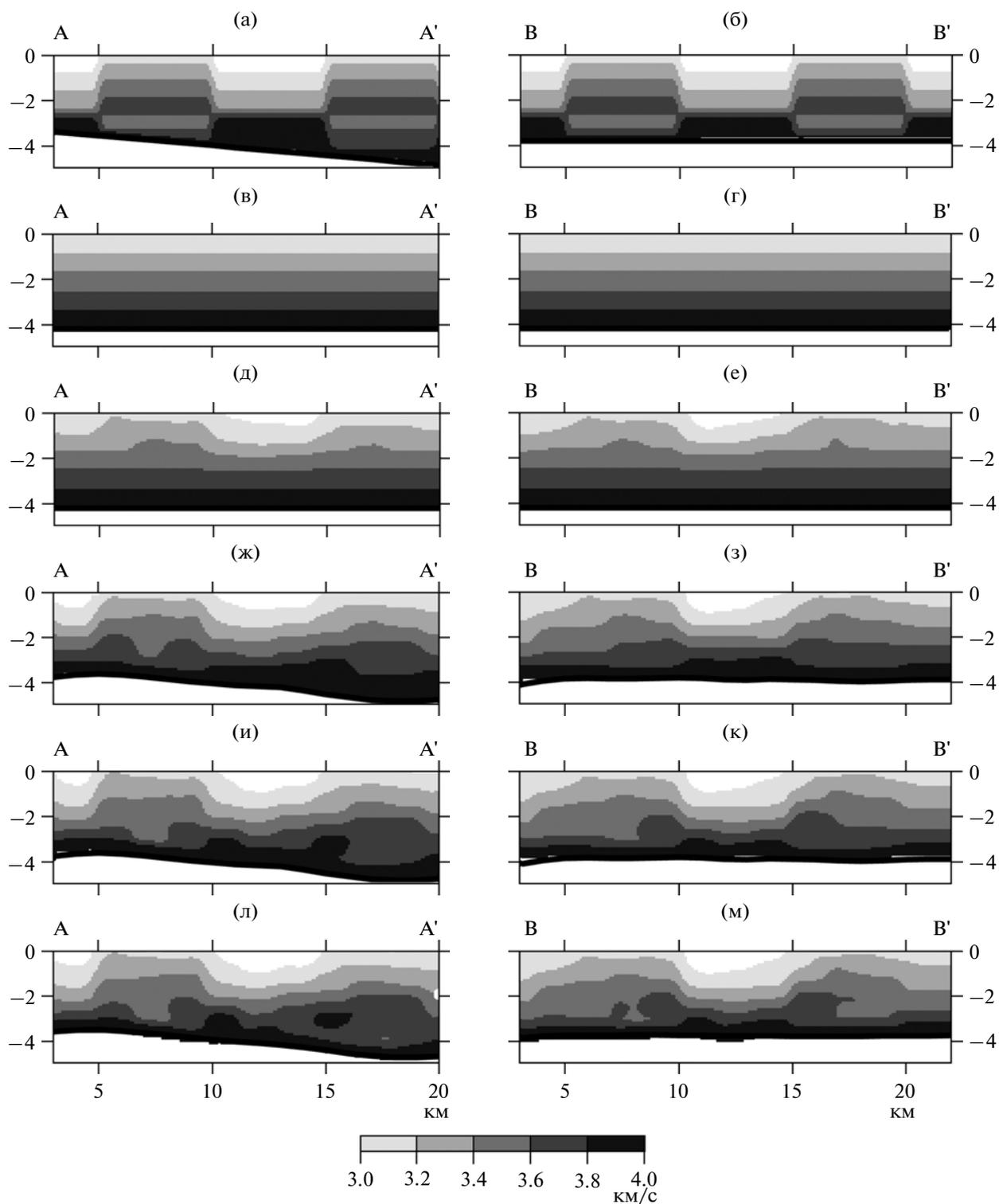
**Рис. 7.** Геометрия синтетического эксперимента. Условные обозначения: 1 – приемники; 2 – источники; 3 – траектории лучей рефрагированной волны (рассчитанные в начальной модели); 4 – граница области модели с ненулевым лучевым покрытием, эта часть модели показана на рис. 8–рис. 9; 5 – положение вертикальных сечений, показанных на рис. 8.

Граничная скорость изменяется по закону  $v_l(x, y) = 5.0 + 0.003\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 7.5)^2}$  км/с. Диапазон вариаций вертикального профиля скорости в модели иллюстрирует рис. 6; вертикальные сечения скоростной модели изображены на рис. 8а, 8б; горизонтальное сечение верхнего слоя на глубине  $z = 1$  км – на рис. 9а; распределение граничных скоростей – на рис. 9б; глубина границы – на рис. 9в.

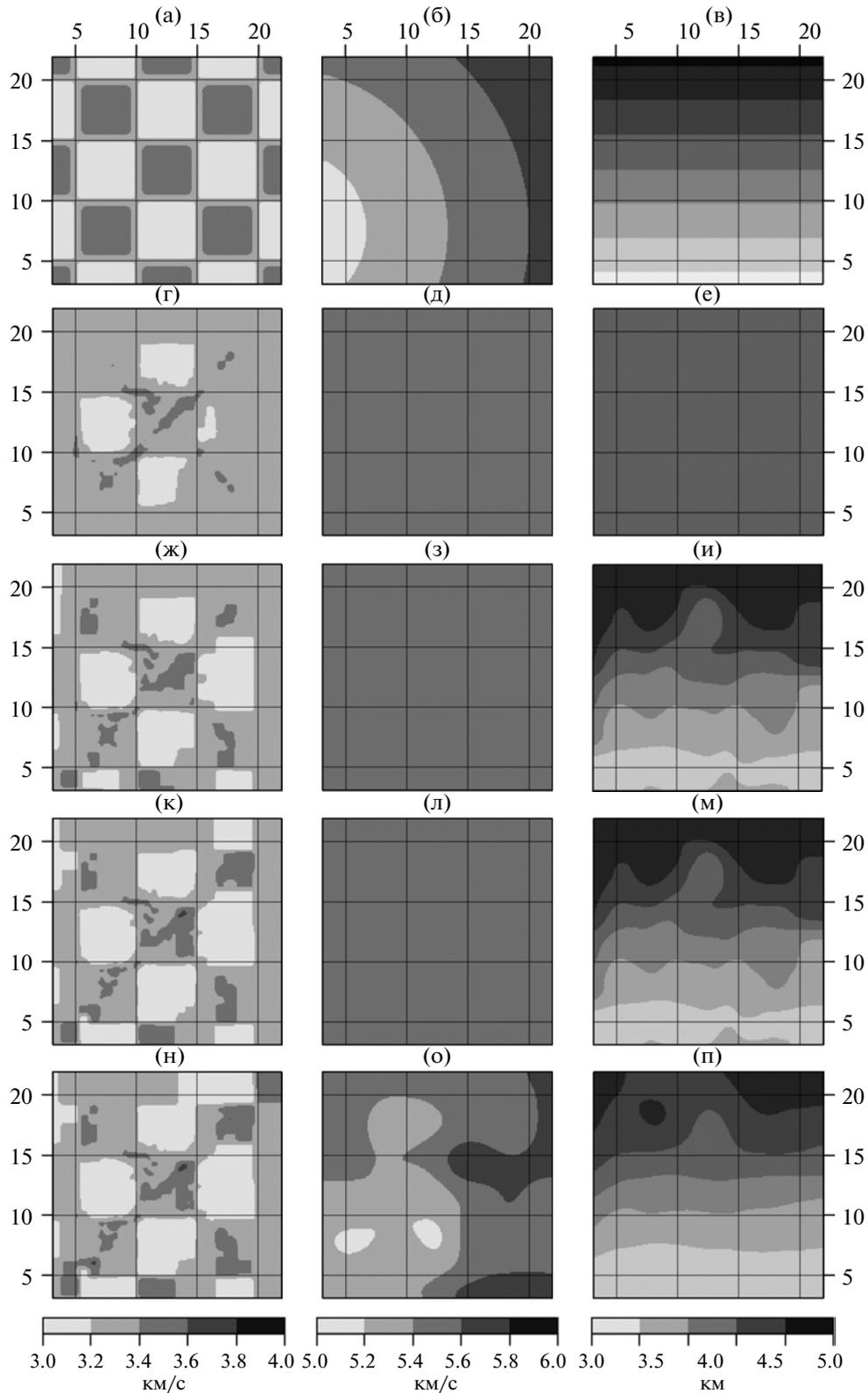
Рис. 7 иллюстрирует геометрию синтетического “эксперимента” и положение сечений на рис. 8, рис. 9. Видно, что расположение источников и приемников ведет к неоднородному лучевому покрытию в объеме модели и, как следствие, – к неоднородной разрешающей способности. Для расчета полей времен и трассирования сейсмических лучей использована сетка с шагом ячейки  $0.1 \times 0.1 \times 0.1$  км, размер ячейки базовой сетки при инверсии (т.е. минимальный размер аномалии скорости, которая может быть восстановлена) составил  $0.4 \times 0.4 \times 0.4$  км. В качестве модели начального приближения использована горизонтально-однородная скоростная модель, вертикальный профиль скоро-

сти в которой совпадает со средним вертикальным профилем скорости в синтетической модели (16), нижняя граница слоя горизонтальна и расположена на глубине 4.3 км, граничная скорость также постоянна и равна 5.5 км/с (рис. 8в, 8г).

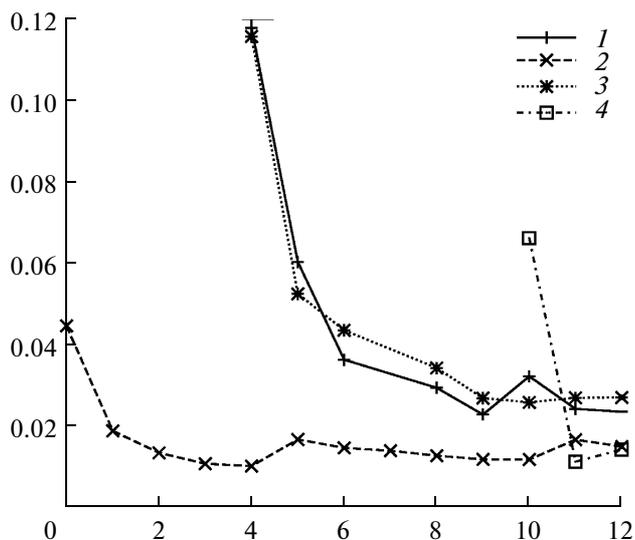
В ходе инверсии было выполнено в общей сложности 14 итераций. Процесс восстановления модели строения среды иллюстрируют рис. 8, рис. 9. На итерациях 1–4 аппроксимировались только времена пробега волн, рефрагированных в слое и не достигающих его границы, что позволило восстановить главные черты строения верхней части слоя (рис. 8д, 8е; рис. 9г), прочие параметры модели оставались неизменными (рис. 9д, 9е). Сравнивая рис. 7 и рис. 9г, обратим внимание, что аномалии скорости проявлены только в области плотного лучевого покрытия (в интервале изменения  $x$  и  $y$  от 5 до 20 км); несмотря на то, что отдельные лучи рефрагированных волн наличествуют и вовне этой области, адаптивная аппроксимация не допускает восстановления здесь аномалий скорости ввиду малой разрешающей способности. Также без изменений остается и область модели глубже 3 км, где



**Рис. 8.** Процесс восстановления аномалий скорости в пределах верхнего слоя по итерациям. Положение сечений — см. рис. 7, (а), (б) — синтетическая модель; (в), (г) — начальная модель; (д), (е) — модель, полученная по итогам 4-й итерации (с использованием только рефрагированных волн); (ж), (з) — модель полученная по итогам 7-й итерации (с использованием рефрагированных и отраженных волн); (и), (к) — модель полученная по итогам 10-й итерации (с использованием рефрагированных и отраженных волн); (л), (м) — модель полученная по итогам 12-й итерации (с использованием рефрагированных, отраженных и головных волн).



**Рис. 9.** Процесс восстановления аномалий скорости в пределах верхнего слоя по итерациям. Левая колонка (а), (г), (ж), (к), (м) – горизонтальное сечение модели на глубине 1 км; центральная колонка (б), (д), (з), (л), (о) – распределение граничной скорости; правая колонка (в), (е), (и), (м), (п) – глубина границы; (а)–(в) – синтетическая модель; (г)–(е) – модель, полученная по итогам 4-й итерации (с использованием только рефрагированных волн); (ж)–(и) – модель полученная по итогам 7-й итерации (с использованием рефрагированных и отраженных волн); (к)–(м) – модель полученная по итогам 10-й итерации (с использованием рефрагированных и отраженных волн); (н)–(п) – модель полученная по итогам 12-й итерации (с использованием рефрагированных, отраженных и головных волн).



**Рис. 10.** Изменение среднеквадратической погрешности приближения по итерациям. Условные обозначения: 1 — для времен пробега всех типов волн, участвовавших в подборе на данной итерации; 2 — для времен пробега рефрагированных волн; 3 — для времен пробега отраженных волн; 4 — для времен пробега головных волн.

также отсутствует значимое число лучей рефрагированных волн. Одновременно отметим, что алгоритм обладает тенденцией к локализации аномалий скорости в областях, где имеется максимальное число пересечений сейсмических лучей, что естественно и адекватно заложенным в него принципам, однако может приводить к избыточной детализации.

Рис. 10 иллюстрирует изменение среднеквадратической погрешности приближения по завершению соответствующей итерации (для волн различных типов и в целом):

$$\sigma = \sqrt{\delta t^{(i)T} C_t \delta t^{(i)} / (M - 1)}, \quad (17)$$

где  $C_t$  — ковариационная матрица аномалий времен пробега (в синтетическом примере шум полагался гауссовым некоррелированным со среднеквадратическим значением  $c_i = 0.01$  с;  $C_t \equiv \text{diag}\{c_i\}$ ),  $M$  — число лучей соответствующего типа. Кривая 2 на рис. 10 соответствует погрешности приближения времен пробега рефрагированных волн. Видим, что максимальное изменение (более чем в два раза) достигается сразу по завершении первой итерации, тогда как между 3 и 4 итерациями  $\sigma_i$  практически не изменилось. Поэтому начиная с 4-й итерации в процесс инверсии включаются времена пробега отраженных волн.

По завершении 7-й итерации адекватно восстановлена как картина распределения скорости в слое (рис. 8ж, 8з; рис. 9ж), так и основные черты положения границы (падение в направлении оси  $Y$ ) и диа-

пазон изменений ее глубин. Отметим, что привлечение информации по отраженным волнам позволило расширить область плотного лучевого покрытия, на что алгоритм отреагировал увеличением детальности аппроксимации, в результате проявились аномалии скорости на флангах скоростной модели. При восстановлении границы возникают колебания ее глубин относительно правильно определенных средних значений. Их подавление не составляет труда путем введения дополнительных ограничений на гладкость, либо увеличения порогового значения  $N_p^{min}$ , однако, поскольку мы полагаем, что априорная информация о характерном масштабе вариаций глубины отсутствует, таких ограничений не вводилось.

Итерации с использованием рефрагированных и отраженных волн были продолжены до тех пор, пока продолжалось значимое уменьшение среднеквадратической погрешности приближения по совокупности этих лучей (кривая 1 на рис. 10). После завершения 9 итерации уменьшение погрешности практически прекращается, окончательная модель, полученная с использованием рефрагированных и отраженных волн показана на рис. 8и, 8к и рис. 9к—9м. Качественный характер, равно как и амплитуды вариаций скорости в объеме слоя адекватно воспроизведены практически во всех частях модели, где имеется лучевое покрытие. Несколько улучшилось представление высокоскоростных аномалий по сравнению с достигнутым по данным только о рефрагированных волнах. Интересно отметить, что алгоритм “делает попытку” воспроизвести инверсию скорости на глубине около 3 км в интервалах  $x$  и  $y$  5—10 и 15—20 км (см. рис. 8и, 8к).

Наконец, начиная с 10 итерации в процесс инверсии вовлекаются данные о временах пробега головных волн и начинается восстановление вариаций граничной скорости. После завершения 12 итерации уменьшение общей погрешности приближения практически прекращается, финальная модель (полученная на 12 итерации) представлена на рис. 8л, 8м и рис. 9н—9п. Модель распределения скорости в слое меняется незначительно, но при этом можно утверждать, что она продолжает приближаться к истинной синтетической модели среды, в особенности в нижней части слоя, где продолжает развиваться тенденция к описанию инверсии скорости. Вовлечение информации о точках преломления дополнительно улучшает результат восстановления глубины границы (рис. 9п), делая ее весьма близкой к “истинной” (рис. 9б). При этом вариации граничной скорости восстановлены лишь “в общем”: передана тенденция к увеличению скорости в направлении увеличивающихся  $x$  и  $y$ , также восстановлен характерный масштаб вариаций скорости. Одновременно картина на рис. 9о содержит избыточное, сравнительно с “истинной” моделью (рис. 9б) число деталей.

В целом можно констатировать, что в результате инверсии структура синтетической модели восста-

новлена со степенью адекватности достаточной для корректной геологической интерпретации: правильно определена качественная картина и характерные амплитуды вариаций скорости во всем объеме слоя, достаточно точно восстановлено положение нижней границы слоя. Наихудшим образом восстановлены вариации граничной скорости, однако в случае наличия зарегистрированных вступлений волн, проникающих в нижнее полупространство и применения принципа снятия слоев, нижележащая скоростная структура будет восстановлена более точно. Отметим, что несмотря на определенную искусственность “шахматного” теста, структура, проявленная сечениях  $AA'$  и  $BB'$  (рис. 8) может быть интерпретирована геологически как модель “горст–грабен”: чередующихся поднятий и впадин, ограниченных крутопадающими бортами. Как “горст”, так и “грабен” (равно как и их внутренняя скоростная структура) хорошо видны по результатам выполненной инверсии (рис. 8л, 8м), что иллюстрирует возможность применения алгоритма при решении геологических задач.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлен алгоритм инверсии 3D данных активной лучевой сейсмографии, важнейшие особенности которого состоят в: адаптивной параметризации среды в зависимости от локальной разрешающей способности посредством разложения в разреженный ряд по системе вэйвлет-функций, явное включение в модель сейсмических границ первого рода (разрывов скорости), одновременное использование данных по временам пробега рефрагированных, головных и отраженных волн. Численные эксперименты демонстрируют адекватность предложенной экспресс-оценки локальной разрешающей способности на основе одновременного использования двух статистических мер: нормированного числа сейсмических лучей и разброса их азимутов в пределах носителя базисной функции. Использование предложенной экспресс-оценки позволяет сделать алгоритм быстродействующим и снижает требования к мощности ЭВМ и объему оперативной памяти, что делает возможным его использование на портативных компьютерах и в полевых условиях. В результате опробования алгоритма на синтетическом примере показана его устойчивость и эффективность.

Авторы выражают искреннюю признательность профессору У. Ахауэру (Институт физики Земли в г. Страсбурге, Франция), совместная работа с которым над проектом по изучению вулкана Везувий, а также многочисленные обсуждения возможностей активных сейсмических методов и потребностей геофизической практики, положили начало данному исследованию. Авторы также благодарят рецензента данной работы, сделавшего важные замечания, которые способствовали повышению качества статьи.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Дитмар П.Г.* Алгоритм томографической обработки сейсмических данных, предполагающий гладкость искомой функции // Физика Земли. 1993. № 1. С. 7–12.
- Жданов М.С.* Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. М.: Научный мир. 2007.
- Кулаков И.Ю.* Структура верхней мантии под Южной Сибирью и Монголией по данным региональной сейсмографии // Геология и геофизика. 2008. Т. 49. № 3. С. 248–261.
- Рослов Ю.В.* Пакет сейсмической томографии XТомо-LM. 1997. URL: <http://xgeo.ru/web-xgeo-rus/X-Tomo.htm>.
- Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. Наука. 1986. С. 288.
- Храмов А.Н., Гончаров Г.И., Комиссарова Н.А. и др.* Палеомагнитология / Под ред. Храмова А.Н. Л.: Недра. 1982. С. 312.
- Яновская Т.Б.* Проблемы сейсмической томографии. М.: Наука. 1997. С. 86–98.
- Abers G., Roecker S.* Deep structure of an arc-continent collision: Earthquake relocation and inversion for upper mantle P and S wave velocities beneath Papua New Guinea // J. Geophys. Res. 1991. V. 96. P. 6370–6401.
- Bijwaard H., Spakman W., Engdahl E.* Closing the gap between regional and global traveltome tomography // J. Geophys. Res. 1998. P. 30055–30078.
- Chiao L.-Y., Kuo B.-Y.* Multiscale seismic tomography // Geophys. J. Int. 2001. V. 145. P. 517–527.
- Chiao L.-Y., Liang W.-T.* Multiresolution parameterisation for geophysical inverse problems // Geophysics. 2003. V. 68. № 1. P. 199–209.
- Deal M., Nolet G.* Comment on “Estimation of resolution and covariance for large matrix inversions” by J. Zhang and G.A. McMechan // Geophysical Journal International. 1996. V. 127. № 1. P. 254–250.
- Evain M., Galve A., Charvis P., et al.* 3D seismic tomography of the Lesser Antilles Subduction Zone offshore Dominica and Martinique islands // Geophysical Research Abstracts / EGU General Assembly. V. 12, EGU2010-13105. 2010.
- Evangelidis C., Minshull T., Henstock T.* Three-dimensional crustal of Ascension Island from active source seismic tomography // Geophys. J. Int. 2004. V. 159. P. 311–325.
- Hobro J., Singh S., Minshull T.* Three-dimensional tomographic inversion of combined reflection and refraction seismic traveltome data // Geophys. J. Int. 2003. V. 152. P. 79–93.
- Hole J.* Nonlinear high-resolution three-dimensional seismic travel time tomography // J. Geophys. Res. 1992. V. 97. P. 6553–6562.
- Jordan M.* II-3D A new approach to high resolution regional seismic tomography: Theory and applications: P. Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultäten der Georg-August-Universität zu Göttingen. 2003.
- Kulakov I., Tychkov S., Keselman S.* Three-dimensional structure of lateral heterogeneities in P velocities in the upper mantle of the southern margin of Siberia and its preliminary geodynamic interpretation // Tectonophysics. 1995. V. 241. P. 239–257.
- Larsen R.* Lanczos bidiagonalization with partial reorthogonalization, Department of Computer Science: P. DAIMI

- PB-357: Department of Computer Science, Aarhus University, 1998. September.
- Leveque J.-J., Rivera L., Wittlinger G.* On the use of the checker-board test to assess the resolution of tomographic inversions // *Geophys. J. Int.* 1993. V. 115. P. 313–318.
- Mallat S.* A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // *IEEE Trans. Patt. Recogn. and Math. Intell.* V. 11(7). P. 674–693.
- Nolet G.* A Breviary of seismic tomography. Cambridge Univ. Press. 2008.
- Paige C., Saunders M. LSQR: an algorithm for sparse linear equations and sparse linear least squares // *ACM transactions on mathematical software.* 1982. no. 8. P. 43–71.
- Pratt R.* Seismic waveform inversion in the frequency domain, Part 1: Theory and verification in a physical scale model // *Geophysics.* 1999. V. 64. № 3. P. 888–901.
- Rantala M., Vanska S., Japvenpaa S., et al.* Wavelet-based reconstruction for limited-angle X-ray tomography // *IEEE Trans. Ned. Imaging.* 2006. V. 25. P. 210–217.
- Sambridge M., Faletic R.* Adaptive whole Earth tomography // *Geochem. Geophys. Geosyst.* 2003. V. 4 (3). P. 1022.
- Sambridge M., Gudmundson O.* Tomographic systems of equations with irregular cells // *J. Geophys. Res.* 1998. V. 103. P. 773–781.
- Schijs H., Heinonen S., Schmitt D. et al.* Seismic refraction traveltimes inversion for static corrections in a glaciated shield rock environment: a case study // *Geophys. Prosp.* 2009. V. 57. P. 997–1008.
- Spakman W., Bijwaard H.* Optimization of cell parameterization for tomographic inverse problems // *Pure Appl. Geophys.* 2001. V. 158. P. 1401–1423.
- Stollnitz E., DeRose A., Salesin D.* Wavelet for computer graphics: a primer, Part 1 // *IEEE Computer Graphics and Applications.* 1995. V. 13. № 3. P. 76–84.
- Tikhotsky S., Achauer U.* Active seismic tomography inversion with the self-adaptive wavelet parameterization: algorithm and its application for the Vesuvius volcano structure. 7th international conference “Problems of geocosmos”. 2008. P. 251–252.
- Tikhotsky S., Achauer U.* Inversion of controlled-source seismic tomography and gravity data with the self-adaptive wavelet parameterization of velocities and interfaces // *Geophys. J. Int.* 2008. V. 172. P. 619–630.
- Tikhotsky S., Achauer U., Fokin I.* Controlled-Source Seismic Tomography with Wavelets: Inversion Algorithm and its Application to Vesuvius Volcano // *Geophysical Research Abstracts. EGU General Assembly.* V. 11, EGU2009-8626. 2009.
- Vermeesch P.M., Henstock T.J., Lange D., et al.* A 3D tomographic seismic imaging of the southern rupture barrier of the great Sumatra-Andaman 2005 earthquake // *Geophysical Research Abstracts. EGU General Assembly.* V. 11, EGU2009-11509-2. 2009.
- Yordkayhun S., Tryggvason A., Juhlin C.* A 3D seismic traveltimes tomography study of the shallow subsurface at the CO2SINK projects site, Ketzin, Germany // *EAGE 69th Conference & Exhibition.* 2007.
- Zelt C., Barton P.* Three-dimensional seismic refraction tomography: a comparison of two methods applied to data from Faeroe Basin // *J. Geophys. Res.* 1996. V. 103. P. 7187–7210.
- Zelt C.A., Smith R.* Seismic traveltimes inversion for 2-D crustal velocity structure // *Geophys. J. Int.* 1992. V. 108. P. 183–204.
- Zhang H., Thruher C.* Adaptive mesh seismic tomography based on tetrahedral and Voronoi diagrams: Application to Parkfield, California // *J. Geophys. Res.* 2005. V. 110, B04303.
- Zhang H., Thruher C.* Estimating the model resolution matrix for large seismic tomography problems based on Lanczos bidiagonalization with partial reorthogonalization // *Geophysical Journal International.* 2007. V. 170. № 1. P. 337–345.
- Zhang J., McMechen G.* Estimation of resolution and covariance for large matrix inversions // *Geophys. J. Int.* 1995. V. 121. № 2. P. 409–426.