

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи



Молодцов Дмитрий Михайлович

**СОВМЕСТНАЯ ИНВЕРСИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ,
МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКИХ И ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ
ДАНЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТРУКТУРНЫХ
ОГРАНИЧЕНИЙ**

Специальность 25.00.10 – геофизика,
геофизические методы поисков полезных ископаемых

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Троян

Санкт-Петербург – 2017

Оглавление

Введение	4
1 Теоретические основы и современное состояние комплексирования сейсмических и электромагнитных методов	8
1.1 Петрофизические предпосылки комплексирования сейсмических и электромагнитных данных	8
1.1.1 Модели упругости горных пород	8
1.1.2 Модели электропроводности горных пород	11
1.1.3 Модели, содержащие упругие и электрические параметры	12
1.2 Подходы к комплексированию сейсмических и электромагнитных данных ..	14
1.2.1 Совместная интерпретация	14
1.2.2 Инверсия с использованием опорной модели среды	17
1.2.3 Совместная инверсия	20
1.3 Выводы	31
2 Совместная инверсия магнитотеллурических данных и времен пробега сейсмических волн	33
2.1 Прямые задачи	33
2.1.1 Сейсмическая прямая задача	33
2.1.2 Магнитотеллурическая прямая задача	36
2.2 Дискретизация обратной задачи	40
2.3 Совместная инверсия методом Гаусса–Ньютона	43
2.3.1 О выборе весовых коэффициентов	46
2.4 Структурные ограничения	48
2.4.1 Кросс-градиент	48
2.4.2 Кросс-градиент со знаком	50
2.4.3 Разность нормированных градиентов	52
2.5 Стабилизирующие функционалы	54
2.6 Ограничения типа неравенства	56
2.7 Совместная инверсия методом множителей Лагранжа	57
2.8 Численные примеры	59
2.8.1 Модель пассивной континентальной окраины	59
2.8.2 Красное море	66
2.9 Выводы	73

3	Обобщенная совместная инверсия с ограничениями совместной разреженности	74
3.1	Совместная инверсия с использованием совместной полной вариации	75
3.2	Функционал с совместным минимальным носителем градиента	78
3.3	Обобщение на другие разреженные преобразования моделей	80
3.4	Двумерная совместная инверсия МТ импедансов, времен первых вступлений и гравиметрических данных	81
3.4.1	Гравиметрическая прямая задача	82
3.4.2	О связи плотности со скоростью продольных волн и удельным сопротивлением	84
3.4.3	Численный пример	85
3.5	Выводы	92
	Заключение	93
	Благодарности	94
	Список сокращений	95
	Список литературы	96

Введение

Актуальность темы исследований

Комплексирование методов является одним из важнейших аспектов прикладной геофизики. В частности, электромагнитные данные несут ценную информацию о вещественном составе Земли. Сильная зависимость удельного электрического сопротивления от водонасыщенности позволяет вести прямой поиск углеводородов методом CSEM (Controlled Source Electromagnetic Method). Однако, в силу довольно низкой разрешающей способности электромагнитных данных, для их осмысленной инверсии обычно требуется привлечение априорной информации о структуре изучаемых объектов, источником которой, как правило, является сейсморазведка. С другой стороны, электромагнитные методы, в частности, магнитотеллурический метод (МТ), и гравиметрия успешно применяются для изучения структуры геологических объектов, представляющих трудность для сейсморазведки: складчато-надвиговых поясов, областей развития соляной тектоники и траппового магматизма, сложной верхней части разреза.

Классическим подходом к комплексированию является совместная (геологическая) интерпретация геофизических моделей среды. Альтернативный подход заключается в постановке и решении обратной задачи, объединяющей несколько геофизических методов за счет введения связи между моделями среды. За данным подходом в англоязычной литературе закрепился термин *joint inversion* – *совместная инверсия*. Совместная инверсия позволяет, во-первых, уменьшить неопределенность решения обратной задачи каждого метода и, во-вторых, что важно для последующей совместной интерпретации, построить взаимно непротиворечивые модели среды.

В совместной инверсии сейсмических и электромагнитных данных, вследствие чрезвычайно сложной связи между упругими параметрами и удельным электрическим сопротивлением, наиболее актуальное направление основано на использовании *структурных ограничений*. Структурные ограничения формализуют априорное предположение о том, что различные геофизические модели среды имеют общие элементы структуры, обусловленные геологическими объектами. Помимо нетребовательности к априорной информации, важным свойством структурных ограничений является их универсальность относительно физики эксперимента: например, т.н. ограничение кросс-градиента успешно применялось к инверсии сейсмических, электромагнитных (в т.ч. георадиолокационных), гравиметрических и магнитометрических данных, а также в биомедицинской томографии.

Цель данной работы состоит в усовершенствовании методов совместной инверсии геофизических данных разной физической природы, в частности, времен пробега сейсмических волн, МТ и гравиметрических данных, со структурными ограничениями.

Для достижения поставленной цели требовалось решить следующие **задачи**:

1. Предложить улучшение структурного ограничения кросс-градиента применительно к совместной инверсии данных МТ и времен пробега сейсмических волн и на этой основе разработать алгоритм совместной инверсии.
2. Разработать алгоритм совместной инверсии, эффективно «масштабируемый» относительно числа комплексируемых геофизических методов, и дополнить комплекс из МТ и сейсмической томографии гравиметрией и гравитационной градиентометрией.
3. Реализовать разработанные алгоритмы в виде пакета компьютерных программ.
4. Сравнить результаты совместной и независимой инверсии синтетических данных, исследовать влияние выбора структурного ограничения на точность восстановления моделей среды.
5. Оценить влияние скоростной модели, получаемой в результате совместной инверсии, на построение сейсмического изображения посредством глубинной миграции до суммирования.
6. Разработать и программно реализовать многосеточный вариант алгоритма совместной инверсии для эффективной инверсии реальных данных.

Научная новизна:

1. Исследованы структурные ограничения, учитывающие знак корреляции между параметрами среды.
2. Предложен модифицированный функционал совместной полной вариации с тензорными весовыми функциями.
3. В качестве структурного ограничения совместной инверсии, предложен функционал с совместным минимальным носителем.
4. Разработан эффективный алгоритм обобщенной совместной инверсии, основанный на смешанной норме $L_{1,2}$ и функционале с совместным минимальным носителем.

Научная и практическая значимость

Предложенные алгоритмы совместной инверсии позволяют улучшить восстановление скорости, удельного сопротивления и плотности по геофизическим данным. Низкочастотные модели скорости необходимы для сейсмической миграции и обращения полных волновых полей. Модели плотности могут представлять интерес для динамической инверсии сейсмических данных, а модели удельного сопротивления – для инверсии данных CSEM, например, при прямом поиске углеводородов и детальном изучении коллекторов.

Одновременное знание скорости продольных волн, плотности и удельного сопротивления среды повышает достоверность геологической интерпретации и позволяет восстанавливать петрофизические параметры, такие как пористость и водонасыщенность. Разработанные структурные ограничения и алгоритмы совместной инверсии после незначительной модификации могут быть применены к другим комплексам геофизических методов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Комплексирование сейсмической томографии, магнитотеллурики, гравиметрии и гравитационной градиентометрии посредством совместной инверсии со структурными ограничениями улучшает восстановление скорости продольных волн, удельного сопротивления и плотности.
2. Структурные ограничения, учитывающие априорную информацию о знаке корреляции скорости и удельного сопротивления, позволяют улучшить восстановление данных параметров по сравнению с ограничением кросс-градиента.
3. Предложенный многосеточный алгоритм, использующий полностью независимые квазирегулярные сетки для сейсмической томографии, МТ и структурных ограничений, позволяет повысить эффективность совместной инверсии благодаря учету топографии/батиметрии, разной разрешающей способности, глубинности и геометрии систем наблюдений сейсмики и МТ.
4. Структурные ограничения, основанные на смешанной норме $L_{1,2}$ и функционале с совместным минимальным носителем, приводят к эффективному алгоритму двумерной совместной инверсии с произвольным количеством геофизических методов и моделей среды.

Апробация работы и достоверность полученных результатов

Результаты работы обсуждались и докладывались на семинарах Лаборатории динамики упругих сред СПбГУ, геофизического отдела Saudi Aramco EXPEC Advanced Research Center, Института математики Потсдамского университета ФРГ, Московского физико-технического института, института физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, кафедры геофизики Института наук о Земле СПбГУ, а также на следующих школах-семинарах и конференциях:

- Всероссийская школа-семинар имени М.Н. Бердичевского и Л.Л. Ваньяна по электромагнитным зондированиям Земли, 16–21 мая 2011, Петергоф;
- 81st SEG Annual Meeting, 19–23 сентября 2011, Сан-Антонио, Техас, США;
- 82nd SEG Annual Meeting, 4–9 ноября 2012, Лас-Вегас, Невада, США;
- Балтийская школа-семинар «Петрофизическое моделирование осадочных пород», 15–19 сентября 2014, Петергоф;

- 17-я конференция по вопросам геологоразведки и разработки месторождений нефти и газа «Геомодель-2015», 7–10 сентября 2015, Геленджик;
- 78th EAGE Conference & Exhibition, 30 мая – 2 июня 2016, Вена, Австрия;
- SEG workshop “Multi-Physics Imaging for Integrated Exploration and Field Development”, 4–6 октября 2016, Дубай, ОАЭ;
- Российская нефтегазовая техническая конференция и выставка SPE, 24–26 октября 2016, Москва.

О достоверности разработанных методов и программного обеспечения свидетельствуют численные эксперименты по инверсии синтетических данных, в результате которых получено корректное восстановление известных моделей среды.

Личный вклад

Автором самостоятельно были разработаны:

- оригинальные алгоритмы совместной инверсии сейсмических, МТ и гравиметрических данных;
- программный код на языке C++, реализующий данные алгоритмы;
- программный код на языке C++ (с использованием программной платформы Qt), реализующий интерактивное задание и редактирование двумерных многопараметрических моделей среды с квазирегулярной сеткой.

С помощью разработанного программного обеспечения автором были проведены численные эксперименты по инверсии геофизических данных. Все изложенные в диссертации оригинальные результаты получены автором самостоятельно.

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в 10 публикациях, включая 3 публикации в изданиях, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 102 страницы, включая 42 рисунка. Список литературы содержит 111 наименований.

Глава 1

Теоретические основы и современное состояние комплексирования сейсмических и электромагнитных методов

1.1 Петрофизические предпосылки комплексирования сейсмических и электромагнитных данных

Чтобы ставить вопрос о комплексировании сейсморазведки и электроразведки, в частности магнитотеллурического метода, следует понять, как определяемые по данным методам геофизические свойства среды – упругие параметры и удельная электропроводность, связаны с фундаментальными петрофизическими свойствами горных пород, их составом и структурой. К настоящему моменту не существует законченной физической теории, связывающей удельную электрическую проводимость и упругие параметры геологической среды. Однако результаты геофизических экспериментов указывают на наличие корреляции между высокими значениями электропроводности и низкими значениями скорости для высокопористых и трещиноватых водонасыщенных горных пород верхней части земной коры и частично расплавленных горных пород верхней мантии [Kozlovskaya, 2001]. Таким образом, двухфазные твердо-жидкие смеси традиционно рассматриваются как класс объектов, для которых может быть установлена связь между электрическими и упругими свойствами.

1.1.1 Модели упругости горных пород

Существует довольно много теоретических и эмпирико-теоретических подходов к описанию упругих параметров многофазных смесей. Ограничимся рассмотрением простейших изотропных линейных моделей упругости.

В сейсморазведке иногда используется эвристическая формула среднего времени (*Wyllie's time average equation*), получающаяся из предположения, что время пробега волны в

фазовой смеси равно сумме времен пробега в каждой фазе: $v = \frac{v_0 v_s}{v_0 + \varphi(v_s - v_0)}$, где v_0 – скорость

в жидкой фазе, v_s – скорость в твердой фазе, φ – пористость [The Rock Physics Handbook, 1998].

Очевидно, что эта формула была бы точной, если бы фазы имели форму плоскопараллельных

слоев, перпендикулярных направлению распространения волны, толщина которых много больше длины волны, чего на самом деле в сейсморазведке не бывает. Тем не менее, формула часто применяется для грубой оценки эффективной скорости [Физические свойства горных пород..., 1976].

Чтобы теоретически оценить эффективные упругие модули фазовой смеси, очевидно, нужно знать: 1) упругие модули каждой фазы, 2) относительный объем каждой фазы, 3) геометрию пор и зерен. Простейший подход основан на том, что мы пренебрегаем геометрическим фактором, в этом случае мы можем получить верхнюю и нижнюю границы эффективных модулей. Простейшей оценкой такого рода являются границы Фойгта и Рёйсса (*Voigt and Reuss bounds*) [The Rock Physics Handbook, 1998]. Верхняя граница Фойгта эффективного упругого модуля M смеси n фаз:

$$M_V = \sum_{i=1}^n f_i M_i,$$

где f_i – относительный объем i -й фазы, M_i – упругий модуль i -й фазы. Граница Фойгта имеет смысл отношения среднего напряжения к средней деформации, когда напряжение одинаково для всех фаз. Нижняя граница Рёйсса

$$M_R = \left(\sum_{i=1}^n \frac{f_i}{M_i} \right)^{-1}$$

дает отношение среднего напряжения к средней деформации, когда деформация одинакова для всех фаз. Наиболее точный интервал, который можно получить без знания геометрии пор, задается границами Хашина–Штрикмана (*Hashin–Shtrikman bounds*) [The Rock Physics Handbook, 1998]. Для случая двух фаз они имеют вид

$$K^{HS\pm} = K_1 + f_2 \left(\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{f_1}{K_1 + \frac{4}{3}\mu_1} \right)^{-1},$$

$$\mu^{HS\pm} = \mu_1 + f_2 \left(\frac{1}{\mu_2 - \mu_1} + \frac{2f_1(K_1 + 2\mu_1)}{5\mu_1(K_1 + \frac{4}{3}\mu_1)} \right)^{-1},$$

где f_i – относительный объем фазы, μ_i – модуль сдвига, K_i – модуль всестороннего сжатия фазы. Верхняя граница, обозначаемая $^{HS+}$, получается, когда индекс 1 соответствует твердой фазе, а индекс 2 – жидкой. Нижняя граница, обозначаемая $^{HS-}$, получается перестановкой индексов. Физический смысл границ Хашина–Штрикмана состоит в следующем. Пространство заполнено шарами всевозможных радиусов, каждый шар состоит из ядра материала 2, окруженного сферическим слоем материала 1, относительный объем ядра и оболочки постоянен для всех шаров, и равен f_2 и f_1 соответственно. Таким образом, верхняя граница соответствует изолированным шаровым порам в твердом скелете, а нижняя граница – взвеси

шаровых зерен в жидкости. Нижняя граница Хашина–Штрикмана в случае, когда одна из фаз является жидкостью или газом, т.е. $\mu_1 = 0$, совпадает с границей Рёйсса.

Рассматривая твердо-жидкие смеси, следует упомянуть теорию Гассмана–Био (*Gassmann–Biot*), которая позволяет оценить упругие модули породы, насыщенной жидкостью на основании известных модулей сухой породы [The Rock Physics Handbook, 1998]. Теория Гассмана основана на предположении, что в низкочастотной области, когда движение жидкости контролируется вязкостью, относительным движением твердой и жидкой фазы можно пренебречь. Следовательно, модуль сдвига породы, насыщенной жидкостью, равен модулю сдвига твердого скелета: $\mu_{sat} = \mu_{dry}$. Модуль объемного сжатия K_{sat} получается из уравнения

$$\frac{K_{sat}}{K_0 - K_{sat}} = \frac{K_{dry}}{K_0 - K_{dry}} + \frac{K_f}{\varphi(K_0 - K_f)}, \quad (1.1)$$

где K_{dry} – модуль объемного сжатия твердого скелета, K_0 – модуль объемного сжатия твердой фазы, K_f – модуль объемного сжатия жидкой фазы, φ – пористость. Уравнение (1.1) можно переписать через границу Рёйсса K_R :

$$\frac{K_{sat}}{K_0 - K_{sat}} = \frac{K_{dry}}{K_0 - K_{dry}} + \frac{K_R}{K_0 - K_R}.$$

Уравнения Гассмана применимы при частотах, меньших характеристической частоты ω_c , введенной Био:

$$\omega_c = \frac{\eta_f \varphi}{\rho_f k},$$

где η_f – коэффициент динамической вязкости жидкости, ρ_f – плотность жидкости, φ – пористость, k – коэффициент фильтрации [Kozlovskaya, 2001].

Важный класс составляют модели однородной упругой среды с изолированными порами или трещинами (как правило, эллипсоидальной формы), заполненными жидкостью или газом. Данный класс моделей позволяет описывать анизотропию упругих постоянных горных пород, связанную с ориентацией включений [Kozlovskaya, 2001].

Другим важным классом моделей, включающих геометрию порового пространства, являются модели упаковки упругих шаров [Сейсморазведка..., 1981], часто используемые для описания рыхлых горных пород.

1.1.2 Модели электропроводности горных пород

Поскольку большинство породообразующих минералов является диэлектриками, и только некоторые рудные минералы проявляют полупроводниковые свойства, электропроводность твердого скелета горных пород, как правило, пренебрежимо мала по сравнению с ионной электропроводностью жидкости, заполняющей поровое пространство [Физические свойства горных пород..., 1976; Kozlovskaya, 2001].

Одна из наиболее часто используемых моделей удельной электропроводности твердо-жидких смесей описывается уравнением Бруггемана–Ханаи–Сена (*Bruggeman–Hanai–Sen (BHS) equation*):

$$\sigma = \sigma_0 \left(\phi \left(1 - \frac{\sigma_{eff}}{\sigma_0} \right) \left(1 - \frac{\sigma_{eff}}{\sigma} \right)^{-1} \right)^m, \quad (1.2)$$

где σ_0 – удельная электрическая проводимость жидкой фазы, ϕ – пористость, m – параметр, зависящий от геометрии зерен, $\sigma_{eff} = \frac{2\Sigma}{r}$, где Σ – (реактивная) поверхностная проводимость зерна радиуса r , окруженного двойным электрическим слоем. Параметр m принимает значения от $3/2$ до $5/2$, часто для всех случаев используют аппроксимацию $m = 2$, при этом уравнение (1.2) сводится к квадратному. В случаях, когда поверхностная проводимость пренебрежимо мала по сравнению с проводимостью раствора, т.е. $\sigma_{eff} \ll \sigma_0 \approx \sigma$, уравнение BHS переходит в соотношение, известное как закон Арчи–Дахнова (*Archie's law*):

$$\sigma = \sigma_0 \phi^m.$$

Закон Арчи–Дахнова первоначально был установлен эмпирически для терригенных осадочных пород коллекторов, однако он также с успехом применяется к трещиноватым кристаллическим и осадочным породам [Kozlovskaya, 2001]. Модели BHS и Арчи–Дахнова описывают изотропную электропроводность.

Для электропроводности, так же как и для упругости, можно построить границы Хашина–Штрикмана:

$$\sigma^{HS\pm} = \sigma_1 + f_2 \left(\frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} + \frac{f_1}{3\sigma_1} \right)^{-1},$$

где f_i – относительный объем фазы, σ_i – удельная электропроводность фазы. Верхняя граница, обозначаемая $^{HS+}$, получается, когда индекс 1 соответствует жидкой фазе, а индекс 2 – твердой. Нижняя граница, обозначаемая $^{HS-}$, получается перестановкой индексов. Верхняя граница

соответствует полностью сообщающимся порам, а нижняя – полностью замкнутым. Границы Хашина–Штрикмана описывают изотропную электропроводность без учета влияния двойного электрического слоя. Важный класс составляют фрактальные модели электропроводности [Крылов и Бобров, 2004]. Самоподобная модель анизотропной электропроводности получена в работе [Bahr, 1997] на основе границ Хашина–Штрикмана.

1.1.3 Модели, содержащие упругие и электрические параметры

В работе [Carcione and Ursin, 2007] подробно исследовано получение явных соотношений между скоростью сейсмических волн и удельной электропроводностью. Основной подход заключается в выражении зависимости $\sigma(v)$ из попарной комбинации различных моделей упругости и электропроводности, параметризованных пористостью. Для упругости рассматриваются модели среднего времени, Хашина–Штрикмана, Гассмана; для электропроводности – модели BHS и Арчи, Хашина–Штрикмана, а также самоподобная модель Сена. Исследуются случаи, когда жидкая фаза является диэлектриком (модель нефтенасыщенного песчаника), и проводником (модель вмещающих пород). Расчеты сравниваются с данными каротажа скважин в Северном море. Все измерения ложатся в границы Хашина–Штрикмана. Наилучшее совпадение с измеренной скоростью продольных волн получается для модели Гассмана, с измеренной электропроводностью – для самоподобной модели. Границы Хашина–Штрикмана (рис.1.1) наглядно демонстрируют общую тенденцию: для пород, насыщенных диэлектриком, удельная электропроводность растет с увеличением скорости продольных волн, для пород, насыщенных проводящим раствором, наблюдается обратная зависимость.

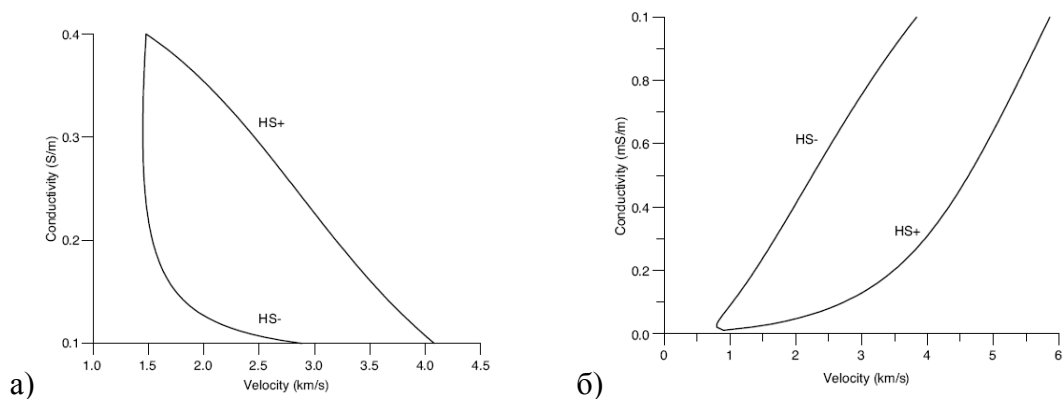


Рис. 1.1. Границы Хашина–Штрикмана в координатах (v_p, σ) для: а) глинистого сланца, насыщенного солевым раствором, и б) песчаника, насыщенного нефтью [Carcione and Ursin, 2007].

В работе [Нап, 2010] теоретически рассчитаны скорость продольных волн и удельное сопротивление для трехфазной модели песчаника: модель состоит из эллипсоидальных включений кварца и солевого раствора с дисперсными глинистыми частицами. Приводятся результаты моделирования для различного содержания глины, различной пористости и геометрии (отношения осей эллипсоидов). Приведены результаты измерений на 67 образцах песчаников (рис.1.2), насыщенных раствором поваренной соли с концентрацией 35 г/л при давлении 8 МПа. Скорость измерялась на частоте 1 МГц, а сопротивление на частоте 2 Гц. Из рис.1.2.б видно, что с увеличением содержания глины скорость уменьшается, а сопротивление увеличивается. Увеличение сопротивления авторы объясняют тем, что частицы глины блокируют поры, причем этот эффект оказывается более значительным, чем уменьшение сопротивления за счет поверхностной проводимости глины. Аналогичное смещение кривой наблюдается при уменьшении отношения осей зерен, что авторы объясняют большей извилистостью пор и большей сжимаемостью скелета.

Как скорости, так и удельное сопротивление увеличиваются с увеличением давления, что связано с закрытием пор и трещин [Сейсморазведка..., 1981; Kozlovskaya, 2001]. Частичное плавление пород мантии в астеносфере отражается как в уменьшении удельного сопротивления, так и в уменьшении скоростей сейсмических волн. При глубинных исследованиях наблюдается корреляция зон пониженных скоростей и пониженного удельного сопротивления в геодинамически активных участках земной коры, связанная с дегидратацией и частичным плавлением горных пород. В частности, такая корреляция отмечается по региональным профилям в Тянь-Шане [Vanuy and Gliko, 1999] и в Карпатах [Бердичевский и Дмитриев, 2009].

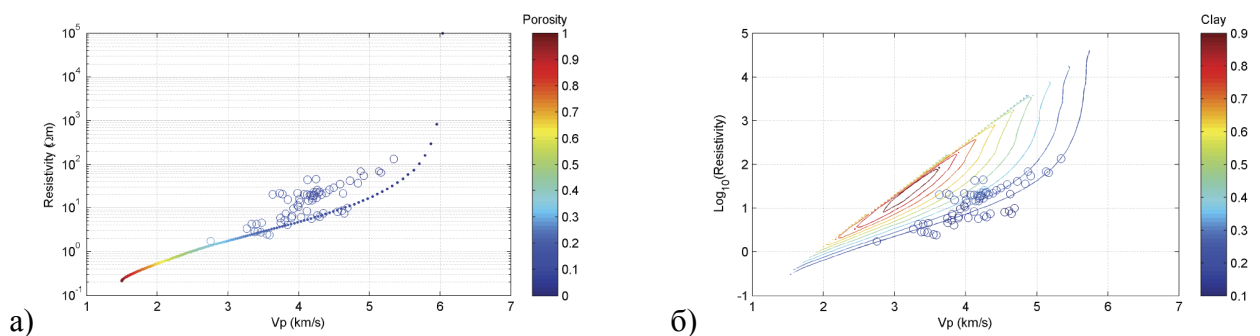


Рис. 1.2. Сравнение многофазных моделей с результатами измерений на образцах: а) двухфазная модель со сферическими зёрнами, не содержащая глины, цветом показано изменение пористости, б) трехфазная модель с той же геометрией, цветом показано объемное содержание глины [Нап, 2010].

Из приведенного краткого обзора можно заключить, что основным фактором, влияющим на удельную электропроводность и скорость сейсмических волн в земной коре, является пористость. При этом в региональном масштабе, а также в верхней части разреза [Meju et al., 2003], поровое пространство заполнено проводящим раствором, что приводит к положительной корреляции между параметрами. Обратная ситуация характерна для нефтенасыщенных пород, что учитывается при детальном изучении коллекторов [Hu et al., 2009].

1.2 Подходы к комплексированию сейсмических и электромагнитных данных

1.2.1 Совместная интерпретация

По-видимому, это исторически первый и наиболее часто применяемый подход к комплексированию сейсмических и электромагнитных данных. Для данных, собранных на одном участке, или на одном профиле, сначала выполняют однометодные инверсии, а затем интерпретируют полученные модели скорости, или акустического импеданса, и удельного сопротивления в терминах геологического строения участка. Обычно интерпретация проводится экспертом, с привлечением дополнительной геологической информации. Рассмотрим несколько формальных подходов к совместному анализу сейсмических и геоэлектрических моделей.

В основе большинства методов совместной интерпретации лежит классификация. Под классификацией понимается выделение в моделях среды областей, характеризующихся определенным соотношением между скоростью и удельным сопротивлением. При этом, как правило, предполагается, что геологические тела, такие как пласты и интрузии, различаются по данным физическим параметрам, а внутри тел физические параметры, напротив, почти постоянны. Согласно обзору, приведенному в книге [Комплексный анализ..., 2011], для совместного анализа скорости и удельного сопротивления применялись, по меньшей мере, следующие методы классификации: гауссова кластеризация, метод k -средних и классификация с использованием нейронных сетей. Первые два метода являются разновидностями вероятностной классификации.

Гауссова кластеризация основывается на гипотезе о том, что внутри каждого кластера параметры имеют нормальное распределение. Сама кластеризация заключается в решении своеобразной обратной задачи: выбирается количество кластеров, для каждого кластера определяется математическое ожидание и матрица ковариации. Число кластеров по смыслу аналогично параметру регуляризации, и определяется с помощью метода L -кривой. Данный

метод использовался в работе [Bedrosian et al., 2007], посвященной изучению трансформного разлома Арава, разделяющего Африканскую и Аравийскую литосферные плиты. Сначала выполнялись независимые инверсии времен первых вступлений и магнитотеллурических данных по профилю, проложенному вкострости разлома. Полученные модели удельного сопротивления и скорости продольных волн интерполировались на одну сетку и, с учетом оценок точности геофизической инверсии, строилась совместная плотность вероятности распределения параметров, и выделялись кластеры (рис. 1.3).

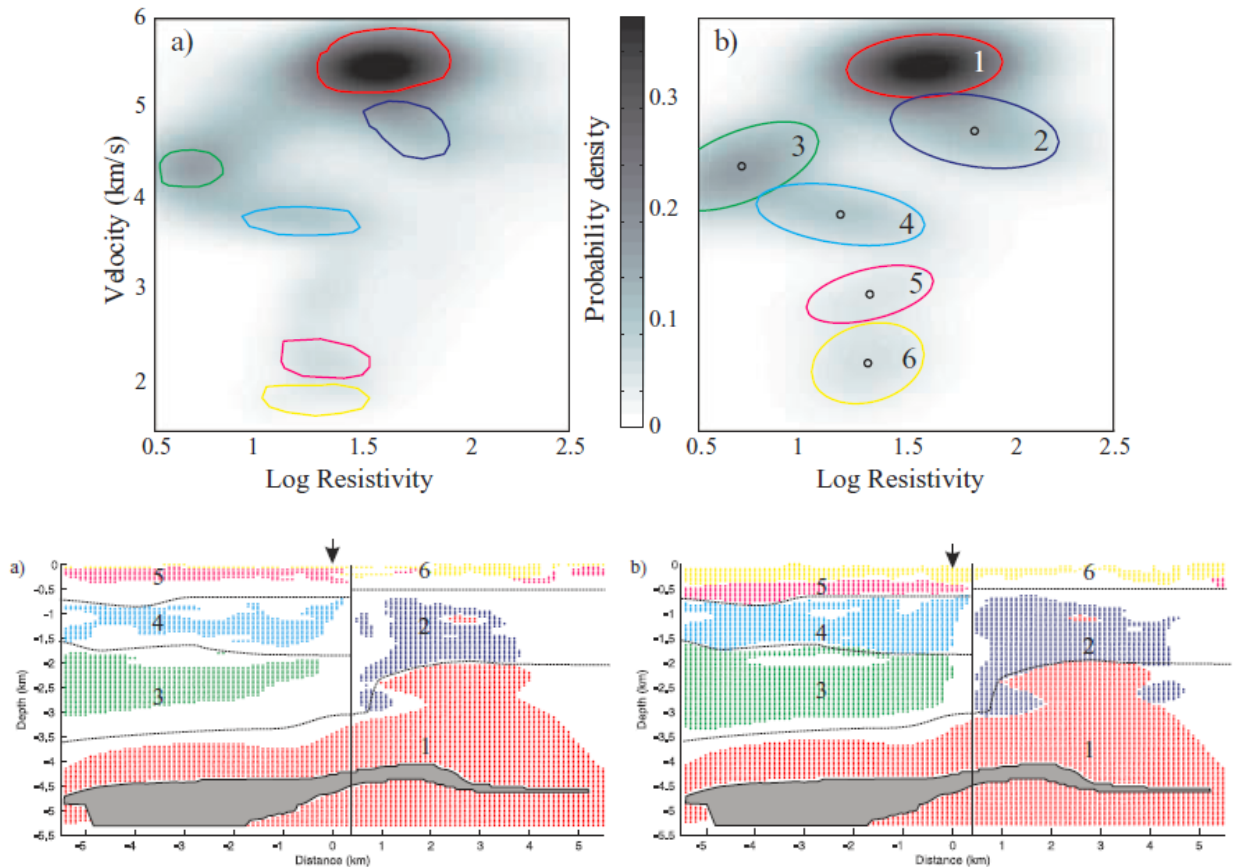


Рис. 1.3. Гауссова кластеризация разрезов скорости и удельного сопротивления для профиля через разлом Арава. (а) Ручная кластеризация. (б) Метод Левенберга–Марквардта [Bedrosian et al., 2007].

Метод k -средних применялся в работе [Di Giuseppe et al., 2014] для совместного анализа малоглубинных моделей скорости и удельного сопротивления. Разрезы физических свойств были получены путем независимой инверсии данных CSAMT (аудиомагнитотеллурического метода с контролируемым источником) и времен первых вступлений. Метод интерпретации в целом аналогичен подходу [Bedrosian et al., 2007], с той разницей, что метод k -средних не накладывает ограничений на вид распределения внутри кластера. Вместо этого задается k

центроидов (центров масс кластеров) на плоскости скорость–УЭС, и минимизируется суммарное расстояние между центроидами и входящими в кластер модельными точками.

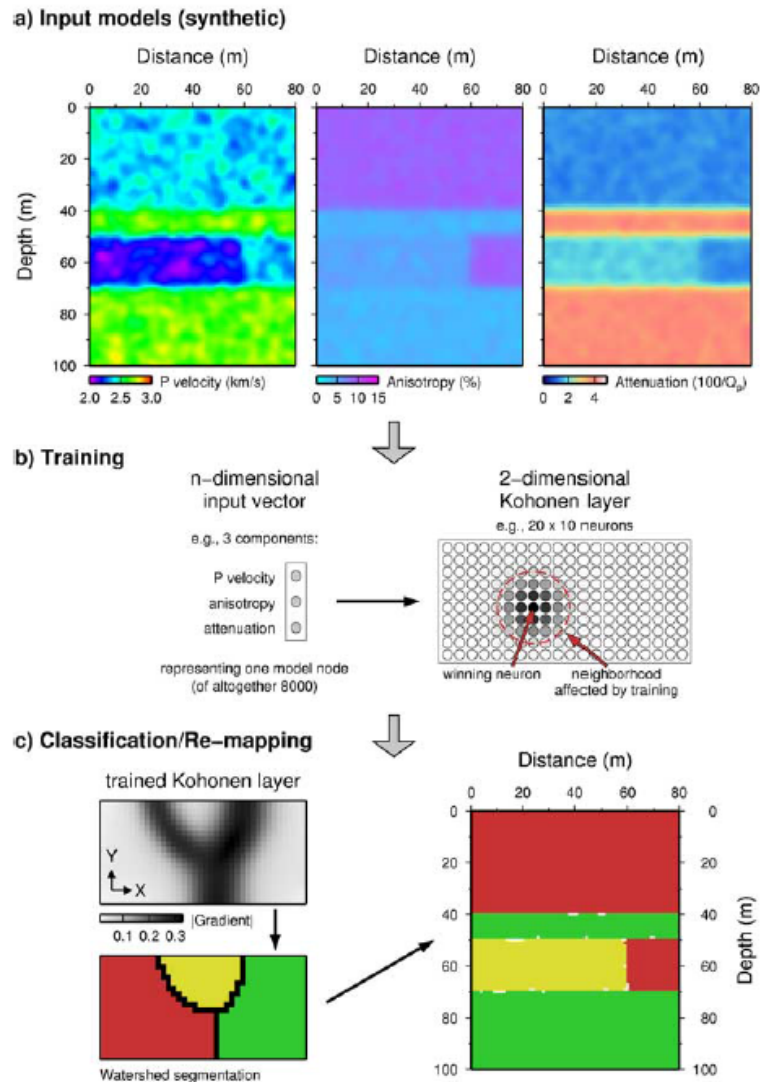


Рис. 1.4. Кластеризация модели среды с помощью карты Кохонена. (а) Входные модели сейсмических параметров среды. (б) Процесс обучения нейросети. (с) Классификация и обратное отображение [Bauer et al, 2008].

Нейросетевая классификация отличается от вероятностных методов тем, что использует априорную информацию о распределении параметров, что достигается обучением нейронной сети. Примером искусственной нейронной сети может служить самоорганизующаяся карта Кохонена, использовавшаяся в работе [Bauer et al, 2008] для интерпретации сейсмических изображений межскважинного пространства с целью установить присутствие в разрезе газовых гидратов. Аналогичный подход использовался в работе [Спичак и др., 2008] для кластеризации разрезов плотности, скорости продольных волн и удельного сопротивления по региональному профилю 1-СБ в Восточной Сибири. Принцип классификации разреза с помощью нейросети

Кохонена проиллюстрирован на рис. 1.4. Нейронная сеть Кохонена состоит из двух слоев нейронов, каждый нейрон первого слоя соединен с каждым нейроном второго слоя. Нейроны входного слоя соответствуют физическим параметрам модели среды, нейроны выходного слоя соответствуют кластерам. Особенностью обучения сети Кохонена является отсутствие необходимости сравнения нейронов выходного слоя с эталонными значениями, от интерпретатора требуется лишь задание предполагаемого числа кластеров.

1.2.2 Инверсия с использованием опорной модели среды

В ряде работ сейсмические изображения среды используются для регуляризации электромагнитной инверсии. Это позволяет привнести высокочастотную информацию в электромагнитное изображение. Сейсмическая модель при этом считается точной и фиксированной. Так, в статье [Saunders et al., 2005] рассмотрена регуляризация обратной задачи межскважинной электрической томографии на постоянном токе. Роль регуляризирующего оператора играет оператор анизотропной диффузии, при этом тензор диффузии строится на основе кривизны некоторой априорной безразмерной модели, например, нормированной скорости.

В статье [Brown et al., 2012] рассмотрена одномерная инверсия данных CSEM, введен стабилизирующий функционал, напоминающий функционал минимального носителя градиента (MGS) [Portniaguine and Zhdanov, 1999], но включающий помимо удельного сопротивления ρ скорость продольных волн v_p , полученную в результате инверсии полного сейсмического волнового поля:

$$R_{\text{smgs}}(\rho) = \left\| \frac{\partial_z \rho}{\sqrt{(\partial_z v_p)^2 + \varepsilon^2}} \right\|^2. \quad (1.3)$$

Сравнение данного подхода со сглаживающей оккамовской инверсией (с использованием известного алгоритма Occam) и инверсией с обычным MGS-функционалом приведено на рис. 1.5. Похожий способ рассмотрен в работе [Hansen et al., 2009] применительно к двумерной инверсии CSEM, но вместо MGS-функционала авторы использовали полную вариацию с опорной моделью удельного сопротивления, построенной в результате структурной интерпретации сейсмического разреза.

Следует отметить, что рассмотренные выше методы регуляризации накладывают «мягкие» ограничения на модель удельного сопротивления – то, насколько резкими будут

априорно заданные «сейсмические» границы в модели удельного сопротивления, зависит от величины параметра регуляризации, однако геометрия этих границ является фиксированной. При этом сейсмическое изображение, несмотря на более высокое, по сравнению с электромагнитным, разрешение, конечно, не является точным – положение и форма отражающих границ зависит от скоростной модели, которая потенциально может быть улучшена за счет электромагнитных данных. С этой точки зрения несколько более гибким подходом является инверсия электромагнитных данных с полигональной параметризацией модели («полигональная инверсия»), в которой начальная геометрия границ строится на основании интерпретации сейсмических изображений и уточняется в ходе инверсии. Пример применения такого подхода можно найти в работе [Zerilli et al., 2011] (рис. 1.6). Теория инверсии электромагнитных данных с использованием полигональной параметризации подробно рассмотрена в обзорной статье [Abubakar et al., 2009].

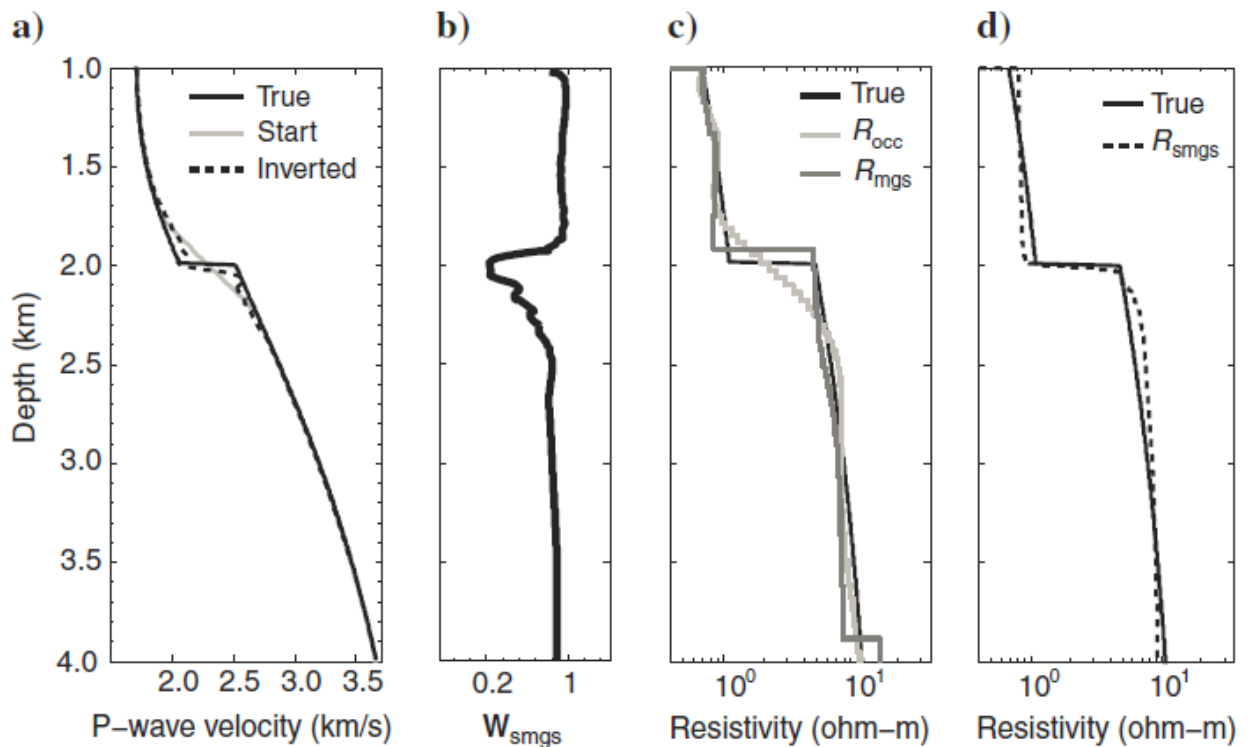


Рис. 1.5. Простой синтетический пример для CSEM с «сейсмической» регуляризацией. (a) Истинная, начальная и восстановленная модели скорости продольных волн. (b) Градиент стабилизирующего функционала (1.3) с учетом восстановленной скорости. (c) Истинная модель удельного сопротивления, результаты оккамовской инверсии и инверсии с MGS-функционалом. (d) Результат инверсии с функционалом (1.3) [Brown et al., 2012].

Регуляризация сейсмической инверсии с использованием априорно заданных моделей удельного сопротивления исследована гораздо хуже. Такой подход кажется не лишенным перспективы. В инверсии полных сейсмических волновых полей чрезвычайно остро стоит проблема нехватки низких частот; в настоящее время для построения низкочастотной стартовой модели скорости требуется считывание времен первых вступлений, являющееся плохо автоматизируемой процедурой. Теоретически, информацию о низкочастотной структуре среды могут предоставить электромагнитные данные, разрешающая способность которых близка к разрешающей способности томографии на первых вступлениях.

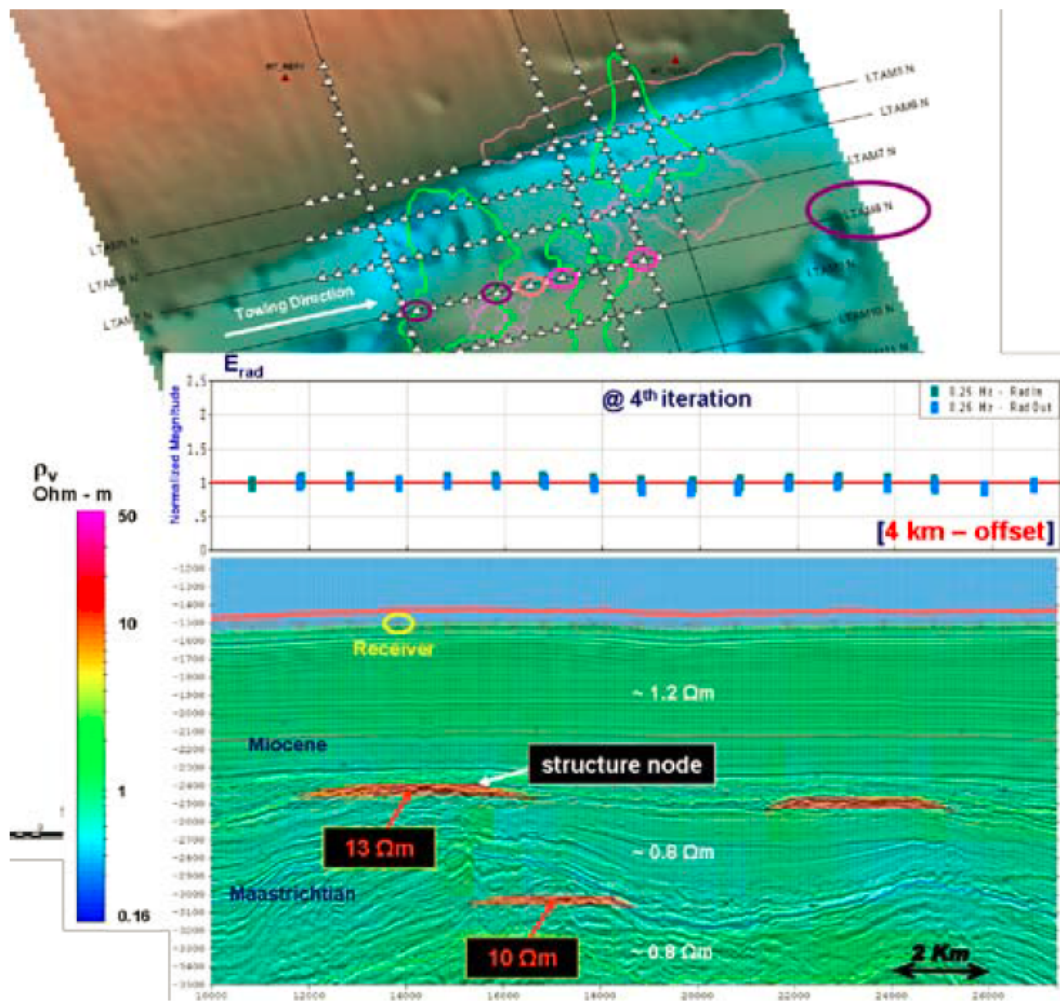


Рис. 1.6. Результат полигональной инверсии данных CSEM, собранных у побережья Бразилии. На модель вертикальной компоненты удельного сопротивления наложен глубинный сейсмический разрез. Сейсмический разрез использовался для построения начального полигонального каркаса, начальные значения удельного сопротивления были получены в результате инверсии на регулярной сетке [Zerilli et al., 2011].

1.2.3 Совместная инверсия

Альтернативой апостериорной совместной интерпретации является совместная инверсия – комплексирование на этапе решения обратной задачи. Геофизические обратные задачи являются некорректно-поставленными, для их решения необходима регуляризация, ограничивающая множество эквивалентных решений за счет привлечения априорной информации. Совместная инверсия позволяет ограничить множество решений за счет обмена информацией между отдельными обратными задачами.

Постановка задачи

Рассмотрим обратные задачи для сейсмического и электромагнитного экспериментов (для простоты сделаем это сразу в дискретной постановке):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_s &= A_s(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\varepsilon}_s, \\ \mathbf{u}_{EM} &= A_{EM}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{EM},\end{aligned}\tag{1.4}$$

где $\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_{EM}$ – векторы данных, A_s, A_{EM} – операторы прямой задачи, \mathbf{s}, \mathbf{r} – искомые векторы параметров, описывающие сейсмическую и электромагнитную модели среды, $\boldsymbol{\varepsilon}_s, \boldsymbol{\varepsilon}_{EM}$ – случайные компоненты данных. Основываясь на теории регуляризации некорректно поставленных задач [Тихонов и Арсенин, 1974], каждую из задач (1.4) можно свести к задаче минимизации параметрического функционала. К аналогичному результату можно прийти, основываясь на байесовской статистике [Яновская и Порохова, 2004; Троян и Киселев, 2000; Tarantola, 2005]. Тогда совместная инверсия сводится к задаче многокритериальной оптимизации [Березовский и др., 1989] с дополнительным ограничением, устанавливающим связь между сейсмической и электромагнитной моделями среды:

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{s}} \Phi_{d,s}(\mathbf{s}, \mathbf{u}_s) + \alpha_s(\boldsymbol{\varepsilon}_s) \Phi_s(\mathbf{s}), \\ \min_{\mathbf{r}} \Phi_{d,EM}(\mathbf{r}, \mathbf{u}_{EM}) + \alpha_{EM}(\boldsymbol{\varepsilon}_{EM}) \Phi_{EM}(\mathbf{r}) \\ \text{при условии } \mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Здесь $\Phi_{d,s}(\mathbf{s}, \mathbf{u}_s), \Phi_{d,EM}(\mathbf{r}, \mathbf{u}_{EM})$ – функционалы невязки, $\Phi_s(s), \Phi_{EM}(r)$ – стабилизирующие функционалы, $\alpha_s(\boldsymbol{\varepsilon}_s), \alpha_{EM}(\boldsymbol{\varepsilon}_{EM})$ – параметры регуляризации. Связывающее ограничение $\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \mathbf{0}$ не обязательно должно выполняться точно, как будет показано ниже, во многих

случаях оно накладывается посредством минимизации нормы $\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ (рис.1.7). Когда статистические свойства случайных компонент $\boldsymbol{\varepsilon}_s, \boldsymbol{\varepsilon}_{EM}$ известны, решением задачи (1.5) считаются модели, удовлетворяющие принципу невязки: $\Phi_{d,s}(s, \mathbf{u}_s) \leq \delta_s(\boldsymbol{\varepsilon}_s)$, $\Phi_{d,EM}(r, \mathbf{u}_{EM}) \leq \delta_{EM}(\boldsymbol{\varepsilon}_{EM})$; например, в случае нормально распределенной случайной компоненты $\boldsymbol{\varepsilon}_s \sim N(0,1)$, δ_s равно размерности вектора данных. В противном случае используется один из критериев оптимальности, например, критерий Парето. Решение задачи (1.5) называется оптимальным по Парето, если невозможно уменьшить значение одного параметрического функционала и одновременно не увеличить значение второго (рис.1.8).

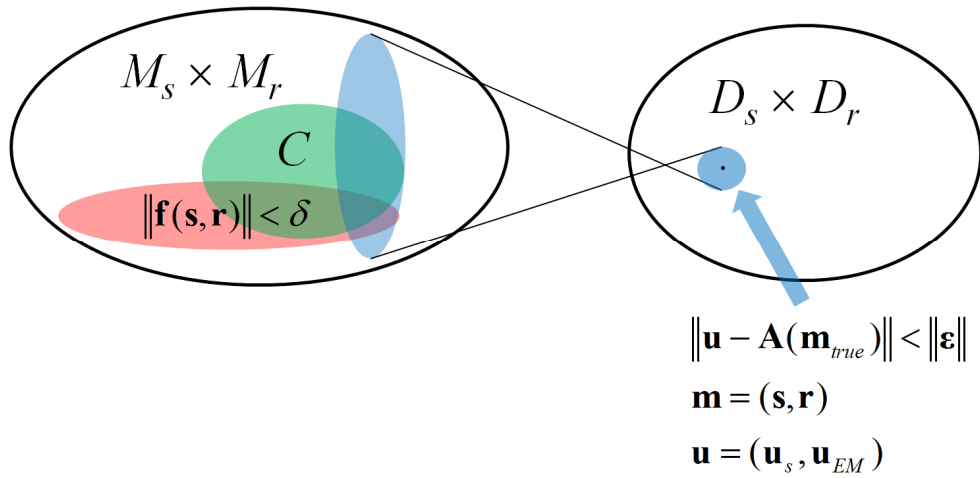


Рис. 1.7. К постановке совместной обратной задачи. M_s и M_r – пространства моделей, D_s и D_r – пространства данных, C – множество корректности [Тихонов и Арсенин, 1974], \times обозначает прямое произведение линейных пространств. Связь между моделями дополнительно ограничивает множество возможных решений.

Построение множества Парето-оптимальных решений совместной обратной задачи небольшой размерности было выполнено в работе [Kozlovskaya et al., 2007]. В работе [Moorkamp et al., 2007] близкий подход с использованием генетического алгоритма был применен к одномерной инверсии сейсмических и магнитотеллурических данных с целью изучения мантийной части литосферы.

Алгоритм локальной многокритериальной оптимизации для совместной инверсии сейсмических данных и данных CSEM, являющийся модификацией алгоритма Гаусса–Ньютона, предложен в работе [Semerci et al., 2014]. Была рассмотрена синтетическая модель пористой среды, описываемая теорией Арчи и теорией Гассмана, неизвестными параметрами, общими для сейсмоки и CSEM, являлись пористость и водонасыщенность. Было

продемонстрировано, что если один из наборов данных содержит существенно более высокий уровень шума, совместная инверсия является более устойчивой в многокритериальной постановке.

Применительно к совместной инверсии значительно большее распространение, по сравнению с многокритериальной оптимизацией, получил подход, основанный на скаляризации задачи (1.5). В этом случае минимизируется взвешенная сумма исходных параметрических функционалов:

$$\min_{(\mathbf{s}, \mathbf{r})} w [\Phi_{d,s}(\mathbf{s}, \mathbf{u}_s) + \alpha_s(\epsilon_s) \Phi_s(\mathbf{s})] + (1-w) [\Phi_{d,EM}(\mathbf{r}, \mathbf{u}_{EM}) + \alpha_{EM}(\epsilon_{EM}) \Phi_{EM}(\mathbf{r})] \quad (1.6)$$

при условии $\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

Появляется дополнительный свободный параметр – весовой коэффициент $w \in (0,1)$, который, во-первых, позволяет привести два функционала к одному масштабу, а во-вторых, позволяет контролировать относительную важность каждого. Связь задачи (1.6) и многокритериальной оптимизации проиллюстрирована на рис.1.8b. Из рисунка ясно влияние выбора весового коэффициента на решение: при любом значении w решение (1.6) будет Парето-оптимальным, однако, в случае «плохого» w значение одного из функционалов может оказаться недопустимо большим. Частично проблема выбора w решается правильным масштабированием всех переменных [De Stefano et al., 2011]. В ряде работ, например, в работе [Lelièvre et al., 2012], делались попытки предложить эвристический алгоритм выбора значений весовых коэффициентов. Также, исходя из аналогии с задачей выбора параметра регуляризации, кажется перспективным применение метода L-кривой [Hansen, 1992].

Если решать задачу (1.6) методом блочно-покоординатного спуска, с блоками \mathbf{s} и \mathbf{r} , как это делается, например, в работах [Haber and Holtzman Gazit, 2013; Hu et al., 2009; Heincke et al., 2010], алгоритм становится похож на многопараметрическую оптимизацию. Такой подход часто называется альтернирующей совместной инверсией (*alternating joint inversion*), в противопоставление одновременной совместной инверсии (*simultaneous joint inversion*). Альтернирующая совместная инверсия несколько проще в реализации, поскольку она позволяет в большей мере использовать уже имеющиеся программы инверсии для отдельных методов: итерация инверсии для каждого метода сводится к линеаризованной инверсии с опорной моделью. Проблемы выбора относительного веса функционалов при этом не возникает, однако, метод блочно-покоординатного спуска характеризуется медленной сходимостью.

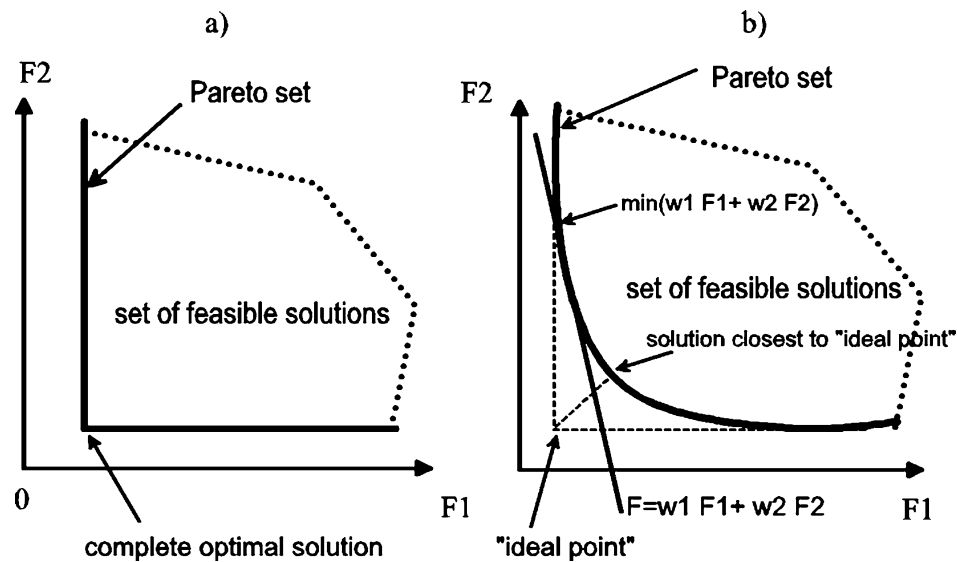


Рис. 1.8. Две иллюстрации множества Парето для функционалов F_1 и F_2 . (a) В данном случае существует идеальное решение. (b) В данном случае наилучшим обычно считается решение, ближайшее к идеальному. Минимизация взвешенной суммы функционалов приводит к некоторому решению из множества Парето, зависящему от весов w_1 и w_2 [Kozlovskaya et al., 2007].

Теперь рассмотрим подробнее связующее ограничение в задачах (1.5) и (1.6). Оно включает в себе априорную информацию о связи между моделями скорости и удельного сопротивления. При наличии сети скважин, по которым методом каротажа или исследования керна установлены скорость и удельное сопротивление, или получены другие параметры, позволяющие построить петрофизическую модель среды, эта информация может быть количественной (детерминированной или статистической) [Гольцман и Калинина, 1973; Hoversten et al., 2006; Haber and Holtzman Gazit, 2013; Heincke et al., 2014]. Такой подход принято называть совместной инверсией с петрофизическими ограничениями или петрофизической совместной инверсией. К сожалению, более обычна ситуация, когда априорная информация основана на довольно общих представлениях о геологической среде и имеет качественный характер. Так, можно предположить, что физические параметры должны иметь общие элементы структуры, отражающие строение геологической среды: параллельные линии уровня, совпадающие границы и т.п. За ограничениями, формализующими такого рода априорную информацию, и инверсией с их использованием, закрепились термины «структурные ограничения», «структурная совместная инверсия». Общие элементы структуры могут быть заданы явно, как геометрические параметры модели среды [Ditmar, 2002; Juhojuntti and Kamm, 2011; Haber and Holtzman Gazit, 2012]. В более общем случае, например, когда неизвестные физические параметры определены на регулярной сетке, должна быть введена

некоторая мера сходства структуры нескольких моделей среды [Zhang and Morgan, 1997; Haber and Oldenburg, 1997; Gallardo and Meju, 2003; Haber and Holtzman Gazit, 2013].

Петрофизические ограничения

Как было показано выше, связь между скоростью и удельным сопротивлением может быть установлена с помощью моделей теории эффективных сред. Такие модели включают в качестве параметров информацию о пористости, проницаемости, а также свойствах минерального скелета и флюида. В случае сложной геологии потребуются разные модели для разных геологических тел. Это существенно ограничивает их применимость в совместной инверсии.

Ряд авторов, принимая известной некоторую петрофизическую модель среды, выполняют репараметризацию в совместной инверсии таким образом, что неизвестными параметрами становятся пористость и водонасыщенность. При этом как сейсмические, так и электромагнитные данные оказываются чувствительны к обоим параметрам. Данный подход представляет интерес для прямого поиска углеводородов, поскольку область высокой пористости и низкой водонасыщенности может соответствовать залежи углеводородов. В статьях [Hoversten et al., 2006; Chen et al., 2007] для этого использовались модели Арчи и Гассмана, и (для неконсолидированных осадков) нижняя граница Хашина–Штрикмана. Решение совместной обратной задачи для результатов АВА-анализа сейсмограмм и данных CSEM выполнялось в одномерном приближении с помощью метода Монте-Карло с использованием цепей Маркова (*Markov chain Monte-Carlo, MCMC*). Алгоритм был протестирован на реальных данных, собранных на месторождении Тролль в Северном море, и сравнивался с данными каротажа, а также с результатами независимой инверсии сейсмических данных; результаты совместной инверсии оказались немного ближе к каротажным кривым.

Аналогичный подход применялся для двумерной инверсии акустического волнового поля и данных CSEM в упоминавшихся выше работах [Semerci et al., 2014; Gao et al., 2010], где рассматривались синтетические данные. В обоих случаях использовались модификации метода Гаусса–Ньютона, а не метод МСМС, который слишком вычислительно сложен для двумерной задачи.

При крупномасштабных исследованиях чаще используют эмпирические соотношения, устанавливаемые по скважинам. Например, в работах [De Stefano and Colombo, 2006; Heincke et al., 2006; Heincke et al., 2010] рассматривались лог-линейные соотношения между скоростью v и удельным сопротивлением ρ вида $\ln(\rho) = av + b$. В работах [Heincke et al., 2006, 2010] детально исследовалась синтетическая модель базальтового покрова в осадочной толще, основанная на

реальных данных, полученных на региональном профиле в районе Фарерских островов. Томография на временах первых вступлений комплексировалась с магнитотеллурикой и спутниковой гравиметрией чтобы получить модель скорости ниже кровли базальта. Для связи скорости продольных волн и удельного сопротивления использовалась эмпирическая формула, полученная в результате регрессионного анализа данных каротажа (рис.1.9). Тестирование на синтетических данных показало, что совместная инверсия значительно улучшает качество скоростной модели (рис.1.10). Впоследствии разработанная методика совместной инверсии была применена к реальным данным, собранным в этом районе [Heincke et al., 2014].

В работе [De Stefano and Colombo, 2006] также рассматривается совместная инверсия времен первых вступлений, магнитотеллурических и гравиметрических данных с простыми эмпирическими соотношениями. Изучается синтетическая модель соляного купола. Особенность реализации в том, что для контроля качества используется анализ сейсмограмм общей точки отражения (*common image gather, CIG*): после каждой итерации совместной инверсии скоростная модель используется для миграции и формирования CIG-сейсмограмм. Если в результате анализа атрибутов CIG-сейсмограмм модель скорости считается приемлемой, инверсия завершается, в противном случае выполняется следующая итерация с последующей миграцией.

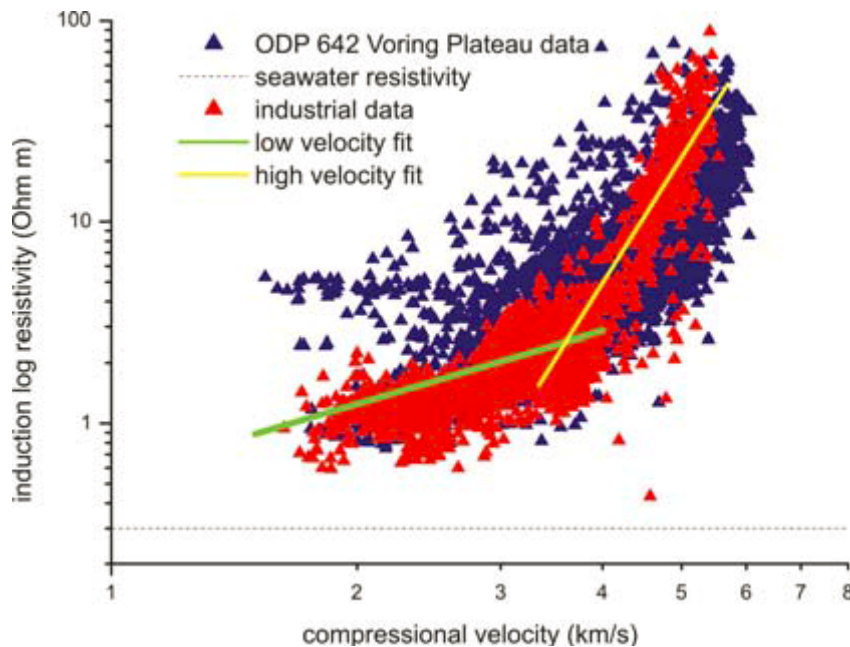


Рис. 1.9. Скоростью продольных волн и удельное сопротивление по данным каротажа и рассчитанное по ним регрессионное соотношение, использовавшееся для совместной инверсии в работе [Heincke et al., 2006].

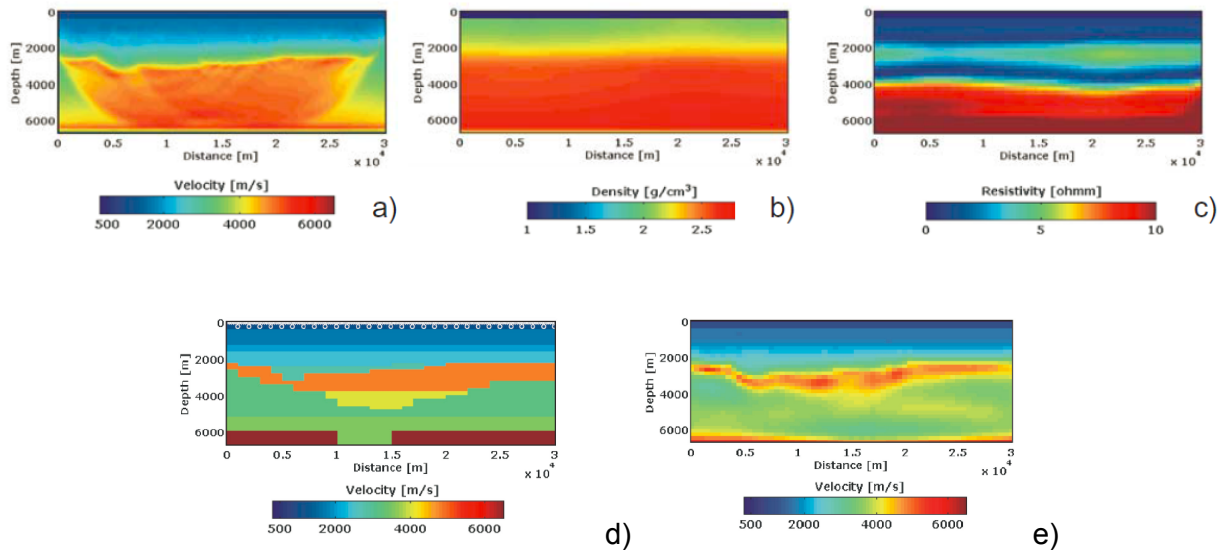


Рис. 1.10. Сравнение результатов совместной и раздельной инверсии. (а) Скорость по временам первых вступлений. (б) Плотность по гравиметрии. (с) Удельное сопротивление по МТ. (д) Истинная модель скорости. (е) Скорость, полученная в результате совместной инверсии [Heincke et al., 2006].

Структурные ограничения

В случаях, когда априорной информации недостаточно чтобы установить связь между моделями на петрофизическом уровне, или эта связь оказывается очень сложной и сильно меняется в изучаемой области, применяются структурные ограничения.

Простейшее структурное ограничение для горизонтально-слоистых моделей – совпадение границ слоев. Пример использования такого ограничения можно найти в работе [Moorkamp et al., 2007], применительно к обращению телесеismicических (анализ обменных волн с помощью метода приемных функций) и магнитотеллурических данных. Вектор, описывающий модель среды, имеет следующий вид:

$$(h_1, h_2, \dots, h_n, v_{s1}, v_{s2}, \dots, v_{sn}, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)^T,$$

где h_i – мощность i -го слоя, v_{si} – скорость поперечных волн в слое, ρ_i – плотность, σ_i – удельная электропроводность. Количество слоев фиксировано. Совместная обратная задача решается с помощью генетического алгоритма. В работе [Hering et al., 1995] похожим способом обращаются дисперсионные кривые волн Рэлея и Лява и кривые вертикального электрического зондирования.

Для двумерных и трехмерных задач наибольшее распространение получили структурные ограничения, основанные на дифференциальных операторах. Другой класс ограничений

использует явно заданные общие границы, в виде полигональной параметризации или параметризации с помощью функций уровня.

В работе [Haber and Oldenburg, 1997] для двух- и трехмерных моделей среды предлагается структурное ограничение на основе оператора Лапласа. Ограничение формулируется для двух непрерывных моделей $m^{(i)}(\mathbf{x})$, $i=1,2$, определенных в области Ω . Требуется найти модели с одинаковой структурой. В качестве «меры структуры» предлагается использовать нормированный модуль кривизны модели. Для этого вводится оператор следующего вида:

$$S(m^{(i)}) = \begin{cases} 0, & |\nabla^2 m^{(i)}| < \tau_1 \\ P_5(|\nabla^2 m^{(i)}|), & \tau_1 < |\nabla^2 m^{(i)}| < \tau_2, \\ 1, & |\nabla^2 m^{(i)}| > \tau_2 \end{cases} \quad (1.7)$$

где τ_1, τ_2 – некоторые пороговые значения кривизны, P_5 – полином пятой степени, введенный для того, чтобы сделать $S(m^{(i)})$ дважды дифференцируемым по Фреше. Действие структурного оператора (1.7) с $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-5}$ на двумерную модель проиллюстрировано на рис.1.11. Совместная обратная задача сводится к минимизации целевой функции

$$\int_{\Omega} (S(m^{(1)}) - S(m^{(2)}))^2 dx + \mu \Phi_d(m^{(1)}, m^{(2)}), \quad (1.8)$$

где $\Phi_d(m^{(1)}, m^{(2)})$ – сумма функционалов невязки, μ – штрафной коэффициент. Регуляризация вводится для поправок моделей на этапе линеаризации задачи, в стиле алгоритма Левенберга–Марквардта. Узким местом метода является выбор параметров τ_1 и τ_2 . Также можно заметить, что оператор (1.7) является сильно нелинейным, что усложняет отыскание физически значимого минимума функционала (1.8). В обсуждаемой статье рассмотрено применение метода к синтетическим гравиметрическим и сейсмическим (времена пробега) данным, а также к межскважинному радиоволновому просвечиванию на двух разных частотах.

Похожее ограничение, основанное на лапласиане, применяется в работе [Zhang and Morgan, 1997] для связи двумерных лучевой сейсмической томографии и электрической томографии на постоянном токе. Вместо введения пороговых значений, авторы нормируют значения кривизны с помощью нелинейной функции автоматического контроля усиления.

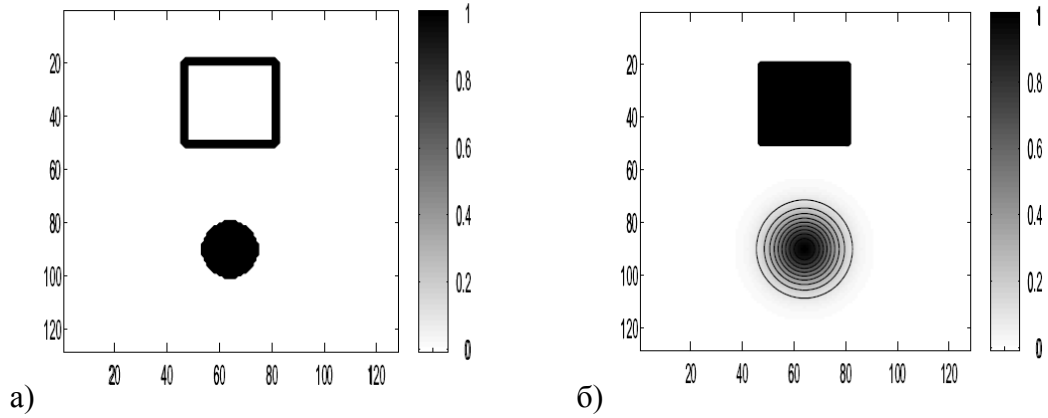


Рис. 1.11. (а) Результат действия оператора (1.7) на изображение (б), состоящее из прямоугольной области и графика нормального распределения [Haber and Oldenburg, 1997].

Для гладких моделей естественным критерием близости структур кажется «параллельность» изолиний или изоповерхностей физических параметров. В работе [Gallardo and Meju, 2003] было введено т.н. ограничение кросс-градиента (*cross-gradients constraint*). Рассмотрим две непрерывные модели среды $m^{(i)}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, определенные в объеме Ω . Введем оператор векторного произведения градиентов моделей:

$$\mathbf{t}(m^{(1)}, m^{(2)}) = \nabla m^{(1)} \times \nabla m^{(2)}.$$

Ограничение кросс-градиента требует, чтобы градиенты двух физических параметров были коллинеарны:

$$\mathbf{t}(m^{(1)}, m^{(2)}) = \mathbf{0} \quad \text{для } \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) может быть легко линейризовано и не имеет особенности при обращении градиентов в ноль. В отличие от ограничения (1.8), не требуется обязательного совпадения границ; если один из градиентов равен нулю, второй может принимать любое значение. Как было показано в ряде исследований, совместная инверсия с кросс-градиентом не дает такого улучшения моделей, как инверсия с жесткой петрофизической связью, но является более безопасной, т.к. ошибки в априорной информации при задании петрофизической связи имеют катастрофические для инверсии последствия [Haber and Holtzman Gazit, 2013; Moorkamp et al., 2011]. Благодаря своей универсальности ограничение кросс-градиента получило широкое распространение. Были предложены разнообразные способы его включения в обратную задачу: в работах Gallardo и Meju использовался метод множителей Лагранжа, в большинстве последующих работ рассматривались модификации метода штрафных функций. На рис. 1.12 приведены результаты трехмерной инверсии реальных сейсмических, МТ и гравиметрических данных с ограничением кросс-градиента для области развития соляной тектоники. В данном

примере совместная инверсия позволила точнее восстановить структуру соляного купола, что подтверждается исследованиями скважин.

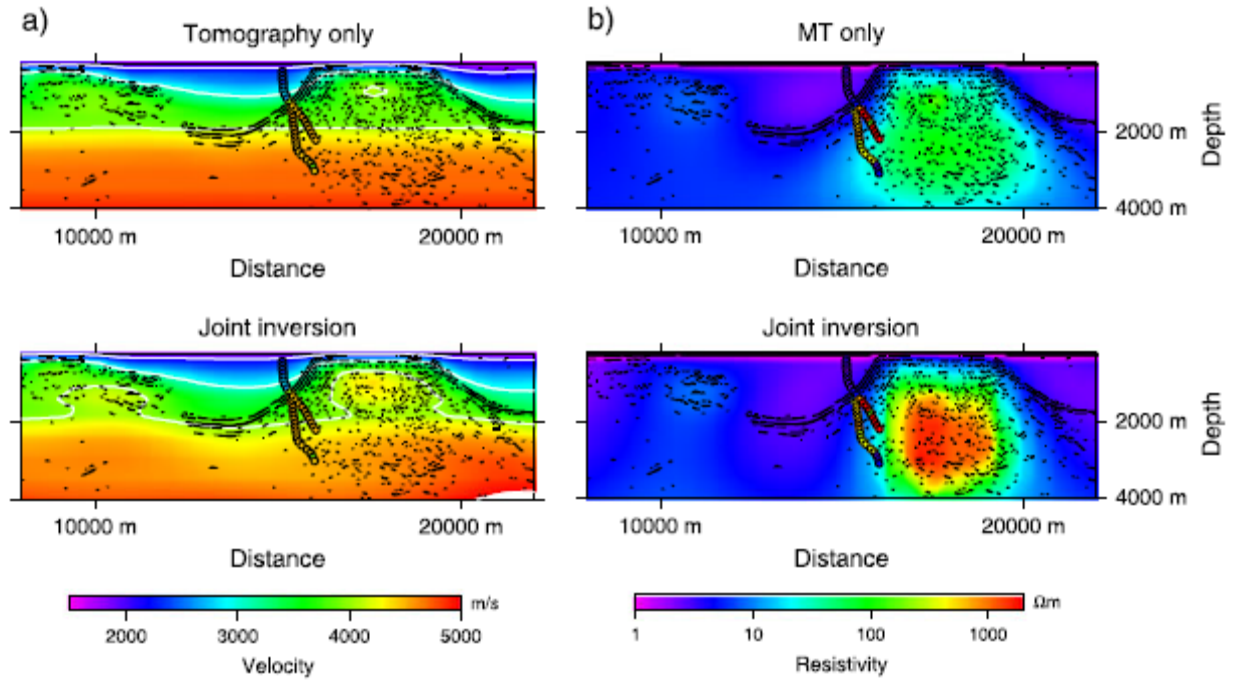


Рис. 1.12. Сравнение результатов 3-D совместной инверсии с ограничением кросс-градиента (нижний ряд) и однометодных инверсий (верхний ряд) времен первых вступлений и магнитотеллурических данных. Наложены данные каротажа и наиболее сильные отражения глубинного сейсмического разреза. (a) Модель скорости продольных волн. (b) Модель удельного сопротивления [Moorkamp et al., 2013].

В работе [Haber and Holtzman Gazit, 2013] для двух моделей $m^{(1)}(\mathbf{x})$ и $m^{(2)}(\mathbf{x})$, определенных в области Ω , вводится т.н. функционал совместной полной вариации:

$$\int_{\Omega} \sqrt{|\nabla m^{(1)}(\mathbf{x})|^2 + |\nabla m^{(2)}(\mathbf{x})|^2} d\mathbf{x}. \quad (1.10)$$

Данный функционал является выпуклым, что позволяет использовать его вместо обычной регуляризации. Аналогично регуляризации с использованием полной вариации, регуляризация с использованием функционала (1.10) позволяет восстанавливать кусочно-постоянные модели среды. При этом для фиксированного числа разрывов моделей и фиксированных абсолютных величин градиентов, меньшие значения (1.10) доставляются моделями с совпадающими разрывами. Авторы обсуждаемой статьи опробовали данный подход на сравнительно простом синтетическом примере с линейризованной сейсмической и электрической томографией в межскважинном варианте, получив результаты, близкие к результатам совместной инверсии с кросс-градиентом.

Говоря о структурной совместной инверсии, следует упомянуть статью [Zhdanov et al., 2012], в которой предлагается связь между параметрами, основанная на формализме матриц Грама. Связывающим членом целевой функции является грамиан (детерминант матрицы Грама) моделей среды или их трансформант (дифференциальные операторы, преобразование Фурье, логарифмы, экспоненты и т.д.). Для двух моделей среды минимизация грамиана эквивалентна максимизации их коэффициента корреляции. В частности, если в качестве трансформант используются градиенты двух параметров (этот случай в некотором смысле аналогичен совместной инверсии с ограничением кросс-градиента и подробно рассматривается авторами), грамиан градиентов равен нулю тогда и только тогда, когда сами параметры связаны линейным соотношением. Основным достоинством метода является естественное обобщение на произвольное число моделей.

Структурная инверсия сейсмических и электромагнитных данных с явно заданной общей геометрией применялась в работах [Juhojuntti and Kamm, 2011; Haber and Holtzman Gazit, 2012; Lien, 2013; Zerilli et al., 2013]. Данный подход требует достаточно точного априорного знания структуры среды, а именно основных границ, которые могут быть получены, например, с помощью интерпретации сейсмических разрезов МОВ–ОГТ или предварительной сеточной инверсии. Принципиальным отличием подхода от сеточной инверсии является сравнительно небольшая размерность пространства параметров, при этом обратная задача является переопределенной. Это создает благоприятные условия для совместной инверсии. В работе [Zerilli et al., 2013] применен «гибридный» подход к совместной инверсии времен первых вступлений и данных магнитотеллурики. Сначала выполнялась однометодная инверсия на обычной сетке, затем на полученных моделях выделялись предполагаемые границы резкого изменения скорости и удельного сопротивления, и строилась полигональная модель. На следующем этапе выполнялась совместная инверсия, в ходе которой уточнялись значения скорости и удельного сопротивления внутри областей, а также форма границ. Результаты применения данной схемы к синтетическим данным, моделирующим соляную тектонику, приведены на рис. 1.13. Совместная инверсия позволила значительно улучшить скоростную модель для нижней части соляных структур.

Использование аппарата метода функции уровня (*level set method*) (работы [Haber and Holtzman Gazit, 2012; Lien, 2013]) позволяет естественным образом менять не только форму, но и топологию областей с фиксированными значениями скорости и удельного сопротивления. При этом, однако, существуют ограничения на сложность модели, связанные с количеством уровней, практические примеры пока ограничиваются в основном одним уровнем.

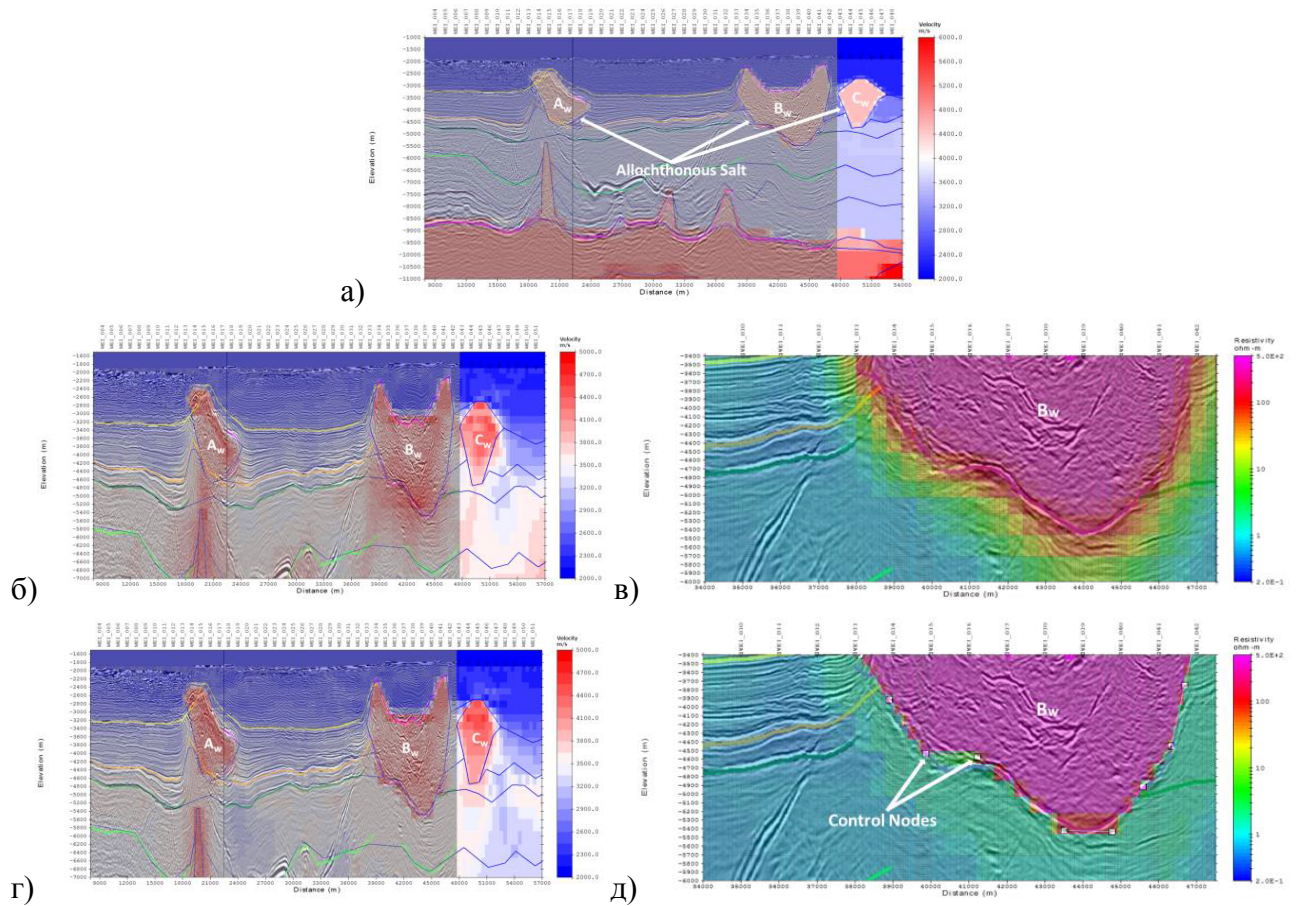


Рис. 1.13. Результаты совместной инверсии с «гибридным» подходом. (а) Истинная скоростная модель. (б) Результат томографии на временах первых вступлений. (в) Фрагмент модели удельного сопротивления, полученной в результате МТ инверсии. (г) Скорость и (д) удельное сопротивление, полученные в результате совместной инверсии [Zerilli et al., 2013].

1.3 Выводы

Сравнительно низкочастотные электромагнитные методы, такие как МТ, чувствительны к удельному электрическому сопротивлению среды. Инверсия сейсмических данных позволяет восстанавливать упругие параметры среды, из которых наибольшее значение для сейсморазведки имеет скорость распространения продольных волн. Анализ базовых моделей теории эффективных сред и экспериментальных данных позволяет выявить главные закономерности связи между удельным сопротивлением и упругими параметрами среды. Основным петрофизическим параметром, влияющим как на скорость продольных волн, так и на удельное сопротивление, является пористость; проницаемость и водонасыщенность сильнее влияют на удельное сопротивление. При заполнении порового (трещинного) пространства проводящим раствором, как правило, наблюдается положительная корреляция скорости

продольных волн и удельного сопротивления, при заполнении диэлектриком – отрицательная корреляция.

Можно выделить три группы подходов к комплексированию сейсмических и электромагнитных данных:

- Совместная интерпретация, предполагающая независимое решение сейсмических и электромагнитных обратных задач. Основным недостатком данного подхода связан с тем, что, в силу некорректности обратных задач, интерпретируемые геофизические модели всегда содержат некоторую неопределенность.
- В инверсии с опорной моделью, геофизическая модель, построенная по сейсмическим (электромагнитным) данным, играет роль априорной информации, регуляризирующей инверсию электромагнитных (сейсмических) данных. Недостатком данного подхода является то, что искажения и артефакты, неизбежно содержащиеся в опорных моделях, могут негативно влиять на окончательную инверсию.
- В совместной инверсии обмен информацией между двумя методами является взаимным, что накладывает дополнительные ограничения на множество эквивалентных решений обратной задачи и тем самым увеличивает достоверность геофизических моделей и последующей геологической интерпретации. Совместная инверсия с петрофизическими ограничениями обеспечивает сравнительно жесткую связь между сейсмической и электромагнитной моделями, однако требует наличия точной априорной информации, что сильно ограничивает ее применимость. Структурные ограничения обеспечивают сравнительно слабую связь между моделями, что, однако, позволяет использовать их в условиях дефицита априорной информации. Важным свойством структурных ограничений является их универсальность относительно физики эксперимента: ограничение кросс-градиента, например, успешно применялось к инверсии сейсмических, электромагнитных (в т.ч. георадиолокационных), гравиметрических и магнитометрических данных.

Глава 2

Совместная инверсия магнитотеллурических данных и времен пробега сейсмических волн

2.1 Прямые задачи

2.1.1 Сейсмическая прямая задача

Прежде чем перейти к рассмотрению используемого алгоритма вычисления времен пробега и матрицы Якоби оператора прямой задачи, необходимо пояснить физический смысл кинематической прямой задачи, для чего обратимся к основам лучевой теории распространения упругих волн.

Будем рассматривать неоднородную изотропную упругую среду с параметрами Ламе $\lambda(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$, и плотностью $\rho(\mathbf{x})$. Запишем уравнение движения среды в частотной области:

$$(\lambda + \mu)\nabla\text{div}\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla\lambda\text{div}\mathbf{u} + \nabla\mu \cdot (\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) = -\rho\omega^2\mathbf{u}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ – вектор смещения, ω – циклическая частота. Для достаточно больших значений ω решение (2.1) можно представить в виде лучевого ряда

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \exp(-i\omega\tau(\mathbf{x})) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{u}_k}{(i\omega)^k}, \quad (2.2)$$

где $\tau(\mathbf{x})$ – поле времен (эйконал), определяющее поверхность волнового фронта в момент времени t как $\tau(\mathbf{x}) = t$ [Троян и Киселев, 2000]. Подставляя выражение (2.2) в (2.1) для нулевого члена ряда получим уравнение

$$(\lambda + \mu)(\nabla\tau \cdot \mathbf{u}_0)\nabla\tau = (\rho - \mu|\nabla\tau|^2)\mathbf{u}_0. \quad (2.3)$$

Вектор \mathbf{u}_0 можно представить как сумму компоненты \mathbf{u}_{0n} , направленной по нормали к волновому фронту, и перпендикулярной ей компоненты $\mathbf{u}_{0\tau}$. Тогда уравнение (2.3) разделяется на два независимых уравнения, соответствующие продольной и поперечной волнам:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)(\nabla\tau \cdot \mathbf{u}_{0n})\nabla\tau &= (\rho - \mu|\nabla\tau|^2)\mathbf{u}_{0n}, \\ (\rho - \mu|\nabla\tau|^2)\mathbf{u}_{0\tau} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для того чтобы эти уравнения имели нетривиальные решения, должно выполняться условие

$$|\nabla\tau| = \frac{1}{v}, \quad (2.5)$$

где $v = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ для первого уравнения (2.4) и $v = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ для второго уравнения. Уравнение (2.5) описывает движение волнового фронта, распространяющегося со скоростью v , и называется уравнением эйконала.

Пусть волна (продольная или поперечная) возбуждается в точке \mathbf{x}_s и регистрируется в точке \mathbf{x}_r . Прямая задача томографии состоит в нахождении времени прихода фронта волны для заданных пар источник – приемник и скорости $v(\mathbf{x})$. Классический подход к вычислению $\tau(\mathbf{x}_r)$ заключается в решении вместо уравнения эйконала эквивалентной вариационной задачи. Можно показать, что $\tau(\mathbf{x}_r)$ равно экстремальному значению функционала Ферма

$$\int_{\mathbf{x}_s}^{\mathbf{x}_r} \frac{dl}{v(\mathbf{x})}. \quad (2.6)$$

Экстремаль функционала Ферма называется лучом.

Нахождение лучей составляет задачу кинематического лучевого трассирования. В случае произвольной зависимости скорости от координат задача решается численно. «Классические» методы решения – это методы двухточечного лучевого трассирования: метод пристрелки (*shooting method*) и метод изгиба (*bending method*), их подробный анализ дается, например, в обзоре [Rawlinson et al., 2008]. Двухточечное лучевое трассирование эффективно, когда число лучей, выходящих из одного источника, сравнительно невелико. Кроме того, для сложных скоростных структур двухточечные методы не гарантируют нахождения глобального минимума функционала (2.6). Более стабильными являются т.н. методы полей времен, в которых сначала решается уравнение эйконала и находится полное поле времен, а затем, если это требуется, проводятся лучи. С другой стороны, при наличии самопересечений волнового фронта, традиционные методы полей времен, в отличие от двухточечных методов, позволяют найти лишь первые вступления [Rawlinson et al., 2008].

Используемый в настоящей работе алгоритм решения прямой задачи описан в работе [Vsemirnova and Roslov, 2004]. В основе алгоритма лежит метод кратчайших путей (*shortest-path method*) [Moser, 1991; Klimeš and Kvasnička, 1994], т.е., фактически, известный из теории графов алгоритм Дейкстры [Dijkstra, 1959]. Луч определяется как кратчайший путь – последовательность ребер графа с минимальным суммарным весом; весом является время движения волнового фронта вдоль ребра. Алгоритм Дейкстры позволяет найти дерево кратчайших путей из некоторого узла во все n узлов графа за $O(n \log n)$ арифметических операций. Точность лучевого трассирования повышается введением специально организованной интерполяции, что сближает алгоритм с методом конечных элементов.

Приведем краткое описание используемого алгоритма. Будем рассматривать двумерную задачу. Пусть источники и приемники располагаются в плоскости $y = c$, и скорость постоянна по оси y (тогда лучи, в силу симметрии, также лежат в плоскости $y = c$). Скорость определена на квазирегулярной сетке: двумерная модельная область разбита на столбцы трапециевидальных элементов, внутри которых скорость постоянна. Узлы графа расположим в вершинах и на серединах сторон элементов. Ребра графа соединяют пары узлов, принадлежащие одному элементу. Узлы делятся на три множества: C (закрытые) – узлы, для которых значение эйконала известно; Q (очередь) – узлы, связанные хотя бы с одним узлом из C ; O (открытые) – остальные узлы. Первый шаг алгоритма – инициализация: для узла s , соответствующего точечному источнику: $\tau_s = \tau_0$, $s \in Q$, для остальных узлов: $\tau_i = +\infty$, $i \in O$. Далее, пока очередь Q не пуста, повторяем цикл: выбираем узел $i \in Q$ с минимальным значением эйконала, перемещаем его из Q в C и присваиваем всем открытым узлам, связанным с узлом i , значение эйконала

$$\tau_k = \min_{i,j} \left\{ \tau_k, \tau_i + \frac{l_{ik}}{v_j} \right\}, \quad (2.7)$$

где l_{ik} – евклидово расстояние между узлами i и k , v_j – скорость в текущем элементе. Если три узла, лежащих на одной стороне текущего элемента, уже закрыты, эйконал на этой стороне интерполируется квадратичной функцией, и локальное решение (2.7) принимает вид:

$$\tau_k = \min_j \left\{ \tau_k, \hat{\tau}_1 + \frac{l_{1k}}{v_j}, \dots, \hat{\tau}_p + \frac{l_{pk}}{v_j} \right\},$$

где p – число узлов интерполяционной сетки, $\hat{\tau}_i$ – интерполированные значения эйконала. Если $k \notin Q$, перемещаем узел в Q . Сортируем Q по значению эйконала и делаем следующую итерацию.

Алгоритм легко обобщается на отраженные, дифрагированные, головные и обменные волны. Определяется область модели Ω , в которой распространяется вторичная волна заданного типа, и множество узлов s , задающих границу, являющуюся источником вторичной волны. После того как вычислено первичное поле, узлы, лежащие за пределами Ω , исключаются, узлы s помечаются как закрытые с эйконалом вторичной волны $\tilde{\tau} = \tau$, остальные узлы инициализируются как открытые с $\tilde{\tau} = \infty$.

Построение лучей сводится к спуску по градиенту поля времен из приемника в источник.

В результате решения прямой задачи имеем вектор данных \mathbf{t}_c , составленный из времен пробега наблюдаемых типов волн во всех определенных парах источник – приемник. При решении линеаризованной обратной задачи вектор модели удобно составлять из значений медленности $s = v^{-1}$. Тогда элементы матрицы Якоби оператора прямой задачи $\frac{\partial \mathbf{t}_c}{\partial \mathbf{s}}$ будут

представлять собой длины сегментов лучей в ячейках модели: $\frac{\partial t_{c,i}}{\partial s_j} = l_{ij}$. Действительно, рассмотрим малое возмущение медленности $\delta s(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) - s_0(\mathbf{x})$, приводящее к малому возмущению луча l : $l(s) = l(s_0) + \delta l$. Время пробега по лучу разложим в ряд Тейлора:

$$t(s, l) = \int_{l(s_0)} (s_0 + \delta s) dl + \left. \frac{\partial t}{\partial l} \right|_{s_0} \delta l + O(\|\delta s\|^2, \|\delta l\|^2).$$

Поскольку, согласно принципу Ферма $\left. \frac{\partial t}{\partial l} \right|_{s_0} = 0$, вариация времени пробега $\delta t = \int_{l(s_0)} \delta s dl$.

2.1.2 Магнитотеллурическая прямая задача

Магнитотеллурический метод основан на регистрации естественного электромагнитного поля, порождаемого токовыми источниками в магнитосфере, ионосфере и атмосфере. Принято считать, что в дальней зоне поле данных источников можно аппроксимировать плоской однородной волной [Ковтун, 1980; Бердичевский и Дмитриев, 2009; Жданов, 2012]. Запишем систему уравнений Максвелла для падающей волны в частотной области:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= (\sigma - \omega^2 \varepsilon) \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu \mathbf{H}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega)$ – напряженность, соответственно, электрического и магнитного поля, $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$ – удельная электрическая проводимость, μ – магнитная проницаемость, ε – диэлектрическая проницаемость, ω – циклическая частота. Будем полагать, что среда немагнитна, т.е. $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$.

В области низких частот в первом уравнении (2.8) можно пренебречь членом $\omega^2 \varepsilon \mathbf{E}$, т.е. токами смещения, что соответствует квазистационарному приближению.

Далее будем рассматривать класс двумерно-неоднородных (2-D) моделей. Пусть ось однородности совпадает с осью y , т.е. $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, ось z направлена вниз, начало координат находится на поверхности Земли. Также будем считать, что область двумерной неоднородности обрамляется бесконечно протяженными одномерными областями (рис.2.1). В 2-D модели система уравнений (2.8) распадается на две системы, описывающие два независимых электромагнитных поля [Бердичевский и Дмитриев, 2009]:

1. E -поляризованное поле, или TE мода:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + i\omega\mu_0\sigma(x,z)E_y &= 0, \\ H_x &= \frac{-1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z}, \\ H_z &= \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

с условиями на бесконечности: $\left. \frac{\partial E_y(x,z,\omega)}{\partial x} \right|_{|x| \rightarrow \infty} = 0$ и $E_y(x,z,\omega) \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0$.

2. *H*-поляризованное поле, или ТМ мода:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma(x,z)} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma(x,z)} \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + i\omega\mu_0 H_y &= 0, \\ E_x &= \frac{-1}{\sigma(x,z)} \frac{\partial H_y}{\partial z}, \\ E_z &= \frac{1}{\sigma(x,z)} \frac{\partial H_y}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

с условиями на бесконечности: $\left. \frac{\partial H_y(x,z,\omega)}{\partial x} \right|_{|x| \rightarrow \infty} = 0$ и $H_y(x,z,\omega) \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0$.

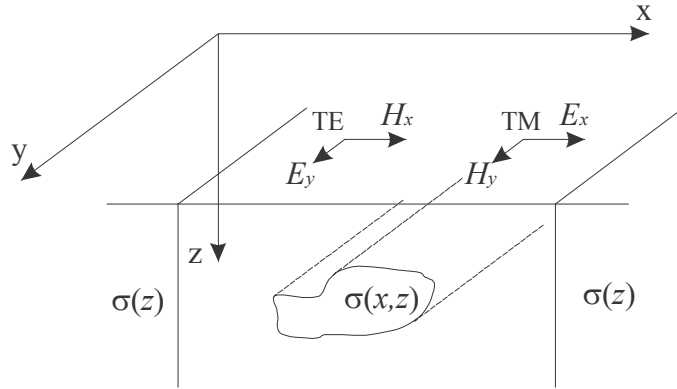


Рис. 2.1. Магнитотеллурическая модель для двумерной среды.

В теории магнитотеллурики предполагается, что вектор напряженности электрического поля линейно связан с вектором напряженности магнитного поля через тензор импеданса Z , характеризующий волновое сопротивление среды:

$$\mathbf{E} = Z\mathbf{H}. \quad (2.11)$$

Компоненты тензора импеданса являются комплексными величинами и зависят от частоты и удельной электропроводности среды. На практике обычно считают, что вертикальные компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} на поверхности Земли пренебрежимо малы. Тогда вместо (2.11) имеем:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}.$$

В случае двумерно-неоднородной среды, из уравнений (2.9) и (2.10) следует, что элементы, стоящие на главной диагонали тензора импеданса, равны нулю. Элементы побочной диагонали в этом случае определяются как отношение ортогональных компонент поля: $Z_{yx} = \frac{E_y}{H_x}$ и $Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y}$ [Бердичевский и Дмитриев, 2009].

Наблюдения в точке (x_s, z_s) принято представлять в виде амплитудных и фазовых кривых зондирования – зависимости кажущегося сопротивления ρ_a и фазы импеданса от частоты:

$$\rho_a(x_s, z_s, \omega) = \frac{1}{\omega\mu_0} |Z_m(x_s, z_s, \omega)|^2,$$

$$\varphi(x_s, z_s, \omega) = \arg(Z_m(x_s, z_s, \omega)),$$

где $Z_m = Z_{yx}$ для ТЕ моды, и $Z_m = Z_{xy}$ для ТМ моды.

Таким образом, магнитотеллурическая прямая задача для произвольной двумерной среды сводится к численному решению эллиптических уравнений (2.9) и (2.10) относительно компонент E_y и H_y , соответственно, для набора частот (остальные компоненты поля находятся простым дифференцированием).

В настоящей работе прямая задача решается методом конечных элементов, по вычислительной схеме, описанной в работе [Wannamaker et al., 1987]. Для дискретизации модели среды используется квазирегулярная сетка, аналогичная сетке, введенной для трассирования сейсмических лучей: двумерная модельная область разбивается на трапециевидальные элементы с постоянной электропроводностью. Трапециевидальные элементы делятся диагоналями на четыре треугольных элемента; внутри каждого треугольного элемента искомое поле аппроксимируется суммой трех линейных базисных функций, неизвестными являются значения поля в вершинах элемента. Для каждого трапециевидального элемента получается система из четырех линейных уравнений относительно значений поля в четырех вершинах. Из локальных систем уравнений для четырехугольных элементов составляется глобальная система для всей сетки.

Используются следующие граничные условия, предложенные в работе [Rodi, 1976]. Для ТМ моды на верхней границе сетки накладывается условие $H_y = \text{const}$ (что соответствует условию $E_z|_{z=0} = 0$, т.е. отсутствию токов между землей и воздухом). Для ТЕ моды должно

выполняться условие $H_x = \text{const}$ в воздухе на удалении от земной поверхности, для чего вводятся дополнительные элементы над земной поверхностью. На нижней границе сетки $E_y = 0$, $H_y = 0$. Также должно выполняться условие одномерности среды на удалении от двумерной структуры, для чего слева и справа от сетки вводятся дополнительные столбцы ячеек, продолжающие крайние столбцы основной сетки, и накладывается условие $\frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$ для ТЕ моды, и $\frac{\partial H_y}{\partial x} = 0$ для ТМ моды на границах «продолженной» сетки.

В ходе решения обратной задачи удобно в качестве параметров модели рассматривать $\ln \rho_i = -\ln \sigma_i$, где i – индекс трапецидального элемента. Логарифмирование позволяет избежать появления отрицательных значений сопротивления при решении обратной задачи. Кажущееся сопротивление и фазу также представим через логарифм импеданса:

$$\begin{aligned}\ln \rho_{ai} &= 2 \operatorname{Re}(\ln Z_i) - \ln \omega \mu_0, \\ \varphi_i &= \operatorname{Im}(\ln Z_i),\end{aligned}$$

где индекс i соответствует всем рассматриваемым сочетаниям точки наблюдения, частоты и поляризации. При решении обратной задачи методом Гаусса–Ньютона помимо векторов данных необходимо вычислять матрицу Якоби оператора прямой задачи с элементами

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln \rho_{ai}}{\partial \ln \rho_j} &= \frac{2}{\omega \mu_0} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial Z_i}{\partial \rho_j} \bar{Z}_i \right) \frac{\rho_j}{\rho_{ai}}, \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \ln \rho_j} &= \rho_j \cos^2 \varphi_i \left(\operatorname{Im} \frac{\partial Z_i}{\partial \rho_j} - \operatorname{tg} \varphi_i \operatorname{Re} \frac{\partial Z_i}{\partial \rho_j} \right) / \operatorname{Re} Z_i,\end{aligned}$$

где \bar{Z}_i обозначает комплексное сопряжение Z_i и

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \rho_j} = \frac{1}{H_i} \left(\frac{\partial E_i}{\partial \rho_j} - Z_i \frac{\partial H_i}{\partial \rho_j} \right).$$

Для производных $\frac{\partial E_i}{\partial \rho_j}$ и $\frac{\partial H_i}{\partial \rho_j}$ при фиксированном i можно записать уравнения, аналогичные уравнениям для компонент электромагнитного поля, но с фиктивными источниками, расположенными в точках наблюдения, которые также решаются с помощью метода конечных элементов. Таким образом, для вычисления матрицы Якоби требуется одно дополнительное решение прямой задачи на каждое положение приемника.

2.2 Дискретизация обратной задачи

Модели скорости и удельного сопротивления, а также вспомогательные функции пространственных координат, регуляризирующие и структурные операторы можно дискретизировать либо на единой сетке, либо на независимых сетках. В ходе выполнения данной работы первоначально был реализован, и успешно применен к инверсии синтетических данных, первый подход, однако, эксперимент по инверсии реальных данных послужил толчком к реализации многосеточного подхода. Использование независимых сеток позволяет эффективнее учитывать локальное разрешение, область чувствительности и особенности геометрии наблюдений для каждого метода. К примеру, для стабильной инверсии МТ данных необходимо обращать в том числе и низкие частоты с глубиной скин-слоя, превосходящей глубину проникновения лучей рефрагированных сейсмических волн. В то же время томография на первых вступлениях, для обеспечения достаточной глубины исследования, потребует значительных выносов, что увеличит горизонтальные размеры модели. В данной ситуации, вместо большой единой сетки, экономичнее использовать «высокую и узкую» сетку для МТ и «низкую и широкую» сетку для томографии, с разными шагами дискретизации, а сетку для структурных ограничений построить в области их пересечения (рис. 2.3). Концепция многосеточного подхода к совместной инверсии уже освещалась в публикациях, например, в работе [De Stefano et al., 2011]. Здесь предлагается оригинальная реализация, использующая полностью геометрически-независимые сетки, интерполяция между которыми осуществляется с помощью нестационарной гауссовой фильтрации.

Используемые сетки являются квазирегулярными, т.е. имеют топологию прямоугольной сетки, но могут быть деформированы в вертикальном направлении, что позволяет естественным образом учитывать топографию, батиметрию и криволинейные границы в слоистых моделях. Область модели разбивается на M трапецеидальных ячеек Ω_j с вертикальными основаниями, уложенных в вертикальные столбцы по K ячеек в столбце, для нумерации ячеек примем за «быстрое» направление обхода ось z (рис. 2.2). Дискретизированная функция координат $m(x, z)$ постоянна внутри каждой ячейки, что формально можно представить как разложение $m(x, z)$ по прямоугольным базисным функциям $\psi_j(x, z)$:

$$m(x, z) = \sum_{j=1}^M \psi_j(x, z) m_j,$$

где $\psi_j(x, z) = \begin{cases} 1, & (x, z) \in \Omega_j \\ 0, & (x, z) \notin \Omega_j \end{cases}$. При фиксированной геометрии сетки результат дискретизации

однозначно характеризуется вектором $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_M)^T$.

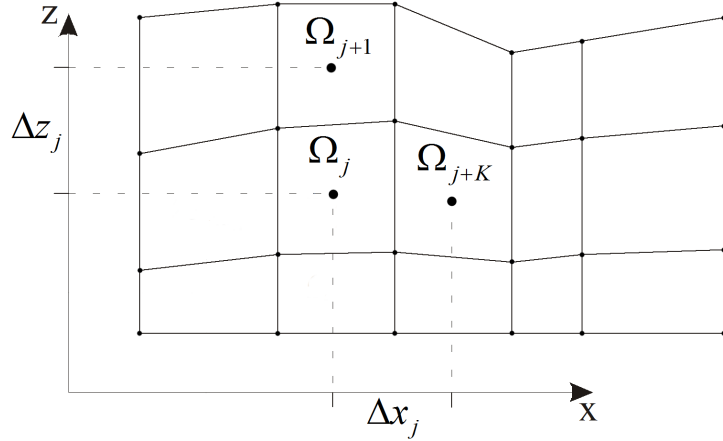


Рис. 2.2. К определению разностной схемы на квазирегулярной сетке.

Пространственные производные будем аппроксимировать с помощью прямых разностей:

$$\partial_x m(x_j, z_j) \approx \frac{m_{j+K} - m_j}{x_{j+K} - x_j},$$

$$\partial_z m(x_j, z_j) \approx \frac{m_{j+1} - m_j}{z_{j+1} - z_j},$$

где (x_j, z_j) – координаты барицентра j -й ячейки (рис. 2.2). При этом для правого края сетки принимается граничное условие $\partial_x m = 0$, а для верхнего края $\partial_z m = 0$. На основании приведенных формул для конечных разностей и граничных условий нетрудно сформировать дискретные аналоги операторов дифференцирования в виде ленточных матриц, для которых введем обозначения \mathbf{D}_x и \mathbf{D}_z . Сопряженные операторы \mathbf{D}_x^T и \mathbf{D}_z^T в случае однородной сетки соответствуют обратным разностям, взятым с противоположным знаком.

Обозначим как Ω_m область определения модели m , Ω – область, на которой определены структурные ограничения. Интерполяцию с сетки модели на сетку структурных ограничений реализуем с помощью свертки с двумерной функцией Гаусса, т.е. гауссовой фильтрации:

$$G_m m = \int_{\Omega_m} g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m, \mathbf{x}) m(\mathbf{x}_m) d\mathbf{x}_m, \quad (2.12)$$

где $g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \frac{1}{A} \exp(-\tilde{\mathbf{x}}^T \Sigma^{-2}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{x}})$ – ядро свертки (функция Гаусса), $\Sigma(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_x(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \sigma_z(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$ –

матрица «стандартных отклонений», задающая ширину фильтра в двух направлениях. В

дискретной постановке интеграл (2.12) заменяется суммой, в которой координаты \mathbf{x} и \mathbf{x}_m пробегает по барицентрам ячеек, соответственно, «структурной» и «модельной» сеток. При этом носитель ядра ограничивается эллипсом с полуосями $k\sigma_x, k\sigma_z$, $k=4$, и нормирующий коэффициент A вычисляется как сумма отсчетов ядра на усеченном носителе. При вычислении вариационных производных структурных ограничений по моделям возникает необходимость в операторе, сопряженном к (2.12), который осуществляет интерполяцию со структурной сетки на модельную:

$$G_m^* m = \int_{\Omega} g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m, \mathbf{x}) m(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

В дискретной постановке оба оператора можно представить в виде разреженных матриц $\mathbf{G}_{s,r}$ и $\mathbf{G}_{s,r}^T$ (рис.2.3).

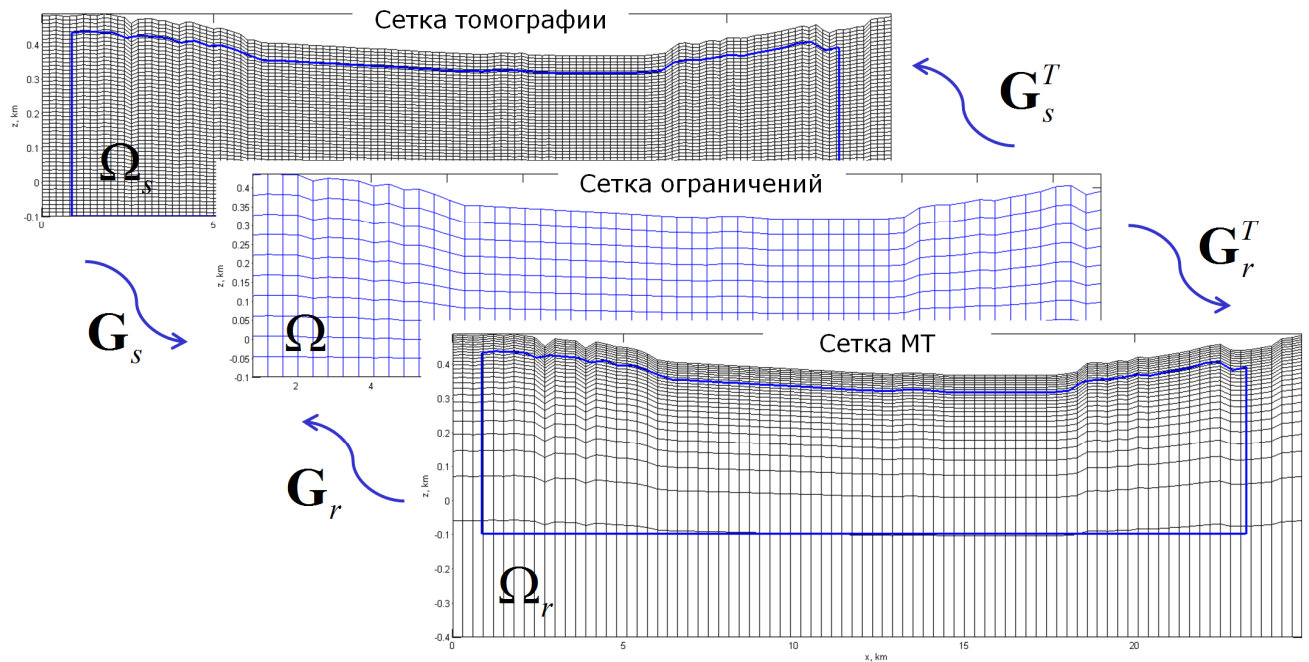


Рис. 2.3. Взаимосвязь пространственных сеток в многосеточном алгоритме совместной инверсии. Контуром показана граница сетки ограничений.

Заметим, что фильтр (2.12) является нестационарным – ширина фильтра является функцией координат. Это позволяет эффективнее работать с неоднородными сетками, поскольку ширина фильтра должна быть достаточной, чтобы усеченный носитель ядра содержал, по меньшей мере, один узел входной сетки. При дальнейшем увеличении ширины фильтра, высокие пространственные частоты моделей подавляются перед действием структурных ограничений. Это позволяет связывать модели с разной разрешающей

способностью только в области низких частот и предотвратить влияние высокочастотных артефактов (примером таких артефактов являются следы лучей в сейсмической томографии) на структурные ограничения. Ширину фильтра целесообразно выбирать на основании оценки разрешающей способности инверсии. Отметим, что регуляризация с помощью гауссовой фильтрации градиента функционала невязки успешно применялась в инверсии полных сейсмических волновых полей [Ravaut et al., 2004; Казей и др., 2015]. С алгоритмической точки зрения, описанный способ интерполяции удобен тем, что позволяет работать с сетками произвольной геометрии, его недостатком являются существенные вычислительные расходы на построение и хранение ядра свертки, которые возрастают с увеличением ширины фильтра.

2.3 Совместная инверсия методом Гаусса–Ньютона

Под сейсмической обратной задачей будем понимать томографию на временах пробега – восстановление скорости продольных волн по наблюдаемым временам вступлений сейсмических волн. Под магнитотеллурической обратной задачей – восстановление удельного сопротивления по наблюдаемым компонентам тензора импеданса.

Обозначим модель скорости вектором \mathbf{s} , модель удельного сопротивления – вектором \mathbf{r} . Компоненты векторов моделей являются безразмерными величинами – трансформантами медленности v_p^{-1} и $\ln \rho$ (см. раздел 2.6). Сейсмическая обратная задача традиционно решается с помощью минимизации функционала тихоновского типа:

$$\min_{\mathbf{s}} \Phi_t(\mathbf{s}) + \alpha_s \Phi_s(\mathbf{s}),$$

где $\Phi_t(\mathbf{s})$ – функционал невязки времен, $\Phi_s(\mathbf{s})$ – стабилизирующий функционал (стабилизатор), $\alpha_s > 0$ – параметр регуляризации. Аналогично, для МТ обратной задачи имеем:

$$\min_{\mathbf{r}} \Phi_Z(\mathbf{r}) + \alpha_r \Phi_r(\mathbf{r}),$$

где $\Phi_Z(\mathbf{r})$ – функционал невязки импедансов, $\Phi_r(\mathbf{r})$ – стабилизирующий функционал и $\alpha_r > 0$ – параметр регуляризации. При условии, что случайные компоненты данных подчиняются нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием, метод максимального правдоподобия приводит к функционалам невязки следующего вида:

$$\Phi_t(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} [\mathbf{t} - \mathbf{t}_c(\mathbf{s})]^T \mathbf{R}_t^{-1} [\mathbf{t} - \mathbf{t}_c(\mathbf{s})],$$

$$\Phi_Z(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\mathbf{z} - \mathbf{z}_c(\mathbf{r})]^T \mathbf{R}_Z^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{z}_c(\mathbf{r})],$$

где \mathbf{t} , $\mathbf{t}_c(\mathbf{s})$ – векторы наблюдаемых и рассчитанных времен соответственно, \mathbf{z} , $\mathbf{z}_c(\mathbf{r})$ – векторы натуральных логарифмов компонент наблюдаемых и рассчитанных тензоров

импеданса соответственно, \mathbf{R}_t , \mathbf{R}_Z – матрицы ковариации соответствующих векторов данных (без ограничения общности, будем считать, что матрицы являются диагональными, с дисперсиями на главной диагонали, что соответствует некоррелированным случайным компонентам). В силу двумерности задачи, используются только элементы побочной диагонали тензора импеданса:

$$\mathbf{z} = \left[\operatorname{Re} \ln Z_{xy,1}, \operatorname{Im} \ln Z_{xy,1}, \operatorname{Re} \ln Z_{yx,1}, \operatorname{Im} \ln Z_{yx,1}, \operatorname{Re} \ln Z_{xy,2}, \dots, \operatorname{Im} \ln Z_{yx,N_Z} \right]^T.$$

Логарифм импеданса можно выразить через кажущееся сопротивление $\rho_{a,k}$ и фазу φ_k :

$$\ln Z_k = \frac{1}{2} \left[\ln(\omega_k \rho_{a,k}) + \ln(\mu_0) \right] + i\varphi_k, \text{ где } \omega_k \text{ – круговая частота, } \mu_0 \text{ – магнитная постоянная.}$$

Совместная инверсия сейсмических и МТ данных сводится к минимизации взвешенной суммы целевых функций сейсмической и МТ обратных задач и функционала структурного ограничения $\Phi_c(\mathbf{G}_s, \mathbf{s}, \mathbf{G}_r, \mathbf{r})$:

$$\Phi(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \equiv w_1 [\Phi_t(\mathbf{s}) + \alpha_s \Phi_s(\mathbf{s})] + w_2 [\Phi_Z(\mathbf{r}) + \alpha_r \Phi_r(\mathbf{r})] + \alpha \Phi_c(\mathbf{G}_s, \mathbf{s}, \mathbf{G}_r, \mathbf{r}) \rightarrow \min_{\mathbf{s}, \mathbf{r}}, \quad (2.13)$$

где $w_1, w_2, \alpha > 0$ – весовые коэффициенты.

В типичных случаях векторы \mathbf{s} и \mathbf{r} (равно как и векторы данных) имеют размерность порядка 10^4 – 10^7 , так что отыскание глобальных минимумов (2.13) при современном уровне развития численных методов и вычислительной техники является практически неразрешимой задачей, а для поиска локального минимума наиболее целесообразно использовать метод Гаусса–Ньютона. Метод Гаусса–Ньютона имеет простой физический смысл – это итеративное решение линеаризованной обратной задачи, в которой фоновой моделью среды является модель, полученная на предыдущей итерации. По скорости сходимости метод почти не уступает методу Ньютона, и обычно требует на 1–2 порядка меньше итераций, чем градиентные методы, такие как нелинейный метод сопряженных градиентов и L-BFGS. При этом, в отличие от метода Ньютона, не требуется чрезвычайно затратное вычисление вторых производных оператора прямой задачи. Вычислительные затраты по машинному времени и памяти на одну итерацию больше, чем для градиентных методов, в связи с необходимостью вычисления и хранения матриц Якоби, и решения системы линейных уравнений. Если для трехмерных задач реалистичного размера требования к памяти часто оказываются критичными, то для двумерных задач метод Гаусса–Ньютона, при эффективной реализации, как правило, превосходит по быстродействию известные градиентные методы [Haber, 2014].

Для более компактной записи шага метода Гаусса–Ньютона удобно перейти к «прямой сумме» \mathbf{m} векторов \mathbf{s} и \mathbf{r} : $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}$. Задается начальное приближение \mathbf{m}_0 . На n -й итерации

функционал (2.13) аппроксимируется функционалом, квадратичным относительно возмущения модели $\delta \mathbf{m} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_n$:

$$\Phi(\mathbf{m}) \approx \Phi(\mathbf{m}_n) + \mathbf{g}_n^T \delta \mathbf{m} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{m}^T \mathbf{H}_n \delta \mathbf{m}, \quad (2.14)$$

за счет линеаризации операторов прямых задач:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_c(\mathbf{s}) &= \mathbf{t}_c(\mathbf{s}_n) + \mathbf{J}_t|_{\mathbf{s}_n} \delta \mathbf{s} + O(\|\delta \mathbf{s}\|^2), \\ \mathbf{z}_c(\mathbf{r}) &= \mathbf{z}_c(\mathbf{r}_n) + \mathbf{J}_Z|_{\mathbf{r}_n} \delta \mathbf{r} + O(\|\delta \mathbf{r}\|^2). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{J}_t = \frac{\partial \mathbf{t}_c}{\partial \mathbf{s}}$, $\mathbf{J}_Z = \frac{\partial \mathbf{z}_c}{\partial \mathbf{r}}$ – матрицы Якоби операторов прямых задач, $\mathbf{g}_n = \nabla_{\mathbf{m}} \Phi(\mathbf{m})|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_n}$ – градиент целевой функции, имеющий следующий вид (для краткости здесь и далее будем опускать индекс n):

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{J}_t^T \mathbf{R}_t^{-1}(\mathbf{t} - \mathbf{t}_c) + \alpha_s \nabla_{\mathbf{s}} \Phi_s) \\ w_2(\mathbf{J}_Z^T \mathbf{R}_Z^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_c) + \alpha_r \nabla_{\mathbf{r}} \Phi_r) \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{s}} \Phi_c \\ \nabla_{\mathbf{r}} \Phi_c \end{bmatrix};$$

\mathbf{H}_n – аппроксимация матрицы Гессе целевой функции, имеющая следующую структуру:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{J}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{J}_t + \alpha_s \mathbf{H}_s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & w_2(\mathbf{J}_Z^T \mathbf{R}_Z^{-1} \mathbf{J}_Z + \alpha_r \mathbf{H}_r) \end{bmatrix} + \alpha \mathbf{H}_c,$$

где $\mathbf{H}_s \approx \nabla_{\mathbf{s}}^2 \Phi_s$, $\mathbf{H}_r \approx \nabla_{\mathbf{r}}^2 \Phi_r$, $\mathbf{H}_c \approx \nabla_{\mathbf{m}}^2 \Phi_c$ – аппроксимации матриц Гессе, соответственно, стабилизирующих функционалов и функционала структурного ограничения, вид которых, вообще говоря, может отличаться от $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ и будет рассмотрен в разделах 2.4 и 2.5.

Точное выражение для матрицы Гессе функционалов невязки имеет вид $\nabla^2 \Phi_d(\mathbf{m}) = \mathbf{J}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial \mathbf{m}} \mathbf{d}$, где \mathbf{d} – вектор невязок данных. Таким образом, аппроксимация, используемая в методе Гаусса–Ньютона, неявно требует либо малости \mathbf{d} , что выполняется вблизи глобального минимума функционала невязки, либо малости $\frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial \mathbf{m}}$, что выполняется при слабой нелинейности операторов прямых задач. В действительности эти требования часто нарушаются, вследствие чего сходимость метода замедляется. Для ускорения сходимости, особенно на начальных итерациях, когда невязки велики, применяется метод Левенберга–Марквардта – к матрице Гессе добавляется «демпфирующая» диагональная поправка. Демпфирование в виде $\lambda \mathbf{I}$, $\lambda > 0$, уменьшает длину шага и сближает направление шага с направлением наискорейшего спуска; в виде $\lambda \text{diag}[\mathbf{J}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}]$ – масштабирует чувствительность данных к разным компонентам вектора модели; присвоение «больших» значений отдельным

компонентам позволяет фиксировать соответствующие компоненты вектора модели. Метод Левенберга–Марквардта можно рассматривать как метод ограничения доверительной окрестности квадратичного приближения (2.14) [Nocedal and Wright, 2006]. Альтернативой ограничения доверительной окрестности является поиск по направлению (*line search*) – для выбора оптимальной длины шага по направлению $\delta \mathbf{m}$ используется одномерная оптимизация, это более строгий, но обычно более затратный в вычислительном отношении подход, поскольку он требует дополнительных вычислений значения целевой функции (и, в некоторых модификациях, ее градиента).

Из условия минимума (2.14) получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $\delta \mathbf{m}$ (часто называемую нормальным уравнением):

$$\mathbf{H}_n \delta \mathbf{m} = -\mathbf{g}_n. \quad (2.15)$$

Матрица \mathbf{H}_n является разреженной и, благодаря регуляризации, положительно определенной, поэтому для решения данной системы целесообразно использовать предобусловленный метод сопряженных градиентов [Hestenes and Stiefel, 1952]. Даже простейший предобусловливатель Якоби (главная диагональ \mathbf{H}_n) существенно ускоряет сходимость метода.

Заметим, что вместо явного вычисления и хранения матрицы $\mathbf{J}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{J}_t$, целесообразно хранить разреженную матрицу $\mathbf{R}_t^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}_t$. То же самое верно и для $\mathbf{J}_Z^T \mathbf{R}_Z^{-1} \mathbf{J}_Z$, если размерность вектора модели \mathbf{r} больше размерности вектора данных \mathbf{z} .

Без учета поиска по направлению, в результате решения (2.15) получаем очередное приближение вектора модели: $\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n + \delta \mathbf{m}$. В идеальной ситуации итерации завершаются, когда среднее значение обеих невязок данных достигает уровня шума, т.е. $\Phi_t(\mathbf{s}) \leq N_t$ и $\Phi_Z(\mathbf{r}) \leq N_Z$, где N_t и N_Z – размерность соответствующих векторов данных. Этому может воспрепятствовать попадание в локальный минимум целевой функции, либо оценка дисперсии данных может оказаться заниженной, поэтому предусматривается максимальное число итераций и остановка при слишком малой длине шага.

2.3.1 О выборе весовых коэффициентов

Целевая функция (2.13) содержит пять скалярных весовых коэффициентов: α_s , α_r , α , w_1 , w_2 , из которых четыре являются независимыми. Как будет показано далее, такая избыточная параметризация может быть удобна для выбора значений коэффициентов. Коэффициенты сгруппированы таким образом, чтобы облегчить выбор параметров регуляризации α_s и α_r с

помощью предварительного выполнения независимой инверсии.

Без ограничения общности, рассмотрим выбор α_s при решении задачи сейсмической томографии: $\min_{\mathbf{s}} \Phi_t(\mathbf{s}) + \alpha_s \Phi_s(\mathbf{s})$. Значение α_s корректируется в процессе инверсии – такой подход называется адаптивной регуляризацией [Жданов, 2012]. На каждой итерации адаптивной регуляризации минимизируется целевая функция с новым значением α_s , и \mathbf{s} , полученное на предыдущей итерации, используется в качестве начального приближения; итерации продолжаются, пока $\Phi_t(\mathbf{s})$ не достигнет уровня, определяемого дисперсией случайных компонент времен пробега, поэтому окончательное значение α_s удовлетворяет принципу невязки [Морозов, 1987]. Общее правило заключается в постепенном уменьшении α_s [Haber et al., 2000]; один из практических способов – принимать α_s равным некоторой мере невязки данных на текущей итерации [Sena and Toksöz, 1990]. В настоящей работе данный способ используется в следующей модификации:

$$\alpha_s \leftarrow \hat{\alpha}_s [\Phi_t(\mathbf{s}_n)]^p,$$

где $\hat{\alpha}_s$ – постоянный масштабирующий коэффициент, задаваемый пользователем. При $p = 1$ это с точностью до коэффициента $\hat{\alpha}_s$ аналогично мультипликативной регуляризации [van den Berg et al., 1999; Nabashy and Abubakar, 2004]; при $p = 1/2$ параметр регуляризации убывает медленнее, что в ряде численных примеров позволило улучшить сходимость. Аналогичный способ используется для α_r .

В общем случае коэффициенты α , w_1 , w_2 также изменяются по адаптивной схеме. Коэффициенты w_1 и w_2 задают относительный вес сейсмической и электромагнитной частей целевой функции и, следовательно, скорость минимизации соответствующих функционалов невязки. Необходимым условием оптимального баланса является нормировка функционалов невязки на размерность векторов данных, т.е. $w_1 \sim 1/N_t$, $w_2 \sim 1/N_Z$. Оптимальными можно считать такие значения w_1 и w_2 , при которых условия $\Phi_t(\mathbf{s}) \leq N_t$ и $\Phi_Z(\mathbf{r}) \leq N_Z$ достигаются за примерно равное число итераций. Выбор коэффициента α зависит от вида структурного ограничения: в целом, более мягкие ограничения – кросс-градиент и кросс-градиент со знаком, допускают постепенное увеличение α в процессе инверсии, в то время как для разности нормированных градиентов лучшие результаты были получены с постоянным или даже уменьшающимся α . Несколько конкретных эвристических способов выбора весовых коэффициентов рассматривается в разделе 2.8.

2.4 Структурные ограничения

Для упрощения записи, в данном разделе будем опускать операторы интерполяции, как будто модели среды и структурные ограничения определены на одной сетке, т.е. введем временные обозначения:

$$\begin{aligned} G_m m(\mathbf{x}_m) &\rightarrow m(\mathbf{x}), \\ \mathbf{G}_m \mathbf{m} &\rightarrow \mathbf{m}, \\ \mathbf{J}_m \mathbf{G}_m &\rightarrow \mathbf{J}_m, \end{aligned}$$

где \mathbf{J}_m – блок производных по \mathbf{m} матрицы Якоби структурного оператора (здесь \mathbf{m} обозначает вектор отдельной модели, а не «прямую сумму» векторов).

2.4.1 Кросс-градиент

Ограничение кросс-градиента [Gallardo and Meju, 2003] требует коллинеарности градиентов скорости и удельного сопротивления в любой точке области Ω :

$$c_{\otimes}(s, r) \equiv |\nabla s(\mathbf{x}) \times \nabla r(\mathbf{x})| = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Этому ограничению соответствует глобальный минимум L_2 -нормы значений оператора кросс-градиента $c_{\otimes}(s, r)$:

$$\Phi_{\otimes}(s, r) \equiv \frac{1}{2} \|c_{\otimes}(s, r)\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla s(\mathbf{x}) \times \nabla r(\mathbf{x})|^2 dx \rightarrow \min. \quad (2.16)$$

Для минимизации дискретного аналога данного функционала методом Гаусса–Ньютона необходимы выражения для матрицы Якоби оператора кросс-градиента, блоки которой обозначим \mathbf{J}_s и \mathbf{J}_r . Поскольку функционал (2.16) является квадратичным относительно \mathbf{s} и \mathbf{r} , это даст точное выражение для его матрицы Гессе. Градиент \mathbf{g}_{\otimes} и матрица Гессе \mathbf{H}_{\otimes} определяются через матрицу Якоби следующим образом:

$$\mathbf{H}_{\otimes} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ss} & \mathbf{H}_{sr} \\ \mathbf{H}_{rs} & \mathbf{H}_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s^T \mathbf{J}_s & \mathbf{J}_s^T \mathbf{J}_r \\ \mathbf{J}_r^T \mathbf{J}_s & \mathbf{J}_r^T \mathbf{J}_r \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{g}_{\otimes} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_s \\ \mathbf{g}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s^T \mathbf{c}_{\otimes} \\ \mathbf{J}_r^T \mathbf{c}_{\otimes} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

где \mathbf{c}_{\otimes} – вектор значений дискретного оператора кросс-градиента. Приведем формулы для блоков \mathbf{g}_{\otimes} и \mathbf{H}_{\otimes} в двумерном случае:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_s &= (\mathbf{D}_x^T r_z - \mathbf{D}_z^T r_x) \mathbf{c}_\otimes, \\
\mathbf{g}_r &= (\mathbf{D}_z^T s_x - \mathbf{D}_x^T s_z) \mathbf{c}_\otimes, \\
\mathbf{H}_{ss} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^T & \mathbf{D}_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_z^2 & -r_x r_z \\ -r_x r_z & r_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_z \end{bmatrix}, \\
\mathbf{H}_{rr} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^T & \mathbf{D}_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_z^2 & -s_x s_z \\ -s_x s_z & s_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_z \end{bmatrix}, \\
\mathbf{H}_{sr} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^T & \mathbf{D}_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_z r_z & s_x r_z \\ s_z r_x & -s_x r_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_z \end{bmatrix}, \\
\mathbf{H}_{rs} &= \mathbf{H}_{sr}^T,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

где $s_{x,z} = \text{diag}[\mathbf{D}_{x,z} \mathbf{s}]$, $r_{x,z} = \text{diag}[\mathbf{D}_{x,z} \mathbf{r}]$ – диагональные матрицы. Блоки матрицы Гессе (2.19) являются дискретными аналогами операторов анизотропной диффузии $\nabla \cdot \mathbf{C}(\mathbf{x}) \nabla$, матрица $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ в непрерывном случае имеет размерность 2×2 и задает тензор диффузии. Каждый блок можно представить в виде суммы компоненты, имеющей структуру дискретного лапласиана, и компоненты, имеющей структуру суммы операторов смешанных вторых производных (рис. 2.4). Первая компонента симметрична, вторая компонента в общем случае не симметрична, поэтому для эффективного представления блока матрицы Гессе в памяти компьютера необходимо хранить 7 ненулевых диагоналей.

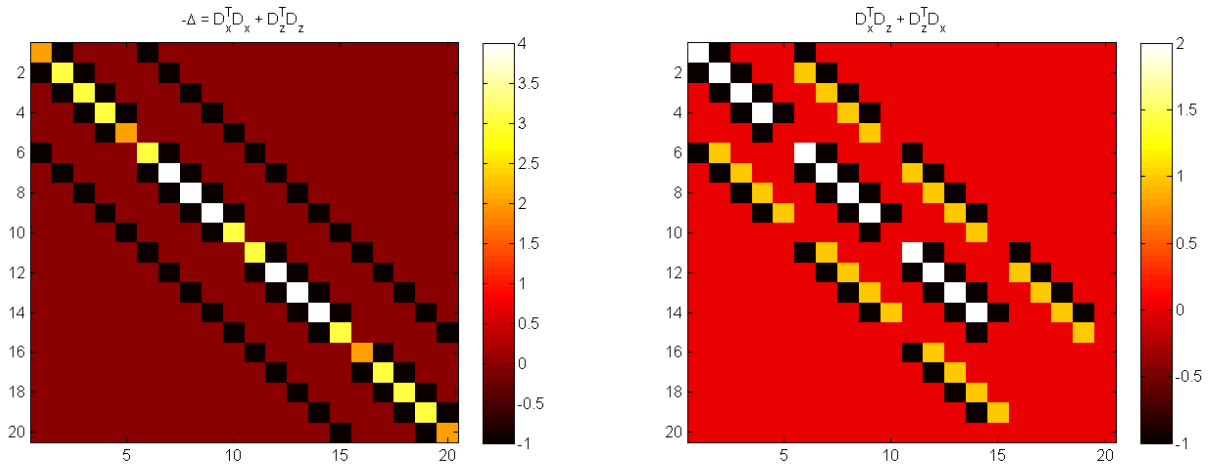


Рис. 2.4. Структура матрицы дискретного оператора анизотропной диффузии. Матрица лапласиана (слева) и суммы смешанных вторых производных для сетки 5×4 с единичным шагом по x и z , блоки «тензора диффузии» – единичные матрицы.

Следует заметить, что функционал (2.16) является невыпуклым, так что, в общем случае, обратная задача требует дополнительной регуляризации. В линеаризованной задаче это проявляется в вырожденности матрицы Гессе \mathbf{H}_{\otimes} . Допустим, градиент модели УЭС где-то обращается в ноль, т.е. в i -й ячейке $[\mathbf{D}_x \mathbf{r}]_i = [\mathbf{D}_z \mathbf{r}]_i = 0$, тогда, как видно из формул (2.17) и (2.19), i -е строка и столбец матрицы Гессе нулевые, и матрица вырождена. Если $[\mathbf{D}_x \mathbf{s}]_i = [\mathbf{D}_z \mathbf{s}]_i = 0$, нулевыми являются строка и столбец $i + M$.

Ограничение кросс-градиента является сравнительно «мягким», в том смысле, что оно выполняется для сравнительно большей части пространства моделей и не сильно ограничивает множество решений обратной задачи. В частности, любая функциональная связь между скоростью и УЭС влечет выполнение ограничения кросс-градиента: если $f(s(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})) = 0$ и функция f дифференцируема, то $\frac{\partial f}{\partial s} \nabla s(\mathbf{x}) = -\frac{\partial f}{\partial r} \nabla r(\mathbf{x})$, следовательно $|\nabla s(\mathbf{x}) \times \nabla r(\mathbf{x})| = 0$. Другим очевидным примером множества моделей, удовлетворяющих ограничению кросс-градиента, является класс горизонтально-однородных моделей.

2.4.2 Кросс-градиент со знаком

В работе [Molodtsov et al., 2011] было предложено модифицировать ограничение кросс-градиента для возможности учета априорной информации о знаке корреляции градиентов моделей. Отрицательная корреляция скорости продольных волн и УЭС наблюдается в верхней части разреза выше зеркала грунтовых вод [Gallardo and Meju, 2003]. Положительная корреляция скорости продольных волн и УЭС более распространена, причем комплексирование сейсмической томографии и МТ представляет особенный интерес в данной ситуации, поскольку томография более чувствительна к высокоскоростным объектам, а МТ – к проводникам. Примерами таких геологических объектов являются эвапориты [De Stefano et al., 2011] и вулканические породы [Heincke et al., 2006] в осадочном чехле, водонасыщенные зоны трещиноватости и магматические камеры [Newman et al., 2008; Бердичевский и Дмитриев, 2009] в фундаменте.

При наличии такого рода априорной информации, целесообразно требовать не просто коллинеарности градиентов моделей, а их параллельности или антипараллельности:

$$c_{\odot}(s, r, h) \equiv |\nabla s(\mathbf{x})| |\nabla r(\mathbf{x})| + h(\mathbf{x}) \nabla s(\mathbf{x}) \cdot \nabla r(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.20)$$

Функция $h(\mathbf{x})$ принимает значения ± 1 и задает априорную информацию о знаке корреляции $r(\mathbf{x})$ и $s(\mathbf{x})$ в различных областях модели. Из тождества $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$ следует связь

ограничения (2.20) с ограничением кросс-градиента:

$$c_{\otimes}^2(s, r) = c_{\odot}(s, r, +1)c_{\odot}(s, r, -1).$$

Заметим, что $c_{\odot}(s, r, h) \geq 0$. Как и в случае с кросс-градиентом, проще минимизировать L_2 -норму значений оператора:

$$\Phi_{\odot}(s, r) \equiv \frac{1}{2} \|c_{\odot}(s, r, h)\|^2. \quad (2.21)$$

Вариационные производные будем искать с помощью формул (2.17)–(2.18). Поскольку выражение (2.20) содержит нелинейную функцию модуля, формула (2.17) в данном случае будет аппроксимацией матрицы Гессе, однако, для краткости, будем называть ее просто «матрицей Гессе». Для вычисления производной функции модуля применим следующую аппроксимацию: $|x| \approx \sqrt{x^2 + \beta^2} \equiv |x|_{\beta}$, $0 < \beta^2 \ll 1$. Приведем выражения для блоков градиента \mathbf{g}_{\odot} и матрицы Гессе \mathbf{H}_{\odot} (используя те же обозначения, что и в формулах (2.17)–(2.18)):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_s &= (\mathbf{D}_x^T a_x + \mathbf{D}_z^T a_z) \mathbf{c}_{\odot}, \\ \mathbf{g}_r &= (\mathbf{D}_x^T b_x + \mathbf{D}_z^T b_z) \mathbf{c}_{\odot}, \\ \mathbf{H}_{ss} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^T & \mathbf{D}_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x^2 & a_x a_z \\ a_x a_z & a_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_z \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_{rr} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^T & \mathbf{D}_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x^2 & b_x b_z \\ b_x b_z & b_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_z \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_{sr} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^T & \mathbf{D}_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_z \\ a_z b_x & a_z b_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_z \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_{rs} &= \mathbf{H}_{sr}^T, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $a_{x,z} = \text{diag} \left[\frac{|\nabla r|_{\beta}}{|\nabla s|_{\beta}} \partial_{x,z} s + h \partial_{x,z} r \right]$, $b_{x,z} = \text{diag} \left[\frac{|\nabla s|_{\beta}}{|\nabla r|_{\beta}} \partial_{x,z} r + h \partial_{x,z} s \right]$ – диагональные матрицы

(все операции здесь следует понимать в дискретном и поэлементном смысле). Как видим, матрица Гессе имеет такую же структуру, как и в случае кросс-градиента (рис.2.4). Из формул для $a_{x,z}$ и $b_{x,z}$ ясно, что β^2 может быть сколько угодно малым – это не должно приводить к каким-либо численным проблемам, поэтому при программной реализации значение β^2 можно выбрать порядка машинного эпсилон.

Подобно L_2 -норме кросс-градиента, функционал (2.21) невыпуклый, так что при

решении обратной задачи требуется дополнительная регуляризация. Матрица Гессе \mathbf{H}_\ominus вырождена, когда градиент одной из моделей обращается в ноль. Понятно, что предложенное ограничение может комбинироваться с ограничением кросс-градиента, например, с помощью задания индикаторной функции $\chi(\mathbf{x})$, принимающей значения 0 и 1, и определения штрафного функционала в виде $\frac{1}{2} \int_{\Omega} \chi [c_{\otimes}(s, r)]^2 + (1 - \chi) [c_{\ominus}(s, r, h)]^2 d\mathbf{x}$. Заметим также, что в более общем случае L_2 -норма может быть снабжена весовой функцией.

2.4.3 Разность нормированных градиентов

Тот факт, что рассмотренные выше ограничения локально выполняются при обращении в ноль одного из градиентов, делает их наиболее применимыми к «сглаживающей» инверсии. Если обратная задача решается в классе кусочно-постоянных моделей среды (учитывая, что для таких моделей все же можно в той или иной форме определить градиент), данные ограничения становятся практически бесполезными, поскольку с наибольшей вероятностью они будут удовлетворены в результате не пересечения носителей градиента. Данная проблема может быть частично решена с помощью предварительного сглаживания моделей, в частности, посредством гауссовой фильтрации, однако, это предъявляет слишком жесткие требования к ширине фильтра. В качестве альтернативного решения в работах [Molodtsov et al., 2012, 2013] было предложено использовать структурное ограничение, требующее помимо параллельности/антипараллельности градиентов совпадения их носителей. Рассмотрим следующий оператор:

$$\mathbf{c}_{\oplus}(s, r, h) = \frac{\nabla s(\mathbf{x})}{\eta_s(\mathbf{x})} + h(\mathbf{x}) \frac{\nabla r(\mathbf{x})}{\eta_r(\mathbf{x})}, \quad (2.23)$$

где $\eta_{s,r}(\mathbf{x}) > 0$ – некоторые скалярные нормирующие коэффициенты, для которых рассмотрим два варианта: $\eta_m(\mathbf{x}) = \sqrt{|\nabla m(\mathbf{x})|^2 + \beta^2}$ и $\eta_m(\mathbf{x}) = \max\{|\nabla m(\mathbf{x})|, |\beta|\}$. Структурное ограничение будем накладывать посредством минимизации L_2 -нормы (2.23):

$$\Phi_{\oplus}(s, r) \equiv \frac{1}{2} \|\mathbf{c}_{\oplus}(s, r, h)\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{c}_{\oplus}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{c}_{\oplus}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \rightarrow \min. \quad (2.24)$$

Очевидно, что при $\beta \rightarrow 0$ глобальный минимум данного функционала достигается тогда и только тогда, когда $\nabla s(\mathbf{x})$ и $h(\mathbf{x})\nabla r(\mathbf{x})$ антипараллельны и имеют одинаковый носитель.

Рассмотрим случай $\eta_m(\mathbf{x}) = \sqrt{|\nabla m(\mathbf{x})|^2 + \beta^2}$. В данном случае функционал (2.24) можно

выразить через функционал с минимальным носителем градиента (MGS-функционал) [Portniaguine and Zhdanov, 1999; Жданов, 2012] (первые два члена):

$$\Phi_{\oplus}(s, r) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla s|^2}{|\nabla s|^2 + \beta^2} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla r|^2}{|\nabla r|^2 + \beta^2} dx + \int_{\Omega} \frac{h \nabla s \cdot \nabla r}{\sqrt{|\nabla s|^2 + \beta^2} \sqrt{|\nabla r|^2 + \beta^2}} dx.$$

Подынтегральное выражение третьего члена при $\beta \rightarrow 0$ представляет собой «коэффициент корреляции» $\nabla s(\mathbf{x})$ и $h(\mathbf{x})\nabla r(\mathbf{x})$. Как и в случае с ограничением кросс-градиента со знаком, воспользуемся приближением матрицы Гессе в виде $\nabla^2 \Phi_{\oplus} \approx \mathbf{J}_{\oplus}^T \mathbf{J}_{\oplus} \equiv \mathbf{H}_{\oplus}$. Приведем выражения для блоков градиента функционала и матрицы \mathbf{H}_{\oplus} (используя те же обозначения, что и в формулах (2.17)–(2.18)):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_s &= \mathbf{D}_x^T (a_z \mathbf{c}_x + a \mathbf{c}_z) + \mathbf{D}_z^T (a \mathbf{c}_x + a_x \mathbf{c}_z), \\ \mathbf{g}_r &= \mathbf{D}_x^T (b_z \mathbf{c}_x + b \mathbf{c}_z) + \mathbf{D}_z^T (b \mathbf{c}_x + b_x \mathbf{c}_z), \\ \mathbf{H}_{ss} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^T & \mathbf{D}_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_z^2 + a^2 & a(a_x + a_z) \\ a(a_x + a_z) & a_x^2 + a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_z \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_{rr} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^T & \mathbf{D}_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_z^2 + b^2 & b(b_x + b_z) \\ b(b_x + b_z) & b_x^2 + b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_z \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_{sr} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x^T & \mathbf{D}_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(a_z b_z + ab) & h(a_z b + ab_x) \\ h(a_x b + ab_z) & h(a_x b_x + ab) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_z \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_{rs} &= \mathbf{H}_{sr}^T, \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\text{где } a_{x,z} = \text{diag} \left[\frac{(\partial_{x,z} s)^2 + \beta^2}{(|\nabla s|^2 + \beta^2)^{3/2}} \right], \quad a = \text{diag} \left[\frac{-\partial_x s \partial_z s}{(|\nabla s|^2 + \beta^2)^{3/2}} \right], \quad b_{x,z} = \text{diag} \left[\frac{(\partial_{x,z} r)^2 + \beta^2}{(|\nabla r|^2 + \beta^2)^{3/2}} \right],$$

$$b = \text{diag} \left[\frac{-\partial_x r \partial_z r}{(|\nabla r|^2 + \beta^2)^{3/2}} \right], \quad \hbar = \text{diag}[h], \quad \mathbf{c}_{x,z} = \text{diag} \left[\frac{1}{\sqrt{|\nabla s|^2 + \beta^2}} \right] \mathbf{D}_{x,z} \mathbf{s} + \text{diag} \left[\frac{h}{\sqrt{|\nabla r|^2 + \beta^2}} \right] \mathbf{D}_{x,z} \mathbf{r} \quad (\text{в}$$

выражениях для диагональных матриц все операции понимаются в поэлементном и дискретном смысле). Как видим, при обращении в ноль ∇s или ∇r , соответствующий элемент матрицы $a_{x,z}$ или $b_{x,z}$ равен β^{-1} , поэтому параметр β не должен быть очень мал. С другой стороны, точная формулировка структурного ограничения требует $\beta \rightarrow 0$. Интуитивно ясно, что с увеличением β растет гладкость функционала $\Phi_{\oplus}(s, r)$ (в пределе, при $\beta \gg \max(|\nabla s|, |\nabla r|)$, функционал квадратичный). Это приводит к идее адаптивной схемы определения параметра β , заключающейся в постепенном уменьшении его значения в ходе итераций метода Гаусса–Ньютона. В работе [Chan et al., 1995] эффективность подобной схемы была

продемонстрирована для метода Ньютона и аппроксимации полной вариации $\int_{\Omega} \sqrt{|\nabla m|^2 + \beta^2} dx$. Отметим, что другим перспективным способом определения β может оказаться модификация метода L-кривой, успешно применявшаяся для определения аналогичного параметра MGS-функционала в работе [Zhdanov and Tolstaya, 2004].

Еще один способ минимизации функционала (2.24) основан на методе наименьших квадратов с повторным взвешиванием (*iteratively reweighted least squares, IRLS*). Метод IRLS применяется к данному функционалу так же как к MGS-функционалу в [Portniaguine and Zhdanov, 1999; Жданов, 2012]: на каждой итерации Гаусса–Ньютона значение нормирующих коэффициентов $\eta_{s,r}$ фиксируется, и дифференцируются только числители выражения (2.23).

Это приводит к следующей аппроксимации матрицы Гессе $\nabla^2 \Phi_{\oplus}$ и градиента \mathbf{g}_{\oplus} :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ss} &= \mathbf{D}_x^T \mathbf{W}_{ss} \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_z^T \mathbf{W}_{ss} \mathbf{D}_z, \\ \mathbf{H}_{rr} &= \mathbf{D}_x^T \mathbf{W}_{rr} \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_z^T \mathbf{W}_{rr} \mathbf{D}_z, \\ \mathbf{H}_{sr} &= \mathbf{H}_{rs} = \mathbf{D}_x^T \mathbf{W}_{sr} \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_z^T \mathbf{W}_{sr} \mathbf{D}_z, \\ \mathbf{g}_{\oplus} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ss} & \mathbf{H}_{sr} \\ \mathbf{H}_{sr} & \mathbf{H}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где $\mathbf{W}_{ss} = \text{diag}[\eta_s^{-2}]$, $\mathbf{W}_{rr} = \text{diag}[\eta_r^{-2}]$, $\mathbf{W}_{sr} = \text{diag}[h(\eta_s \eta_r)^{-1}]$. Как видим, каждый блок данного приближения матрицы Гессе имеет структуру лапласиана. Поскольку в данном случае не требуется дифференцировать нормирующие коэффициенты, для них можно использовать выражение $\eta_m(\mathbf{x}) = \max\{|\nabla m(\mathbf{x})|, |\beta|\}$. Очевидно, что для параметра β в данном случае также требуется выбор компромиссного значения. В статье [Molodtsov et al., 2013] рассмотрен выбор порога β (отдельно для s и r) пропорционально среднему значению градиента: $\beta = q \langle |\nabla m(\mathbf{x})| \rangle$; численно показано, что с уменьшением q растет число обусловленности матрицы Гессе целевой функции, в качестве оптимального интервала предложено $q = 0.01 - 0.1$.

2.5 Стабилизирующие функционалы

Функционалы (2.16), (2.21), (2.24), несмотря на то, что они задают некоторые ограничения в пространстве моделей, не удовлетворяют критериям стабилизирующего функционала [Тихонов и Арсенин, 1974]: подмножество пространства $(\nabla s, \nabla r)$, такое, что $\Phi_c(s, r) < \delta$, не является компактным. Учитывая, что обратная задача, как правило, является недоопределенной, это приводит к вырожденности матрицы Гессе и неразрешимости линеаризованной задачи.

Демпфирование в методе Левенберга–Марквардта устраняет эту проблему, но обычно приводит к сильно осциллирующим моделям, особенно сейсмической – в результате неполного покрытия лучами исследуемой области. Добавление к целевой функции стабилизирующего функционала позволяет существенно улучшить решение. Рассмотрим два варианта стабилизирующего функционала.

Первый вариант – L_2 -норма градиента модели \mathbf{m} с «анизотропным» весом:

$$\Phi_m(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{m}^T \mathbf{D}_x^T \mathbf{W}_x \mathbf{D}_x \mathbf{m} + \mathbf{m}^T \mathbf{D}_z^T \mathbf{W}_z \mathbf{D}_z \mathbf{m} \right), \quad (2.27)$$

где \mathbf{W}_x и \mathbf{W}_z – диагональные положительно определенные матрицы. Регуляризация с использованием функционала (2.27) сглаживает восстанавливаемую модель \mathbf{m} , причем весовые матрицы \mathbf{W}_x и \mathbf{W}_z контролируют степень гладкости по x и z для каждой ячейки модели. Поскольку физические параметры Земли, как правило, меняются быстрее с глубиной, чем по горизонтали, выбор $\mathbf{W}_x \sim a \mathbf{W}_z$, $a > 1$ во многих случаях позволяет получить более физически-осмысленные решения обратной задачи, чем изотропное сглаживание. Градиент и матрица Гессе функционала имеют вид:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{m}} \Phi_m &= \mathbf{L}_w \mathbf{m}, \\ \nabla_{\mathbf{m}}^2 \Phi_m &= \mathbf{L}_w, \end{aligned}$$

где $\mathbf{L}_w = \mathbf{D}_x^T \mathbf{W}_x \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_z^T \mathbf{W}_z \mathbf{D}_z$. Такая регуляризация не позволяет восстанавливать модели среды, содержащие резкие границы, что может сильно ухудшать разрешающую способность обратной задачи. Данного недостатка лишен второй стабилизирующий функционал – полная вариация модели с «анизотропным» весом. Его удобнее определить в непрерывной форме:

$$\Phi_{TV}(m) = \int_{\Omega} \sqrt{\nabla m(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}) \nabla m(\mathbf{x}) + \beta^2} d\mathbf{x}, \quad (2.28)$$

где $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \text{diag}[w_x(\mathbf{x}), w_z(\mathbf{x})]$, $0 < \beta^2 \ll 1$. Полной вариацией функции $m(\mathbf{x})$ называется L_1 -норма ее градиента: $\int_{\Omega} |\nabla m(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$, а функционал (2.28), конечно, является дифференцируемым приближением полной вариации (с точностью до весовой функции). Регуляризация с помощью полной вариации позволяет восстанавливать кусочно-непрерывные модели, что впервые было использовано в работе [Rudin et al., 1992] в задаче шумоподавления для изображений. Весовые функции $w_{x,z}(\mathbf{x})$ в дискретной форме соответствуют матрицам $\mathbf{W}_{x,z}$, играющим ту же роль, что и в стабилизаторе (2.27). Выражения для градиента и матрицы Гессе дискретного аналога функционала (2.28) имеют вид:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{m}}\Phi_{\text{TV}}(\mathbf{m}) &= \mathbf{L}_w\mathbf{m}, \\ \nabla_{\mathbf{m}}^2\Phi_{\text{TV}}(\mathbf{m}) &= \mathbf{L}_w + \frac{\partial\mathbf{L}_w}{\partial\mathbf{m}}\mathbf{m},\end{aligned}\quad (2.29)$$

где $\mathbf{L}_w = \mathbf{D}_x^T \text{diag}\left[\frac{w_x}{\sqrt{\nabla\mathbf{m}\cdot\mathbf{W}\nabla\mathbf{m}+\beta^2}}\right]\mathbf{D}_x + \mathbf{D}_z^T \text{diag}\left[\frac{w_z}{\sqrt{\nabla\mathbf{m}\cdot\mathbf{W}\nabla\mathbf{m}+\beta^2}}\right]\mathbf{D}_z$ (в выражениях для диагональных матриц все операции понимаются в поэлементном и дискретном смысле). Пренебрегая вторым членом в (2.29), получаем приближение матрицы Гессе, соответствующее методу IRLS, или методу запаздывающей диффузии (*lagged diffusivity*) в терминах статьи [Vogel and Oman, 1996], в которой демонстрируется, что при малых значениях β данный метод сходится быстрее, чем метод Ньютона.

2.6 Ограничения типа неравенства

Ограничить интервал допустимых значений физических параметров моделей можно, применяя к элементам вектора модели \mathbf{m} нелинейное преобразование следующего вида [Kim et al., 1999; Nabashy and Abubakar, 2004]:

$$\mu_i(m_i) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m_i - m_{\min}}{m_{\max} - m_i}\right). \quad (2.30)$$

Обратное преобразование будет иметь вид

$$m_i(\mu_i) = \frac{m_{\max}e^{\mu_i} + m_{\min}e^{-\mu_i}}{e^{\mu_i} + e^{-\mu_i}}.$$

Эта функция похожа на гиперболический тангенс, но имеет асимптоты m_{\min} и m_{\max} . Очевидно, что для любых значений μ_i выполняется неравенство $m_{\min} < m_i < m_{\max}$. На итерации n метода Гаусса–Ньютона, матрицы Якоби операторов прямой задачи, рассчитанные для \mathbf{m} , необходимо поэлементно умножить на $\left.\frac{\partial m_i}{\partial \mu_i}\right|_{\mathbf{m}_n} = 2\frac{(m_{n,i} - m_{\min})(m_{\max} - m_{n,i})}{m_{\max} - m_{\min}}$. Поскольку функция (2.30) монотонна, замена вектора модели \mathbf{m} вектором $\boldsymbol{\mu}$ не оказывает существенного влияния на используемые структурные ограничения. После такого преобразования переменных результатом решения нормального уравнения (2.15) является вектор $\delta\boldsymbol{\mu}$, и обновление вектора модели осуществляется по формуле

$$m_{n+1,i} = \frac{m_{\max}(m_{n,i} - m_{\min})e^{-\delta\mu_i} + m_{\min}(m_{\max} - m_{n,i})e^{\delta\mu_i}}{m_{\max} - m_{\min}}.$$

2.7 Совместная инверсия методом множителей Лагранжа

Предполагая, что структурные ограничения должны выполняться точно, вместо задачи (2.13) более корректно рассматривать задачу минимизации с ограничением в виде равенства:

$$\min_{\mathbf{s}, \mathbf{r}} w_1 [\Phi_t(\mathbf{s}) + \alpha_s \Phi_s(\mathbf{s})] + w_2 [\Phi_Z(\mathbf{r}) + \alpha_r \Phi_r(\mathbf{r})]$$

при условии $\mathbf{c}(\mathbf{G}_s \mathbf{s}, \mathbf{G}_r \mathbf{r}) = \mathbf{0}$,

где $\mathbf{c}(\mathbf{G}_s \mathbf{s}, \mathbf{G}_r \mathbf{r})$ – оператор структурного ограничения. Gallardo и Meju [Gallardo and Meju, 2003; Gallardo, 2007] предложили решать данную задачу методом *последовательного квадратичного программирования*; в работе [Molodtsov et al., 2011] этот подход был обобщен на ограничение (2.20). На каждой итерации выполняется линейризация операторов прямой задачи и ограничения, и решается задача квадратичного программирования:

$$\min_{\delta \mathbf{m}} \frac{1}{2} \delta \mathbf{m}^T \hat{\mathbf{H}}_n \delta \mathbf{m} + \delta \mathbf{m}^T \hat{\mathbf{g}}_n \quad (2.31)$$

при условии $\mathbf{J}_{c,n} \delta \mathbf{m} = -\mathbf{c}_n$,

где (используя обозначения, принятые в разделе 2.3, и опуская индекс итерации n) $\mathbf{J}_c = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{m}}$,

$$\hat{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} w_1 (\mathbf{J}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} (\mathbf{t} - \mathbf{t}_c) + \alpha_s \nabla_s \Phi_s) \\ w_2 (\mathbf{J}_Z^T \mathbf{R}_Z^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{z}_c) + \alpha_r \nabla_r \Phi_r) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} w_1 (\mathbf{J}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{J}_t + \alpha_s \mathbf{H}_s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & w_2 (\mathbf{J}_Z^T \mathbf{R}_Z^{-1} \mathbf{J}_Z + \alpha_r \mathbf{H}_r) \end{bmatrix}.$$

С помощью введения вектора неопределенных множителей Лагранжа λ задача (2.31) сводится к нахождению седловой точки функции Лагранжа

$$\frac{1}{2} \delta \mathbf{m}^T \hat{\mathbf{H}}_n \delta \mathbf{m} + \delta \mathbf{m}^T \hat{\mathbf{g}}_n + \lambda^T (\mathbf{J}_{c,n} \delta \mathbf{m} + \mathbf{c}_n),$$

что эквивалентно решению уравнения

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_n & \mathbf{J}_{c,n}^T \\ \mathbf{J}_{c,n} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{m} \\ \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_n \\ \mathbf{c}_n \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Матрица $\hat{\mathbf{H}}_n$, благодаря регуляризации, является строго положительно определенной, поэтому система (2.32) разрешима тогда и только тогда, когда $\mathbf{J}_{c,n}$ имеет полный строчный ранг, или, что то же самое, когда матрица $\mathbf{S}_n \equiv \mathbf{J}_{c,n} \hat{\mathbf{H}}_n^{-1} \mathbf{J}_{c,n}^T$, называемая дополнением Шура матрицы $\hat{\mathbf{H}}_n$, является положительно определенной [Benzi et al., 2005]. Поскольку структура разреженности блоков матриц Якоби \mathbf{J}_c кросс-градиента и ограничения (2.20) соответствует матрицам разностных операторов:

$$\mathbf{J}_c = [\mathbf{W}_1 \mathbf{D}_x + \mathbf{W}_2 \mathbf{D}_z \quad \mathbf{W}_3 \mathbf{D}_x + \mathbf{W}_4 \mathbf{D}_z],$$

где W_i – некоторые диагональные матрицы, любые ненулевые строки линейно независимы. В силу принятых для разностных операторов граничных условий, одна строка всегда нулевая; как видно из выражений (2.19) и (2.22), нулевыми также являются строки, соответствующие ячейкам, в которых $|\nabla s| = |\nabla r| = 0$. После исключения соответствующих строк из условия в (2.31) получающаяся «уплотненная» система (2.32) становится совместной.

Очевидно, что при решении (2.32) следует учитывать разреженность и блочную структуру матрицы системы. Известный «прямой» алгоритм решения основан на использовании дополнения Шура S_n [Троян и Киселев, 2000; Gallardo and Meju, 2003; Molodtsov et al., 2011]. Сначала находится решение (2.31) без учета ограничений: $\delta \hat{\mathbf{m}} = -\hat{\mathbf{H}}_n^{-1} \hat{\mathbf{g}}_n$; затем система (2.32) приводится к блочно-треугольной форме:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_n & -\mathbf{J}_{c,n}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_n \\ \mathbf{c}_n + \mathbf{J}_{c,n} \delta \hat{\mathbf{m}} \end{bmatrix},$$

откуда сначала находятся множители Лагранжа, а затем $\delta \mathbf{m} = \delta \hat{\mathbf{m}} + \hat{\mathbf{H}}_n^{-1} \mathbf{J}_{c,n}^T \boldsymbol{\lambda}$. Таким образом, требуется решение системы с положительно определенной матрицей S_n (с помощью метода сопряженных градиентов или разложения Холецкого) и вычисление $\hat{\mathbf{H}}_n^{-1}$ (с помощью разложения Холецкого). Данный алгоритм может быть успешно применен к задачам сравнительно небольшой размерности с простой геометрией, как продемонстрировано в работе [Molodtsov et al., 2011], где использовалась общая сетка размером 100×26 ячеек. Необходимость явного вычисления матрицы $\hat{\mathbf{H}}_n^{-1}$, входящей в выражение для S_n , затрудняет применение алгоритма к большим задачам, поскольку большинство алгоритмов нахождения обратной матрицы размера N^2 имеет сложность $O(N^3)$ (для сравнения, сложность метода сопряженных градиентов для разреженной матрицы, содержащей $O(N)$ ненулевых элементов, составляет $O(\sqrt{k}N)$, где k – число обусловленности матрицы [Shewchuk, 1994]).

Эффективными итеративными методами решения систем вида (2.32) являются методы SYMMLQ и MINRES [Paige and Saunders, 1975], которые в некотором смысле обобщают метод сопряженных градиентов на случай симметричной неопределенной матрицы. К сожалению, по результатам численных экспериментов, данные методы весьма чувствительны к обусловленности системы и без предобусловливания не сходятся во многих случаях, когда работает вышеописанный прямой алгоритм.

2.8 Численные примеры

2.8.1 Модель пассивной континентальной окраины

Рассмотрим упрощенную региональную модель пассивной континентальной окраины или края рифтового бассейна. Прямоугольная область модели имеет размеры 20 км по горизонтали и 23 км по вертикали. На глубине 14 км находится поверхность Мохоровичича (Мохо), кристаллический фундамент нарушен характерной для рифтинга системой сбросов, выше залегает осадочный чехол, включающий изолированный соляной купол. Сетка, использовавшаяся для моделирования как сейсмических, так и МТ данных, содержит 26 строк и 100 столбцов ячеек. Высота ячеек увеличивается с глубиной в соответствии с понижением частоты магнитотеллурического поля. Однородный водный слой с удельным сопротивлением 0.3 Ом·м и скоростью продольных волн 1.5 км/с не включен в модельную сетку (он добавлялся непосредственно решателями прямых задач). Модели скорости продольных волн и УЭС вместе с сеткой и геометрией наблюдений представлены на рис. 2.5.

Система наблюдений МТ состоит из 15 донных станций, расположенных с шагом 1 км в интервале 3–17 км (рис. 2.5b). Используется 15 частот с постоянным логарифмическим шагом в интервале 0.001–1 Гц. МТ-данные рассчитывались с помощью метода конечных элементов, описанного в разделе 2.1.2, и суммировались с белым гауссовым шумом с СКО 3% (рис. 2.6). Сейсмическая система наблюдений имеет следующий вид: 21 донная станция с интервалом 1 км и источники с интервалом 200 м на поверхности моря, каждый источник регистрируется всеми приемниками (рис. 2.5a). Годографы первых вступлений и волн, отраженных от Мохо, рассчитывались с помощью алгоритма, описанного в разделе 2.1.1, к временам добавлялся гауссов шум с нулевым средним и СКО 10 мс (рис. 2.7).

Распределение интегральных чувствительностей сейсмических и МТ данных для истинных моделей приведено на рис. 2.8. Интегральные чувствительности рассчитывались как $\text{diag}[\mathbf{J}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{J}_t]^{\frac{1}{2}}$ и $\text{diag}[\mathbf{J}_Z^T \mathbf{R}_Z^{-1} \mathbf{J}_Z]^{\frac{1}{2}}$ и, поскольку в данном случае интерес представляют в основном относительные изменения чувствительности в пределах модели, нормировались на максимальные значения. Нормированная интегральная чувствительность показывает относительный вклад малого возмущения каждой компоненты вектора модели в возмущение вектора данных. Из рисунка видно, что преломленные волны, выходящие в первое вступление, чувствительны лишь к верхней части кристаллического фундамента и части соляного купола. Волны, отраженные от Мохо, обеспечивают более равномерное покрытие лучами земной коры, но можно видеть отдельные зоны тени, вызванные сильным преломлением лучей соляным

куполом и уступами фундамента. В целом времена пробега более чувствительны к высокоскоростным объектам – соли и фундаменту, в то время как обе магнитотеллурические моды, наоборот, более чувствительны к проводящим (и низкоскоростным) осадкам. Для инверсии в данном примере использовалась только ТМ мода.

При решении обратных задач будем предполагать, что положение Мохо и физические параметры мантии и нижней части коры известны априори, и требуется восстановить строение верхней части коры. В соответствии с этим, обратные задачи решаются для области, ограниченной поверхностью дна и отметкой -10 км (см. рис. 2.5); истинные модели в области инверсии показаны на рис. 2.9с–d. Одномерные начальные модели скорости и удельного сопротивления приведены на рис. 2.9а–b.

Сначала независимо выполнялась сейсмическая томография и инверсия МТ данных. В качестве стабилизирующего функционала в обоих случаях использовалась полная вариация (с единичными весовыми матрицами), также использовалось демпфирование с единичной матрицей и коэффициентом, равным параметру регуляризации. Параметры регуляризации изменялись по адаптивной схеме, описанной в разделе 2.3.1, с $p = 1/2$ и масштабирующими коэффициентами $\hat{\alpha}_s = 0.1$, $\hat{\alpha}_r = 1$. С помощью нелинейных преобразований скорость продольных волн ограничивалась интервалом $1.3\text{--}8$ км/с, удельное сопротивление – интервалом $0.1\text{--}1000$ Ом·м. Инверсия выполнялась на той же сетке, на которой были рассчитаны синтетические данные.

Томография на преломленных волнах позволяет восстановить только верхнюю часть фундамента и соляного купола, что вполне ожидаемо исходя из лучевого покрытия; данный результат не представляет особого интереса, и восстановленная модель здесь не приводится. Результат томографии с одновременным использованием первых вступлений и отраженных волн приведен на рис. 2.9е. Заметим, что и в этом случае, из-за субвертикального распространения волн, отраженных от Мохо, и создаваемой соляным куполом зоны тени, не удастся восстановить подошву соли. Результат инверсии ТМ моды показан на рис. 2.9f. Хорошо видно наличие проводящих осадков, разделяющих фундамент и соляной купол, однако, разрешение модели слишком низкое, чтобы судить о геометрии соли и фундамента, и истинных значениях удельного сопротивления.

В совместной инверсии использовалось ограничение разности нормированных градиентов (2.24) с $h = 1$, т.е. полагалась априори известной отрицательная корреляция медленности и УЭС. Матрица Гессе и градиент ограничения вычислялись с помощью приближения (2.26), а нормирующие коэффициенты имели вид $\eta_m(\mathbf{x}) = \max\{|\nabla m(\mathbf{x})|, q \langle |\nabla m(\mathbf{x})| \rangle\}$, $q = 0.01$. Совместная инверсия выполнялась на общей сетке, той же, на которой были рассчитаны

синтетические данные. Единственным стабилизирующим функционалом была полная вариация скорости (т.е. «регулярность» УЭС обеспечивалась исключительно демпфированием и структурным ограничением), что позволило получить более контрастные модели удельного сопротивления. Веса сейсмической и МТ частей целевой функции принимались равными размерности векторов данных: $w_1 = 1/N_t$, $w_2 = 1/N_Z$; $\alpha = \sqrt{\alpha_r \alpha_s}$.

Результат совместной инверсии с использованием только первых вступлений приведен на рис. 2.9g–h; можно видеть некоторое улучшение в восстановлении обоих параметров. Чувствительность преломленных волн позволяет «сфокусировать» изображение удельного сопротивления в верхней части соляного купола и фундамента, в то время как МТ позволяет продолжить модель скорости в области, не покрытые лучами. Добавление отраженных волн верифицирует значения скорости в глубинной части модели и улучшает модель удельного сопротивления (рис. 2.9i–j).

Сравним полученные результаты с результатами инверсии с ограничением кросс-градиента. С целью более наглядного сравнения двух ограничений были сделаны следующие модификации целевых функций. Во-первых, поскольку ограничение кросс-градиента требует дополнительной стабилизации удельного сопротивления, полная вариация удельного сопротивления была добавлена к обеим целевым функциям. Во-вторых, кросс-градиент был нормирован с помощью коэффициентов $\eta_m(\mathbf{x}) = \max\{|\nabla m(\mathbf{x})|, q \langle |\nabla m(\mathbf{x})| \rangle\}$, $q = 0.01$:

$$\Phi_{\otimes}(s, r) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla s(\mathbf{x})}{\eta_s(\mathbf{x})} \times \frac{\nabla r(\mathbf{x})}{\eta_r(\mathbf{x})} \right|^2 d\mathbf{x} \rightarrow \min. \quad (2.33)$$

Результаты совместной инверсии преломленных и отраженных волн и ТМ моды, с учетом данных модификаций, показаны на рис. 2.10. На рис. 2.11 приведены значения скалярного произведения градиентов медленности и удельного сопротивления, нормированных на среднеквадратическое значение; в моделях, восстановленных с использованием кросс-градиента (рис. 2.11b), видны области ошибочной положительной корреляции параметров.

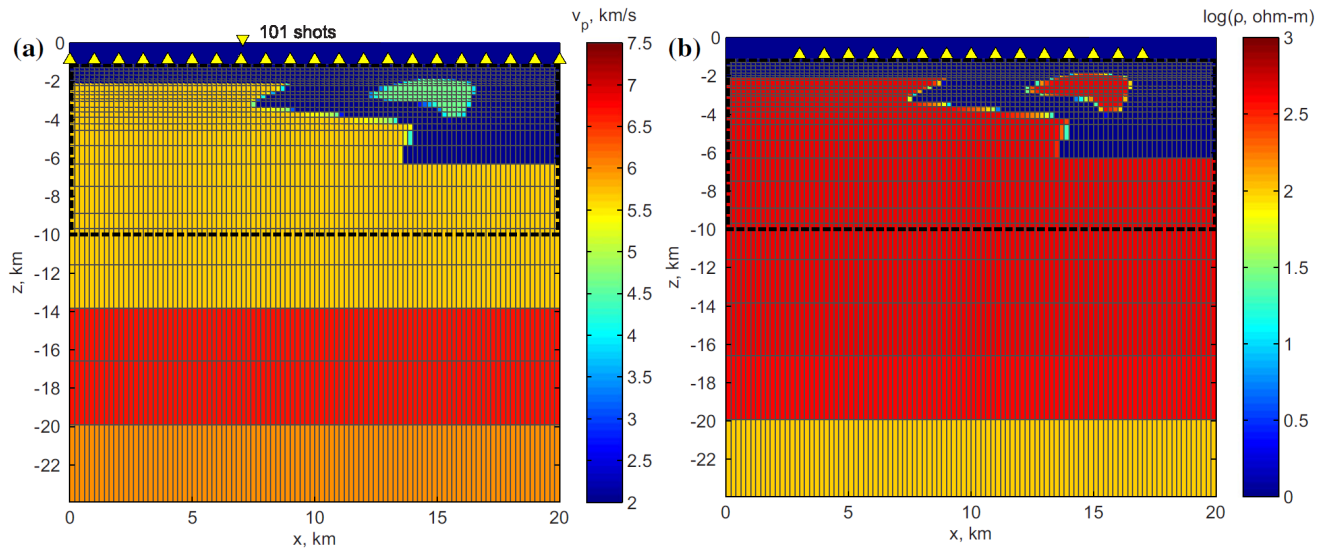


Рис. 2.5. Модели среды, расчетная сетка и геометрия наблюдений. Пунктирная линия ограничивает область инверсии. (a) Модель скорости продольных волн и сейсмическая система наблюдений. (b) Модель удельного сопротивления и положение МТ станций.

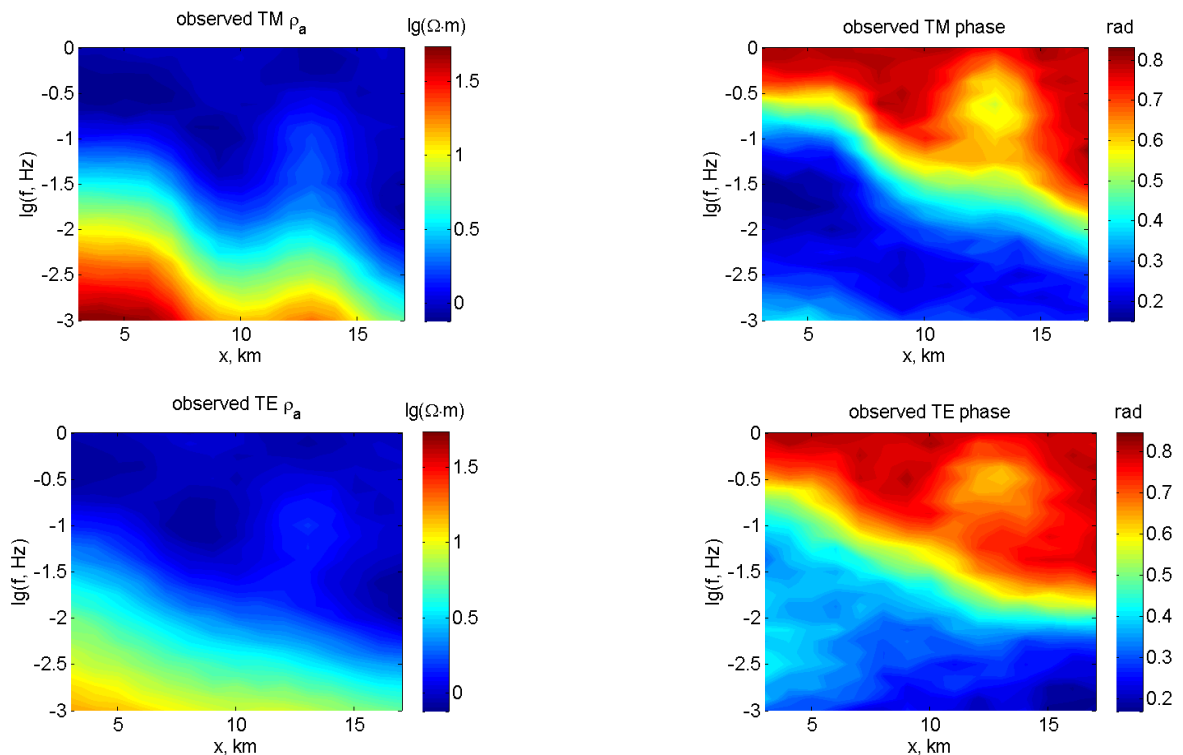


Рис. 2.6. Синтетические МТ данные с добавлением шума: кажущееся сопротивление (слева) и фаза импеданса ТМ (вверху) и ТЕ моды.

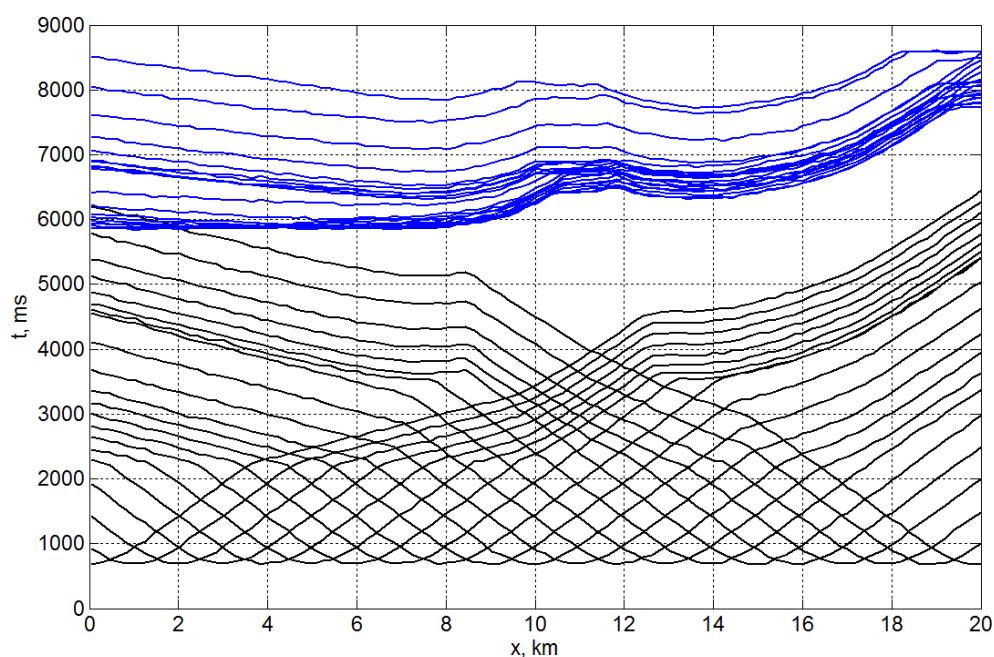


Рис. 2.7. Синтетические годографы ОТП первых вступлений (черные) и отраженных волн (синие) с добавлением шума.

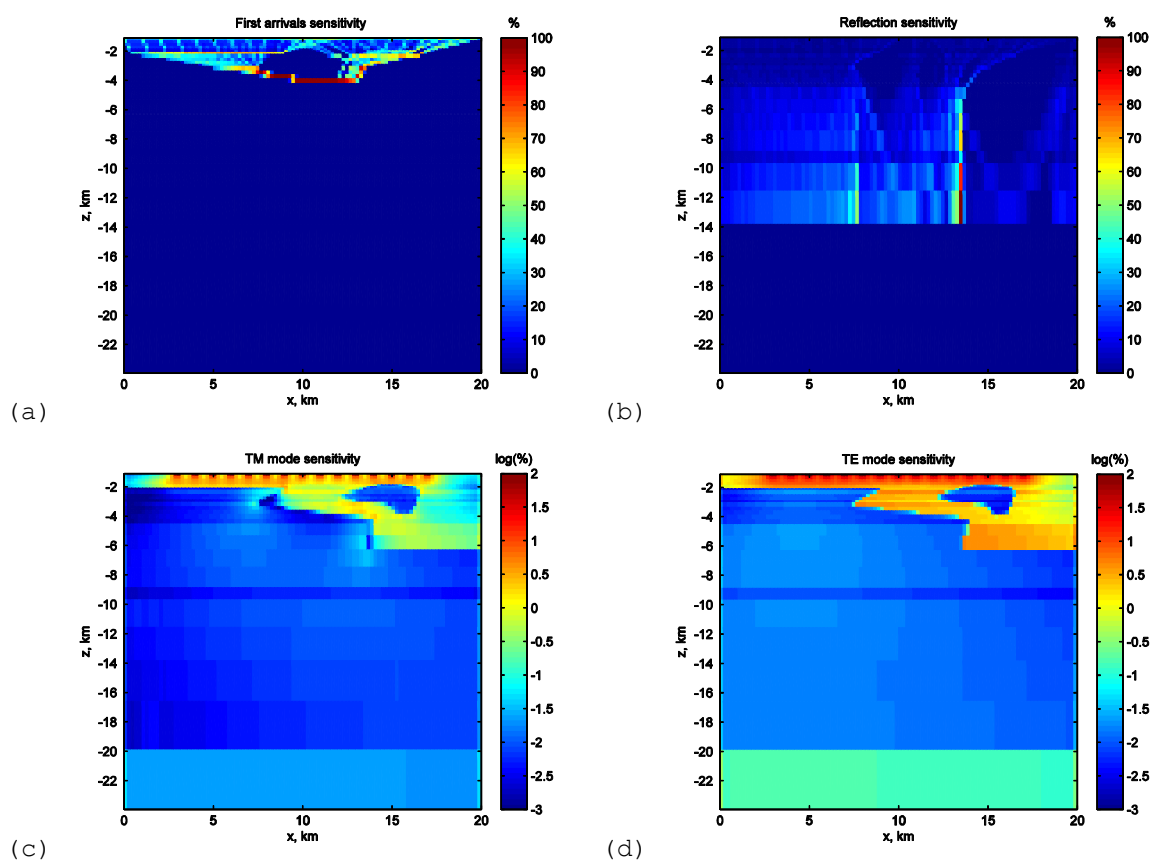


Рис. 2.8. Интегральная чувствительность для истинных моделей среды: (а) времен первых вступлений, (б) годографов отраженных волн, импеданса (с) ТМ моды и (д) ТЕ моды.

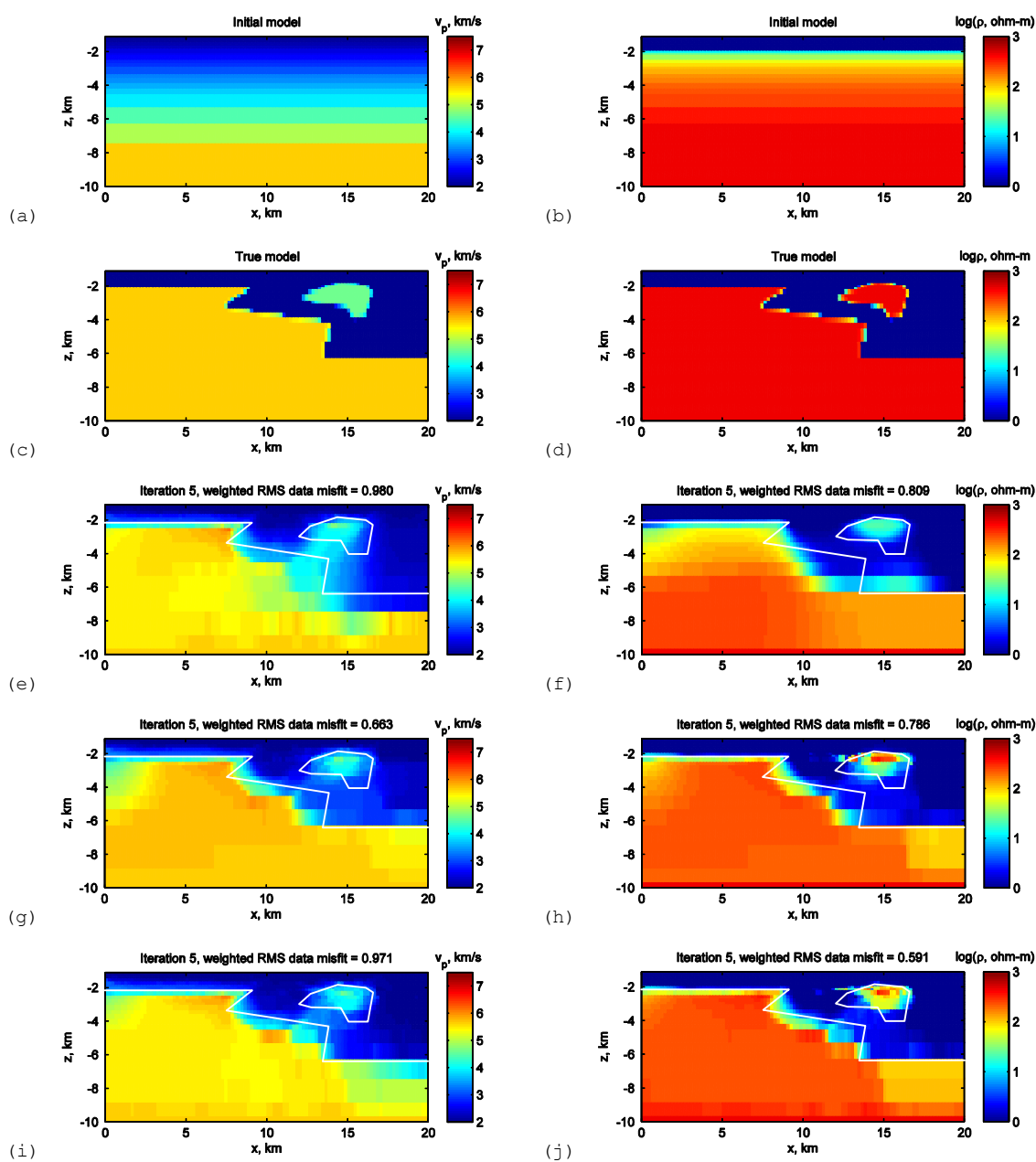


Рис. 2.9. Слева: скорость, справа: удельное сопротивление. (a–b) Начальные модели. (c–d) Истинные модели. (e–f) Результаты независимой инверсии времен пробега (преломленных и отраженных волн) и ТМ импеданса. (g–h) Результат совместной инверсии первых вступлений и ТМ импеданса. (i–j) Результат совместной инверсии первых вступлений, отраженных волн и ТМ импеданса. Контуры истинной модели показаны белой линией.

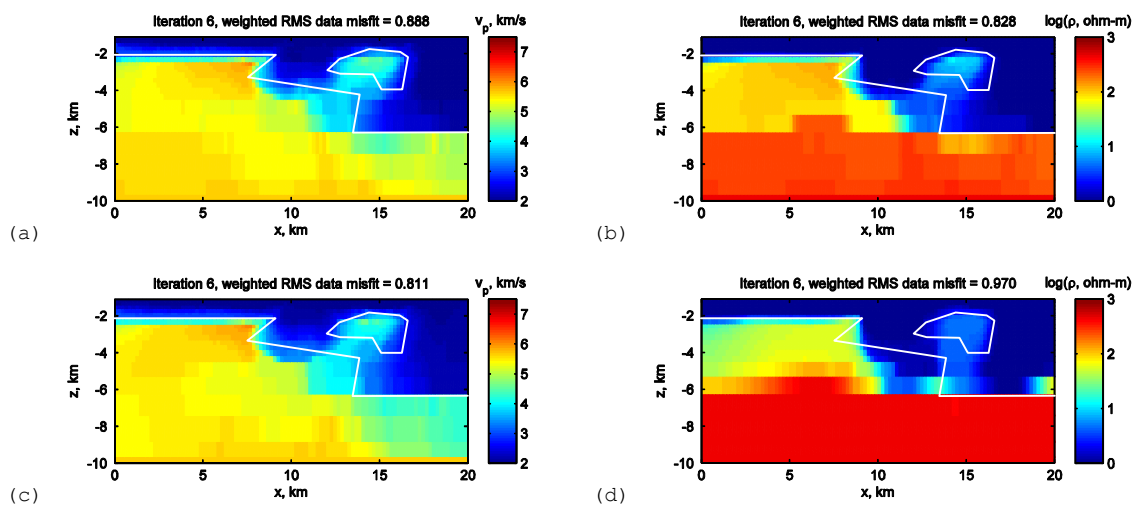


Рис. 2.10. Слева: скорость, справа: удельное сопротивление. (а–б) Результат совместной инверсии первых вступлений, отраженных волн и ТМ импеданса с ограничением (2.24) и с добавлением к целевой функции полной вариации модели удельного сопротивления. (с–д) То же с нормированным ограничением кросс-градиента (2.33). Контуры истинной модели показаны белой линией.

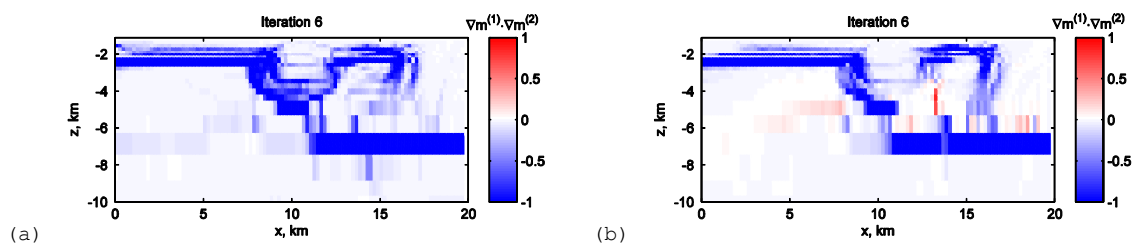


Рис. 2.11. Скалярное произведение нормированных градиентов медленности и удельного сопротивления для моделей, приведенных на рис. 2.10. (а) Совместная инверсия с ограничением (2.24). (б) Совместная инверсия с нормированным ограничением кросс-градиента (2.33).

2.8.2 Красное море

В данном примере используется двумерное сечение трехмерной многопараметрической модели, основанной на реальных данных для шельфа Красного моря, описанной в статье [Colombo et al., 2013]. На рис. 2.12 приведены модели удельного сопротивления и скорости продольных волн, использовавшиеся для расчета синтетических данных (показаны области моделей, соответствующие области сейсмической инверсии). Видны основные геологические элементы моделей – кристаллический фундамент, осадочный чехол, включающий слой эвапоритов, и водный слой; глубина моря изменяется в интервале 450–800 м. На рис. 2.12 также показана геометрия сейсмической и МТ систем наблюдений. Для 55 донных станций, расположенных с шагом 1 км, были рассчитаны ТМ и ТЕ моды МТ поля; используется 15 частот с постоянным логарифмическим шагом в интервале 0.001–1 Гц. МТ данные были зашумлены белым гауссовым шумом с нулевым средним и СКО 3% по кажущемуся сопротивлению и 15 мрад по фазе импеданса (рис. 2.13). В сейсмике моделировалась геометрия наблюдений с донным кабелем и пневмоисточником; шаг по пунктам возбуждения и пунктам приема составляет 400 м; каждое положение источника регистрируется всеми приемниками; максимальные удаления составляют 60 км. Моделировались только времена первых вступлений, к которым был добавлен гауссов шум с нулевым средним и СКО 10 мс (рис. 2.14).

Обратные задачи решались с использованием для сейсмической томографии и МТ независимых квазирегулярных сеток, верхняя граница которых повторяет батиметрию. Сетка томографии имеет размер 160×70 ячеек, МТ: 60×34. В качестве начальных моделей использовалось однородное полупространство с удельным сопротивлением 10 Ом·м и модель скорости $v_p(z) = 1.5 - 0.22z$ [км/с], где z [км] – глубина от уровня дна.

Регуляризация осуществлялась с помощью полной вариации скорости и L_2 -нормы градиента УЭС, весовые функции в обоих случаях: $w_z = 1$, $w_x = 10$; также использовалось демпфирование с единичной матрицей и коэффициентом, равным параметру регуляризации. Параметры регуляризации изменялись по адаптивной схеме, описанной в разделе 2.3.1, с $p = 1/2$ и масштабирующими коэффициентами $\hat{\alpha}_s = 0.5$, $\hat{\alpha}_r = 0.25$. С помощью нелинейных преобразований скорость продольных волн ограничивалась интервалом 1.3–8.5 км/с, удельное сопротивление – интервалом 0.1–1000 Ом·м. Данные ограничения и регуляризация относятся ко всем примерам, рассмотренным ниже.

Точность восстановления скорости и удельного сопротивления будем количественно оценивать с помощью относительных невязок с истинными моделями $v_{p\text{true}}$ и ρ_{true} , соответственно: $\delta s = \left\| v_p - v_{p\text{true}} \right\| / \left\| v_{p\text{true}} \right\| \cdot 100\%$ и $\delta r = \left\| \ln \rho - \ln \rho_{\text{true}} \right\| / \left\| \ln \rho_{\text{true}} \right\| \cdot 100\%$.

Сначала независимо выполнялась сейсмическая томография и инверсия МТ данных. Томография на первых вступлениях, несмотря на наличие в данных головных волн от фундамента, позволяет с приемлемой точностью восстановить лишь кровлю эвапоритов (рис. 2.16d), что вполне согласуется с лучевой картиной для истинной модели (рис. 2.15). На рис. 2.16с показана модель удельного сопротивления, полученная с помощью бимодальной МТ инверсии: благодаря чувствительности МТ к проводящему слою подсолевых осадков, данная модель значительно полнее характеризует изучаемую геологическую структуру, чем томографическая модель скорости.

Будем полагать априори известным знак корреляции скорости и удельного сопротивления, что позволяет определить операторы $c_{\ominus}(s, r, 1)$ и $c_{\oplus}(s, r, 1)$. Сетку ограничений построим в области пересечения сейсмической и МТ сеток (совпадающей с сейсмической областью инверсии); локальные значения σ_x и σ_z для обоих гауссовых фильтров (\mathbf{G}_s и \mathbf{G}_r) выберем равными половине соответствующих размеров ячейки МТ сетки.

Для более наглядной демонстрации свойств структурных ограничений сначала применим их к сейсмической томографии с опорной моделью. В качестве опорной будем использовать истинную модель удельного сопротивления \mathbf{r}_{true} . Это эквивалентно минимизации целевой функции (2.13) с $w_1 = 1$, $w_2 = 0$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{true}}$. Как видно из рис. 2.16e–f, оператор c_{\ominus} несколько улучшает модель скорости по сравнению с оператором кросс-градиента, но не позволяет восстановить подошву эвапоритов. С помощью оператора c_{\oplus} оказывается возможным восстановить элементы модели, к которым первые вступления не чувствительны: подошву эвапоритов и структуру в зонах тени (рис. 2.16g). На рис. 2.17 представлено скалярное и векторное произведение нормированных градиентов медленности и удельного сопротивления, интерполированных на сетку ограничений. Можно видеть, что при использовании кросс-градиента, как и следовало ожидать, градиенты коллинеарны, однако для подошвы эвапоритов наблюдается ошибочная положительная корреляция. Повышенные значения векторного произведения в верхней части модели при использовании операторов c_{\ominus} и c_{\oplus} объясняются несколько меньшим весом ограничений. Изменение значений членов целевой функции в процессе инверсии показано на рис. 2.20.

В совместной инверсии весовые коэффициенты выбирались следующим образом. Чтобы сократить число коэффициентов, положим $w_1 + w_2 = 1$ и будем рассматривать отношение $w_1 / (1 - w_1) \equiv \gamma$. На первой итерации больший вес устанавливался для МТ: $\gamma = 10^{-3}$, далее веса сейсмической и МТ частей постепенно выравнивались до $\gamma = N_Z / N_t$. Параметр

$\alpha = \frac{N_z + N_t}{M} ab^k$, где M – число ячеек сетки ограничений, k – номер итерации. Для кросс-градиента: $a = 10^5$, $b = 1.5$; для c_{\ominus} : $a = 10^5$, $b = 1$; для c_{\oplus} : $a = 10$, $b = 1$.

Результаты совместной инверсии приведены на рис. 2.19. На рис. 2.19а–б наблюдается выраженная «когерентность» структуры скорости и удельного сопротивления, соответствующая успешной минимизации нормы кросс-градиента (рис. 2.18), но с ошибочным знаком на подошве соли; средняя невязка скорости δs несколько уменьшена по сравнению с независимой томографией (рис. 2.16d). Интересно, что этот результат лучше, чем при использовании точной опорной модели (рис. 2.16е), что, по всей видимости, объясняется тем, что точная модель УЭС является кусочно-постоянной, и фильтр \mathbf{G}_r недостаточно ее сглаживает. Ограничение c_{\oplus} позволяет улучшить и скорость, и удельное сопротивление, по сравнению с независимой инверсией и c_{\ominus} (рис. 2.19с–f), хотя восстановить подошву соли не удается. Изменение членов целевой функции в процессе инверсии показано на рис. 2.20; введение структурных ограничений значительно замедляет сходимость по невязкам.

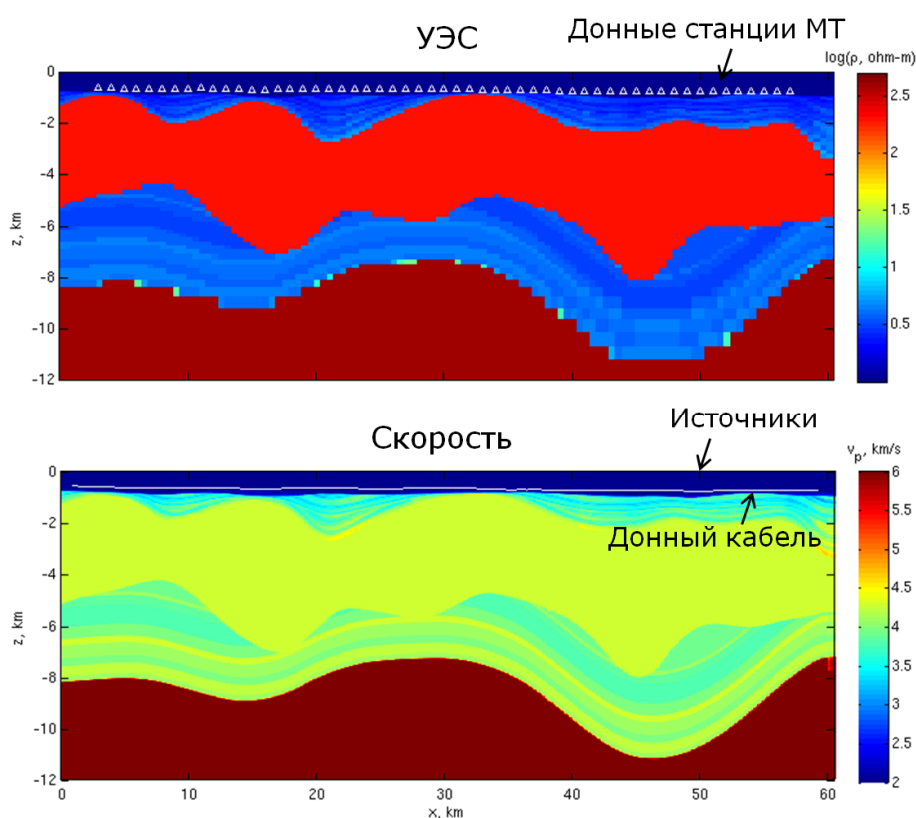


Рис. 2.12. Модели среды и геометрия наблюдений, использовавшиеся для расчета синтетических данных: удельное сопротивление и положение МТ станций, скорость продольных волн и сейсмическая система наблюдений.

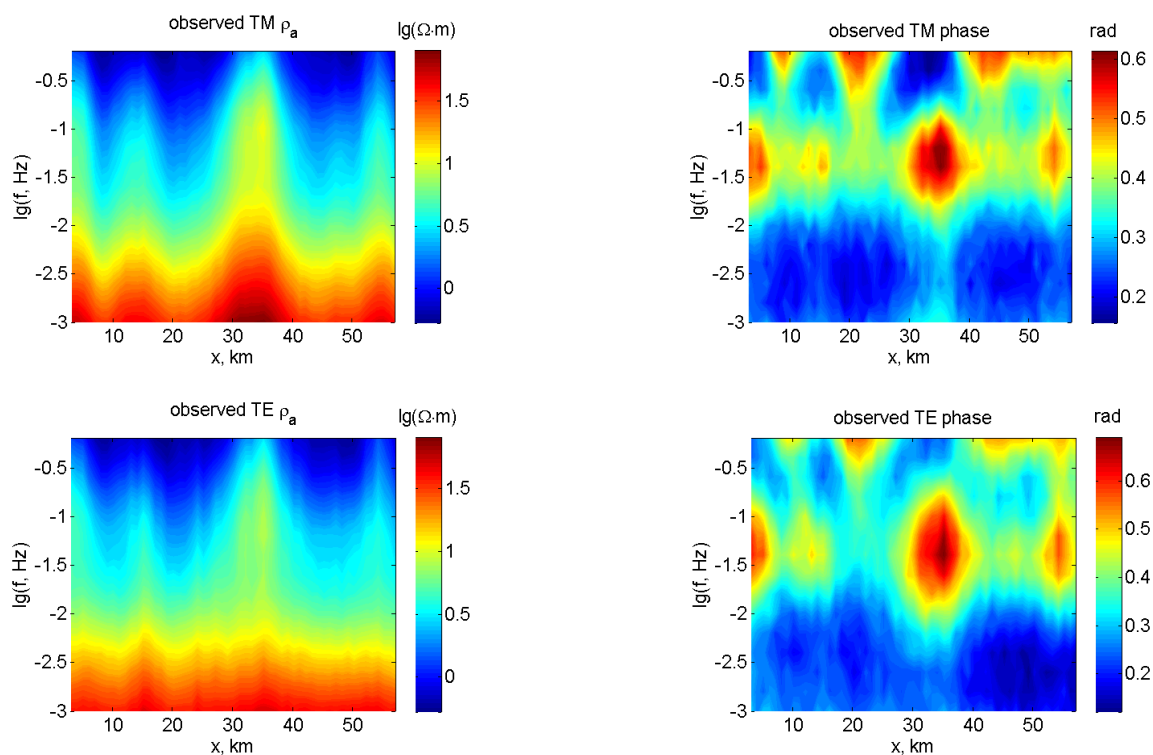


Рис. 2.13. Синтетические МТ данные с добавлением шума: кажущееся сопротивление (слева) и фаза импеданса ТМ (вверху) и ТЕ моды.

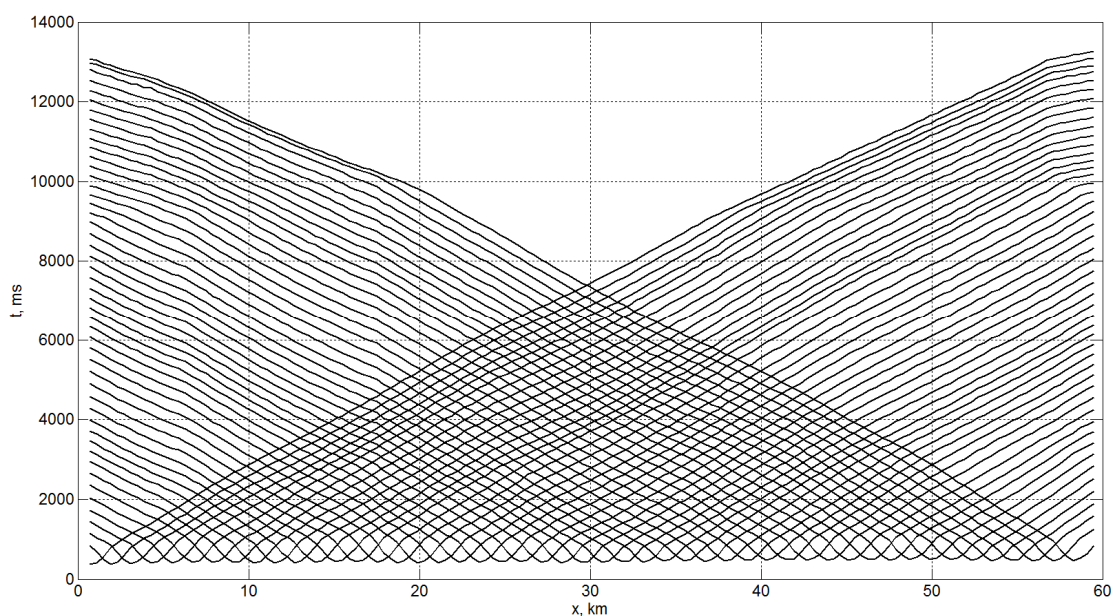


Рис. 2.14. Синтетические годографы первых вступлений с добавлением шума (для наглядности показан каждый третий годограф).

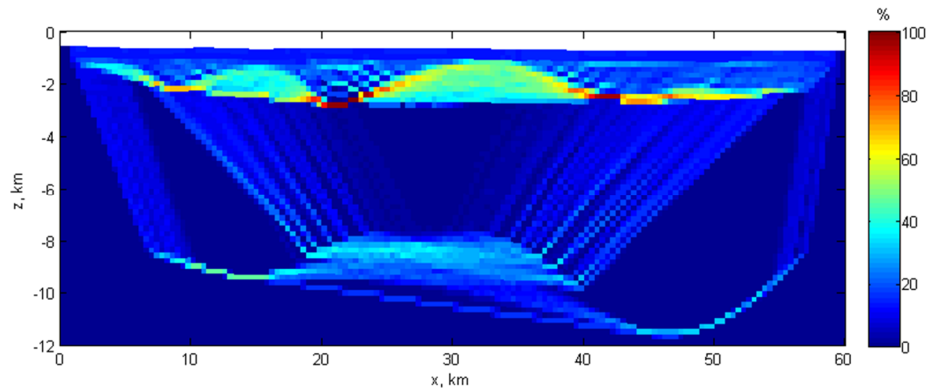


Рис. 2.15. Относительная плотность лучей (нормированная интегральная чувствительность) первых вступлений для истинной модели скорости.

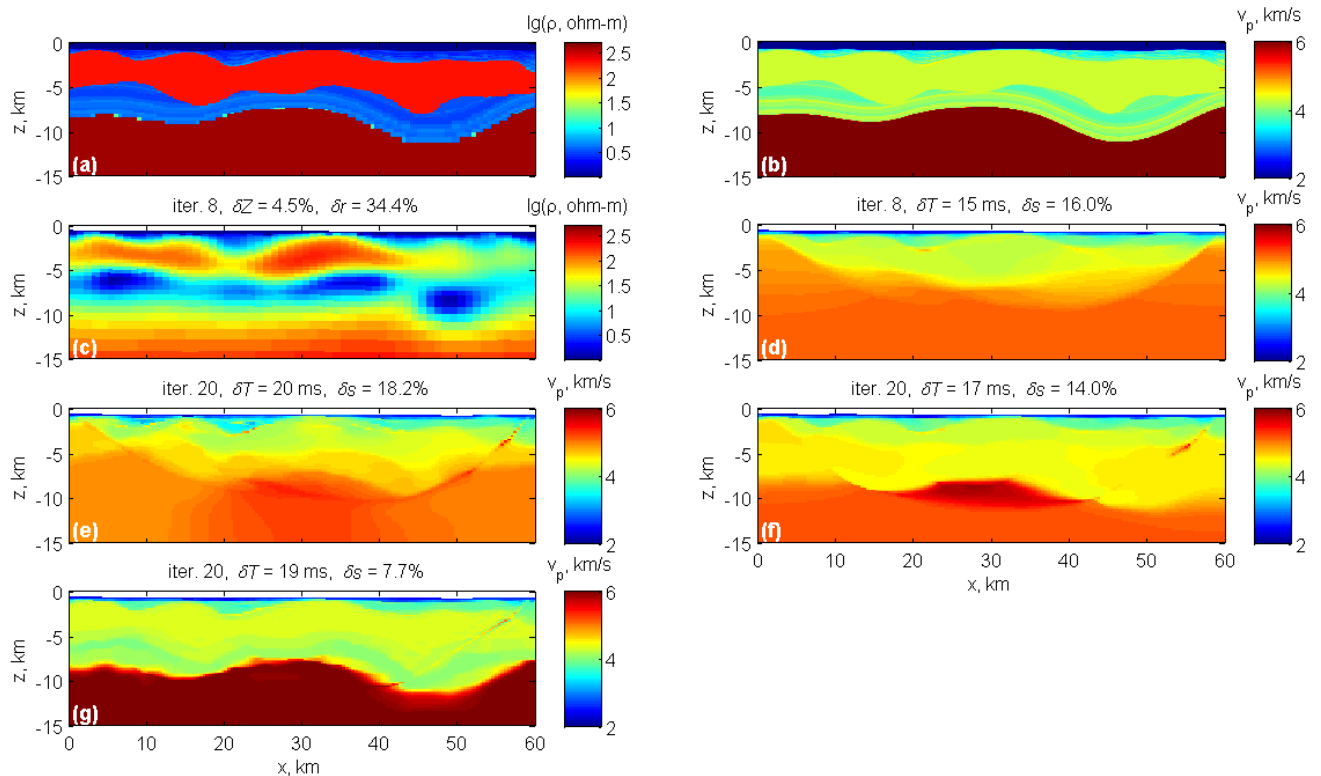


Рис. 2.16. (a) Истинная модель УЭС. (b) Истинная модель скорости. (c) Модель УЭС, восстановленная с помощью МТ инверсии. Модели скорости: (d) по результатам независимой томографии; (e) по результатам томографии с использованием оператора c_{\otimes} и истинной модели УЭС в качестве опорной; (f) то же для оператора c_{\ominus} ; (g) то же для оператора c_{\oplus} . Указано количество итераций алгоритма Гаусса–Ньютона, δT и δZ – среднеквадратическая невязка времени и импеданса, соответственно, δs и δr – относительная среднеквадратическая невязка скорости и логарифма УЭС, соответственно.

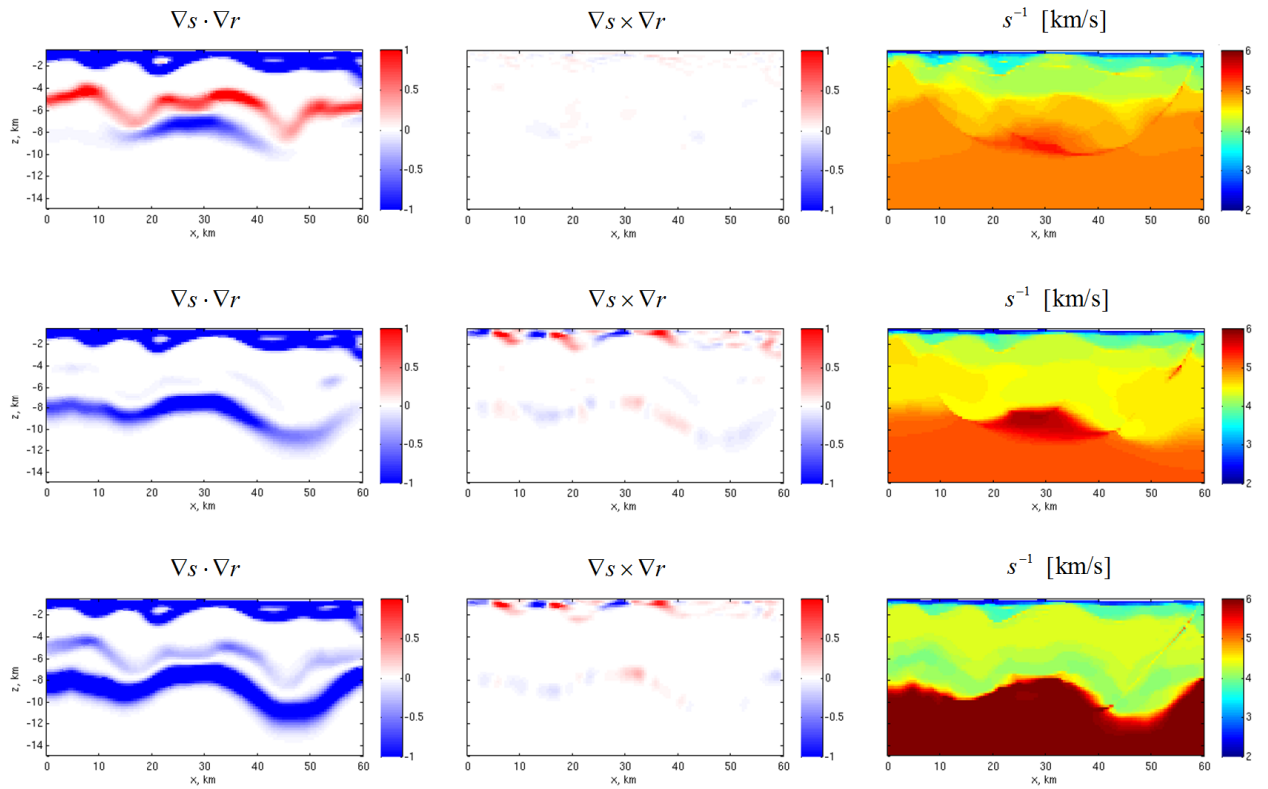


Рис. 2.17. Скорость, скалярное и векторное произведение нормированных градиентов медленности и УЭС для томографии с опорной моделью с использованием оператора кросс-градиента (вверху), оператора c_{\ominus} (средний ряд) и оператора c_{\oplus} .

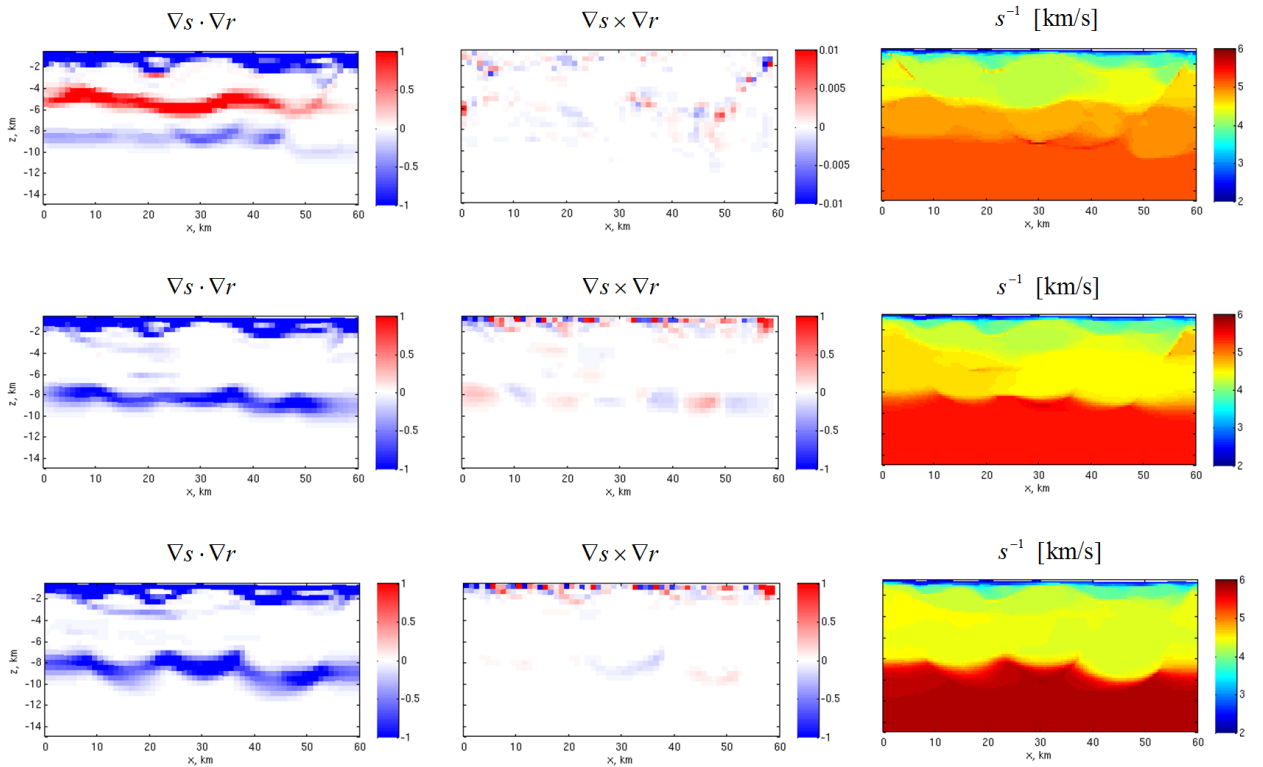


Рис. 2.18. То же, что и на рис. 2.17, но для совместной инверсии.

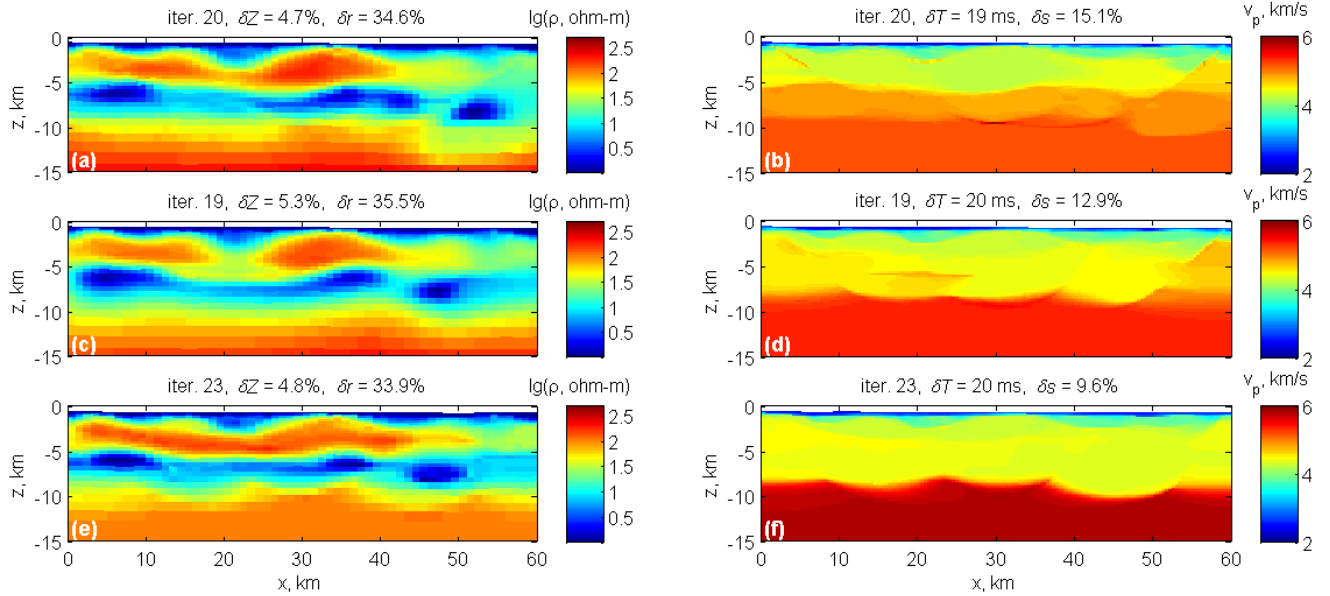


Рис. 2.19. (a) УЭС и (b) скорость, восстановленные с помощью совместной инверсии с использованием оператора c_{\otimes} ; (c) и (d) то же для оператора c_{\odot} ; (e) и (f) то же для оператора c_{\oplus} . Для моделей УЭС показана область, соответствующая области сейсмической инверсии. Указано количество итераций алгоритма Гаусса–Ньютона, δT и δZ – среднеквадратическая невязка времени и импеданса, соответственно, δs и δr – относительная среднеквадратическая невязка скорости и логарифма УЭС, соответственно.

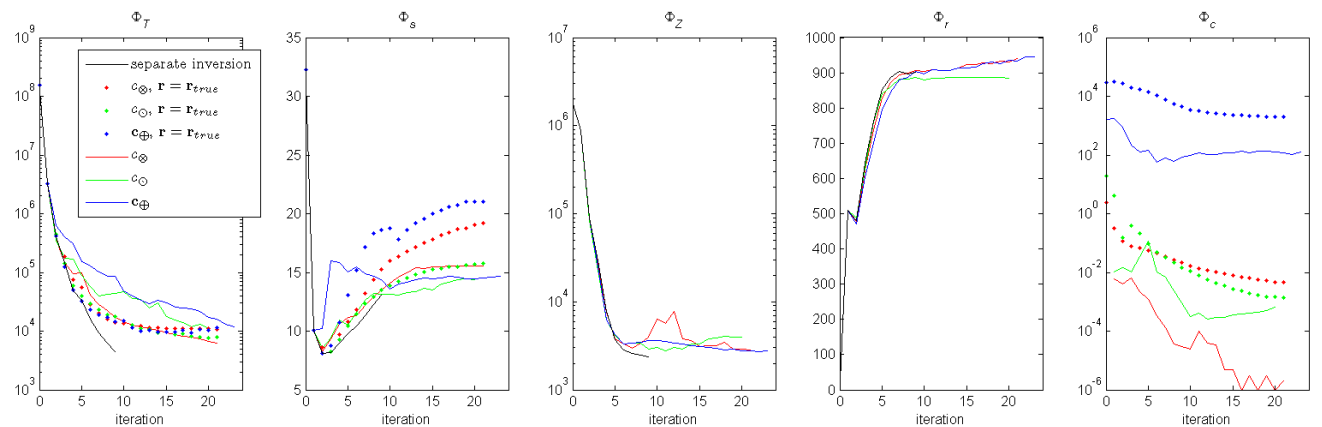


Рис. 2.20. Изменение значений членов целевой функции с итерациями для томографии с опорной моделью УЭС $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{true}}$ и совместной инверсии, при различном выборе структурных ограничений. Используются обозначения, принятые в разделе 2.3.

2.9 Выводы

Рассмотрены прямые задачи МТ и сейсмической томографии. Предложен алгоритм двумерной совместной инверсии МТ данных и времен пробега сейсмических волн со структурными ограничениями, основанный на методе Гаусса–Ньютона. Также рассмотрен алгоритм, основанный на последовательном квадратичном программировании и методе множителей Лагранжа.

Для дискретизации скорости, удельного сопротивления и структурных ограничений используются независимые квазирегулярные сетки, что позволяет эффективно учитывать топографию и батиметрию, разную разрешающую способность, глубинность и геометрию систем наблюдений сейсмической томографии и МТ. Интерполяция между сетками реализована с помощью свертки с двумерной функцией Гаусса, при этом увеличение «дисперсии» позволяет ограничить сверху диапазон пространственных частот моделей, в котором действуют структурные ограничения.

Предложены новые структурные ограничения, учитывающие априорную информацию о знаке корреляции скорости и удельного сопротивления: «кросс-градиент со знаком» и «разность нормированных градиентов», дополнительно требующее совпадения носителей градиента.

Численные примеры демонстрируют повышение точности восстановления моделей скорости и удельного сопротивления с помощью совместной инверсии времен пробега и МТ данных, по сравнению с независимой инверсией. Также продемонстрировано, что предложенные структурные ограничения, при наличии априорной информации о знаке корреляции параметров среды, повышают точность совместной инверсии по сравнению с ограничением кросс-градиента.

Глава 3

Обобщенная совместная инверсия с ограничениями совместной разреженности

Совокупность геофизических методов, данных и моделей среды, связанных в рамках одной физической теории, будем называть доменом; к примеру, методы МТ и CSEM относятся к одному домену, упругие параметры и плотность среды при инверсии амплитуд сейсмических волновых полей – тоже. Публикаций по совместной инверсии с тремя и более доменами сравнительно немного. В работе [Heincke et al., 2006] рассмотрено применение совместной инверсии к изучению подбазальтовой части разреза, с использованием эмпирических прямых зависимостей между скоростью распространения продольных волн, удельным сопротивлением и плотностью. В работах [De Stefano and Colombo, 2006; Colombo and De Stefano, 2007] было предложено использовать взвешенную сумму петрофизических и структурных ограничений. В работе [Moorkamp et al., 2013] выполнена совместная инверсия реальных МТ и гравиметрических данных и времен первых вступлений с использованием ограничения кросс-градиента для изучения соляно-купольной структуры.

Структурные ограничения типа кросс-градиента, рассмотренные в предыдущей главе, связывают модели среды попарно. Можно учитывать все сочетания, как это делается в работах [Moorkamp et al., 2011, 2013], но уже для трех доменов это делает целевую функцию чрезвычайно громоздкой. Алгоритм совместной инверсии с произвольным числом доменов был предложен в работе [Gallardo, 2007] на основании ограничения кросс-градиента: модели среды привязываются с помощью кросс-градиента к некоторой искусственной опорной модели, которая заново конструируется на каждой итерации нелинейной инверсии. Другой подход к обобщенной совместной инверсии был предложен в работе [Zhdanov et al., 2012]: для связи моделей используется грамиан, в некотором смысле обобщающий коэффициент корреляции на более чем две переменные, при этом в качестве переменных могут быть рассмотрены произвольные преобразования моделей среды. К сожалению, грамиан и нормы структурных ограничений типа кросс-градиента не имеют единственной точки минимума (т.е., не являются строго квазивыпуклыми), что усложняет целевую функцию из-за появления дополнительных локальных минимумов, а также требует введения стабилизаторов, при этом выбор взаимного веса стабилизаторов и структурных ограничений может быть затруднителен.

В данной главе рассматриваются структурные ограничения, основанные на идее *совместной разреженности*, которая понимается следующим образом: некоторое преобразование моделей является разреженным (имеет минимальный носитель), и

расположение ненулевых элементов одинаково для разных моделей (носители совпадают). Предлагается обобщение известного функционала совместной полной вариации и ряд новых функционалов. Данные функционалы: 1) позволяют естественным образом связывать произвольное число моделей, 2) выполняют функцию стабилизаторов. Это значительно упростило структуру целевой функции и позволило построить эффективный и простой алгоритм обобщенной совместной инверсии с произвольным числом доменов.

Рассматривается применение алгоритма к двумерной совместной инверсии магнитотеллурических импедансов, времен первых вступлений, вертикальной компоненты силы тяжести и ее градиента.

3.1 Совместная инверсия с использованием совместной полной вариации

Рассмотрим задачу инверсии для n векторов данных \mathbf{d}_i и n скалярных физических параметров (моделей) среды $m_i = m_i(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{f}_i(m_i) + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где \mathbf{f}_i – операторы прямых задач, $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ – случайные компоненты данных. Если модели определены в одной области физического пространства, Ω , они могут быть сгруппированы в одну векторнозначную модель $\mathbf{m}(\mathbf{x}) = [m_1(\mathbf{x}) \ m_2(\mathbf{x}) \ \dots \ m_n(\mathbf{x})]^T$, $\mathbf{x} \in \Omega$. В дискретном случае, если модели дискретизированы с помощью одного набора базисных функций, векторы коэффициентов \mathbf{m}_i можно сгруппировать в матрицу $\mathbf{M} = [\mathbf{m}_1 \ \mathbf{m}_2 \ \dots \ \mathbf{m}_n]$.

Применение совместной полной вариации (*joint total variation, JTV*) к совместной инверсии двух наборов геофизических данных было предложено в работе [Haber and Holtzman Gazit, 2013] на основании более общей идеи восстановления «совместно разреженных» векторов с помощью смешанной нормы $L_{1,2}$. Норма $L_{1,2}$ матрицы \mathbf{M} определяется следующим образом:

$$\|\mathbf{M}\|_{1,2} = \sum_j \|\mathbf{M}_j\| = \sum_j \sqrt{\sum_i m_{ji}^2}. \quad (3.1)$$

Как видим, в данном выражении сначала вычисляется норма L_2 для каждой строки матрицы, а затем вычисляется норма L_1 результирующего вектора. Известно, что регуляризация с помощью нормы L_1 позволяет получать разреженные решения [Aster et al., 2013], что было доказано для линейных обратных задач [Donoho, 2006]; нелинейный случай почти не изучен теоретически,

однако, на практике данный эффект часто наблюдается и в нелинейных задачах [van den Doel et al., 2012]. Аналогично, минимизация смешанной нормы (3.1) с ограничениями приводит к матрице \mathbf{M} с разреженными столбцами. Кроме того, легко видеть, что, при фиксированном числе и абсолютных величинах ненулевых элементов, (3.1) принимает минимальное значение, когда все столбцы имеют одинаковую структуру разреженности, т.е. расположение ненулевых элементов. Совместная полная вариация может быть определена для непрерывной векторнозначной модели как

$$\|\nabla \mathbf{m}\|_{1,2} = \int_{\Omega} \|\nabla \mathbf{m}(\mathbf{x})\| dx = \int_{\Omega} \sqrt{\sum_i |\nabla m_i(\mathbf{x})|^2} dx.$$

Здесь $\nabla \mathbf{m}$ обозначает матрицу $\frac{\partial m_i}{\partial x_j}$, а $\|\nabla \mathbf{m}\|$ – ее норму Фробениуса.

Геологическая среда часто меняется по горизонтали медленнее, чем по вертикали, что, как правило, учитывается при стандартной сглаживающей регуляризации. Также интенсивность сглаживания может зависеть от координат при наличии априорной информации о положении границ. Для учета этих факторов, а также возможности масштабирования градиентов различных моделей, введем тензорные весовые функции $\mathbf{W}_i(\mathbf{x}) = \text{diag}[w_i^x(\mathbf{x}), w_i^y(\mathbf{x}), w_i^z(\mathbf{x})]$, $w_i^{x,y,z}(\mathbf{x}) \geq 0$. Чтобы сделать L_1 -норму дифференцируемой, традиционно вводится малый параметр β^2 [Vogel and Oman, 1996]. С учетом этих модификаций совместная полная вариация принимает вид

$$\Phi_{\text{JTV}}(\mathbf{m}) = \int_{\Omega} \sqrt{\sum_i \nabla m_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{W}_i(\mathbf{x}) \nabla m_i(\mathbf{x}) + \beta^2} dx. \quad (3.2)$$

Данный функционал является выпуклым относительно каждой модели m_i , и, следовательно, может быть использован в качестве стабилизирующего функционала, который, подобно полной вариации, позволяет восстанавливать кусочно-гладкие модели. Кроме того, данный функционал «поощряет» разрывы в различных m_i , происходящие в одном месте, и таким образом связывает структуры моделей. Заметим, что если разрыв присутствует только в одной из моделей, минимизация функционала (3.2) не может привести к появлению разрыва в других моделях, если само наличие разрыва не обусловлено данными или другими ограничениями.

Будем дискретизировать все модели m_i и весовые функции \mathbf{W}_i с помощью квазирегулярной сетки, оператор градиента аппроксимируем с помощью прямых конечных разностей, как это описано в разделе 2.2. Для простоты будем использовать единую сетку для всех моделей. Обозначим дискретный аналог функционала (3.2) как $\Phi_{\text{JTV}}(\mathbf{M})$. Совместная инверсия сводится к минимизации целевой функции

$$\Phi(\mathbf{M}) = \Phi_{\text{JTV}}(\mathbf{M}) + \sum_i \frac{1}{\alpha_i} [\mathbf{d}_i - \mathbf{f}_i(\mathbf{m}_i)]^T \mathbf{R}_i^{-1} [\mathbf{d}_i - \mathbf{f}_i(\mathbf{m}_i)], \quad (3.3)$$

где \mathbf{R}_i – матрицы ковариации векторов данных, а α_i – параметры регуляризации, определяющие вес отдельных функционалов невязки относительно совместной полной вариации. Минимизация (3.3) выполняется с помощью алгоритма Левенберга–Марквардта (алгоритм Гаусса–Ньютона с демпфированием). Применяя метод наименьших квадратов с повторным взвешиванием (IRLS), традиционно используемый для минимизации нормы L_1 [Aster et al., 2013; Haber, 2014], получаем следующее блочно-диагональное приближение матрицы Гессе функционала $\Phi_{\text{JTV}}(\mathbf{M})$:

$$\nabla_{\mathbf{M}}^2 \Phi_{\text{JTV}}(\mathbf{M}) \approx \text{diag}[\mathbf{L}_i], \quad (3.4)$$

где \mathbf{L}_i – дискретные аналоги операторов диффузии $\nabla \cdot \mathbf{C}_i(\mathbf{x}) \nabla$ с коэффициентами диффузии

$$\mathbf{C}_i(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{W}_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\sum_i \nabla m_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{W}_i(\mathbf{x}) \nabla m_i(\mathbf{x}) + \beta^2}}. \quad (3.5)$$

Метод IRLS в применении к полной вариации получил название метода запаздывающей диффузии (*lagged diffusivity*) [Vogel and Oman, 1996; van den Doel, 2012]. Известно, что действие на модель сглаживающей регуляризации на основе нормы L_2 градиента можно рассматривать как диффузию (при этом функционалы невязки играют роль сторонних сил, не позволяющих достичь состояния с максимальной энтропией); использование полной вариации приводит к нелинейному уравнению диффузии (см., например, [Rudin et al., 1992]). Аналогично, регуляризацию с помощью функционала (3.2) можно представить как нелинейную диффузию с коэффициентами (3.5). В области резкой границы (высокого градиента) в некоторой модели компоненты (3.5) для всех i принимают малые значения, что локально замедляет диффузию для всех моделей; задание весовых функций $w_i^x(\mathbf{x}), w_i^y(\mathbf{x}), w_i^z(\mathbf{x})$ позволяет сделать диффузию анизотропной – например, усилить ее в горизонтальной плоскости.

Поскольку матрица (3.4) является блочно-диагональной, полная матрица Гессе целевой функции (3.3) также блочно-диагональная, и системы нормальных уравнений относительно поправок $\delta \mathbf{m}_i$ к разным \mathbf{m}_i не связаны:

$$\left[\frac{2}{\alpha_i} \mathbf{J}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{J}_i + \mathbf{L}_i + \mathbf{P}_i \right] \delta \mathbf{m}_i = -\nabla_{\mathbf{m}_i} \Phi(\mathbf{M}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.6)$$

где \mathbf{J}_i – матрицы Якоби операторов прямых задач, \mathbf{P}_i – диагональные демпфирующие матрицы. Системы линейных уравнений (3.6) являются симметричными положительно определенными и решаются с помощью метода сопряженных градиентов с диагональным

предобусловливателем. Параметры регуляризации α_i определяются по адаптивной схеме, сходной с мультипликативной регуляризацией [Habashy and Abubakar, 2004]: на каждой итерации алгоритма Левенберга–Марквардта

$$\alpha_i \leftarrow \hat{\alpha}_i [\mathbf{d}_i - \mathbf{f}_i(\mathbf{m}_i)]^T \mathbf{R}_i^{-1} [\mathbf{d}_i - \mathbf{f}_i(\mathbf{m}_i)],$$

где \mathbf{m}_i – текущее значение модели, $\hat{\alpha}_i$ – постоянные масштабирующие коэффициенты, позволяющие вручную контролировать относительный вес каждого домена.

Для наложения на физические параметры моделей ограничений типа неравенства: $m_{i \min} < m_{ji} < m_{i \max}$, используется преобразование $m_{ji} \leftarrow \ln[(m_{ji} - m_{i \min}) / (m_{i \max} - m_{ji})] / 2$ [Habashy and Abubakar, 2004]. Также, что крайне важно для совместной инверсии, данное преобразование делает компоненты векторов моделей безразмерными величинами и в определенной степени уравнивает их динамические диапазоны.

Благодаря независимости нормальных уравнений для разных доменов вычислительные затраты на совместную инверсию равны суммарным затратам на независимые инверсии, а программная реализация совместной инверсии заметно упрощается. Это напоминает блочно-покоординатный спуск, т.е. «альтернирующую» совместную инверсию – подход, отстаиваемый во многих работах (например, [Hu et al., 2009; Haber and Holtzman Gazit, 2013; Um et al., 2014]); принципиальное отличие заключается в одновременности шагов по блокам (доменам), что является полезным свойством с точки зрения параллельной реализации алгоритма.

3.2 Функционал с совместным минимальным носителем градиента

Применительно к совместной инверсии, ключевым свойством смешанной нормы $L_{1,2}$ является то, что при фиксированном числе и абсолютных величинах ненулевых элементов векторов \mathbf{m}_i , норма (3.1) принимает минимальное значение, когда векторы имеют одинаковую структуру разреженности. Данное свойство – следствие того, что квадратный корень является полуаддитивной функцией. Рассматривая другие полуаддитивные функции, можно попытаться построить другие стабилизирующие функционалы, поощряющие совместно-разреженные модели.

В частности, таким образом из функционала с минимальным носителем градиента (*minimum gradient support, MGS*) [Portniaguine and Zhdanov, 1999]

$$\Phi_{\text{MGS}}(m) = \int_{\Omega} \frac{|\nabla m(\mathbf{x})|^2}{|\nabla m(\mathbf{x})|^2 + \beta^2} d\mathbf{x}$$

можно получить «функционал с совместным минимальным носителем градиента» (JMGS):

$$\Phi_{\text{JMGS}}(\mathbf{m}) = \int_{\Omega} \frac{\sum_i |\nabla m_i(\mathbf{x})|^2}{\sum_i |\nabla m_i(\mathbf{x})|^2 + \beta^2} d\mathbf{x}. \quad (3.7)$$

Данные функционалы можно рассматривать как гладкие аппроксимации «нормы» L_0 (строго говоря, L_0 – число ненулевых элементов вектора или носитель функции – не является нормой, поскольку не удовлетворяет аксиоме однородности [Aster et al., 2013]) градиента и смешанной «нормы $L_{0,2}$ » градиента, соответственно. Регуляризация с использованием MGS-функционала приводит к кусочно-постоянным моделям. Благодаря полуаддитивности функции $x / (x + \beta^2)$ для $x \geq 0$, регуляризация с использованием функционала $\Phi_{\text{JMGS}}(\mathbf{m})$ приводит к кусочно-постоянным моделям с совпадающими разрывами (носителями градиента). При этом в отличие от совместной полной вариации, данный стабилизатор не стремится уменьшить величину скачков моделей.

Действительно, значение функционала (3.7) не изменится, если область интегрирования заменить на $\omega \equiv \text{supp} \sum_i |\nabla m_i(\mathbf{x})|^2 = \bigcup_i \text{supp} \nabla m_i(\mathbf{x})$ – объединение носителей градиентов всех моделей:

$$\Phi_{\text{JMGS}}(\mathbf{m}) = \int_{\omega} dx - \beta^2 \int_{\omega} \left[\sum_i |\nabla m_i(\mathbf{x})|^2 + \beta^2 \right]^{-1} dx,$$

так что при $\beta \rightarrow 0$, $\Phi_{\text{JMGS}}(\mathbf{m}) = \int_{\omega} dx = V(\omega)$. Очевидно, что при ограниченном снизу объеме отдельных носителей, $V(\omega)$ достигает минимума, когда объем их пересечения $V\left(\bigcap_i \text{supp} \nabla m_i\right)$ максимален. В этом смысле, функционал (3.7) можно назвать «функционалом с *максимальным* совместным носителем градиента».

Недостаток данных функционалов – еще бóльшая сложность минимизации, по сравнению функционалами, основанными на норме L_1 и $L_{1,2}$. Очевидно, что, поскольку $\nabla_{\mathbf{m}} \Phi_{\text{JMGS}}(\mathbf{m}) \sim \beta^2$, при малых значениях β^2 сходимость локальных методов оптимизации будет чрезвычайно медленной. В связи с этим требуется хорошее начальное приближение. Это верно и для MGS-функционала, из-за чего он часто используется лишь на финальных итерациях инверсии [Zhdanov et al., 2011].

Для минимизации функционалов с минимальным носителем в ряде работ успешно применялся метод IRLS в следующей модификации [Last and Kubik, 1983; Portniaguine and Zhdanov, 1999]: на каждой итерации матрица Якоби подынтегрального выражения (3.7) вычисляется при фиксированном значении знаменателя. Таким образом, при замене $\Phi_{\text{JTV}}(\mathbf{m})$

на функционал $\Phi_{\text{JMGS}}(\mathbf{m})$, алгоритм минимизации, описанный в предыдущем разделе, претерпит лишь незначительные изменения: диагональные блоки \mathbf{L}_i приближенной матрицы Гессе в данном случае будут дискретными аналогами оператора диффузии $\nabla \cdot \left[\sum_i |\nabla m_i(\mathbf{x})|^2 + \beta^2 \right]^{-1} \nabla$. Поскольку в данном случае не используются тензорные весовые функции (они имеют смысл только в виде индикаторной функции, т.к. функционал почти не чувствителен к абсолютной величине градиентов), все диагональные блоки матрицы Гессе равны. Соответствующая методу IRLS аппроксимация градиента функционала состоит из блоков $\mathbf{L}_i \mathbf{m}_i$.

3.3 Обобщение на другие разреженные преобразования моделей

Требование совместной разреженности, до сих пор применявшееся к градиентам, можно применить к другим преобразованиям моделей. Например, в задачах мониторинга обратные задачи часто решаются относительно локальных поправок к достаточно хорошо известным опорным моделям среды, так что разреженными являются сами векторы моделей, и оператор градиента в функционалах (3.2) и (3.7) может быть заменен тождественным оператором.

Функционалы (3.2) и (3.7) не пригодны для восстановления гладких моделей. Это затруднение может быть частично устранено использованием вместо градиента производных высших порядков: разреженность вторых производных допускает кусочно-линейные функции и т.д. В частности, норма L_1 нормы Фробениуса матрицы Гессе в качестве стабилизатора порождает кусочно-линейные, а норма L_1 лапласиана – кусочно-гармонические модели [Logis and Verhoeven, 2012].

Другой подход к обобщению совместной разреженности на гладкие модели может быть основан на использовании дискретных вейвлет-преобразований (ДВП). Многие физические сигналы имеют разреженное представление в вейвлет-базисах, что позволяет применять ДВП для их сжатия. В качестве таких сигналов можно рассматривать и геофизические модели. ДВП с вейвлетами Добеши использовались для эффективной адаптивной параметризации моделей в сейсмических и гравиметрических [Tikhotsky and Achauer, 2008; Tikhotsky et al., 2011] и электромагнитных обратных задачах [Abubakar et al., 2012; Plattner et al., 2012]. В серии совместных работ Ignace Logis, Ингрид Добеши и соавторов [Logis et al., 2007; Daubechies et al., 2008 и др.] исследуется применение к сейсмической томографии стабилизатора в виде L_1 -нормы ДВП модели скорости, требующего разреженности в вейвлет-базисе. Представляется естественным обобщить этот подход на совместную разреженность.

Пусть \mathbf{T} – оператор ДВП. Применим его к матрице \mathbf{M} , составленной из векторов моделей, и запишем смешанную норму $L_{1,2}$ образа:

$$\|\mathbf{TM}\|_{1,2} = \sum_j \sqrt{\sum_i (\mathbf{Tm}_i)_j^2 + \beta^2}. \quad (3.8)$$

Аналог функционала с совместным минимальным носителем обозначим как «норму $L_{0,2}$ »:

$$\|\mathbf{TM}\|_{0,2} = \sum_j \frac{\sum_i (\mathbf{Tm}_i)_j^2}{\sum_i (\mathbf{Tm}_i)_j^2 + \beta^2}. \quad (3.9)$$

Применяя метод IRLS, получим блочно-диагональные аппроксимации матриц Гессе данных функционалов:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{M}}^2 \|\mathbf{TM}\|_{1,2} &\approx \text{diag} \left[\mathbf{T}^* \text{diag} \left[\sum_i (\mathbf{Tm}_i)_j^2 + \beta^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \mathbf{T} \right], \\ \nabla_{\mathbf{M}}^2 \|\mathbf{TM}\|_{0,2} &\approx \text{diag} \left[\mathbf{T}^* \text{diag} \left[\sum_i (\mathbf{Tm}_i)_j^2 + \beta^2 \right]^{-1} \mathbf{T} \right], \end{aligned}$$

где \mathbf{T}^* – оператор, сопряженный \mathbf{T} . В случае ортогональных базисов, таких как вейвлеты Добеши, $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^{-1}$ – оператор обратного ДВП. Поскольку нормальные уравнения решаются методом сопряженных градиентов, представление \mathbf{T} и \mathbf{T}^* в виде матриц не требуется.

Использование функционалов (3.8) и (3.9) в качестве стабилизаторов совместной инверсии позволяет накладывать ограничение совместной разреженности не только на разрывы, но и на гладкие элементы структуры моделей. С помощью задания «маски» в вейвлет-базисе можно связывать модели в ограниченном диапазоне пространственных частот и в ограниченной пространственной области. При этом крайне важен выбор подходящих базисных функций. Так, минимизация нормы L_1 и нормы $L_{1,2}$ в базисе Хаара (D2) и D4 приводит к значительному ухудшению моделей вследствие сжатия. По всей видимости, для задач регуляризации больше подходят «избыточные» базисы наподобие рассмотренного в статье [Loris et al., 2007].

3.4 Двумерная совместная инверсия МТ импедансов, временных первых вступлений и гравиметрических данных

Применим рассмотренную общую теорию к совместной инверсии с тремя доменами. Используемые сейсмическая и магнитотеллурическая прямые задачи и вычисление соответствующих матриц Якоби описаны в разделе 2.1. Вкратце рассмотрим вопросы, связанные с гравиметрией, а затем – результаты численных экспериментов.

3.4.1 Гравиметрическая прямая задача

В гравиразведке из измеренной силы тяжести (напряженности гравитационного поля) вычитается нормальное значение силы тяжести и вводится ряд поправок для получения аномального поля Δg , создаваемого неоднородностями плотности в земной коре; как правило, в качестве Δg рассматривается аномалия Буге [Гравиразведка..., 1990]. В гравитационной градиентометрии измеряются вторые производные гравитационного потенциала, что позволяет устранить многие помехи и повышает разрешающую способность [Droujinine et al., 2007; Kirkendall et al., 2007].

Рассмотрим двумерную прямую задачу. Пусть аномальная плотность σ постоянна вдоль оси y и отлична от нуля в двумерной области Ω ; обозначим $\mathbf{x} = (x, z)$. Гравитационный потенциал дается сверткой плотности с функцией Грина двумерного лапласиана:

$$U(\mathbf{x}) = 2\gamma \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}') \ln|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| d\mathbf{x}',$$

где γ – гравитационная постоянная. Аномалия Буге $\Delta g = -U_z$. Поскольку вне масс потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, тензор вторых производных потенциала имеет две отличные от нуля независимые компоненты: $U_{xz} = U_{zx}$ и $U_{zz} = -U_{xx}$.

Разобьем область Ω сеткой и примем плотность постоянной в пределах каждой ячейки, тогда

$$U(\mathbf{x}) = 2\gamma \sum_i \sigma_i \int_{\Omega_i} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| d\mathbf{x}' \equiv \sum_i \sigma_i G_i(\mathbf{x}),$$

где Ω_i – область i -й ячейки, σ_i – плотность в ячейке. Для производных потенциала имеем:

$$\begin{aligned} \Delta g(\mathbf{x}) &= -\sum_i \sigma_i G_{z,i}(\mathbf{x}) = -2\gamma \sum_i \sigma_i \int_{\Omega_i} \frac{z - z'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} d\mathbf{x}', \\ U_{xz}(\mathbf{x}) &= \sum_i \sigma_i G_{xz,i}(\mathbf{x}) = -4\gamma \sum_i \sigma_i \int_{\Omega_i} \frac{(z - z')(x - x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^4} d\mathbf{x}', \\ U_{zz}(\mathbf{x}) &= \sum_i \sigma_i G_{zz,i}(\mathbf{x}) = 2\gamma \sum_i \sigma_i \int_{\Omega_i} \frac{(x - x')^2 - (z - z')^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^4} d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Будем использовать прямоугольную сетку. Интегрирование по прямоугольной области $\Omega_i = \{x' : a_i \leq x' \leq b_i, c_i \leq z' \leq d_i\}$ дает следующие выражения для ядер данных:

$$\begin{aligned}
G_{z,i}(\mathbf{x}) &= -2\gamma \left((x-x') \ln |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| + (z-z') \operatorname{arctg} \left(\frac{x-x'}{z-z'} \right) \right) \Bigg|_{x'=a_i}^{x'=b_i} \Bigg|_{z'=c_i}^{z'=d_i}, \\
G_{xz,i}(\mathbf{x}) &= -2\gamma \ln |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \Bigg|_{x'=a_i}^{x'=b_i} \Bigg|_{z'=c_i}^{z'=d_i}, \\
G_{zz,i}(\mathbf{x}) &= -2\gamma \operatorname{arctg} \left(\frac{z-z'}{x-x'} \right) \Bigg|_{x'=a_i}^{x'=b_i} \Bigg|_{z'=c_i}^{z'=d_i}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Чтобы устранить краевые эффекты, заменим прямоугольники в первом и последнем столбце сетки полубесконечными слоями, для которых ядра имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
G_{z,i}(\mathbf{x}) &= -\gamma \left(\Delta x \ln \left(\Delta x^2 + (z-z')^2 \right) + (z-z') \left(2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\Delta x}{z-z'} \right) - \pi \right) \right) \Bigg|_{z'=c_i}^{z'=d_i}, \\
G_{xz,i}(\mathbf{x}) &= \pm \gamma \ln \left(\Delta x^2 + (z-z')^2 \right) \Bigg|_{z'=c_i}^{z'=d_i}, \\
G_{zz,i}(\mathbf{x}) &= -2\gamma \operatorname{arctg} \left(\frac{z-z'}{\Delta x} \right) \Bigg|_{z'=c_i}^{z'=d_i},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

где $\Delta x = x - b_i$ и знак « $-$ » соответствуют полуслоям с $x' \leq b_i$, а $\Delta x = a_i - x$ и знак « $+$ » – полуслоям с $x' \geq a_i$.

Очевидно, относительно вектора модели $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M]^T$ оператор прямой задачи является линейным. Вектор данных составим из значений Δg , U_{zx} и U_{zz} в каждой точке наблюдений: $\mathbf{d} = [\Delta g(\mathbf{x}_1), U_{xz}(\mathbf{x}_1), U_{zz}(\mathbf{x}_1), \Delta g(\mathbf{x}_2), \dots, U_{zz}(\mathbf{x}_N)]^T$. Формулы (3.11)–(3.12) задают элементы матрицы оператора прямой задачи \mathbf{J} : $\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d}$ (равной соответствующей матрице Якоби в системе (3.6)).

Поскольку чувствительность (ядро) Δg в двумерном случае убывает с глубиной z как z^{-1} , а чувствительность U_{zx} и U_{zz} – как, соответственно, z^{-3} и z^{-2} , восстанавливаемая в результате инверсии плотность оказывается в основном сосредоточенной вблизи поверхности [Li and Oldenburg, 1998]. Для уменьшения этого нежелательного эффекта примем демпфирующую матрицу в (3.6) пропорциональной интегральной чувствительности данных: $\mathbf{P}_i = \lambda_i \operatorname{diag}[\mathbf{J}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{J}_i]$ (для МТ и сейсмики демпфирование принимается постоянным во всей области модели: $\mathbf{P}_i = \lambda_i \mathbf{I}$; при необходимости зафиксировать значение m_{ji} соответствующему элементу $P_{i,jj}$ присваивается некоторое «большое» значение).

3.4.2 О связи плотности со скоростью продольных волн и удельным сопротивлением

Известен ряд эмпирических соотношений, связывающих скорость продольных волн v_p и плотность σ . Для осадочных пород известно соотношение Гарднера (*Gardner's relation*):

$$\sigma = av_p^b,$$

в котором коэффициенты a и b определяют по каротажным данным, либо, при отсутствии таковых, используют средние значения, приведенные в оригинальной работе [Gardner et al., 1974]. В работе [De Stefano et al., 2011] рассмотрено применение соотношения Гарднера к совместной инверсии синтетических и реальных сейсмических и гравиметрических данных. В сейсмологии, при изучении крупномасштабной структуры земной коры и мантии, часто используется соотношение Берча (*Birch's law*) [Birch, 1961]:

$$v_p = a(M) + b\sigma,$$

где $a(M)$ – некоторая функция средней атомной массы M породы. Линейная зависимость с коэффициентами, определяемыми в процессе (итеративной) последовательной инверсии времен пробега и гравиметрических данных, использовалась в работах [Tikhotsky and Achauer, 2008; Страхов и Романюк, 1984]; линейная зависимость с фиксированными коэффициентами – в совместной инверсии в работе [Moorkamp et al., 2011].

Зависимость плотности от пористости и состава флюида в ряде случаев позволяет связать плотность с удельным сопротивлением посредством закона Арчи–Дахнова или его обобщений. Так, замещение в коллекторе поровой воды углеводородами выражается в уменьшении плотности и увеличении УЭС; уменьшение пористости с увеличением давления, а также при переходе от терригенных пород к кристаллическим, приводит к увеличению плотности и УЭС. Применимость таких соотношений сильно ограничена, поскольку плотность зависит от состава минерального скелета и не зависит от проницаемости – в частности, соль, при низкой плотности, имеет крайне низкую пористость и, соответственно, высокое УЭС.

Очевидно, что, если зависимость между параметрами среды описывается непрерывной монотонной функцией, параметры претерпевают разрыв одновременно, что обосновывает применение совместной полной вариации и JMGS-функционала для их связи.

3.4.3 Численный пример

Для численного примера использовалась модель, основанная на представленной в работе [Malyshev et al., 2012] геологической интерпретации разреза МОВ–ОГТ через прогиб Урванцева–Воронина в Северо-Карском осадочном бассейне. Геологическая модель включает осложненный разломом кристаллический фундамент и осадочный чехол, содержащий слой эвапоритов, образующий соляные диапиры с кальдерами растворения и соляные подушки (рис. 3.1). С помощью разработанной программы интерактивного создания и редактирования двумерных моделей была построена изображенная на рис. 3.5а многопараметрическая модель, включающая УЭС, скорость продольных волн и плотность, был добавлен водный слой мощностью 700 м. Синтетические данные были получены с использованием следующих параметров системы наблюдений. Магнитотеллурические станции располагаются на дне моря с шагом 1 км; используются импедансы ТМ- и ТЕ-моды в частотном диапазоне 0.005–1 Гц с шагом 5 значений на декаду; к данным был добавлен белый гауссов шум с нулевым средним и СКО, равным 3% по кажущимся сопротивлениям и 15 мрад по фазе (рис. 3.2). Пункты гравиметрических измерений расположены на поверхности моря с шагом 100 м; к данным добавлен гауссов шум с нулевым средним: СКО составляет 0.1 мГал для Δg и 1 этвёш для U_{zx} и U_{zz} (рис. 3.3). Сейсмические приемники располагаются на дне с шагом 100 м, источники – на глубине 30 м с шагом 100 м, каждый источник регистрируется всеми приемниками, что дает максимальное удаление 40 км; к временам первых вступлений добавлен гауссов шум с нулевым средним и СКО 15 мс (рис. 3.4).

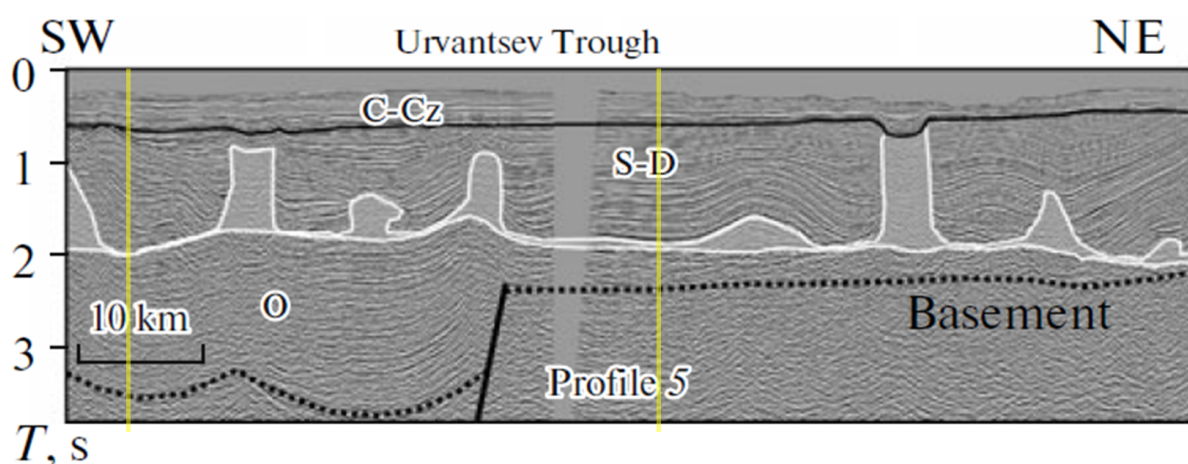


Рис. 3.1. Интерпретация временного разреза МОВ–ОГТ через прогиб Урванцева в Северо-Карском бассейне [Malyshev et al., 2012]. Выделен интервал, использованный для построения тестовой модели.

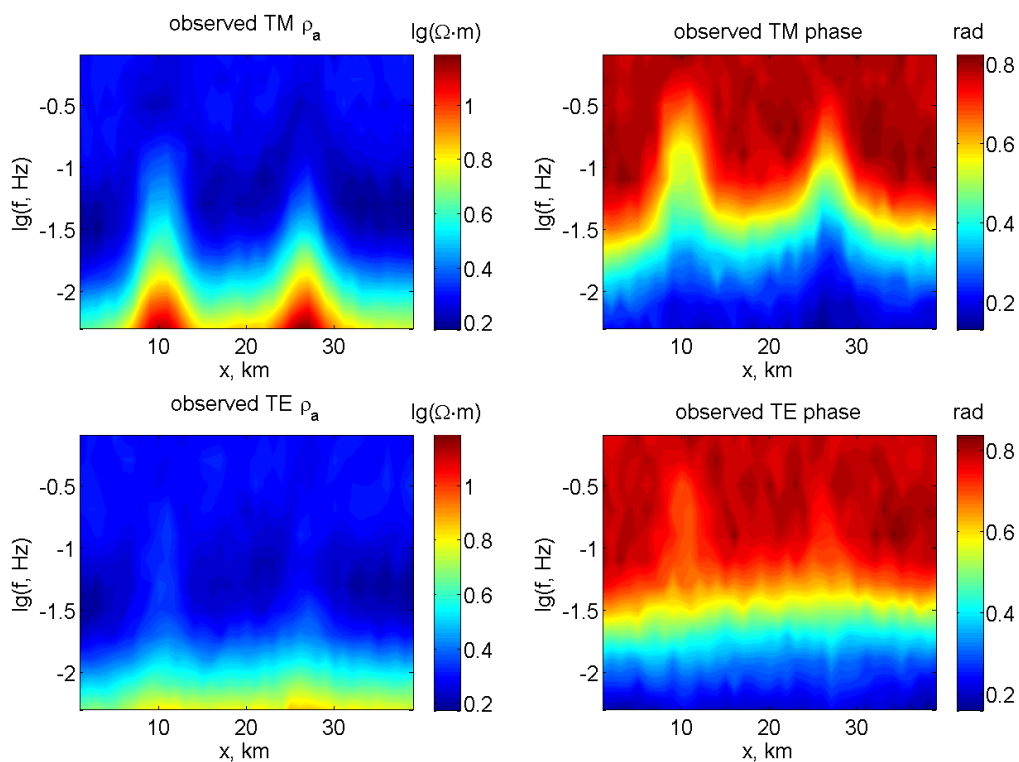


Рис. 3.2. Синтетические МТ данные с добавлением шума. Кажущееся сопротивление (слева) и фаза импеданса ТМ (вверху) и ТЕ моды.

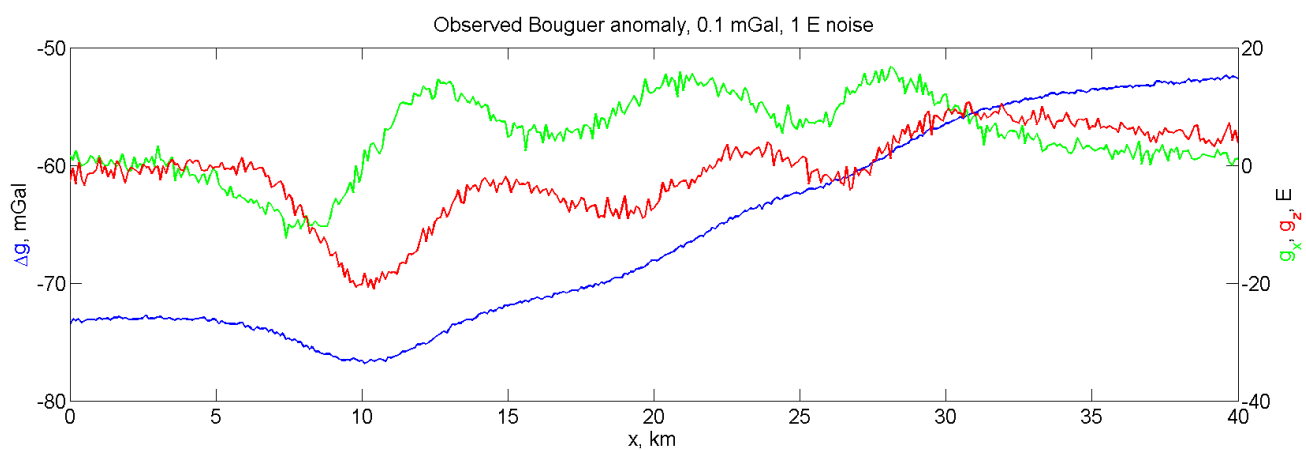


Рис. 3.3. Синтетические гравиметрические данные с добавлением шума: аномалия Буге и компоненты U_{zx} и U_{zz} тензора вторых производных гравитационного потенциала.

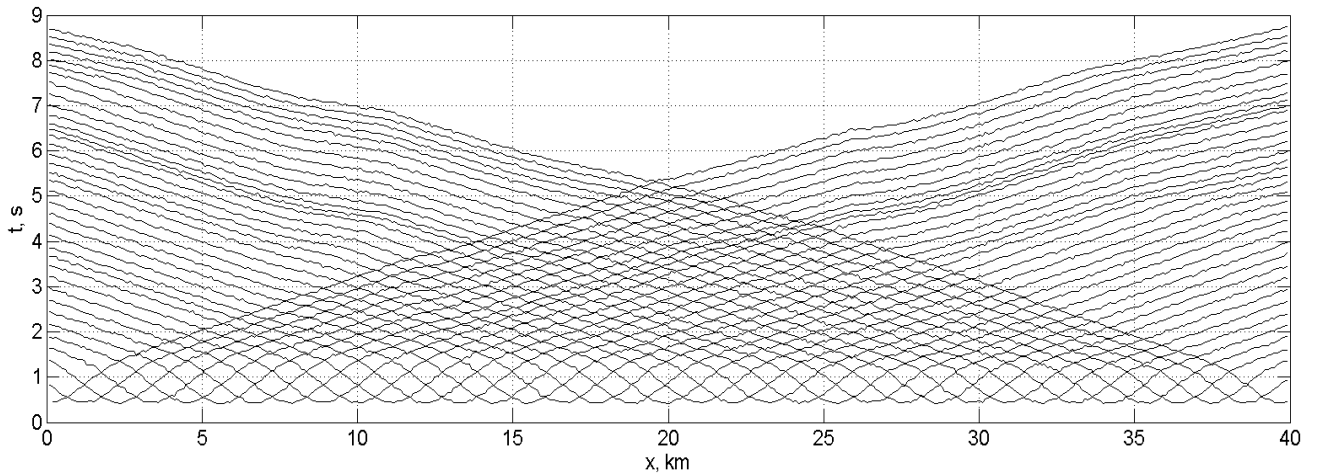


Рис. 3.4. Синтетические годографы первых вступлений с добавлением шума (показан каждый десятый годограф).

Инверсия выполнялась на однородной прямоугольной сетке; начальные модели изображены на рис. 3.5б. Сначала выполнялась независимая инверсия для каждого метода с использованием в качестве стабилизатора взвешенной полной вариации $\Phi_{TV}(\mathbf{m}_i)$: т.е. целевая функция для модели \mathbf{m}_i формально получается из (3.3) при $\mathbf{W}_j = 0$ и $\alpha_j \rightarrow \infty$ для всех $j \neq i$. Использовались одинаковые параметры для совместной и независимой инверсии для более наглядного их сравнения: $w_i^x = 10$, $w_i^z = 1$, $\beta^2 = 10^{-5}$, $\hat{\alpha}_i = 10^{-3}$ для сейсмической томографии и гравиметрии, и $2.5 \cdot 10^{-5}$ для МТ, $\lambda_i = 1$ для томографии и МТ, и 10^{-4} для гравиметрии, $\rho \in (1.9, 10^3) \text{ Ом} \cdot \text{м}$, $v_p \in (1.3, 8.5) \text{ км/с}$, $\sigma \in (1.5, 4.0) \text{ г/см}^3$. Результаты однометодных инверсий приведены на рис. 3.5в, совместной инверсии – на рис. 3.5г. Над каждой диаграммой указан номер итерации, среднеквадратические значения невязок данных (нормированные на дисперсию), δZ , δt , δg , и нормированные среднеквадратические значения невязок моделей, $\delta \rho$, δv , $\delta \sigma$. Последние вычислялись как $\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{true}}\| / \|\mathbf{m}_{\text{true}}\|$, где \mathbf{m} – натуральный логарифм удельного сопротивления в случае $\delta \rho$, скорость продольных волн в случае δv и плотность в случае $\delta \sigma$, \mathbf{m}_{true} – соответствующие истинные модели, интерполированные на сетку обратной задачи. Результаты совместной инверсии демонстрируют меньшие значения невязок данных и моделей, и, визуально – большее разрешение и контрастность. В данном примере, из всех методов МТ наиболее полно характеризует геологическую структуру, что обусловлено высоким контрастом удельного сопротивления и наличием относительно высоких частот в

данных; более всего выигрывает от совместной инверсии сейсмическая томография. Следует заметить, что с практической точки зрения, наибольший интерес, как правило, представляет как раз уточнение модели скорости, которая необходима для выполнения миграции и инверсии полного волнового поля. Относительно низкая контрастность моделей плотности обусловлена сильным демпфированием, без которого аномальная плотность оказывается сосредоточенной вблизи поверхности; по всей видимости, для более точного восстановления плотности необходимо введение дополнительных ограничений в гравиметрическую обратную задачу; тем не менее, совместная инверсия позволила существенно улучшить модель плотности по сравнению с независимой инверсией.

На рис. 3.6 приведены графики изменения с итерациями значений функционалов невязки и стабилизаторов для независимой и совместной инверсии, при этом для совместной инверсии также приведены функционалы полной вариации $\Phi_{TV}(\mathbf{m}_i)$, а для независимой инверсии – функционал совместной полной вариации $\Phi_{JTV}(\mathbf{M})$ (не входящие в соответствующие целевые функции). Увеличение значений полной вариации в процессе инверсии отражает постепенное усложнение структуры моделей. Интересно, что для совместной инверсии наблюдается немного более быстрая сходимость по невязке и бóльшие значения полной вариации моделей.

Повторим эксперимент с теми же параметрами инверсии, но с изотропными весовыми функциями: $w_i^z = w_i^x = 1$. На рис. 3.7 приведены результаты независимой и совместной инверсии. По сравнению с результатами на рис. 3.5, более выражены артефакты в виде возмущений горизонтальных границ, и средние ошибки восстановления УЭС и скорости больше. Таким образом, данный пример демонстрирует, что включение анизотропных весовых матриц в функционал (совместной) полной вариации действительно позволяет увеличить гладкость моделей в горизонтальном направлении, при сохранении резких вертикальных границ (боковые стороны соляных куполов).

Для совместной инверсии с JMGS-функционалом (3.7) в качестве начальной модели использовались результаты независимой инверсии, приведенные на рис. 3.5в. Использовались те же параметры инверсии, что и в первом эксперименте, за исключением $\rho_{\max} = 500 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ и $v_{p,\max} = 7 \text{ км/с}$, чтобы предотвратить появление слишком больших контрастов параметров. Результат пяти итераций приведен на рис. 3.6в: наблюдается усиление структурного сходства между отдельными моделями и существенное увеличение резкости изображений.

Для оценки влияния улучшения скоростной модели на построение сейсмического изображений среды для описанной выше системы наблюдений было рассчитано акустическое волновое поле приближение (с помощью входящей в пакет Seismic Unix программы `sufdmod2`, реализующей пространственно-временную конечно-разностную схему второго порядка). На

рис. 3.8 изображена выборка из трех сейсмограмм ОТП. Синтетические сейсмограммы подвергались глубинной миграции Кирхгофа до суммирования с использованием моделей скорости, приведенных на рис. 3.5. Обработка сейсмограмм перед миграцией была сведена к необходимому для «проверки концепции» минимуму: выполнялся мьютинг по водной волне и осуществлялся снос источников на уровень дна моря с помощью введения статических поправок; с целью повышения стабильности лучевого трассирования, модели скорости сглаживались. Результаты миграции показаны на рис. 3.9; видно, что при использовании скорости, полученной с помощью совместной инверсии, существенно улучшается изображение фундамента и подошвы соляных структур.

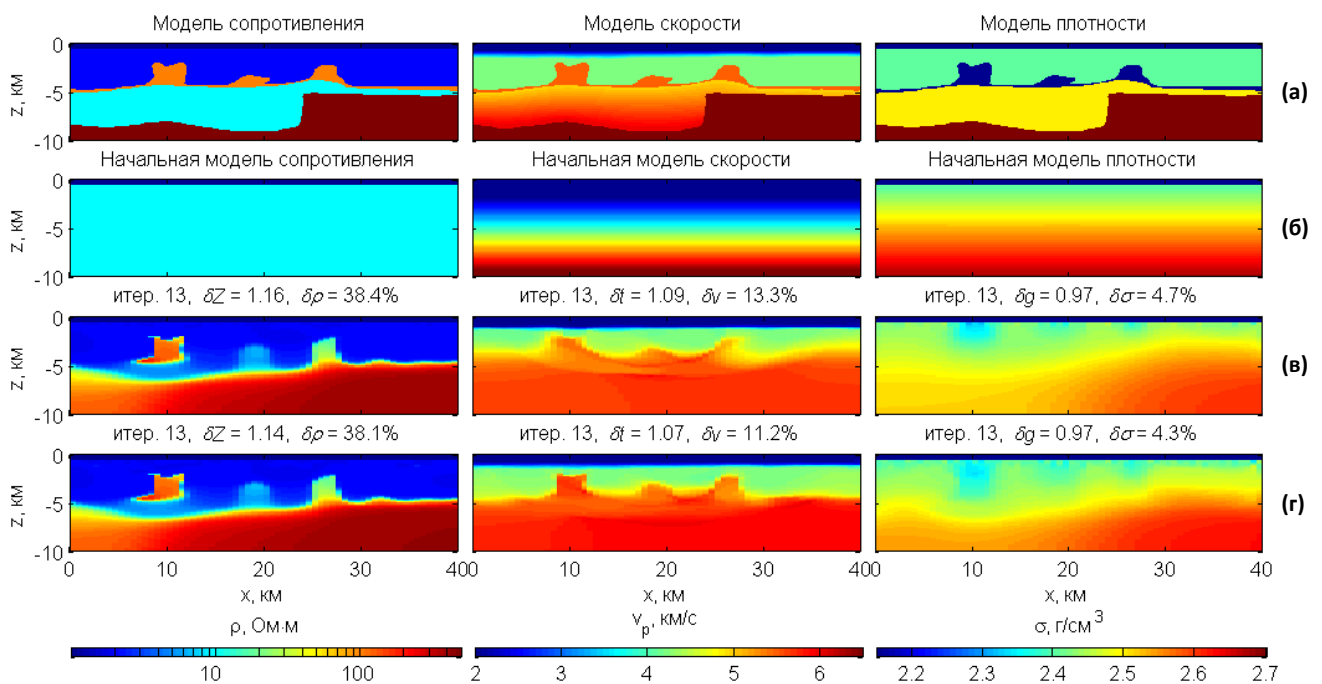


Рис. 3.5. Многопараметрическая модель, основанная на геологической интерпретации разреза МОВ–ОГТ через прогиб Урванцева: удельное сопротивление (слева), скорость продольных волн (по центру) и плотность (справа). Истинная модель (а); начальная модель (б); результат независимых инверсий с функционалами $\Phi_{TV}(\mathbf{m}_i)$, $w_i^x = 10$, $w_i^z = 1$ (в); результат совместной инверсии с функционалом $\Phi_{JTV}(\mathbf{M})$, $w_i^x = 10$, $w_i^z = 1$ (г).

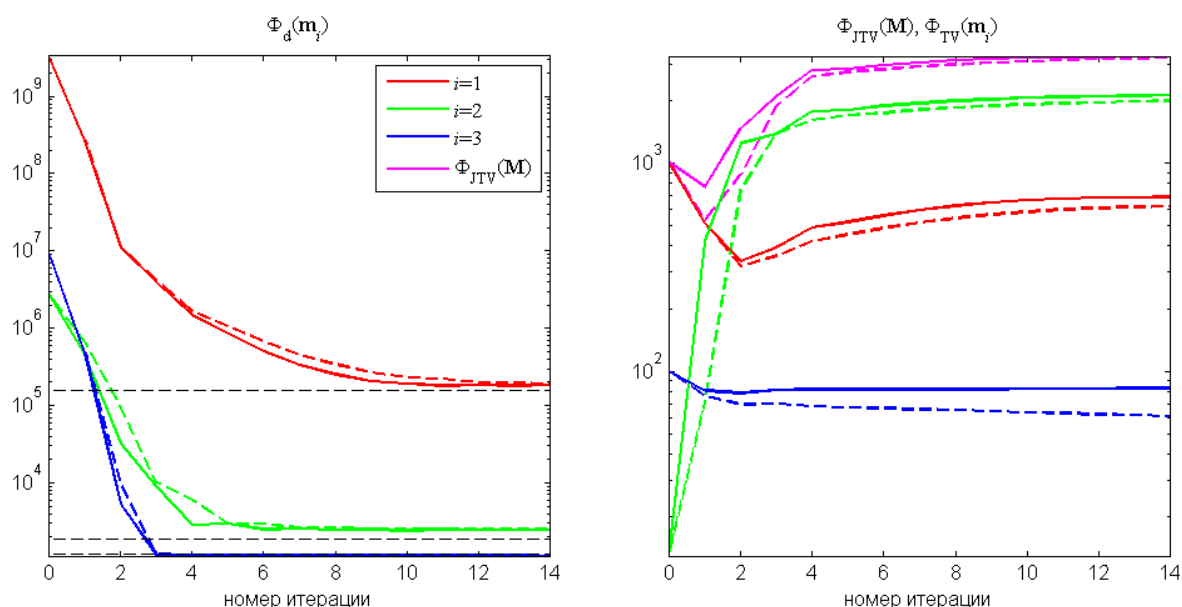


Рис. 3.6. Изменение значений функционалов невязки $\Phi_d(\mathbf{m}_i) \equiv [\mathbf{d}_i - \mathbf{f}_i(\mathbf{m}_i)]^T \mathbf{R}_i^{-1} [\mathbf{d}_i - \mathbf{f}_i(\mathbf{m}_i)]$ (слева) и стабилизирующих функционалов (справа) с итерациями. Индекс 1 соответствует сейсмике, 2 – МТ, 3 – гравиметрии. Пунктир соответствует независимой инверсии с функционалами $\Phi_{TV}(\mathbf{m}_i)$, $w_i^x = 10$, $w_i^z = 1$; сплошная линия – совместной инверсии с функционалом $\Phi_{JTV}(\mathbf{M})$, $w_i^x = 10$, $w_i^z = 1$. Черные пунктирные линии обозначают математическое ожидание функционалов невязки для истинных моделей.

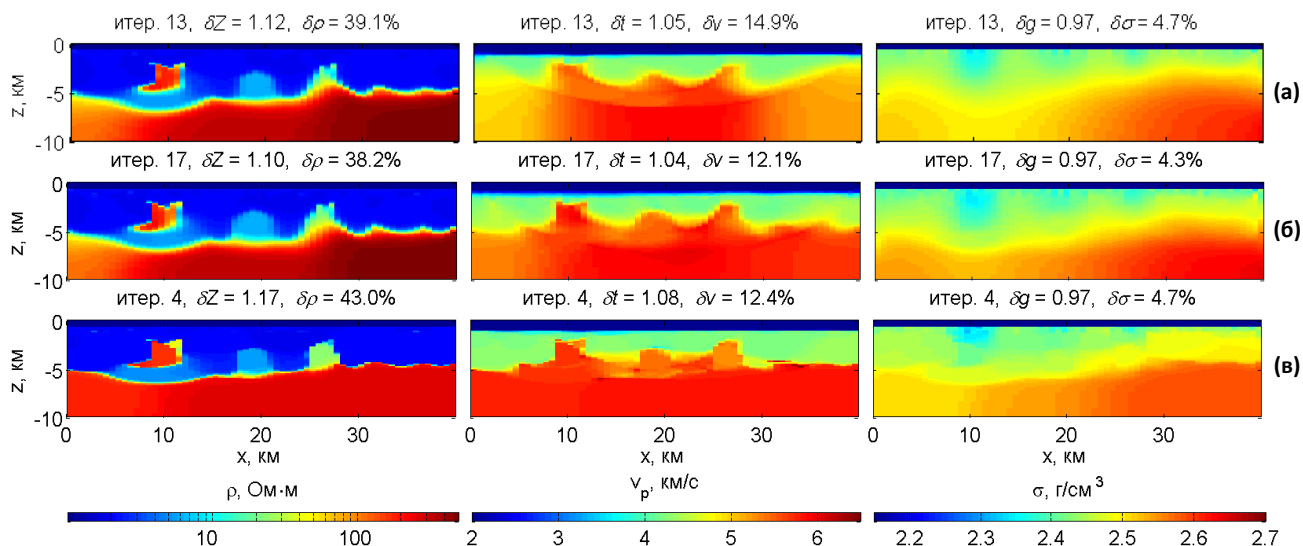


Рис. 3.7. Продолжение рис. 3.5. Результат независимых инверсий с функционалами $\Phi_{TV}(\mathbf{m}_i)$, $w_i^x = w_i^z = 1$ (а); результат совместной инверсии с функционалом $\Phi_{JTV}(\mathbf{M})$, $w_i^x = w_i^z = 1$ (б); результат совместной инверсии с функционалом $\Phi_{JMGS}(\mathbf{M})$ (в).

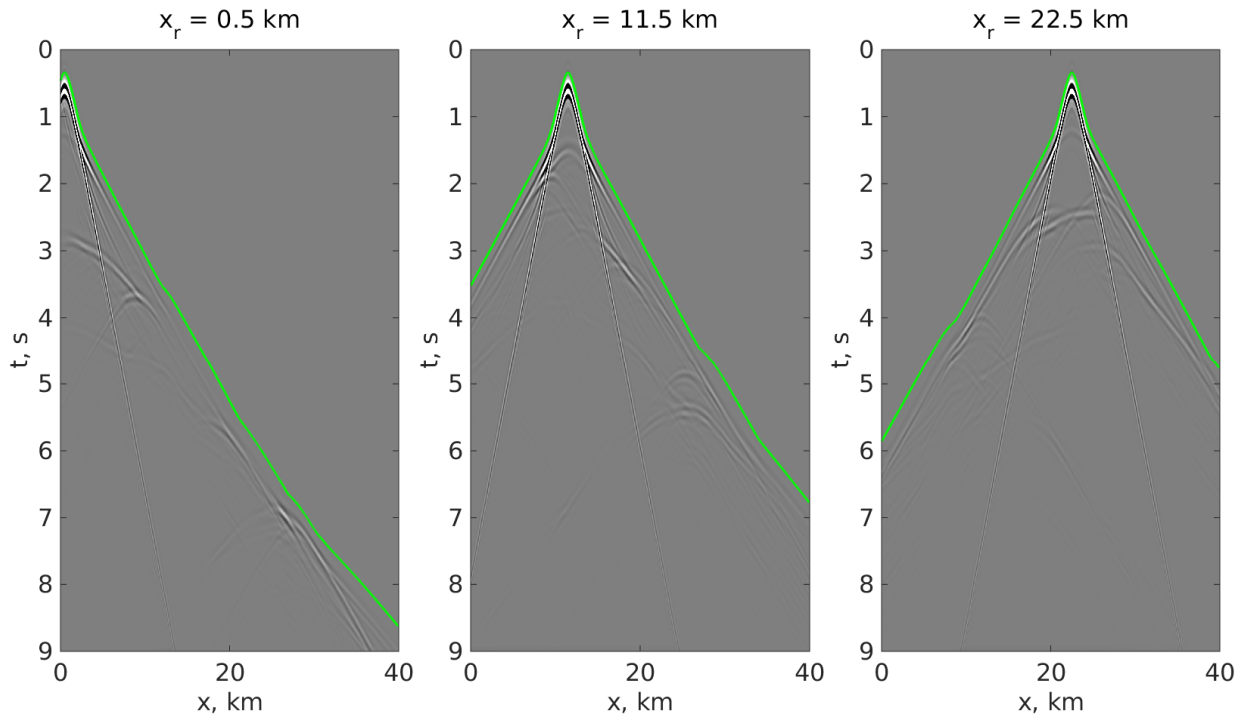


Рис. 3.8. Сейсмограммы ОТП для приемников с $x=0.5$, 11.5 и 22.5 км и считанные годографы первых вступлений (зеленая линия).

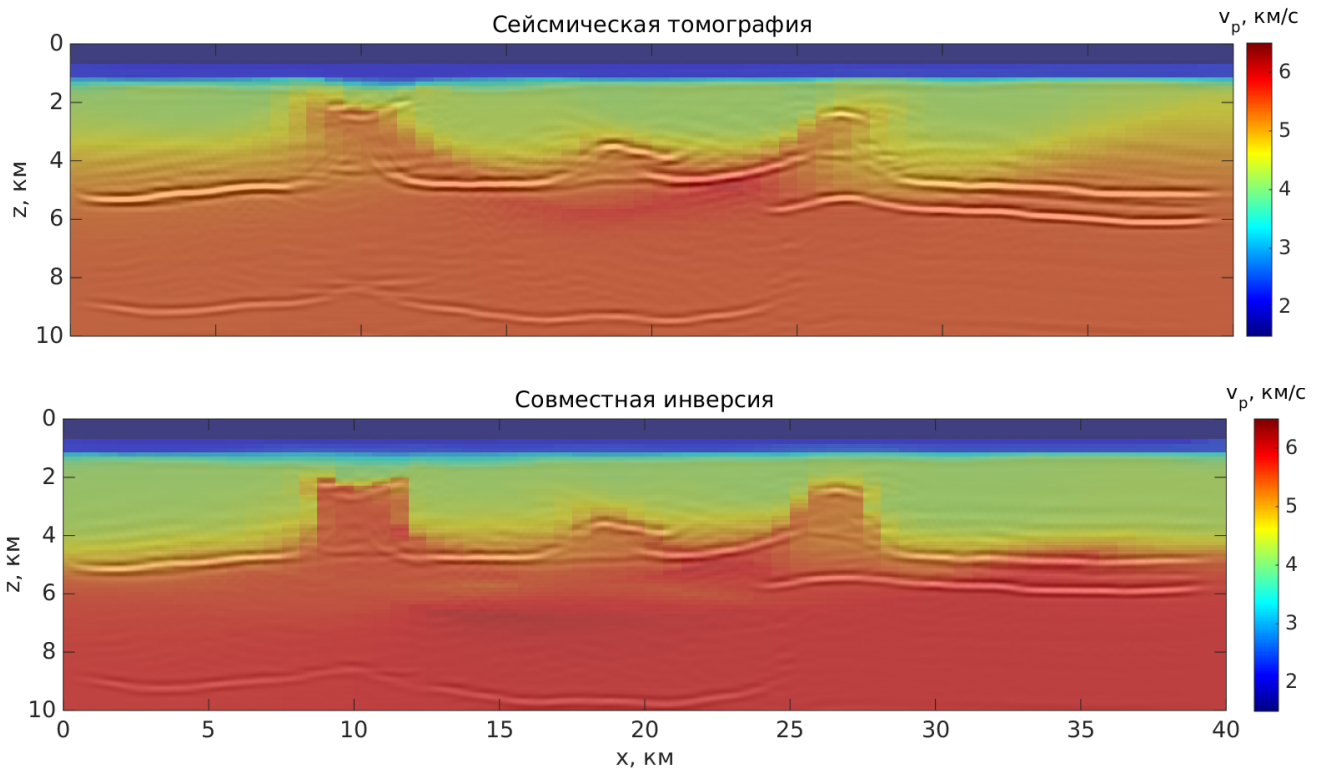


Рис. 3.9. Результаты миграции Кирхгофа с использованием скоростной модели, построенной с помощью сейсмической томографии и совместной инверсии, наложенные на соответствующие скоростные модели.

3.5 Выводы

Предложено обобщение совместной полной вариации на произвольное число моделей и ее модификация, включающая тензорные весовые функции. Совместная полная вариация связывает структуры всех восстанавливаемых моделей и одновременно играет роль стабилизирующего функционала в каждом домене, что значительно упрощает целевую функцию совместной инверсии, особенно при наличии более чем двух доменов. Использование метода IRLS позволяет получить на каждой итерации алгоритма Гаусса–Ньютона независимые системы линейных уравнений для разных доменов, так что вычислительная сложность совместной инверсии оказывается равна суммарной сложности независимых инверсий, а программная реализация и распараллеливание заметно упрощаются.

Предложен новый функционал с совместным минимальным носителем градиента, а также обобщение этого функционала и совместной полной вариации на вейвлет-преобразования моделей; показано, что предложенный алгоритм инверсии с совместной полной вариацией после незначительной модификации можно использовать с данными функционалами.

Алгоритм совместной инверсии реализован в двумерном варианте для трех доменов: МТ, сейсмической томографии и гравиметрии/градиентометрии. В качестве численного примера рассмотрена инверсия синтетических данных, полученных на модели, основанной на реальной геологии Северо-Карского бассейна. Результаты инверсии и последующей миграции Кирхгофа демонстрируют эффективность предложенного алгоритма.

Заключение

В диссертационной работе изложены результаты исследований по совместной инверсии сейсмических, магнитотеллурических и гравиметрических данных с использованием структурных ограничений. Основные результаты заключаются в следующем:

1. Комплексирование сейсмической томографии, магнитотеллурики, гравиметрии и гравитационной градиентометрии методом совместной инверсии позволяет улучшить восстановление скорости продольных волн, удельного сопротивления и плотности, что продемонстрировано на моделях, включающих соляные структуры и сложную верхнюю часть разреза.
2. Предложены новые структурные ограничения, учитывающие априорную информацию о знаке корреляции скорости и удельного сопротивления. Показано, что данные ограничения позволяют повысить точность совместной инверсии по сравнению с известным ограничением кросс-градиента.
3. Предложен оригинальный многосеточный алгоритм совместной инверсии, использующий полностью независимые квазирегулярные сетки для сейсмической томографии, магнитотеллурического метода и структурных ограничений, повышающий эффективность решения обратной задачи благодаря учету топографии и батиметрии, разной разрешающей способности, глубинности и геометрии систем наблюдений сейсмической томографии и магнитотеллурического метода.
4. Функционал совместной полной вариации обобщен на произвольное число моделей и модифицирован добавлением тензорных весовых функций. Предложен новый функционал с совместным минимальным носителем градиента, а также обобщения нормы $L_{1,2}$ и «нормы $L_{0,2}$ » на вейвлет-преобразования моделей. Показано, что новые функционалы позволяют построить эффективный алгоритм совместной инверсии с произвольным количеством геофизических методов и моделей среды. Такой алгоритм реализован для магнитотеллурического метода, гравиметрии, гравитационной градиентометрии и сейсмической томографии и успешно опробован на синтетических данных.

Благодарности

Автор очень благодарен Юрию Викторовичу Рослову, заинтересовавшему его сейсмической томографией и затем – задачей совместной инверсии сейсмических и электромагнитных данных, и долгое время руководившему этим проектом. Без его энтузиазма и поддержки данная работа была бы невозможна.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Владимиру Николаевичу Трояну за обучение, консультации, постоянное внимание и поддержку на всех этапах работы над диссертацией.

Автор глубоко признателен доктору Andrea Zerilli за предоставление кода прямой задачи МТ, обсуждение результатов и плодотворные дискуссии по электромагнитной инверсии; Александру Абрамовичу Виннику и Анне Васильевне Копыловой за предоставление кода лучевого трассирования, обучение и консультации; профессору Christine Böckmann за консультации по теории решения некорректно поставленных обратных задач; Борису Марковичу Каштану и Татьяне Борисовне Яновской за обучение, обсуждение результатов и полезные рекомендации; Никите Юрьевичу Боброву за большой вклад в организацию исследований; Дмитрию Андреевичу Попову за помощь в выполнении сейсмической миграции. Автор благодарит сотрудников кафедры физики Земли СПбГУ; коллег из геофизического отдела EXPEC ARC (Saudi Aramco) и Лаборатории динамики упругих сред за конструктивные дискуссии и всестороннюю помощь.

Значительная часть исследований, представленных в диссертации, была проведена при поддержке Министерства образования и науки РФ (идентификатор проекта RFMEFI57614X0052).

Список сокращений

AVA – amplitude variation with angle

BHS – Bruggeman–Hanai–Sen

CIG – common image gather

CSEM – controlled-source electromagnetic (method)

IRLS – iteratively reweighted least squares

JMGS – joint minimum gradient support

JTV – joint total variation

L-BFGS – limited memory Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno algorithm

MCMC – Markov chain Monte Carlo

MGS – minimum gradient support

ДВП – дискретное вейвлет-преобразование

МОВ–ОГТ – метод отраженных волн в модификации общей глубинной точки

МТ – магнитотеллурический (метод)

ОТП – общая точка приема

СКО – среднеквадратическое отклонение

УЭС – удельное электрическое сопротивление

Список литературы

1. Abubakar A. et al. A model-compression scheme for nonlinear electromagnetic inversions // *Geophysics*. – 2012. – Т. 77. – №. 5. – С. E379-E389.
2. Abubakar A. et al. Inversion algorithms for large-scale geophysical electromagnetic measurements // *Inverse Problems*. – 2009. – Т. 25. – №. 12. – С. 123012.
3. Aster R. C., Borchers B., Thurber C. H. *Parameter Estimation and Inverse Problems* second edition Elsevier Inc. – 2013.
4. Bahr K. Electrical anisotropy and conductivity distribution functions of fractal random networks and of the crust: the scale effect of connectivity // *Geophys. J. Int.* 1997. Vol. 130. p. 649-660.
5. Bauer K. et al. Neural network analysis of crosshole tomographic images: The seismic signature of gas hydrate bearing sediments in the Mackenzie Delta (NW Canada) // *Geophysical Research Letters*. – 2008. – Т. 35. – №. 19.
6. Bedrosian P. A. et al. Lithology-derived structure classification from the joint interpretation of magnetotelluric and seismic models // *Geophysical Journal International*. – 2007. – Т. 170. – №. 2. – С. 737-748.
7. Benzi M., Golub G. H., Liesen J. Numerical solution of saddle point problems // *Acta numerica*. – 2005. – Т. 14. – С. 1-137.
8. Birch F. Composition of the earth's mantle // *Geophysical Journal International*. – 1961. – Т. 4. – №. Supplement 1. – С. 295-311.
9. Brown V., Key K., Singh S. Seismically regularized controlled-source electromagnetic inversion // *Geophysics*. – 2012. – Т. 77. – №. 1. – С. E57-E65.
10. Carcione J. M., Ursin B. Cross-property relations between electrical conductivity and seismic velocity of rocks // *Geophysics*. 2007. Vol. 72. N. 5.
11. Chan T. F., Zhou H. M., Chan R. H. Continuation method for total variation denoising problems // *SPIE's 1995 International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation*, International Society for Optics and Photonics. 1995.
12. Chen J. et al. A Bayesian model for gas saturation estimation using marine seismic AVA and CSEM data // *Geophysics*. – 2007. – Т. 72. – №. 2. – С. WA85-WA95.
13. Colombo D. and De Stefano M. Geophysical modeling via simultaneous joint inversion of seismic, gravity, and electromagnetic data: Application to prestack depth imaging // *The Leading Edge*. 2007. 26(3). p.326-331.
14. Colombo D. et al. Full tensor CSEM and MT for subsalt structural imaging in the Red Sea: Implications for seismic and electromagnetic integration // *The Leading Edge*. – 2013. – Т. 32. – №. 4. – С. 436-449.

15. Daubechies I., Fornasier M., Loris I. Accelerated projected gradient method for linear inverse problems with sparsity constraints //Journal of Fourier Analysis and Applications. – 2008. – T. 14. – №. 5-6. – C. 764-792.
16. De Stefano M. et al. Multiple-domain, simultaneous joint inversion of geophysical data with application to subsalt imaging //Geophysics. – 2011. – T. 76. – №. 3. – C. R69-R80.
17. De Stefano M., Colombo D. Geophysical modeling through simultaneous joint inversion of seismic, gravity and magnetotelluric data // 76th Annual International Meeting, SEG Research Workshop, Integration of Seismic and Electromagnetic Measurements. New Orleans, 2006.
18. Di Giuseppe M. G. et al. k-Means clustering as tool for multivariate geophysical data analysis. An application to shallow fault zone imaging //Journal of Applied Geophysics. – 2014. – T. 101. – C. 108-115.
19. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs //Numerische mathematik. – 1959. – T. 1. – №. 1. – C. 269-271.
20. Ditmar P. Finding the shape of a local heterogeneity by means of a structural inversion with constraints //Geophysical prospecting. – 2002. – T. 50. – №. 2. – C. 209-223.
21. Donoho D. L. For most large underdetermined systems of linear equations the minimal ℓ_1 -norm solution is also the sparsest solution //Communications on pure and applied mathematics. – 2006. – T. 59. – №. 6. – C. 797-829.
22. Droujinine A., Vasilevsky A., Evans R. Feasibility of using full tensor gradient (FTG) data for detection of local lateral density contrasts during reservoir monitoring //Geophysical Journal International. – 2007. – T. 169. – №. 3. – C. 795-820.
23. Gallardo L. A., Meju M. A. Characterization of heterogeneous near-surface materials by joint 2D inversion of dc resistivity and seismic data //Geophysical Research Letters. – 2003. – T. 30. – №. 13.
24. Gallardo L.A. Multiple cross-gradient joint inversion for geospectral imaging // Geophysical Research Letters. 2007. 34(19).
25. Gao G. et al. Simultaneous joint petrophysical inversion of electromagnetic and seismic measurements //2010 SEG Annual Meeting. – Society of Exploration Geophysicists, 2010.
26. Gardner G. H. F., Gardner L. W., Gregory A. R. Formation velocity and density-the diagnostic basics for stratigraphic traps //Geophysics. – 1974. – T. 39. – №. 6. – C. 770-780.
27. Habashy T.M. and Abubakar A. A general framework for constraint minimization for the inversion of electromagnetic measurements // Progress in Electromagnetics Research. 2004. 46. p.265-312.
28. Haber E. Computational methods in geophysical electromagnetics. – SIAM, 2014. – T. 1.
29. Haber E., Ascher U. M., Oldenburg D. On optimization techniques for solving nonlinear inverse problems //Inverse problems. – 2000. – T. 16. – №. 5. – C. 1263.
30. Haber E., Gazit M. H. Joint Inversion Through A Level Set Formulation //ASEG Extended Abstracts. – T. 2012. – №. 1. – C. 1-3.

31. Haber E., Gazit M. H. Model fusion and joint inversion // *Surveys in Geophysics*. – 2013. – T. 34. – №. 5. – C. 675-695.
32. Haber E., Oldenburg D. Joint inversion: a structural approach // *Inverse Problems*. 1997. Vol. 13. p. 63-77.
33. Han T. Joint velocity-resistivity effective medium models // 72nd EAGE Conference & Exhibition, Extended abstracts. Barcelona, 2010.
34. Hansen K. R. et al. Incorporating seismic horizons in inversion of CSEM data // 2009 SEG Annual Meeting. – Society of Exploration Geophysicists, 2009.
35. Hansen P. C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve // *SIAM review*. – 1992. – T. 34. – №. 4. – C. 561-580.
36. Heincke B. et al. 2-D and 3-D Joint Inversion of Seismic, MT and Gravity Data from the Faroe-Shetland Basin // 76th EAGE Conference and Exhibition 2014. – 2014.
37. Heincke B. et al. Adaptive coupling strategy for simultaneous joint inversions that use petrophysical information as constraints // 2010 SEG Annual Meeting. – Society of Exploration Geophysicists, 2010.
38. Heincke B., Jegen M., Hobbs R. Joint inversion of MT, gravity and seismic data applied to sub-basalt imaging // *SEG Expanded Abstracts*. – SEG, 2006. – C. 784-789.
39. Hering A. et al. A joint inversion algorithm to process geoelectric and surface wave seismic data // *Geophysical Prospecting*. 1995. Vol. 43. p. 135-156.
40. Hestenes M. R., Stiefel E. *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*. – NBS, 1952. – T. 49. – C. 1.
41. Hoversten, G. M., et al. (2006). Direct reservoir parameter estimation using joint inversion of marine seismic AVA and CSEM data. *Geophysics*, 71(3), C1-C13.
42. Hu W., Abubakar A., Habashy T.M. Joint electromagnetic and seismic inversion using structural constraints // *Geophysics*. 2009. Vol. 74. N. 6.
43. Juhojuntti, N., & Kamm, J. (2011, September). Joint Inversion of Seismic Refraction and Resistivity Data Using Layered Models. In *Near Surface 2011-the 17th European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics*.
44. Kim H. J., Song Y., Lee K. H. Inequality constraint in least-squares inversion of geophysical data // *Earth, planets and space*. – 1999. – T. 51. – №. 4. – C. 255-259.
45. Kirkendall B., Li Y., Oldenburg D. Imaging cargo containers using gravity gradiometry // *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*. – 2007. – T. 45. – №. 6. – C. 1786-1797.
46. Klimeš L., Kvasnička M. 3-D network ray tracing // *Geophys. J. Int.* 1994. Vol. 116. p. 726-738.
47. Kozlovskaya E. et al. Joint inversion of multiple data types with the use of multiobjective optimization: problem formulation and application to the seismic anisotropy investigations // *Geophysical Journal International*. – 2007. – T. 171. – №. 2. – C. 761-779.

48. Kozlovskaya E., Theory and application of joint interpretation of multimethod geophysical data: PhD thesis / University of Oulu. Oulu, 2001.
49. Last B. J., Kubik K. Compact gravity inversion // *Geophysics*. – 1983. – Т. 48. – №. 6. – С. 713-721.
50. Lelièvre P. G., Farquharson C. G., Hurich C. A. Joint inversion of seismic traveltimes and gravity data on unstructured grids with application to mineral exploration // *Geophysics*. – 2012. – Т. 77. – №. 1. – С. K1-K15.
51. Li Y., Oldenburg D. W. 3-D inversion of gravity data // *Geophysics*. 1998. v. 63. №. 1. p. 109-119.
52. Lien M. Simultaneous joint inversion of amplitude-versus-offset and controlled-source electromagnetic data by implicit representation of common parameter structure // *Geophysics*. – 2013. – Т. 78. – №. 4. – С. ID15-ID27.
53. Loris I. et al. Tomographic inversion using ℓ_1 -norm regularization of wavelet coefficients // *Geophysical Journal International*. – 2007. – Т. 170. – №. 1. – С. 359-370.
54. Loris I., Verhoeven C. Iterative algorithms for total variation-like reconstructions in seismic tomography // *GEM-International Journal on Geomathematics*. – 2012. – Т. 3. – №. 2. – С. 179-208.
55. Malyshev N.A., Nikishin V.A., Nikishin A.M., Obmetko V.V., Martirosyan V.N., Kleshchina L.N. and Reydik Y.V. A new model of the geological structure and evolution of the North Kara Sedimentary Basin // *Doklady Earth Sciences*. 2012. v. 445. No. 1. p. 791-795.
56. Meju M.A., Gallardo L.A., Mohamed A.K. Evidence for correlation of electrical resistivity and seismic velocity in heterogeneous near-surface materials // *Geophys. Res. Lett.* 2003. Vol. 30. N
57. Molodtsov D.M., Colombo D., Roslov Yu.V., Troyan V.N. and Kashtan B.M. Comparison of structural constraints for seismic-MT joint inversion in a subsalt imaging problem // *Вестник СПбГУ*. 2015. Серия 4. Т. 2(60), с. 230-236.
58. Molodtsov D.M., Kashtan B.M., Roslov Yu.V. Joint inversion of seismic and magnetotelluric data with structural constraint based on dot product of image gradients // *81st SEG Annual Meeting, Expanded Abstracts*. 2011.
59. Molodtsov D.M., Troyan V.N. Generalized multiparameter joint inversion using joint total variation: application to MT, seismic and gravity data // *78th EAGE Conference & Exhibition – Workshops, Extended Abstracts*. 2016.
60. Molodtsov D.M., Troyan V.N., Roslov Yu.V. and Zerilli A. Joint inversion of seismic traveltimes and magnetotelluric data with a directed structural constraint // *Geophysical Prospecting*. 2013. Vol. 61(6), pp. 1218-1228
61. Molodtsov D.M., Troyan V.N., Roslov Yu.V. Joint inversion of seismic and magnetotelluric data with a differential structural constraint // *82nd SEG Annual Meeting, Expanded Abstracts*. 2012.
62. Moorkamp M. et al. A framework for 3-D joint inversion of MT, gravity and seismic refraction data // *Geophysical Journal International*. – 2011. – Т. 184. – №. 1. – С. 477-493.

63. Moorkamp M. et al. Verification of velocity-resistivity relationships derived from structural joint inversion with borehole data // *Geophysical Research Letters*. – 2013. – T. 40. – №. 14. – C. 3596-3601.
64. Moorkamp M., Jones A.G., Eaton D.W. Joint inversion of teleseismic receiver functions and magnetotelluric data using a genetic algorithm: Are seismic velocities and electrical conductivities compatible? // *Geophys. Res. Lett.* 2007. Vol. 34.
65. Moser T.J. Shortest paths calculation of seismic rays // *Geophysics*. 1991. Vol. 56. p. 59-67.
66. Newman, G. M, E. Gasperikova, G. M. Hoversten, P. E. Wannamaker, 2008, Three-dimensional magnetotelluric characterization of the Coso geothermal field, *Geothermics*, 37, Issue 4, 369-399
67. Nocedal J., Wright S. Numerical optimization. – Springer Science & Business Media, 2006.
68. Paige C. C., Saunders M. A. Solution of sparse indefinite systems of linear equations // *SIAM journal on numerical analysis*. – 1975. – T. 12. – №. 4. – C. 617-629.
69. Plattner A. et al. 3-D electrical resistivity tomography using adaptive wavelet parameter grids // *Geophysical Journal International*. – 2012. – T. 189. – №. 1. – C. 317-330.
70. Portniaguine O., Zhdanov M. S. Focusing geophysical inversion images // *Geophysics*. – 1999. – T. 64. – №. 3. – C. 874-887.
71. Ravaut C. et al. Multiscale imaging of complex structures from multifold wide-aperture seismic data by frequency-domain full-waveform tomography: Application to a thrust belt // *Geophysical Journal International*. – 2004. – T. 159. – №. 3. – C. 1032-1056.
72. Rawlinson N., Hauser J., Sambridge M. Seismic ray tracing and wavefront tracking in laterally heterogeneous media // *Advances in Geophysics*. 2008. Vol. 49. p. 203-273.
73. Rodi W.L. A technique for improving the accuracy of FE solutions for MT data // *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*. 1976. 44. p. 483-506.
74. Rudin L. I., Osher S., Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 1992. – T. 60. – №. 1. – C. 259-268.
75. Saunders J. H. et al. Constrained resistivity inversion using seismic data // *Geophysical Journal International*. – 2005. – T. 160. – №. 3. – C. 785-796.
76. Semerci O. et al. Joint Electromagnetic and Seismic Inversion for Petrophysical Parameters Using Multi-Objective Optimization // 2014 SEG Annual Meeting. – Society of Exploration Geophysicists, 2014.
77. Sena A. G., Toksöz M. N. Simultaneous reconstruction of permittivity and conductivity for crosshole geometries // *Geophysics*. – 1990. – T. 55. – №. 10. – C. 1302-1311.
78. Shewchuk J. R. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. – 1994.
79. Tarantola A. Inverse problem theory and methods for model parameter estimation. – SIAM, 2005.

80. The Rock Physics Handbook: Tools for Seismic Analysis in Porous Media / G. Mavko, T. Mukerji, & J. Dvorkin. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
81. Tikhotskii S. A., Fokin I. V., Schur D. Y. Traveltime seismic tomography with adaptive wavelet parameterization //Izvestiya, Physics of the Solid Earth. – 2011. – T. 47. – №. 4. – C. 326-344.
82. Tikhotsky S., Achauer U. Inversion of controlled-source seismic tomography and gravity data with the self-adaptive wavelet parametrization of velocities and interfaces //Geophysical Journal International. – 2008. – T. 172. – №. 2. – C. 619-630.
83. Um E. S., Commer M., Newman G. A. A strategy for coupled 3D imaging of large-scale seismic and electromagnetic data sets: Application to subsalt imaging //Geophysics. – 2014. – T. 79. – №. 3. – C. ID1-ID13.
84. van den Berg P. M., Van Broekhoven A. L., Abubakar A. Extended contrast source inversion //Inverse problems. – 1999. – T. 15. – №. 5. – C. 1325.
85. Van Den Doel K., Ascher U., Haber E. The lost honour of l2-based regularization //Large Scale Inverse Problems, Radon Ser. Comput. Appl. Math. – 2012. – T. 13. – C. 181-203.
86. Vanyan L.L., Gliko A.O. Seismic and electromagnetic evidence of dehydration as a free water source in the reactivated crust // Geophys. J. Int. 1999. Vol. 137. N 1. p. 159–162.
87. Vogel C. R., Oman M. E. Iterative methods for total variation denoising //SIAM Journal on Scientific Computing. – 1996. – T. 17. – №. 1. – C. 227-238.
88. Vsemirnova E.A., and Roslov Yu.V. Raytracing on irregular mesh // V International Conference “Problems of Geocosmos”, Book of abstracts. 2004. p. 68.
89. Wannamaker P.E., Stodt J.A., and Rijo L.A. Stable finite element solution for two-dimensional magnetotelluric modeling // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. 1987. 88(1). p. 277-296.
90. Zerilli A. et al. Inversion of Marine Controlled Source Electromagnetic Data Using a “Structure”-Based Approach //12th International Congress of the Brazilian Geophysical Society. – 2011.
91. Zerilli A. et al. Joint Inversion of Marine MT and Wide Aperture Seismic Data Using a ‘Hybrid’-Based Approach //2013 SEG Annual Meeting. – Society of Exploration Geophysicists, 2013.
92. Zhang J., Morgan F.D. Joint seismic and electrical tomography // EEGS Symposium on Applications of Geophysics to Engineering and Environmental Problems, Environ. and Eng. Geophys. Soc. Keystone, 1996.
93. Zhdanov M. S. et al. Large-scale 3D inversion of marine magnetotelluric data: Case study from the Gemini prospect, Gulf of Mexico //Geophysics. – 2011. – T. 76. – №. 1. – C. F77-F87.
94. Zhdanov M. S., Gribenko A., Wilson G. Generalized joint inversion of multimodal geophysical data using Gramian constraints //Geophysical Research Letters. – 2012. – T. 39. – №. 9.
95. Zhdanov M., Tolstaya E. Minimum support nonlinear parametrization in the solution of a 3D magnetotelluric inverse problem //Inverse problems. – 2004. – T. 20. – №. 3. – C. 937.

96. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Модели и методы магнитотеллурики. – М.: Научный мир, 2009.
97. Березовский Б. А. и др. Многокритериальная оптимизация. – ФМЛ, 1989.
98. Гольцман, Ф. М., Калинина, Т. Б. (1973). Комплексование геофизических наблюдений. Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли, (8), 31-42.
99. Гравиразведка: справочник геофизика. Под ред. Е.А. Мудрецовой, К.Е. Веселова. – М.: Недра, 1990.
100. Жданов М. С. Геофизическая электромагнитная теория и методы //М.: Научный мир. – 2012.
101. Казей В.В. и др. Псевдоспектральное обращение полных волновых полей // Технологии сейсморазведки. – 2015. – №. 2. – с. 18-28.
102. Комплексный анализ электромагнитных и других геофизических данных. Под ред. В.В. Спичака, М. 2011
103. Крылов С. С., Бобров Н. Ю. Фракталы в геофизике. – СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004.
104. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
105. Сейсморазведка: справочник геофизика. Под ред. И.И. Гурвича, В.П. Номоконова. – М.: Недра, 1981.
106. Спичак В.В., Безрук И.А., Попова И.В. 2008. Построение глубинных кластерных петрофизических разрезов по геофизическим данным и прогноз нефтегазоносности территорий// Геофизика. 5. 43-45.
107. Страхов В. Н., Романюк Т. В. Восстановление плотности земной коры и верхней мантии по данным ГСЗ и гравиметрии //Физика Земли. – 1984. – №. 6. – С. 44-63.
108. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – Наука, 1974.
109. Троян В. Н., Киселев Ю. В. Статистические методы обработки и интерпретации геофизических данных. – СПб : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000.
110. Физические свойства горных пород и полезных ископаемых (петрофизика): справочник геофизика. Под ред. Н.Б. Дортман. – М.: Недра, 1976.
111. Яновская Т. Б., Порохова Л. Н. Обратные задачи геофизики. – СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004.