

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

**ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ЗЕМЛИ им. О.Ю. Шмидта**

**РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

*На правах рукописи*



ГАЛЫБИН Александр Николаевич

**НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ РЕКОНСТРУКЦИИ  
ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗЕМНОЙ КОРЕ**

25.00.10 – Геофизика, геофизические методы поисков полезных ископаемых

Диссертация на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант

доктор физико-математических наук

Ш.А.Мухамедиев

Москва – 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	7
Глава 1. Основные методы определения напряжений в земной коре.....	12
1.1. Введение.....	12
1.2. Экспериментальные данные.....	13
1.3. Модели напряженного состояния земной коры.....	20
1.4. Статистические и интерполяционные методы.....	27
1.5. Определение напряжений по траекториям.....	31
1.6. Моделирование методами теории упругости.....	33
1.7. Некоторые двумерные упругие модели напряжений.....	44
1.8. Недостатки используемых методов.....	50
1.9. Основные цели работы и направления исследований.....	53
Глава 2. Основные соотношения плоской теории упругости.....	56
2.1. Основные уравнения статики упругой среды в декартовой системе координат.....	56
2.2. Уравнения в комплексных координатах для изотропных сред.....	58
2.3. Общие решения для изотропных сред.....	62
2.4. Уравнения для анизотропной среды в обобщенных комплексных переменных.....	65
2.5. Главные напряжения и главные направления.....	69
2.6. Различные формы уравнений равновесия.....	73
2.7. Исследование полей траекторий главных напряжений, возникающих в плоской задаче теории упругости.....	78
2.8. Выводы и замечания по главе.....	82
Глава 3. Краевые задачи плоской теории упругости.....	84
3.1. Граничные значения функции комплексных переменных и ее производных.....	84
3.2. Граничные значения комплексных потенциалов и функций напряжений .....	87
3.3. Решение интегральных уравнений.....	94

3.3.1. Интегральные уравнения в классических задачах.....	94
3.3.2. Интегральные уравнения в краевых задачах для аналитических функций...96	
3.3.3. Подход 1 - Сведение к уравнению Фредгольма.....	99
3.3.4. Подход 2 - Суперпозиция решений однородного и неоднородного СИУ...102	
3.4. Основные выводы по главе.....	107
Глава 4. Неклассические краевые задачи плоской теории упругости с неполными граничными условиями .....	109
4.1. Граничные условия в направлениях.....	109
4.2. Краевая задача в ориентациях главных напряжений для односвязной конечной области.....	112
4.2.1. Постановка задачи ( $\alpha, \alpha'_n$ ).....	112
4.2.2. Граничные условия.....	113
4.2.3. Интегральное представление для комплексных потенциалов.....	116
4.2.4. Система сингулярных интегральных уравнений и ее разрешимость.....	118
4.3. Плоская упругая краевая задача с ГУ в виде ориентаций перемещений и усилий на замкнутом контуре.....	122
4.3.1. Постановка задачи ( $\beta, \gamma$ ).....	122
4.3.2. Интегральные представления для голоморфных функций.....	124
4.3.3. Сингулярные интегральные уравнения.....	125
4.4. Краевые задачи для замкнутого контура с транзитными граничными условиями, сформулированные в направлениях смещений и усилий .....	126
4.4.1. Формулировки краевых задач.....	127
4.4.2. Разрешимость сингулярных интегральных уравнений для краевых задач КЗ-1 – КЗ-4.....	129
4.4.3. Заключительные замечания по задачам КЗ-1 – КЗ-4.....	135
4.5. Краевая задача с ГУ в направлениях напряжений для составной упругой плоскости .....	136
4.5.1. Задача ( $\beta, p$ ) для составной плоскости.....	136
4.5.2. Задача ( $\alpha, p$ ) для составной плоскости.....	141

4.6. Комментарии и общие выводы по главе.....	149
Глава 5. Краевые задачи для простейших областей и для особых случаев граничных условий.....	152
5.1. Решение задачи $(\alpha, \alpha'_n)$ для единичного круга.....	152
5.1.1. Решение в общем случае.....	152
5.1.2. Специальный случай.....	156
5.1.3. Решение для круга с помощью степенных рядов.....	160
5.2. Решение частного случая задачи $(\beta, \gamma)$ для единичного круга.....	162
5.2.1. Формулировка.....	162
5.2.2. Случай $N=M$ .....	164
5.2.3. Особый случай $N \neq M$ .....	166
5.3. Особый случай соосных ориентаций задачи $(\beta, \gamma)$ .....	170
5.4. Решение задачи $(\alpha, \alpha'_n)$ для однородных граничных условий.....	172
5.5. Краевые задачи в ориентациях напряжений и смещений для полуплоскости.....	175
5.5.1. Задача $(\alpha, p)$ для двух полуплоскостей.....	175
5.5.2. Комбинированная задача $(\alpha, p)$ и $(\beta, p)$ для двух полуплоскостей.....	179
5.5.3. Задача $(\alpha, \beta)$ для полуплоскости.....	180
5.5.4. Замечание по открытым контурам.....	183
5.6. Замечания и общие выводы по главе.....	185
Глава 6. Двумерные плоские задачи реконструкции упругих напряжений по дискретным данным о главных направлениях.....	187
6.1. Введение.....	187
6.2. О подходе.....	188
6.3. Постановка задачи реконструкции напряжений.....	192
6.3.1. Формулировка.....	192
6.3.2. Данные.....	193
6.3.3. Неединственность решения и свободные параметры.....	195
6.4. Численный подход.....	197



6.4.1. Метод Трефтца для комплексных потенциалов.....	197
6.4.2. Сведение к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений.....	199
6.4.3. Решение системы методом разложения ее матрицы по сингулярным числам.....	205
6.5. Гармонический аргумент.....	207
6.6. Особые точки.....	209
6.7. Синтетические примеры реконструкций полей упругих напряжений .....	211
6.7.1. Восстановление траекторий с особыми точками и полей напряжений по Варианту 1.....	212
6.7.2. Упругий диск: гармонический аргумент (Вариант 1).....	216
6.7.3. Восстановление полей напряжений по Варианту 2.....	219
6.8. Примеры реконструкций полей упругих напряжений по данным фотоупругости.....	222
6.8.1. Четырехточечный изгиб фотоупругой балки (Вариант 1).....	222
6.8.2. Четырехточечный изгиб фотоупругой балки (Вариант 2).....	225
6.8.3. Круговое кольцо под сосредоточенной нагрузкой.....	227
6.9. Заключительные замечания и выводы по главе.....	229
Глава 7. Реконструкции полей напряжений для односвязных областей.....	232
7.1. Реконструкция траекторий главных напряжений в Западной Европе .....	232
7.2. Моделирование полей упругих палеонапряжений по данным натуральных индикаторов.....	235
7.2.1. Подходы к реконструкции палеонапряжений.....	235
7.2.2. Требования к интерпретации индикаторов палеонапряжений.....	237
7.2.3. Поля палеонапряжений в регионах, примыкающих к зоне конвергенции Аравийской и Евразийской плит.....	238
7.3. Поле напряжений в Австралии.....	246
7.3.1. Полиномиальная аппроксимация.....	247
7.3.2. Конечно-элементная аппроксимация.....	249
7.3.3. Приближенные аналитические решения.....	252

7.4. Заключительные замечания по главе.....	254
Глава 8. Реконструкции полей напряжений в многосвязных областях. Приложения .....	257
8.1. Постановка задач реконструкции для многосвязных областей и модификация численных методов.....	257
8.2. Численный метод, использующий аппроксимации комплексных потенциалов в отдельных подобластях голоморфными функциями.....	260
8.2.1. Метод Трефтца для функций напряжений для плоской области, состоящей из двух подобластей.....	260
8.2.2. Линейная аппроксимация функций напряжений в подобластях, составляющих плоскую область.....	266
8.2.3. Конечно-элементный подход.....	268
8.3. Примеры реконструкций полей напряжений в земной коре.....	269
8.3.1. Области, состоящие из двух подобластей.....	269
8.3.2. Многосвязные области.....	278
8.4. Выводы по главе.....	292
Заключение .....	294
Список использованной литературы.....	306
Приложение 1.....	319

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **Актуальность темы исследования**

Исследования напряженного состояния в земной коре представляют несомненный интерес для описания таких глобальных явлений, как движения тектонических плит или подвижек по геологическим нарушениям, приводящим к землетрясениям. С другой стороны, знание современных напряжений важно для инженеров, работающих в горном деле, нефтегазовой промышленности или занятых проектированием и эксплуатацией различных подземных сооружений. Именно задача определения полей напряжений в земной коре и дала главный импульс для написания данной диссертации, которая нацелена на разработку математических методов реконструкции напряжений по экспериментальным данным. Однако геомеханика не является единственной областью, в которой могут быть использованы результаты этой работы. Они могут оказаться полезными в ситуациях, когда прямые измерения характеристик напряженно-деформированного состояния среды либо принципиально невозможны, либо осложнены влиянием измерительных инструментов, в то время как некоторые косвенные данные могут быть доступны для интерпретации. Также следует отметить и новые постановки плоской краевой задачи теории упругости, которые представляют самостоятельный интерес, как дополнение к исследованным ранее краевым задачам.

### **Степень разработанности темы**

Вопросам, связанным с изучением напряжений в земной коре посвящено большое количество работ, которые отражают различные подходы к проблеме. Одним из применяемых подходов к анализу напряжений является статистический подход, который использует данные натуральных наблюдений в дискретных точках для того, чтобы путем интерполяции, получить непрерывные поля напряжений. При этом упускается из виду то, что интерполяционные методы не могут обеспечить выполнение основных уравнений механики твердого деформируемого тела, в частности дифференциальных уравнений равновесия, которые определяют

статистику геосреды. Помимо равновесия необходим выбор реологической модели среды, который бы не противоречил наблюдениям. В большинстве случаев модели напряжений в литосфере базируются на теории упругости, что проявляется как при обработке натуральных экспериментов, так и при формулировке математических моделей. Основная трудность при построении моделей состоит в неопределенности граничных напряжений и смещений, что приводит к необходимости рассматривать обратные задачи, решение которых сталкивается с различными трудностями, главное из которых – это неединственность получаемых решений. Поэтому различные авторы определяют напряжения одних и тех же регионов земной коры по-разному, причем разница может быть существенна не только с количественной точки зрения, но и с качественной.

**Цели и задачи исследования** состоят в разработке комплекса теоретических инструментов и численных алгоритмов для определения полей напряжений в земной коре на основе решения новых задач теории упругости, в которых экспериментальные данные используются не в качестве условий для выбора одного из возможных решений обратной задачи, а в качестве входных данных для решения прямых задач.

**Научная новизна** работы заключается в исследовании разрешимости нового класса краевых задач теории упругости, ассоциированных с реконструкцией тензора упругих напряжений по неполным граничным условиям, что не предполагает задания величин напряжений, усилий или смещений на границе области. Также разработаны специальные методы для определения полей напряжений по дискретным данным, расположенным как на границе, так и внутри области, основанные на полном выполнении уравнений теории упругости, обеспечивающим равновесие одной области или совокупности подобластей, образующих область.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** На основе разработанных методик проведен анализ полей напряжений в некоторых регионах земной коры, в частности проведены реконструкции полей современных

напряжений в сейсмоактивных регионах, изучена эволюция полей палеонапряжений, указан подход для идентификации цунамигенных областей. Практически важной является задача определения напряжений в пластах горных пород, содержащих полезные ископаемые, что требует привлечения единичных измерений величин напряжений. Для этого был разработан оптимизационный алгоритм, который позволяет выделять единственные решения из конечного числа возможных.

**Методология и методы исследований.** В работе используются концепция теории упругости, при этом используют две основные методологии. Первая заключается в сведении краевых задач теории упругости к системе сингулярных интегральных уравнений с последующим анализом ее разрешимости на основе сведения к соответствующей краевой задаче Римана. Вторая методология подразумевает оптимизацию невязки между расчетными и натурными данными по ориентациям главных напряжений с использованием метода, аналогичному методу Трефтца, для определения комплексных потенциалов в плоской теории упругости. Для анализа полей современных напряжений в земной коре используется концепция режима напряжений, которая подразумевает ранжирование вертикальных и горизонтальных главных напряжений по отношению к направлению сдвигов вдоль геологических нарушений, что позволяет районировать цунамигенные области земной коры.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Общая методика исследования задач теории плоской упругости с неклассическими граничными условиями, основанная на использовании комплексных потенциалов для получения системы сингулярных интегральных уравнений, общее решение которой строится в виде общего решения однородного характеристического уравнения (путем сведения в краевой задаче Римана) и неоднородного полного уравнения (чье решение находится, в общем случае, численно).

2. Анализ разрешимости краевых задач плоской теории упругости для замкнутой области, сформулированных с использованием следующих граничных условий:
  - главные направления тензора напряжений и кривизна траекторий главных напряжений (либо нормальная производная главных направлений);
  - ориентации векторов усилий и смещений;
  - ориентация вектора смещений и главные направления тензора напряжений.
3. Анализ разрешимости краевых задач плоской теории упругости для составной плоскости со следующими транзитными условиями на контуре, разделяющем плоскость на внутреннюю и внешнюю области, при условии непрерывности вектора напряжений при переходе через контур:
  - различные ориентации векторов усилий и смещений по разные стороны контура;
  - различные ориентации вектора смещений и различные главные направления тензора напряжений по разные стороны контура.
4. Методики реконструкции полей напряжений по заданным дискретным главным направлениям напряжений внутри области, основанные на задаче оптимизации невязки между расчетными и заданными ориентациями главных напряжений и на методе Треффта для комплексных потенциалов теории упругости.
5. Методики реконструкции полей напряжений в составных упругих областях по дискретным главным направлениям напряжений при условии непрерывности вектора напряжений на внутренних границах.
6. Применение разработанных методик для анализа современных напряжений и эволюции палеонапряжений в земной коре, а также для оценки изменений напряженного состояния, вызванного крупными землетрясениями.

7. Методика определения цунамигенных областей на основе разработанного метода реконструкции напряжений и концепции режима напряжений.

### **Достоверность, публикации и апробация работы**

Достоверность результатов данного исследования обусловлена использованием строгих математических методов, построением точных решений для простых областей, а также сравнением отдельных численных решений с контрольными решениями и с фотоупругими экспериментами.

Данная диссертация написана по результатам автора, опубликованных в 1997-2016 годах по проблеме определения напряженного состояния литосферы. Общее число статей по данной тематике – 42 (см. Приложение 1), из них 18 входят в перечень рецензируемых научных журналов ВАК и прошли строгую экспертизу в отечественных и международных журналах с высоким индексом цитирования.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на 30 российских и международных профильных научных конференциях (включая Генеральные Ассамблеи Европейского Союза Геофизиков, в Ницце – 2004 год и в Вене в 2005-2009 годах и на Первом Съезде Азиатско-Океанского Союза Геофизиков в Сингапуре в 2004 году), на семинаре по механике прочности и разрушения материалов и конструкций ИПМех РАН (2011 г.), на ежегодных конференциях, проводимых под эгидой проекта AC<sup>o</sup>ESS (Австралийский симулятор геомеханических процессов в Земле, 2003-2005 гг.), на семинарах в Университете Кардифа (2006 г.) и Университете Брюнел (2007 г.) (оба Великобритания) и Университета Карлсруэ (2007 г., Германия).

# ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗЕМНОЙ КОРЕ

## *1.1. Введение*

Данная глава отражает геомеханическую мотивацию данной диссертации, в ней, в основном, дается обзор экспериментальных методов и вычислительных подходов к изучению напряженного состояния земной коры, обсуждаются основные предположения. Основной гипотезой настоящего исследования является предположение об упругом поведении земной коры. Поскольку круг работ, посвященных моделированию напряжений в Земле, достаточно велик, в обзоре подходов почти не представлены модели, которые не имеют связи с упругостью, т.е. с основной темой диссертации. Однако приведены модели, которые не требуют задания реологии или каких-то соотношений между смещениями и напряжениями. Это сделано из-за того, что такие модели могут включать упругую модель как частный случай (но могут и противоречить ей), например, когда в результате различных методов осреднения напряжения выражаются через гармонические функции. Вопросы, связанные с методами плоской теории упругости, обсуждаются в следующей главе. Дополнительные сведения о результатах других авторов по моделированию напряжений в тех регионах земной коры, которые рассматриваются в виде примеров в диссертации, даны в соответствующих главах. В конце данной главы формулируются основные цели работы и направления исследований.

Изучение напряжений в земной коре проводится как экспериментально, так и с помощью моделирования методами механики деформированного твердого тела. Соответственно, можно выделить два типа данных по напряжениям, а именно, дискретные данные, характерные для экспериментального подхода, и непрерывные поля напряжений, получаемые как результат решения некоторой задачи механики. Оба подхода имеют как преимущества, так и недостатки. Так дискретность, очевидно, является недостатком, поскольку обширные области



земной коры не содержат никаких данных, но с другой стороны инструментальные измерения дают реальные оценки действующих напряжений и допускают их мониторинг. Также недостатком экспериментальных данных является и то, что обычно определяется не весь тензор напряжений, а только некоторые его характеристики. Например, в мировой базе данных [Heidbach, et al., 2008] в основном приводятся ориентации главных напряжений, в то время как процентное содержание полных данных невелико и относится, в основном, к малым глубинам, где возможно провести прямые измерения полного тензора напряжений известными экспериментальными методами. В свою очередь математическое моделирование позволяет получать непрерывные поля напряжений (что безусловно является достоинством), однако, расчеты полей базируются на некоторых гипотезах, налагаемых на граничные условия, и, таким образом, вопрос о достоверности таких расчетов остается открытым. Настоящая работа нацелена на то, чтобы скомбинировать достоинства обоих подходов и устранить их недостатки, особенно важно постараться избегать гипотетические условия, навязываемые в традиционных подходах к моделированию напряжений в земной коре.

## ***1.2. Экспериментальные данные***

Экспериментальные данные по напряжениям получают на основании прямых инструментальных измерений, таких как метод обуривания керна (*overcoring*) или гидроразрыв (см. подробные описания в [Гудман, 1980]), а также из анализа природных индикаторов напряжений, например, очагов механизмов землетрясений, расположений геологических структур, геометрии и кинематики разрушения структур в земной коре, направлений разрушений около скважин и т.д. Надежные данные о напряжениях в земной коре были обобщены и включены в мировую базу данных по напряжениям, WSM [Heidbach, et al., 2008]. Следует отметить, что интерпретация инструментальных измерений в большинстве случаях базируется на предположении об упругом поведении среды.

Опираясь на работы [Гудман, 1980; Amadei, Stephansson, 1997; Zang, Stephansson, 2010] прямые методы измерения можно классифицировать следующим образом.

Полное или частичное восстановление деформаций. Здесь следует отметить различные методы обуривания (overcoring) датчиков, закрепленных на поверхности выработки или на стенках (или забое) скважин. При обуривании происходит разгрузка обуриваемого объема породы, что фиксируется датчиками и далее интерпретируется в рамках теории упругости для пересчета деформаций или смещений в напряжения. Существует многочисленные модификации этого метода. Следует упомянуть их родственность с методами определения остаточных напряжений, например, с методом Матара, предложенным в 1934 году, см работу [Treuting at al., 1952], где этот метод подробно описывается. Он основан на измерении расстояния между реперными точками до и после сверления отверстия. Также к этому типу относятся методы домкрата. Метод плоского домкрата (впервые, по-видимому, упомянут в работе [Tincelin, 1951], состоит в том, что он вставляется в плоскую щель и активируется для того, чтобы восстановить расстояние между реперными точками, измеренное прежде, чем щель выбурена. При этом давление в домкрате ассоциируется с напряжением, нормальным к плоскости щели (домкрата). В методе цилиндрического домкрата, см, например, [Dean, Beatty, 1968], измерения изменений расстояний между реперными точками проводят, как и в методе Матара, в радиальных направлениях от отверстия, пробуренного в породе при разных давлениях в домкрате. Это также позволяет одновременно определить и модуль объемной деформации при использовании упругого решения Кирша [Kirsch, 1898]. Если проводить измерения в произвольных направлениях, то как показано в работах автора, кроме напряжений и модуля Юнга для изотропной среды, можно также определить коэффициент Пуассона [Galybin at al., 1997] и ортотропные модули [Galybin at al., 1998]. С другими методами этого класса можно ознакомиться в обзорной работе [Sjoberg at al., 2003].

Методы образования трещин гидроразрыва. Наиболее известный и широко используемый метод этого класса – это метод гидроразрыва. Он был предложен и применен впервые для определения напряжений в работах [Fairhurst, 1964; Haimson, Fairhurst, 1967]. Его суть состоит в изолировании некоторого участка буровой скважины герметичными паркерами и нагнетании в этот участок жидкости под давлением. В результате около скважины возникают окружные растягивающие напряжения. При превышении некоторого критического давления происходит разрушение стенки скважины, из-за образования радиальных трещин в стенке скважины, после чего давление резко падает. При повторном нагружении давление раскрытия трещины несколько ниже, чем при ее появлении, что объясняется тем, что во второй и последующие разы не надо преодолевать прочность породы на растяжение. По величине этого давления и с учетом коэффициента концентрации напряжений у стенки скважины (полученного методами теории упругости) легко определить минимальное сжимающее напряжение, действующее в массиве горных пород. Также возможно определить и направление главных напряжений в плоскости перпендикулярной оси скважины, например, по отпечатку следа трещины. В случае вертикальной скважины вертикальная трещина развивается при некотором давлении, которое ассоциируется с минимальным горизонтальным напряжением сжатия. Однако, если трещина возникла горизонтально, то давление трещинообразования дает оценку вертикального напряжения суммарно с прочностью на растяжение (независимо от реологии породы). В работе [Гудман, 1980] приводятся максимальные глубины, при которых возможно развитие горизонтальной трещины. Модификации метода гидроразрыва включают гидроразрыв по существующим трещинам, метод НТРФ, предложенный в [Cornet, Valette, 1984] и метод "sleeve fracturing", предложенный в работе [Stephansson, 1983]. Последний на самом деле не является гидроразрывом, т.к. вместо закачки жидкости, образование трещин достигается закачкой газа в прочный резиновый баллон, вставленный в скважину. Поскольку нет никаких утечек жидкости, как в традиционном методе гидроразрыва, то главные напряжения около скважины

могут быть определены с лучшей точностью. При этом, как и при интерпретации гидроразрыва, используется упругое решение Кирша. Недостаток метода в том, что трещины не развиваются далеко от скважины, т.е. объем породы, вовлеченный в эксперимент, небольшой (как и в случае с методами обуривания). Метод НТРФ предполагает несколько тестов по раскрытию различно ориентированных естественных трещин (расположенных в герметичной зоне между паркерами), что позволяет определить полный тензор напряжений.

Физические методы. Существует ряд непрямых методов, основанных на измерениях различных физических свойств при приложении нагрузки. К таким относятся, например, акустическая эмиссия (Кайзер эффект), рентгеноскопия кристаллографической решетки, измерения скоростей упругих колебаний, оптические методы (типа фотоупругости), микромагнитные методы, дифракция и прочие, см подробнее в работах [Amadei, Stephansson, 1997; Ljunggren at al., 2003; Zang, Stephansson, 2010].

Упомянутые выше методы позволяют определить величины напряжений (или некоторые компоненты тензора напряжений), которые могут быть отнесены к относительно небольшим объемам горных пород, вовлекаемых в эксперимент. По классификациям, приведенным в работах [Ljunggren at al., 2003; Zang, Stephansson, 2010], характерные объемы пород, к которым могут быть отнесены инструментальные измерения невелики. Так различные физические методы характерны для объемов порядка  $10^{-6}$ - $10^{-3}$  м<sup>3</sup>, методы разгрузки измеряют напряжения для объемов порядка  $10^{-3}$ - $10^{-2}$  м<sup>3</sup>, методы домкрата порядка 1 м<sup>3</sup>, методы гидроразрыва до порядка  $10^2$  м<sup>3</sup>. Для объемов, которые могут характеризовать напряжения для значительно больших объемов, сопоставимых с объемами выработок, месторождений или отдельных регионов земной коры, требуются данные большего масштаба. Такими являются данные по обратному анализу, включая определение механизмов землетрясений, подвижки по геологическим нарушениям, методы обратного анализа смещений около подземных выработок, например, *under-excavation technique* [Wiles, Kaiser, 1994], разгрузка больших объемов пород (*relief of large rock volumes, RLRV*) [Sakurai,

Shimizu, 1986], данные по наведенной сейсмичности, данные по размерам и расположениям геологических структур (например, цепи вулканов) и т.д. Все эти методы не позволяют однозначно определить величины напряжений, но сообщают информацию об ориентации главных напряжений, характерную для структур большого масштаба. При этом точность определения ориентаций осей главных напряжений невелика [McKenzie, 1969]. Сюда же следует условно отнести и данные по вывалам стенок скважин (borehole breakouts), хотя характерный объем породы, которые эти вывалы характеризуют, варьируется в широком диапазоне  $10^{-2}$ - $10^2$  м<sup>3</sup> [Ljunggren at al., 2003]. Условно, поскольку в литературе есть попытки определить величины напряжений, что в принципе достижимо, но требует знание величин прочности по критерию прочности Кулона-Мора, поскольку интерпретация вывалов и базируется на этом критерии. Считается, что вывалы происходят в направлении, перпендикулярном наибольшему сжатию, поскольку на стенке скважины наибольшие сжимающие напряжения развиваются в области, где диаметр перпендикулярен оси наибольшего сжатия, соответственно максимальные сдвиговые напряжения там также максимальны, что и может вызвать сдвиговое разрушение. Теория borehole breakouts достаточно полно представлена в книге [Zang, Stephansson, 2010].

Если проводить единичные исследования напряжений в разных местах подземных выработок, и затем сопоставлять их с расчетами напряжений по теоретическим упругим моделям, то в этом случае выработка выполняет роль измерительного инструмента большого масштаба [Brady at al., 1986]. Дальнейшее развитие этой идеи получило название «under-excavation technique», она основана на мониторинге смещений поверхности выработки в результате ведения горных работ или продвижения забоя выработки и может быть дополнена единичными измерениями напряжений. Такой подход был предложен рядом авторов, например, [Wiles, Kaiser, 1994], однако не нашел широкого практического применения.

Все данные указанных выше типов собраны в мировой базе данных по напряжениям, WSM (The World Stress Map Project), [Heidbach, at al., 2008],

которая в настоящий момент, содержит 21750 данных по всей Земле. В основном эти данные указывают азимут максимальных горизонтальных сжимающих напряжений. Структура данных приведена в Таблице 1.1.

Таблица 1.1. Распределение данных по индикаторам в базе данных WSM.

Тип индикатора напряжений	Число данных
Механизмы землетрясений	15689
Вывалы	4125
Гидроразрыв	349
Обуривание	611
Подвижки по геологическим нарушениям	434
Прочие	542

Экспериментальные данные в базе WSM были ранжированы по качеству от А до Е, для чего используются различные критерии для различных методов. Качество А является наилучшим, соответственно Е наихудшим. При этом принимается, что ориентации наибольшего главного горизонтального сжимающего напряжения определяется для данных класса А с точностью  $\pm 15^\circ$ , В с точностью  $\pm 20^\circ$ , С с точностью  $\pm 25^\circ$ , и D с точностью  $\pm 40^\circ$ , качество Е для данных, которые не надежны или имеют разброс более  $40^\circ$ . Поскольку азимут определяется в диапазоне  $\pm 90^\circ$ , то даже данные наилучшего качества имеют относительную ошибку до 17%, что показывает, что данные имеют значительный разброс, и, соответственно, при моделировании требуется использовать большую избыточность входных данных.

Данные качества А-С считаются более или менее надежными и могут быть рекомендованы для использования при моделировании. Таблица 1.2 показывает распределение данных по качеству, из которой очевидно, что около 17 тыс данных может быть использовано в качестве входных данных.

Таблица 1.2. Распределение данных WSM по качеству

Качество данных	А	В	С	Д	Е
Число данных (процент)	1443 (7 %)	1242 (6 %)	14,284 (66 %)	3199 (15 %)	1367 (6 %)

Данные WSM доступны для свободного использования и могут быть получены с вебсайта проекта как в чистом виде (таблица в которой каждая строка

показывает широту, долготу, азимут, глубину, дату и другую информацию), так и в виде карт. Глобальная карта напряжений представлена на Рисунке 1.1 для иллюстрации, где приведены данные качества А-С. Каждое данное показывает каким методом оно было получено, качество и режим напряженного состояния - нормальный сдвиг (надвиг), обратный сдвиг (сброс), горизонтальный сдвиг в плоскости.

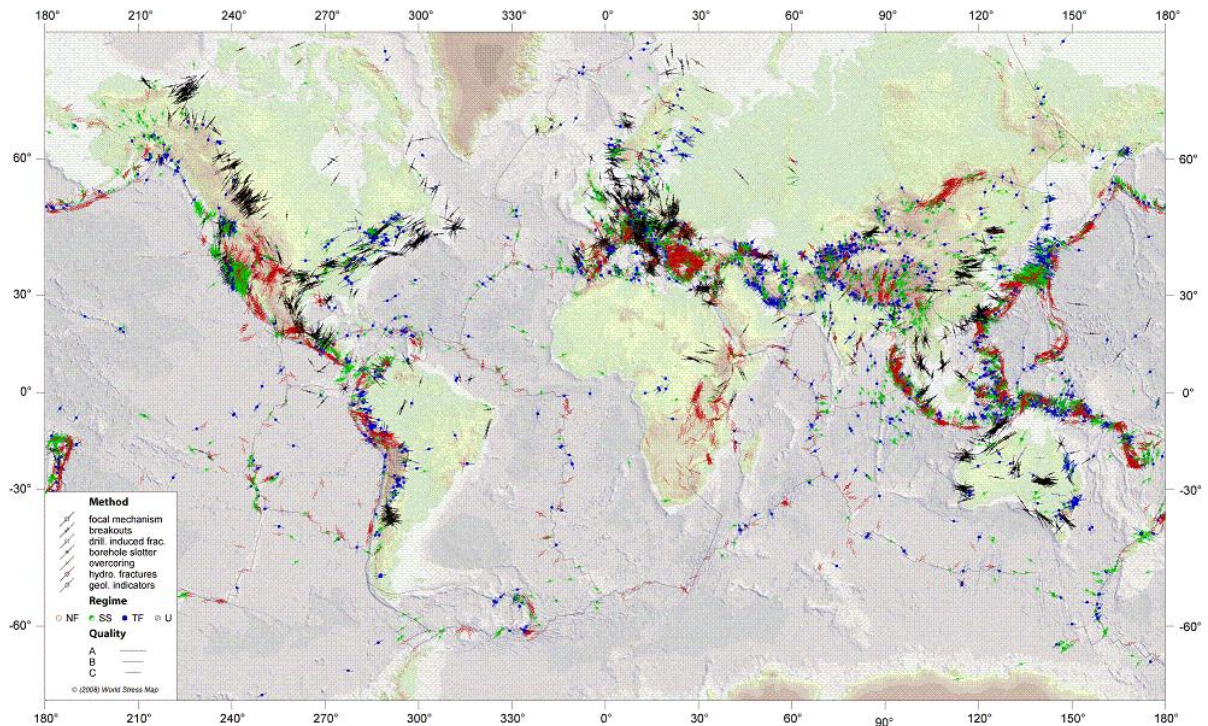


Рисунок 1.1. Глобальная карта напряжений из WSM проекта, в легенде указано каким методом проведено конкретное измерение, его качество и режим напряженного состояния (разными цветами)

Из Рисунка 1.1 видно, что часто данные приурочены к границам тектонических плит (показаны серым цветом), а также можно видеть, что есть регионы плотно заполненные данными (например, Европа, Америка, Австралия, Япония), а также регионы, где данных мало. Среди последних Россия, где большинство данных находится около Байкала, и даже в европейской части страны нет надежных данных.

Следует отметить, что помимо открытых баз данных существуют и коммерческие базы, которые содержат данные по напряжениям, собранные различными институтами или компаниями, например, база, принадлежащая

компании Rock Technology Pty Ltd (Австралия) содержит не менее 10000 данных по напряжениям на австралийском континенте, не включенных в базу WSM. База данных ИФЗ по трещинам содержит около миллиона единичных измерений, данные из этой базы будут использованы дальше, наряду с данными из WSM.

### ***1.3. Модели напряженного состояния земной коры***

Указанные в предыдущем параграфе методы дают дискретные данные по напряжениям, и, как уже отмечалось, часто это только данные по ориентациям осей главных напряжений. Для непрерывных полей напряжений, разработаны различные модели, которые позволяют оценить величины напряжений, опираясь на некоторые гипотезы, либо используются различные аппроксимации дискретных данных.

Ранние модели напряженного состояния земной коры принимали во внимания только вес вышележащих пород. Считается, что вертикальное напряжение ( $\sigma_v$ ) начиная с некоторой глубины может быть хорошо оценено как произведение удельного веса на глубину,  $\sigma_v = \rho g z$ , где  $\rho$  – плотность,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $z$  – глубина, что следует из уравнений равновесий для твердого тела. При этом считалось, что горизонтальные напряжения ( $\sigma_H$  – максимальное сжатие и  $\sigma_h$  – минимальное сжатие) выражаются через вертикальное. Так правило Гейма (Heim's rule, 1878, цитировано по [Zang, Stephansson, 2010]) подразумевает, что с ростом глубины все 3 главных напряжения выравниваются, т.е. напряженное состояние переходит в гидростатику. Гипотеза Динника [1926] утверждает, что горизонтальные напряжения равны и составляют  $\sigma_H = \sigma_h = \sigma_v \nu / (1 - \nu)$  (где  $\nu$  – коэффициент Пуассона для упругой среды), что следует из закона Гука если считать горизонтальные деформации нулевыми (на Западе эту модель обычно ассоциируют с работой [Terzaghi, Richart, 1952]). Заметим, что, если  $\nu = 0.5$ , то гипотеза Динника переходит в правило Гейма, а при  $\nu = 0$  горизонтальные напряжения отсутствуют. В других случаях  $|\sigma_H| = |\sigma_h| < |\sigma_v|$ , т.е. вертикальное напряжение всегда доминирует. Это, однако, противоречит наблюдениям и



прямым измерениям в ряде регионов земной коры, например, на Кольском полуострове см работы [Турчанинов и др., 1978; Козырев, Савченко, 2009], в Скандинавии (например, [Hast, 1969]), в Австралии и других, [Brown, Ноек, 1978; Brady, Brown, 2004; Zoback, 2010; Denham, Windsor, 1991].

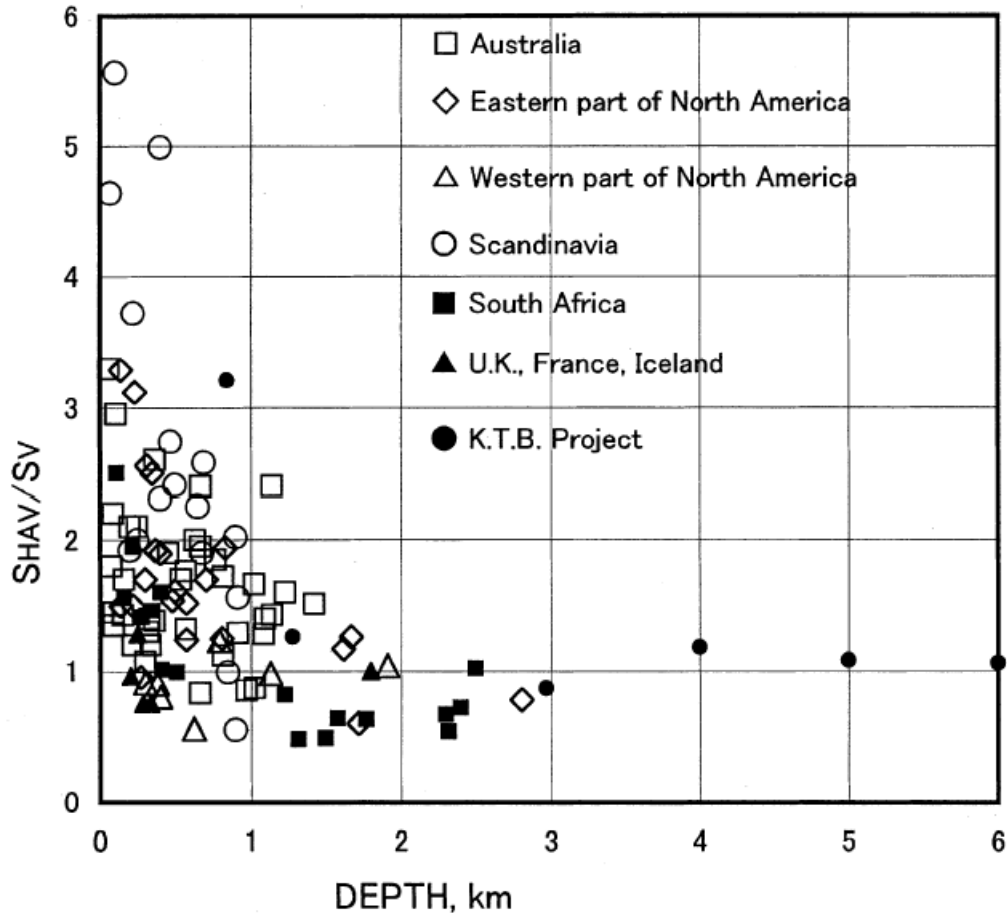


Рисунок 1.2. Отношение средних горизонтальных напряжений к вертикальным, взято из статьи [Sano et al., 2005] (здесь КТВ – это данные, полученные из сверхглубокой скважины в Германии).

На Рисунке 1.2 показано отношение средних горизонтальных напряжений к вертикальным в зависимости от глубины, из которого видно насколько горизонтальные напряжения могут превосходить вертикальные особенно в неглубоких замерах. Данные, приведенные на Рисунке 1.2 были модифицированы из работы [Brown, Ноек, 1978], в которой были проанализированы данные, определенные в различных регионах Земли, и получены зависимости для двух крайних отношений коэффициента бокового отпора  $K$ , который характеризует

отношение горизонтальных и вертикальных напряжений. Эти зависимости имеют вид

$$0.3 + \frac{100}{z} < K = \frac{\sigma_h + \sigma_H}{2\sigma_v} < 0.5 + \frac{1500}{z}, \quad 0 < z < 3000, \quad (1.1)$$

где  $z$  - глубина в метрах. Если считать, что градиент среднего удельного веса  $1/40$  МПа/м, то около половины измерений горизонтальных напряжений превышают  $0,025z$  МПа.

Анализ [Brown, Ноек, 1978] показал несостоятельность гипотезы Динника, но простейшая теория Гейма не противоречит наблюдениям на глубинах от 3 до 6 км в КТВ скважине в Германии. С дальнейшим ростом глубины прямых измерений величин нет, как, впрочем, и прямых измерений ориентаций, кроме анализа borehole breakout с глубины 11.6 км, проведенных на Кольской сверхглубокой скважине [Zoback at al., 1986]. Однако большой разброс в коэффициенте  $K$  в формуле (1.1) указывает на то, что прямой связи между горизонтальным и вертикальным напряжением скорее всего не существует. Из чего следует, что все три главных напряжения следует рассматривать в качестве независимых величин. Несмотря на это до сих пор есть попытки развить идеи, предложенные Андерсоном [Anderson, 1951], т.е. использовать критерии прочности типа Кулона-Мора для того, чтобы определить диапазоны изменений горизонтальных напряжений, которые обеспечивают целостность коры. Тем не менее легко убедиться, что подобающим выбором прочностных параметров, сцепления и угла трения, можно опять добиться того, чтобы главные напряжения изменялись в широком диапазоне.

Если учитывать влияния поровой жидкости, то можно условно разделить средние напряжения в твердом скелете ( $p$ ) и поровое давление ( $p_{pore}$ ), как предложено в теории Био [Biot, 1941], т.е. путем введения эффективного напряжения  $p_{effect}$  в виде разницы

$$p_{effect} = p - \alpha p_{pore}, \quad (1.2)$$

где  $\alpha$  - коэффициент Био, который меняется в диапазоне от 0 до 1. Эта поправка может быть существенной при использовании прочностных критериев, которые налагают ограничения на диапазоны изменений главных напряжений. Однако она не отвергает указанное выше утверждение о том, что главные напряжения являются независимыми.

Соотношения между главными напряжениями позволяют объяснить образование таких геологических структур как сдвиги, сбросы или надвиги и различных их комбинаций [Anderson, 1951; Engelder, 1993]. Следуя классификации Zoback [1992] можно выделить три основных режима, показанных на Рисунке 1.3, и два смешанных. Для описания режимов напряжений удобно ввести главные напряжения обозначив их  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , временно пользуясь соглашением, принятом в геомеханике, когда сжатие принимается положительным, и считать далее, что всегда выполняется неравенства  $0 < S_3 < S_2 < S_1$ . Идея классификации режимов напряжений базируется на критерии Треска, который утверждает, что сдвиг в материале происходит на площадке, на которой максимальны касательные напряжения, см., например, [Работнов, 1963] (неявно предполагается отсутствие поверхностей ослаблений). Напряжения сдвига определяются как максимальная полуразность главных напряжений, в нашем случае  $(S_1 - S_3)/2$ . Режим сброса (NF - Normal faulting) реализуется, когда вертикальное напряжение является наибольшим сжимающим напряжением, тогда  $S_1 = -\sigma_v$ ,  $S_3 = -\sigma_h$ , и сдвиг наиболее вероятен в плоскости действия напряжений  $S_1$  и  $S_3$ , поскольку их разность максимальна. В случае сдвига в плоскости (режим SS – Strike-slip faulting) наибольшее сжимающее напряжение – это  $S_1 = -\sigma_H$ , а вертикальное сжатие больше, чем минимальное горизонтальное сжатие, т.е.  $S_2 = -\sigma_v$ ,  $S_1 > S_3 = -\sigma_h$ . В этом случае максимальна разность главных горизонтальных напряжений и, соответственно, сдвиг наиболее вероятен в горизонтальной плоскости. В режиме надвига (TF - Thrust faulting or reverse faulting) вертикальное напряжение является минимальным сжатием  $S_3 = -\sigma_v$ ,  $S_1 = -\sigma_H$  и, также, как и в режиме NF, сдвиг происходит в плоскости действия  $S_1$  и  $S_3$ , но в обратном

направлении. Zoback [1992] предложила выделить еще два режима, которые являются комбинациями сброса и сдвига, т.е. NF -SS надвига и сдвига TF –SS.

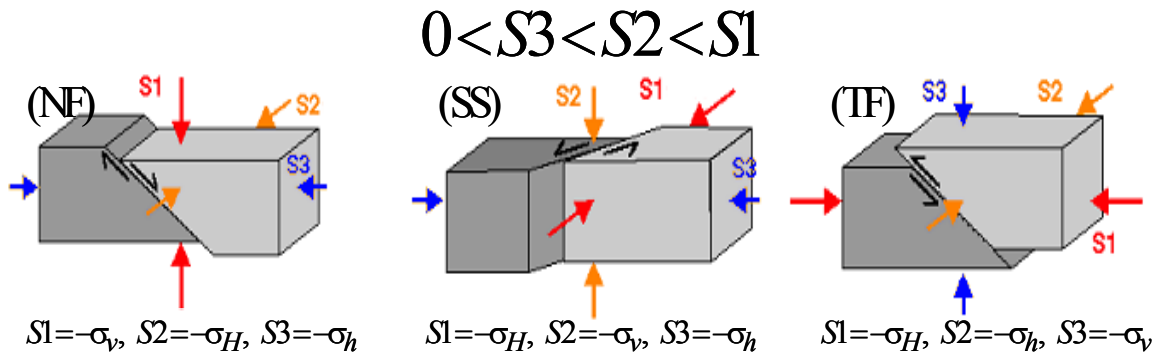


Рисунок 1.3. Режимы напряжений и геологические структуры. Здесь использованы обозначения NF - сброс, SS – сдвиг (в горизонтальной плоскости), TF – надвиг.

Исследуя данные по измерениям, McGarr [1980] сделал вывод, что максимальные касательные напряжения  $T_{max} = (S1 - S3)/2$  возрастают линейно до пятикилометровой глубины с градиентом 3.9 МПа/км для осадочных пород и 6.4 МПа/км для кристаллических, экстраполяция на глубину 15 км дает значение  $T_{max} = 100$  МПа, что сравнимо с прочностью гранитов. Гипотеза Динника дает градиент 7.7-10.1 МПа/км для реалистичных значений коэффициента Пуассона 0.2-0.3, что повышает наибольшую величину максимальных касательных напряжений до полутора раз. Прочность на сдвиг вдоль геологических нарушений значительно меньше, чем значения  $T_{max}$  указанные выше, поэтому предположения о линейной зависимости максимальных касательных напряжений от глубины представляются маловероятными.

В ряде исследований предлагается введение коэффициента бокового распора, зависящего от глубины. Например, Rummel et al. [1986] предлагают следующие зависимости

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_v} = \frac{0.27}{z} + 0.98, \quad \frac{\sigma_h}{\sigma_v} = \frac{0.15}{z} + 0.65, \quad (1.3)$$

где  $z$  - глубина в километрах. Savage et al. [1992] предлагает следующие поправки к решению Динника

$$\sigma_H = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_v + \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_H + \nu\varepsilon_h), \quad \sigma_h = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_v + \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_h + \nu\varepsilon_H), \quad (1.4)$$

где  $\varepsilon_H$ ,  $\varepsilon_h$  - некие небольшие тектонические деформации, смысл которых не уточняется. Amadei et al. [1987] предложили модель для трансверсально анизотропных пород, в которой горизонтальные напряжения варьируются от 0.133 до 0.933 от вертикальных, что дает максимальное отношение вертикальных к горизонтальным до 7.5 раз. Подход [Sen, Sadagah, 2002] предлагает считать коэффициент бокового отпора случайно распределенной величиной. McGarr [1988], критикуя подход Динника, предложил, опираясь на работу Артюшкова [Artyushkov, 1973], считать горизонтальные напряжения постоянными по глубине. При этом очевидно, что режим надвига TF должен доминировать при малых глубинах, а с увеличением глубины переходить последовательно в режимы SS и NF, чего не наблюдается в действительности, например, Zoback [2002] отмечает, что во внутренних регионах плит в основном реализуются режимы TF и SS, в которых горизонтальные напряжения максимальны. Тем не менее гипотеза Макгарра [McGarr, 1988] может быть обобщена, если ввести средние постоянные горизонтальные напряжения по всей толщине коры. Такое предположение имеет смысл, если рассматриваются, так называемые, тектонические напряжения первого порядка, см [Zoback, 1992] или [Heidbach et al., 2007], где вводится шкала напряжений по отношению к размерам в следующем виде - первый порядок характеризует напряжения на уровне размеров тектонической плиты, второй на уровне рельефа (линейная шкала порядка 100-500 км) и третий характеризует среду на масштабе геологических нарушений.

Engelder [1993] предлагает рассматривать гипотезы Гейма, Динника и Макгарра в качестве трех возможных напряженных состояний, от которых следует отсчитывать реальные напряжения в земной коре. В этом случае компоненты полного тензора напряжений могут быть представлены в виде суперпозиции двух

напряженных состояний, одно из которых отсчетное, а второе отклонение от него. Это может оказаться удобным при изучении возмущений напряжений около геологических нарушений, влияния ландшафта, выработок и в других случаях.

Анализ вышеупомянутых источников позволяет утверждать, что величины вертикальных напряжений на глубинах, где влияние локального рельефа не существенно, определяются весом вышележащих пород, в то время как горизонтальные напряжения могут варьироваться в широком диапазоне, и быть как больше, так и меньше вертикальных. С ростом глубины разница в главных сжимающих напряжениях должна уменьшаться для того, чтобы обеспечивать целостность земной коры. Следует также отметить, что во многих случаях напряжения в коре рассматриваются в рамках линейной теории упругости, хотя принципиально для поля напряжений не требуется того, чтобы оно удовлетворяло всем уравнениям упругости, а необходимо лишь удовлетворение уравнениям равновесия. Этот факт оставляет значительный произвол в определении полного тензора напряжений, поскольку на шесть независимых компонент тензора напряжений налагается три дифференциальных уравнения равновесия первого порядка. Даже принимая предположение, что одно из главных напряжений может быть ориентировано вертикально, нет возможности полностью избавиться от предположения о реологии среды. Введение соотношений вида предельного состояния коры, например, по критериям Треска, Кулона-Мора, Друкера-Прагера или их модификациям, безусловно позволяет замкнуть систему уравнений равновесия. Однако при таком подходе сложно объяснить смену режимов напряжений и наличие особых точек в траекториях главных напряжений, т.е. точек, где главные напряжения равны. Далее в этой и следующей главах мы подробно рассмотрим ограничения, которые налагает предположения о упругом поведении пород земной коры. Но вначале приведем подходы, которые не требуют знания ни реологии, ни выполнения уравнений равновесия, а основаны на интерполяции.

#### **1.4. Статистические и интерполяционные методы**

Часто для преобразования дискретных (экспериментальных) данных в непрерывные применяются статистические и интерполяционные методы, например, [Hansen, Mount, 1990; Lee, Angelier, 1994; Heidbach et al., 2010].

Статистический алгоритм, предложенный в [Hansen, Mount, 1990], позволяет построить поля траекторий плоских напряжений по дискретным данным по ориентациям напряжений в некоторой плоской области. Под траекторией напряжений понимается плоская кривая, касательная к которой в любой точке указывает направления одного из главных напряжений, [Фрохт, 1948]. Алгоритм использует два основных параметра, контролирующих гладкость ( $\lambda$ ) и точность ( $F$ ) интерполяции, а также различные весовые функции. Влияние этих параметров показано на Рисунке 1.4, интерполяция на левой картинке выполнена с лучшей точностью, поскольку отклонения восстановленных траекторий от данных (показаны отрезками) значительно меньше чем на картинке справа, где траектории практически прямолинейные, т.е. более гладкие, чем справа. При применении этого алгоритма для обработки реальных наблюдений авторы рекомендуют вначале провести два расчета, в которых нужно выбрать  $\lambda=1$  и положить  $F=0.1$  и  $F=0.5$  для получения двух контрастных картин, а затем подбором получить визуально приемлемую картину траекторий напряжений. При этом рекомендуется использовать локальные веса для получения более гладких траекторий при большом разбросе данных.

Примеры реконструкции траекторий напряжений по указанному выше алгоритму показаны на Рисунке 1.5 для района разлома Сан-Андреас, [Hansen, Mount, 1990]. Все реконструированные траектории на Рисунках 1.5 (б-г) пересекают разлом под углами, близкими к прямому, что указывает на низкий уровень касательного напряжения вдоль разлома. На Рисунке 1.5 (в) траектории близки к однородным из-за того, что  $\lambda=0$ , при повышении этого параметра точность интерполяции улучшается.

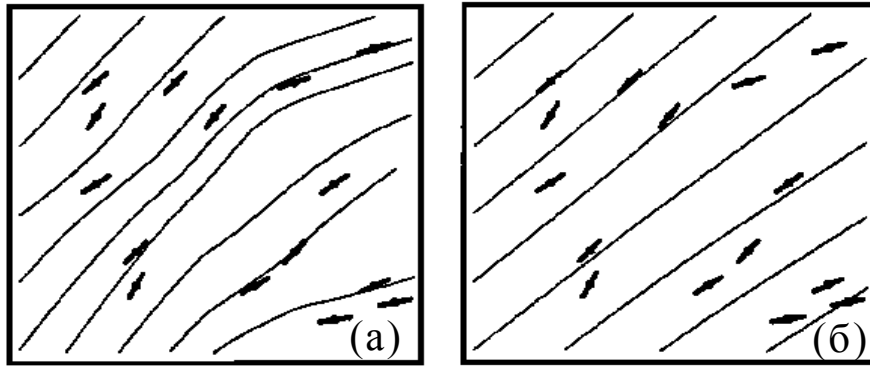


Рисунок 1.4. Контроль точности и гладкости аппроксимации, (а) – лучшая точность ( $\lambda = 0.1$  и  $F=0.2$ ), (б) – более гладкая аппроксимация ( $\lambda = 10.0$  и  $F=0.5$ ), по работе [Hansen, Mount, 1990].

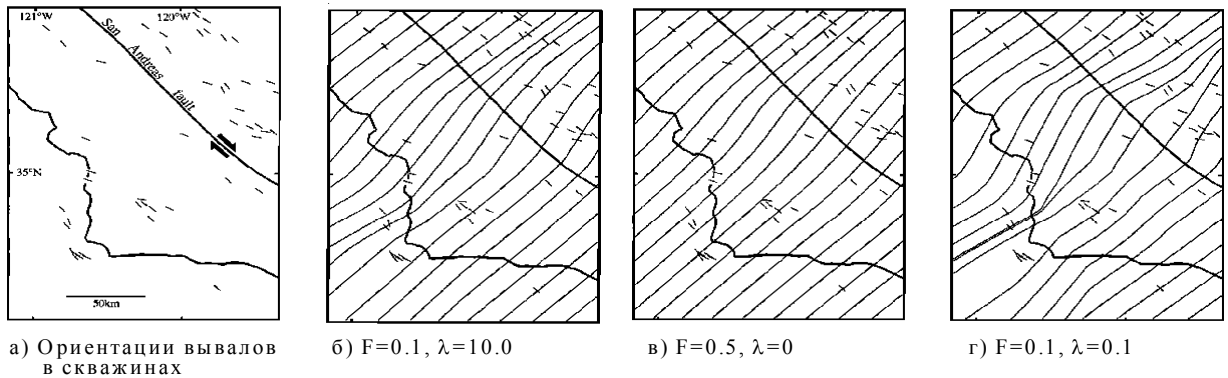


Рисунок 1.5 Данные около разлома Сан-Андреас (а) и реконструированные траектории напряжений (б)-(г) для разных параметров точности и гладкости, по работе [Hansen, Mount, 1990].

В работе [Heidbach et al., 2010] предложен другой алгоритм, сущность которого заключается в осреднении ориентаций внутри круга некоторого радиуса. При этом центр круга перемещается по заданной сетке, а радиус может изменяться, если число данных в круге меньше пяти. Осреднение учитывает расстояние от каждой точки данного до центра круга и от качества данного -  $A$ ,  $B$  или  $C$ . В результате могут быть получены карты ориентаций напряжений, распределенной по регулярной сетке. Пример такой карты показан на Рисунке 1.6 для Европы. Следует отметить, что в этом алгоритме невозможно экстраполировать результаты на области, где нет достаточного количества измерений (даже в Европе, где плотность данных выше, чем где-либо), как видно из Рисунка 1.6, где большая территория России не покрыта измерениями. На



рисунке видно, что есть области где ориентации достаточно однородны, например, большая часть Западной Европы, но в горных регионах смена ориентаций достаточно резкая. Радиус осреднения изменялся от 100 до 1000 км, поэтому разрешение в центральной и южной частях континента, где есть много наблюдений, много лучше, чем на периферии, где данных мало и, соответственно, там алгоритм производит более гладкие траектории.

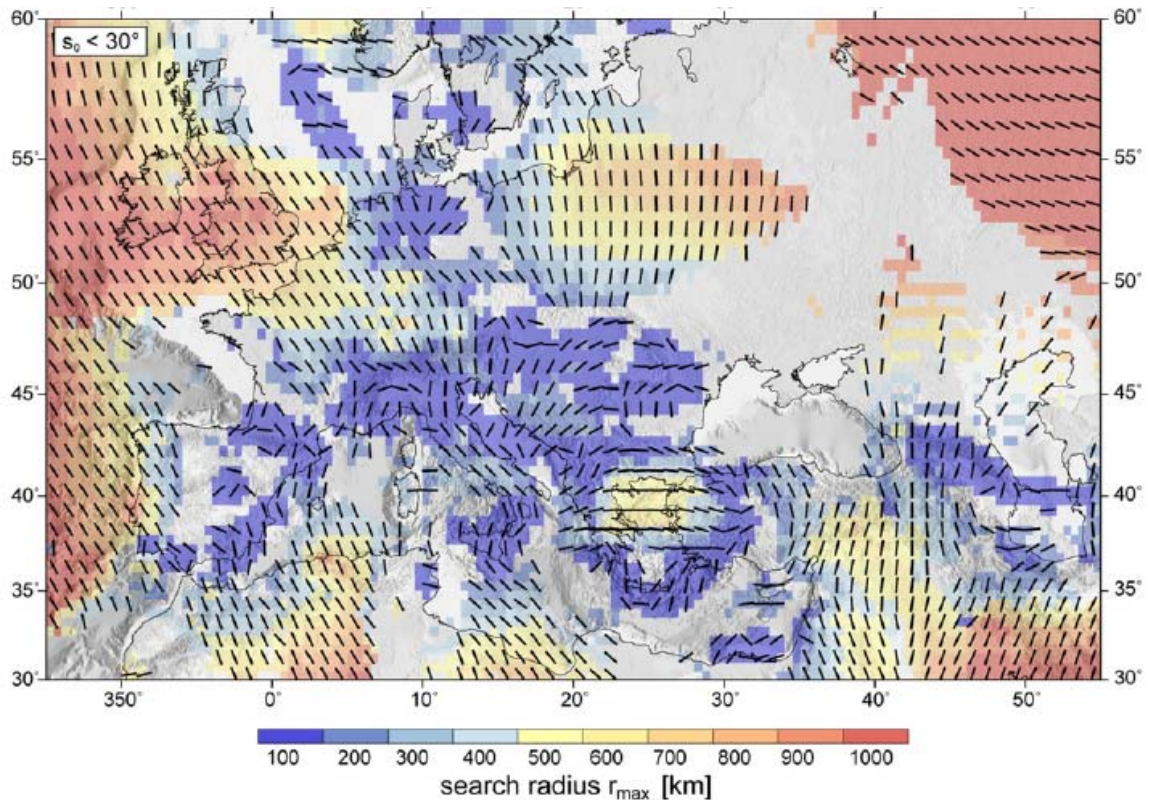


Рисунок 1.6. Пример осреднения ориентаций главных напряжений в Европе [Heidbach et al., 2010], величина радиуса осреднения (показан в легенде ниже карты) изменяется от 100 до 1000 км, стандартное отклонение ориентаций от среднего до  $20^\circ$ .

В работах [Hillis, Reynolds, 2000; 2003] построена карта траекторий напряжений в Австралии, которая показана на Рисунке 1.7. При этом утверждается, что для построения траекторий применялся алгоритм, разработанный в [Hansen, Mount, 1990], что очевидно, является неточностью, т.к. этот алгоритм не способен определить особую точку в поле траекторий, которая находится в квадрате на Рисунке 1.7. Действительно, алгоритм [Hansen, Mount, 1990] позволяет построить только гладкие траектории, соответственно, для

определения особой точки, где направления не существует, требуется знать ее координаты, чтобы (в данном случае) разбить область на 3 подобласти в которых траектории непрерывны, что вероятно и было сделано, после того как авторы ознакомились с отчетом [Mukhamediev at al., 1999], в котором впервые было объявлено о существовании особой точки в Австралии (позднее этот отчет стал основой статьи [Mukhamediev at al., 2006]). Это также подтверждается и тем, что в ранних работах Хиллиса и соавторов, например, в [Hillis at al., 1998] и в ряде других с тем же названием “The Australian Stress Map” упоминаний об особой точке не обнаруживается. Более того, авторы недооценили важность существования особой точки, в частности, то обстоятельство, что особые точки невозможны в поле траекторий, рассчитанных с использованием моделей предельного равновесия, как, например, в теории сыпучей среды, [Соколовский, 1960], но могут непосредственно наблюдаться для упругих сред в экспериментах по фотоупругости, например, [Фрохт, 1948; Александров, Ахметзянов, 1973].

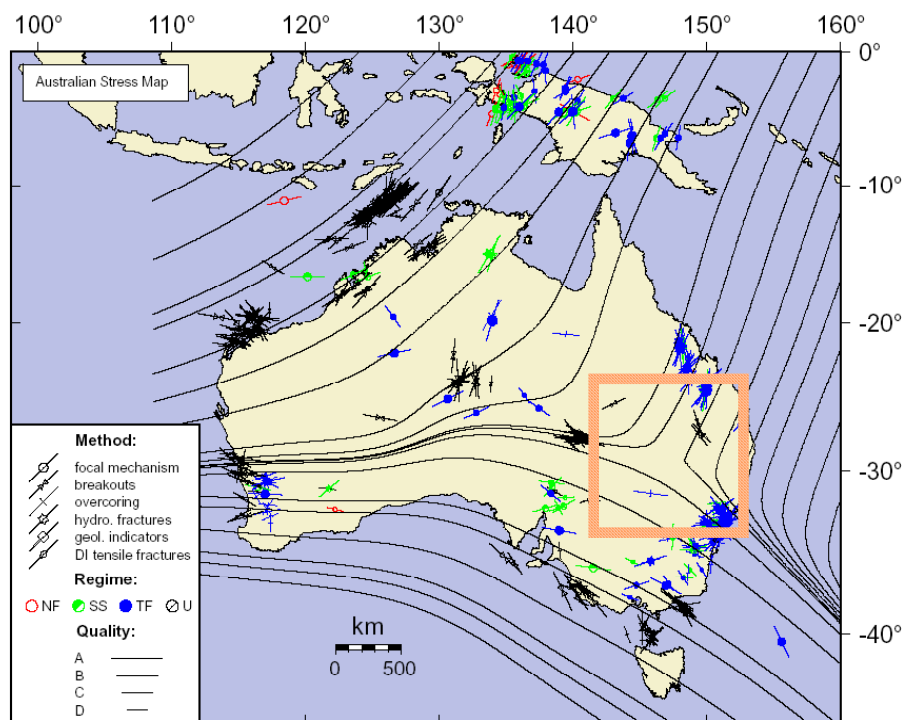


Рисунок 1.7. Карта ориентаций напряжений на австралийском континенте и полей траекторий главных напряжений из работы [Hillis, Reynolds, 2003]. Необходимо отметить наличие особой точки в поле траекторий (находится в квадрате с центром около 30° ЮШ и 150° ВД).

### 1.5. Определение напряжений по траекториям

Некоторые авторы, например, [Hillis, Reynolds, 2003], считают, что поле траекторий не несет никакой информации о величинах напряжений, хотя из уравнений равновесия в форме Ламе-Максвелла следует, что большая плотность траекторий в одном из ортогональных направлений соответствует менее высокому градиенту главных напряжений в этом направлении.

В трехмерном случае уравнения Ламе-Максвелла могут быть записаны в виде [Папкович, 1939]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_{23}} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\rho_{32}} + F_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\rho_{31}} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\rho_{13}} + F_2 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial s_3} + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\rho_{12}} + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\rho_{21}} + F_3 &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $\sigma_k$  – главные напряжения ( $k=1,2,3$ ),  $s_k$  – длина дуги вдоль  $k^{\text{ой}}$  траектории,  $\rho_{kj}$  – радиус кривизны траектории  $k$ -ого главного напряжения в плоскости, ортогональной  $j$ -ому главному напряжению,  $F_k$  – проекция объемной силы на направление  $k$ -ого главного напряжения.

Если считать, что одно из главных напряжений, пусть  $\sigma_3$ , всегда направлено вертикально, получаем  $\rho_{31}=\rho_{32}=\rho_{33}=\infty$ . С учетом  $F_1=F_2=0$ ,  $F_3=-\gamma$ , главные горизонтальные напряжения удовлетворяют двум дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial \theta}{\partial s_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\partial \theta}{\partial s_1} = 0, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2, \quad (1.6)$$

где  $\theta$  – главное направления, которое определяется как угол между направлением одного из главных напряжений и осью  $Ox$ . Исключая разницу главных напряжений из (1.6), можно записать соотношение

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} \frac{\partial \theta}{\partial s_1} = \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} \frac{\partial \theta}{\partial s_2}, \quad (1.7)$$

которое и указывает на то, что если  $\frac{\partial \theta}{\partial s_1} \leq \frac{\partial \theta}{\partial s_2}$ , то  $\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} \geq \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2}$ , т.е. плотность траекторий непосредственно связана с градиентом главных напряжений.

Из уравнений (1.6) также следует, что для однородного поля траекторий ( $\theta = \text{const}$ ) главные напряжения есть функция только одной координаты, т.е.  $\sigma_1 = \sigma_1(s_2)$ ,  $\sigma_2 = \sigma_2(s_1)$ . Это обстоятельство позволило Мухамедиеву [Mukhamediev, 2002] построить поле напряжений в Западной Европе, не опираясь на какие-либо реологические соотношения, а используя условия однородности полей траекторий и задав начальные условия на напряжения на части контура (контур  $AOD'C$  на Рисунке 1.8а), вмещающего расчетную область (прямоугольник  $BDD'B'$ ). Результат расчетов для одного из типов граничных условий представлен на Рисунке 1.8б.

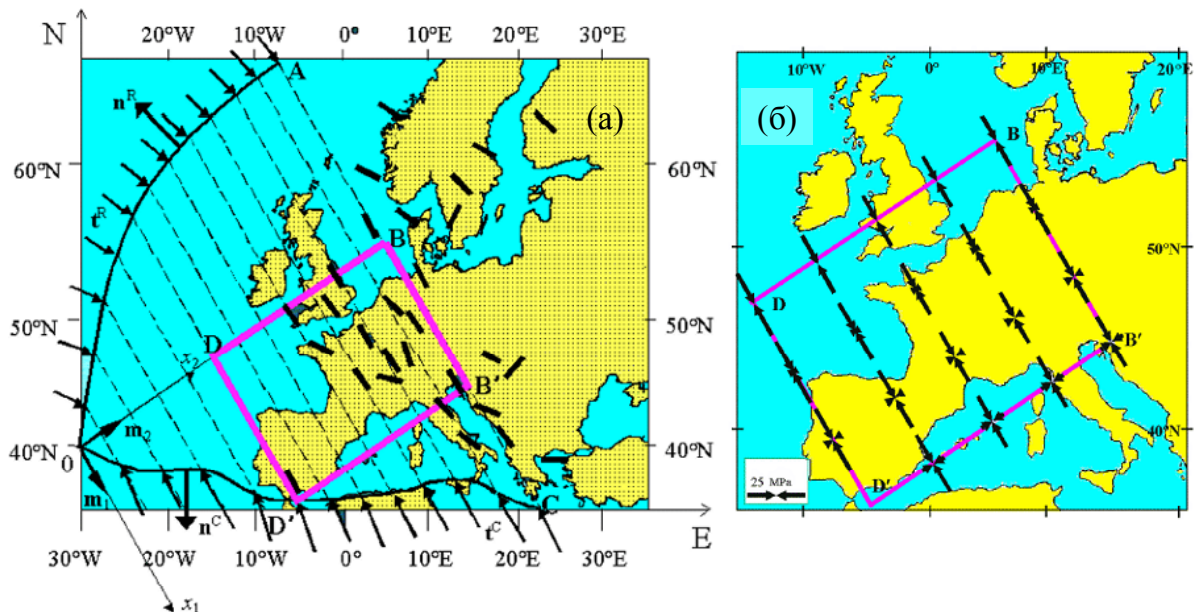


Рисунок 1.8. Пример расчета поля напряжений в Западной Европе для однородных траекторий [Mukhamediev, 2002]. Граничные условия выставлены на контуре  $AOD'C$ , расчетная область – прямоугольник  $BDD'B'$ , отрезки показывают осредненные направления главных напряжений, пунктирная линия – однородные траектории главных напряжений, стрелками показаны главные горизонтальные напряжения.

Следует отметить, что однородность поля траекторий является несущественным ограничением. В случае, когда поле траекторий неоднородно, также возможно сформулировать краевую задачу по определению двух главных напряжений из гиперболической системы двух уравнений (1.6), при этом траектории являются характеристиками этой системы, см [Мухамедиев, 1991].

### **1.6. Моделирование методами теории упругости**

Наблюдения показывают, что два из трех главных напряжений в верхней части земной коры, как правило, субгоризонтальны [Zoback et al., 1989]. Этим фактом обычно обосновывается использование двумерных упругих задач при моделировании региональных напряженных состояний. Такое же предположение остается верным и для субгоризонтальных пластов в массиве горных пород, поскольку касательные напряжения на границах пласта малы в сравнении с нормальными, что означает субвертикальность одного из главных напряжений. Таким образом предлагается существенное упрощение, которое предусматривает возможность замены общей трехмерной задачи на суперпозицию двумерной и одномерной задач. Исходя из трехмерных уравнений равновесия, покажем какой механический смысл имеет такое упрощение, следуя подходу, указанному в книге [Тимошенко, Гудьера, 1979] для плосконапряженного состояния.

При формулировке задачи в напряжениях система уравнений теории упругости состоит из трех уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + S_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{суммирование по повторяющемуся индексу}) \quad (1.8)$$

и шести уравнений совместности в форме Бельтрами-Митчелла

$$(1 + \nu)\Delta\sigma_{ij} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.9)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты симметричного тензора напряжений,  $S_i$  – проекции объемных сил на координатные оси,  $\sigma = \sigma_{ii}$  (суммирование по  $i$ , т.е.  $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ ),  $\Delta$  – пространственный оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}, \quad (\text{суммирование по } i). \quad (1.10)$$

При формулировке краевых задач, к 9 уравнениям системы (1.8) - (1.9) необходимо добавить три граничных условия, что приводит в корректно поставленной краевой задаче, имеющей единственное решение в напряжениях.

Примем, для определенности, что ось  $Ox_3$  направлена вертикально вверх, тогда компонента  $\sigma_{33}$  совпадает с одним из главных напряжений, компоненты  $\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$ , а объемные силы заданы весом,  $S_1=S_2=0$ ,  $S_3=-\gamma(x_1, x_2, x_3)$  (функция  $\gamma$  представляет собой удельный вес вышележащих пород), соответственно уравнения (1.8) принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} - \gamma = 0. \quad (1.11)$$

Первые два уравнения (1.11) представляют собой уравнения плоской задачи теории упругости, а последнее уравнение в (1.11) может быть проинтегрировано

независимо  $\sigma_{33} = \int_0^{x_3} \gamma(x_1, x_2, \zeta) d\zeta$  (принято, что начало координат расположено на

дневной поверхности, где  $\sigma_{33}(x_1, x_2, 0)=0$ . В частном случае, когда плотность пород не зависит от координат,  $\gamma(x_1, x_2, x_3)=\gamma_0$  (где  $\gamma_0$  – осредненный удельный вес вышележащих пород), имеем

$$\sigma_{33} = \gamma_0 x_3 \quad (x_3 \leq 0). \quad (1.12)$$

Необходимо также заметить, что функция напряжений Эйри  $A=A(x_1, x_2, x_3)$  сохраняет прежний вид (однако в отличии от чисто двумерного случая она теперь является функцией всех трех переменных), т.е. компоненты плоских напряжений выражаются через одну скалярную функцию

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (1.13)$$

Уравнения (1.9) упрощаются, что с учетом (1.12), что позволяет записать

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} = 0. \quad (1.14)$$

Уравнения (1.14) показывают, что производная функции  $\sigma = \sigma_{ii}$  по  $x_3$  является константой, следовательно,  $\sigma = kx_3 + \lambda(x_1, x_2)$  и  $\sigma_{11} + \sigma_{22} = (k - \gamma_0)x_3 + \lambda(x_1, x_2)$ . Введем обозначение  $\Theta = \sigma_{11} + \sigma_{22}$  (заметим, что в общем случае  $\Theta = \Theta(x_1, x_2, x_3)$ ), тогда

$$\sigma = \gamma_0 z + \Theta. \quad (1.15)$$

Подстановка (1.15) в оставшиеся уравнения (1.9) дает три уравнения вида

$$(1 + \nu)\Delta\sigma_{ij} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (1.16)$$

Сумма первых двух уравнений из системы (1.16) показывает, что функция  $\Theta = \Theta(x_1, x_2, x_3)$  является гармонической в плоскости (из (1.15) очевидно, что  $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_3^2} = 0$ , так как  $\sigma$  - гармоническая функция), таким образом

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_1^2} = -\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_2^2}. \quad (1.17)$$

С учетом (1.17) и (1.15) можно переписать уравнения (1.16) следующим образом

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} ((1 + \nu)\Delta\sigma - \Theta) = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (1.18)$$

Поскольку вторые производные функции  $(1 + \nu)\Delta\sigma - \Theta$  по переменным  $x_1$  и  $x_2$  обращаются в нуль, ее можно представить в виде

$$(1 + \nu)\Delta\sigma - \Theta = a(x_3) + b(x_3)x_1 + c(x_3)x_2, \quad (1.19)$$

где  $a(x_3)$ ,  $b(x_3)$ ,  $c(x_3)$  – произвольные (достаточно гладкие) функции глубины.

Заметим, что для функции напряжений (1.13) и суммы плоских напряжений имеет место следующее соотношение



$$\Delta A = \Theta + \frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2}. \quad (1.20)$$

Подстановка (1.20) в (1.19) с учетом того  $\Theta = (k - \gamma_0)x_3 + \lambda(x_1, x_2)$  дает

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2} = \frac{a(x_3) + b(x_3)x_1 + c(x_3)x_2}{1 + \nu} - \frac{\nu}{1 + \nu} ((k - \gamma_0)x_3 + \lambda(x_1, x_2)). \quad (1.21)$$

Интегрирование (1.21) приводит к следующему выражению для функции напряжений Эйри

$$A = A(x_3) + B(x_3)x_1 + C(x_3)x_2 - \frac{\nu(k - \gamma_0)}{6(1 + \nu)} x_3^3 - \frac{\nu\lambda(x_1, x_2)}{2(1 + \nu)} x_3^2 + A_1(x_1, x_2)x_3 + A_0(x_1, x_2). \quad (1.22)$$

Здесь функции  $A(x_3), B(x_3), C(x_3)$  возникли после двукратного интегрирования первой дроби в правой части (1.21), а  $A_1, A_0$  – произвольные гладкие функции.

Выпишем компоненты плоских напряжений используя (1.13) и (1.22)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[ -\frac{\nu}{2(1 + \nu)} \lambda(x_1, x_2) x_3^2 + A_1(x_1, x_2) x_3 + A_0(x_1, x_2) \right] \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[ -\frac{\nu}{2(1 + \nu)} \lambda(x_1, x_2) x_3^2 + A_1(x_1, x_2) x_3 + A_0(x_1, x_2) \right] \\ \sigma_{12} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ \frac{\nu}{2(1 + \nu)} \lambda(x_1, x_2) x_3^2 - A_1(x_1, x_2) x_3 - A_0(x_1, x_2) \right] \end{aligned} \quad (1.23)$$

Как видно первые четыре члена в (1.22) не вносят вклада в компоненты плоских напряжений, поэтому они могут быть отброшены, что дает

$$A = -\frac{\nu}{2(1 + \nu)} \lambda(x_1, x_2) x_3^2 + A_1(x_1, x_2) x_3 + A_0(x_1, x_2). \quad (1.24)$$

Значит при определении плоского тензора напряжений можно положить в формулах выше  $a(x_3) = b(x_3) = c(x_3) = 0$  и  $k = \gamma_0$ . Это приводит к тому, что функция  $\Theta$  не зависит от переменной  $x_3$ , т.е.  $\Theta = \Theta(x_1, x_2)$ . С другой стороны, суммируя первые два уравнения в (1.23) получаем



$$\lambda(x_1, x_2) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left( -\frac{\nu}{2(1+\nu)} \lambda(x_1, x_2) x_3^2 + A_1(x_1, x_2) x_3 + A_0(x_1, x_2) \right). \quad (1.25)$$

Поскольку левая часть (1.25) не зависит от переменной  $x_3$  и выполняется соотношение  $\frac{\partial^2 \lambda(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \lambda(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 0$  (так как  $\Theta = \Theta(x_1, x_2)$  и выполнено (1.17)), то необходимо следует

$$\lambda(x_1, x_2) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) A_0(x_1, x_2), \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) A_1(x_1, x_2) = 0. \quad (1.26)$$

Таким образом функции  $\lambda(x_1, x_2)$ ,  $A_1(x_1, x_2)$  являются гармоническими в плоскости, а функция  $A_0(x_1, x_2)$ , как следует из первого уравнения в (1.26), бигармонической

$$\left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) A_0(x_1, x_2) = 0. \quad (1.27)$$

Она и представляет собой функцию напряжений Эйри для плоской задачи. Как только эта функция определена из решения плоской задачи, то функция  $\lambda(x_1, x_2)$  находится дифференцированием из первой формулы (1.26). При этом функция  $A_1(x_1, x_2)$  остается, в общем случае, независимой.

Предположим, что главные направления (задаваемые углом  $\theta$ , отсчитываемым от положительного направления  $Ox_1$ ) не изменяются по глубине, тогда, с учетом того, что

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} = -2 \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \right)^{-1} \quad (1.28)$$

производная (1.28) по  $x_3$  должна равняться нулю, что приводит к следующим соотношениям между введенными функциями

$$-\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\theta = \frac{\frac{\partial^2 A_0}{\partial x_1 \partial x_2}}{\frac{\partial^2 A_0}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 A_0}{\partial x_1^2}} = \frac{\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1 \partial x_2}}{\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2}} = \frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1 \partial x_2}}{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1^2}}. \quad (1.29)$$

Из второго равенства в (1.29) следует, что гармонические функции  $A_1$  и  $\lambda$  могут отличаться только линейными частями, которые не влияют на напряженное состояние и могут быть отброшены. Это позволяет исключить  $A_1$  из дальнейшего рассмотрения и записать соотношения (1.25) и (1.26) в виде

$$A = A_0(x_1, x_2) + \left( -\frac{\nu}{2(1+\nu)} x_3^2 + Cx_3 \right) \lambda(x_1, x_2), \quad (1.30)$$

$$\lambda(x_1, x_2) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) A_0(x_1, x_2),$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Поскольку  $A_0$  – бигармоническая, а  $\lambda$  – гармоническая, то уравнения (1.29) не могут быть выполнены для произвольной бигармонической функции  $A_0$ . Таким образом, предположение о постоянности главных направлений по глубине может выполняться только для узкого частного случая вида бигармонической функции  $A_0$ , либо в смысле среднего значения.

Осредненные напряжения по толщине пластины можно ввести, преобразовав выражение для функции напряжений (1.24) к виду

$$A = -\frac{\nu}{2(1+\nu)} \lambda(x_1, x_2) \left( x_3^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) + A_1(x_1, x_2) \left( x_3 - \frac{1}{2} h \right) + \tilde{A}_0(x_1, x_2), \quad (1.31)$$

где

$$\tilde{A}_0(x_1, x_2) = -\frac{\nu h^2}{6(1+\nu)} \lambda(x_1, x_2) + \frac{1}{2} h A_1(x_1, x_2) + A_0(x_1, x_2) \quad (1.32)$$

некоторая новая бигармоническая функция двух переменных.

Очевидно, что первое уравнение в (1.26) и уравнения (1.27) выполняются если заменить  $A_0(x_1, x_2)$  на  $\tilde{A}_0(x_1, x_2)$ .

С учетом (1.31) компоненты напряжений (1.23) приобретают вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[ -\frac{\nu}{2(1+\nu)} \left( x_3^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \lambda(x_1, x_2) + \left( x_3 - \frac{1}{2} h \right) A_1(x_1, x_2) + \tilde{A}_0(x_1, x_2) \right] \\
\sigma_{22} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[ -\frac{\nu}{2(1+\nu)} \left( x_3^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \lambda(x_1, x_2) + \left( x_3 - \frac{1}{2} h \right) A_1(x_1, x_2) + \tilde{A}_0(x_1, x_2) \right] \quad (1.33) \\
\sigma_{12} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ \frac{\nu}{2(1+\nu)} \left( x_3^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \lambda(x_1, x_2) - \left( x_3 - \frac{1}{2} h \right) A_1(x_1, x_2) - \tilde{A}_0(x_1, x_2) \right]
\end{aligned}$$

При осреднении по глубине, путем вычисления интегралов типа

$$\langle A(x_1, x_2) \rangle = \frac{1}{H} \int_0^H A(x_1, x_2, \zeta) d\zeta,$$

(1.31) и (1.33) исчезнут, и тогда функция напряжений будет полностью совпадать с функцией Эйри, соответственно осредненные компоненты напряжений полностью определяются бигармонической функцией  $\tilde{A}_0(x, y)$ .

Если необходимо учесть изменение тензора напряжений по глубине, то можно сначала определить функцию  $\tilde{A}_0(x, y)$  из решения плоской задачи теории упругости при некоторых заданных граничных условиях (осредненных по толщине коры). Затем функция  $\lambda(x, y)$  находится из первой формулы (1.26), где надо заменить  $A_0(x_1, x_2)$  на  $\tilde{A}_0(x_1, x_2)$ . Следовательно, первый и третий члены в правой части (1.31) определяются из решения плоской задачи. Второй же член в этом соотношении не зависит от решения плоской задачи, он определяется выбором произвольной гармонической функции  $A_1(x_1, x_2)$ . Эта функция влияет только на девиаторную часть плоского тензора напряжений, поскольку его шаровая часть определяется лапласианом бигармонической функции  $A_0(x_1, x_2)$ .

Для определения функции  $A_1(x_1, x_2)$  рассмотрим случай  $A_0 = 0$ , тогда вместо (1.33) имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\partial^2 A_1(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \left( x_3 - \frac{1}{2} h \right) \\
\sigma_{22} &= \frac{\partial^2 A_1(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \left( x_3 - \frac{1}{2} h \right) \\
\sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 A_1(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \left( x_3 - \frac{1}{2} h \right)
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Подставим (1.34) в закон Гука для нормальных компонент, тогда с учетом (1.5) и того, что  $A_1$  – гармоническая, и соответственно  $\sigma_{11} + \sigma_{22} = 0$ , получим

$$\begin{aligned}
E\varepsilon_{11} &= \sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}) = -(1 + \nu) \frac{\partial^2 A_1(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \left( x_3 - \frac{1}{2} h \right) - \nu\sigma_{33} \\
E\varepsilon_{22} &= \sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33}) = -(1 + \nu) \frac{\partial^2 A_1(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \left( x_3 - \frac{1}{2} h \right) - \nu\sigma_{33} \\
E\varepsilon_{33} &= \sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \sigma_{33} = \gamma_0 x_3, \quad x_3 < 0
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Далее, для производных перемещений найдем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= -\frac{1 + \nu}{E} \frac{\partial^2 A_1(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \left( x_3 - \frac{1}{2} h \right) - \frac{\nu\gamma_0}{E} x_3 \\
\frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= -\frac{1 + \nu}{E} \frac{\partial^2 A_1(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \left( x_3 - \frac{1}{2} h \right) - \frac{\nu\gamma_0}{E} x_3 \\
\frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \frac{\gamma_0}{E} x_3, \quad x_3 < 0
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Интегрируя (1.36) получим

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{1 + \nu}{E} \frac{\partial A_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \left( x_3 - \frac{1}{2} h \right) - \frac{\nu\gamma_0}{E} x_3 x_1 + f_1(x_2, x_3) \\
u_2 &= -\frac{1 + \nu}{E} \frac{\partial A_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \left( x_3 - \frac{1}{2} h \right) - \frac{\nu\gamma_0}{E} x_3 x_2 + f_2(x_1, x_3) \\
u_3 &= \frac{\gamma_0}{2E} x_3^2 + f_3(x_1, x_2), \quad x_3 < 0,
\end{aligned} \tag{1.37}$$

где  $f_1(x_2, x_3)$ ,  $f_2(x_1, x_3)$ ,  $f_3(x_1, x_2)$  произвольные гладкие функции.

Из закона Гука для сдвиговых компонент (с учетом 3-го уравнения в (1.34) и равенства нулю компонент  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$ ) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} &= -\frac{\partial f_2(x_1, x_3)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1(x_2, x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial A_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\nu\gamma_0}{E} x_1 \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial A_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \frac{\nu\gamma_0}{E} x_2 \end{aligned} \quad (1.38)$$

Дифференцируя второе уравнение (1.38) по  $x_1$ , а третье по  $x_2$  и суммируя найдем, что функция  $f_3(x_1, x_2)$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 f_3(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_3(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\nu\gamma_0}{E}. \quad (1.39)$$

Это означает, что функция  $f_3(x_1, x_2)$  есть сумма частного решения вида  $\frac{\nu\gamma_0}{2E} (x_1^2 + x_2^2)$  и произвольной гармонической функции. Покажем, что последняя совпадает с функцией  $A_1(x_1, x_2)$  с точностью до коэффициента.

Из первого уравнения (1.38) путем разделения переменных находим

$$f_1(x_2, x_3) = x_2 f_4(x_3) + f_5(x_3), \quad f_2(x_1, x_3) = -x_1 f_4(x_3) + f_6(x_3). \quad (1.40)$$

Здесь  $f_4(x_3), f_5(x_3), f_6(x_3)$  - произвольные гладкие функции, но следует положить  $f_4(x_3) = f_4 = const$ , так как, если продифференцировать второе уравнение (1.38) по  $x_2$ , а третье по  $x_1$  и вычесть, то

обнаруживается  $\frac{\partial f_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2(x_1, x_3)}{\partial x_1} = f(x_1, x_2)$ , что, после подстановки

функций из (1.40), дает  $2f_4(x_3) = f(x_1, x_2)$ . Последнее равенство может выполняться только если обе части равны константе. Таким образом вместо (1.38) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial A_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\nu\gamma_0}{E} x_1 &= -f'_5(x_3) \\ \frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial A_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \frac{\nu\gamma_0}{E} x_2 &= -f'_6(x_3) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Очевидно, что правые части в (1.41) должны быть замещены константами, поскольку левые не зависят от  $x_3$ . Соответственно,  $f'_5(x_3) = f'_5$  и  $f'_6(x_3) = f'_6$ , таким образом, (1.40) приобретает вид

$$f_1(x_2, x_3) = x_2 f_4 + x_3 f'_5 + \hat{f}_5, \quad f_2(x_1, x_3) = -x_1 f_4 + x_3 f'_6 + \hat{f}_6, \quad (1.42)$$

где  $\hat{f}_5, \hat{f}_6$  - константы.

Интегрируя (1.41) с учетом (1.42) получаем

$$f_3(x_1, x_2) = \frac{1+\nu}{E} A_1(x_1, x_2) + \frac{\nu\gamma_0}{2E} (x_1^2 + x_2^2) - f'_5 x_1 - f'_6 x_2 + f_0. \quad (1.43)$$

Следует отметить, что свободные члены и остальные линейные коэффициенты в (1.42) и (1.43) могут быть выбраны равными нулю поскольку они определяют, соответственно, поступательное перемещение и вращение тела как жесткого целого. Окончательные выражения для компонент перемещений приобретают вид

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial A_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \left(x_3 - \frac{1}{2}h\right) - \frac{\nu\gamma_0}{E} x_3 x_1 \\ u_2 &= -\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial A_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \left(x_3 - \frac{1}{2}h\right) - \frac{\nu\gamma_0}{E} x_3 x_2 \\ u_3 &= \frac{1+\nu}{E} A_1(x_1, x_2) + \frac{\gamma_0}{2E} \left(x_3^2 + \nu(x_1^2 + x_2^2)\right) \end{aligned} \quad (1.44)$$

Вторые члены в правых частях формул (1.44) соответствуют смещениям стержня под действием собственного веса [Тимошенко, Гудьер, 1979]. Последняя формула в (1.44) показывает, что гармоническая функция  $A_1(x_1, x_2)$  определяется по прогибу  $u_3$ , который в свою очередь удовлетворяет уравнению Пуассона как в плоском, так и в пространственном случаях. Если значения прогиба заданы на границе контура  $(x_1, x_2)$  в какой-либо плоскости параллельной  $x_3$ , то для определения гармонической функции приходим к краевой задаче Дирихле, т.е. к задаче отыскания гармонической функции по ее краевому значению [Лаврентьев,

Шабат, 1958]. Например, если рассмотреть круговой диск при условии, что прогиб постоянен по краю диска, то  $A_1(x_1, x_2) = const$ , что свидетельствует о том, что эта функция не вносит вклада в напряженное состояние диска.

Проведенный анализ часто принимаемого предположения о том, что одно из главных напряжений в земной коре является вертикальным, позволяет заключить, что в этом случае задача реконструкции напряженного состояния в регионе представляет собой суперпозицию плоского напряженного состояния, одномерной задачи о весомом слое (стержне) и изгибных напряжений, порождаемых весом (как в случае, так называемой, мембранной аналогии, [Тимошенко, Гудьер, 1979]). Заметим, что если толщина слоя (коры) мала по сравнению с другими размерами, то члены с  $x_3$  малосущественны, таким образом, для протяженных регионов вклад плоских напряжений, возникающих из-за взаимодействия тектонических плит, в общее поле напряжений наиболее существенный. Также очевидно, что осреднение напряжений по толщине слоя (коры) сводит трехмерную задачу к плоской по отношению к горизонтальным компонентам напряжений. Соответственно, далее пространственное поле напряжений рассматривается как суперпозиция плоской задачи и одномерной задачи, вызванной весом вышележащих пород. Поскольку последняя задача не влияет на девиатор напряжений (и, соответственно, на ориентацию главных напряжений в плоскости пласта), то она не должна учитываться в последующей постановке плоской задачи. Там не менее проведенный анализ дает объяснение вариации локальных направлений главных горизонтальных напряжений по глубине (наблюдаемой в скважинах) из-за наличия гармонических функций в общем решении для напряжений.

**Учет слоистости.** Рассмотрим массив горных пород, состоящий из горизонтальных упругих слоев. Если касательные напряжения на интерфейсах между слоями отсутствуют, то проведенный выше анализ остается верным для каждого слоя в отдельности. Соответственно возникает вопрос могут ли существенно меняться ориентации главных напряжений при переходе из слоя в

слои? Для ответа на него рассмотрим, как изменяются напряжения при переходе через интерфейс в двух крайних случаях, когда смещения на границе непрерывны или, когда допускается проскальзывание между слоями, т.е. разрывность тангенциальных компонент смещений. В обоих случаях, вектор напряжений при переходе через интерфейс остается непрерывным, что означает непрерывность вертикальной компоненты напряжений (касательные равны нулю). Следует заметить, что вертикальные смещения на интерфейсе также непрерывны, поскольку не предполагается существование никаких расслоений (трещин) на внутренней границе. Если рассматривать только кусочно однородные напряженные состояния в соседних слоях, то для условий полного проскальзывания можно считать, что постоянные компоненты  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{12}$  могут быть выбраны произвольно в каждом слое, что не противоречит уравнениям равновесия и не влияет на уравнения совместности в форме Бельтрами-Митчелла. При полном сцеплении компоненты нормальных напряжений  $\sigma_{33}$  на границах между горизонтальными слоями будут непрерывны, а тангенциальные компоненты напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  будут испытывать скачки, пропорциональные модулям Юнга слоев. Для плоского случая, можно использовать параметры Дундурса [Dundurs, 1967], через которые и выражаются скачки тангенциальных напряжений. Таким образом, в обоих случаях возможно изменение направлений главных осей напряжений при переходе от слоя в слой. При осреднении главных горизонтальных напряжений по толщине литосферы главные оси будут однородны по вертикали, но могут меняться в слоях в горизонтальных направлениях, что позволяет использовать принцип суперпозиции плоской и одномерной задач.

### ***1.7. Некоторые двумерные упругие модели напряжений***

Большинство расчетов выполняются для двумерных моделей, но не обязательно плоских. Например, в работе [Fu, Huang, 1983] литосфера рассматривается в виде упругой сферической оболочки, при этом граничные условия в усилиях на внешней поверхности оболочки – нулевые, а на внутренней



проекции усилий в касательной плоскости выбираются из решения задачи для мантии, выраженного в сферических гармониках. Усилия по нормали на подошве литосферы также выбраны равными нулю, что свидетельствует о том, что вес не учитывается. Результаты расчетов приведены на Рисунке 1.9 для всего Земного шара в узлах сетки  $20^\circ \times 20^\circ$ , где стрелками показаны направления главных горизонтальных напряжений, а длины отрезков пропорциональны величинам расчетных напряжений. Более подробные карты с разрешением  $5^\circ \times 5^\circ$  рассчитаны для некоторых регионов. Следует отметить, что результаты расчетов [Fu, Huang, 1983] плохо согласуются с результатами других моделей и с реальными данными.

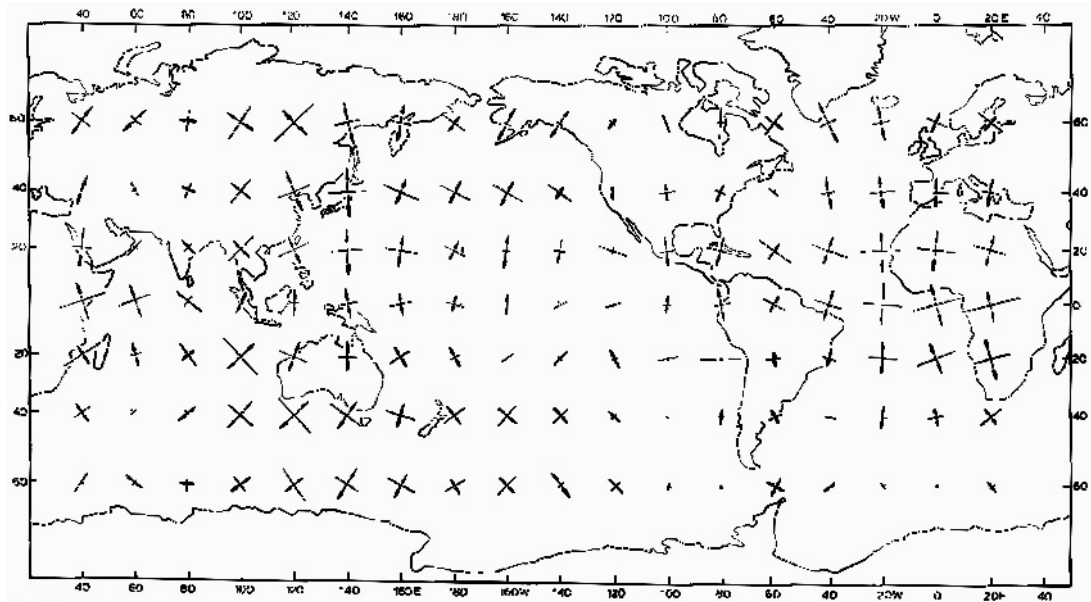


Рисунок 1.9. Карта главных направлений, рассчитанная в работе [Fu, Huang, 1983].

В отличие от вышеупомянутой работы, ряд исследований, наоборот берут во внимание вес различных пород, но не рассматривают тектонические напряжения. Так в работе [Коптев, Ершов, 2010] произведен расчет глобального поля напряжений в литосфере Земли, возникающего в результате действия сил, вызванных разностью гравитационного потенциала. Предложен оригинальный алгоритм и разработан действующий программный код “Earth Stresses”. При расчетах учитывались данные по топографии, мощности и плотности земной коры и верхней мантии, гравитационные аномалии, тепловой режим в литосфере. Авторы утверждают, что сравнение с наблюдаемыми данными

удовлетворительное, и что действия только сил разности гравитационного потенциала достаточно для того, чтобы объяснить особенности первого порядка поля напряжений в литосфере Земли. Результаты их расчетов показаны на Рисунке 1.10, который имеет мало общего с картой, представленной на Рисунке 1.9. В дальнейшем эти же авторы провели расчеты для Индо-Австралийской плиты по четырем моделям, см [Коптев и др., 2013]. Интересно сравнить эти расчеты с более ранними исследованиями того же региона [Cloetingh, Wortel, 1986; Coblentz et al., 1995], они показаны на Рисунках 1.12-1.13, и [Coblentz. et al., 1998], см Рисунок 1.14, где представлены две модели из восьми рассмотренных авторами. В отличие от работ [Коптев и др., 2013] указанные работы учитывают тектонические напряжения путем постановки граничных условий в напряжениях и смещениях. Все модели на Рисунке 1.11-1.14 имеют мало общего друг с другом, например, можно отметить существенные различия в ориентациях и величинах напряжений на Рисунке 1.12, который был модифицирован из графических результатов расчетов [Cloetingh, Wortel, 1986] и [Coblentz et al., 1995] так, чтобы их было наглядно сравнить. Четыре модели австралийского поля напряжений, рассчитанные в работе [Coblentz. et al., 1995], показаны на Рисунке 1.13, они также существенно отличаются друг от друга из-за различий в граничных условиях, используемых для разных моделей. Модели напряжений в Индо-Австралийской плите разнятся как у разных авторов, так и у одних авторов, см Рисунок 1.11 и Рисунок 1.14, при этом различия носят качественный характер. Но ни в одной из карт не видно присутствие особой точки, как показано на Рисунке 1.7.

Разница в результатах моделирования возникает не только по причине использования разных граничных условий. В работе [Reynolds et al., 2002] было проведено пять миллионов грубых расчетов напряжений в Австралии с целью определить оптимальные граничные условия из сопоставления расчетных и наблюдаемых ориентаций главных напряжений. Эти граничные условия затем были использованы чтобы провести более аккуратные расчеты. В результате были определены пять лучших моделей, по которым было построено осредненное поле

напряжений, показанное на Рисунке 1.15. Эта работа фактически есть пример ручной оптимизации, используемой для решения обратной задачи теории упругости, а именно определение граничных условий в напряжениях, которые обеспечивают лучшее соответствие расчетных и наблюдаемых ориентаций главных напряжений в области. В работах [Zhao, Müller, 2001; Dyksterhuis, Müller, 2004] оптимизация выполняется автоматически, но по существу подход остается таким же, т.е. задаются разные варианты граничных напряжений и выполняется оптимизация по отклонению расчетных данных от реальных. В результате можно добиться неплохого визуального соответствия расчетных и измеренных ориентаций главных напряжений. Однако при этом остается произвол в определении величин напряжений, что является существенным недостатком этого подхода и, как будет показано в следующем пункте, одинаковые поля траекторий главных напряжений могут быть определены по разным граничным условиям множеством методов. Это означает, что оптимизация по направлениям главных напряжений, не только не может дать однозначных результатов, но и определить, сколько требуется данных по величинам напряжений для того, чтобы выбрать лучшее приближение для полей упругих напряжений в рассматриваемой области.

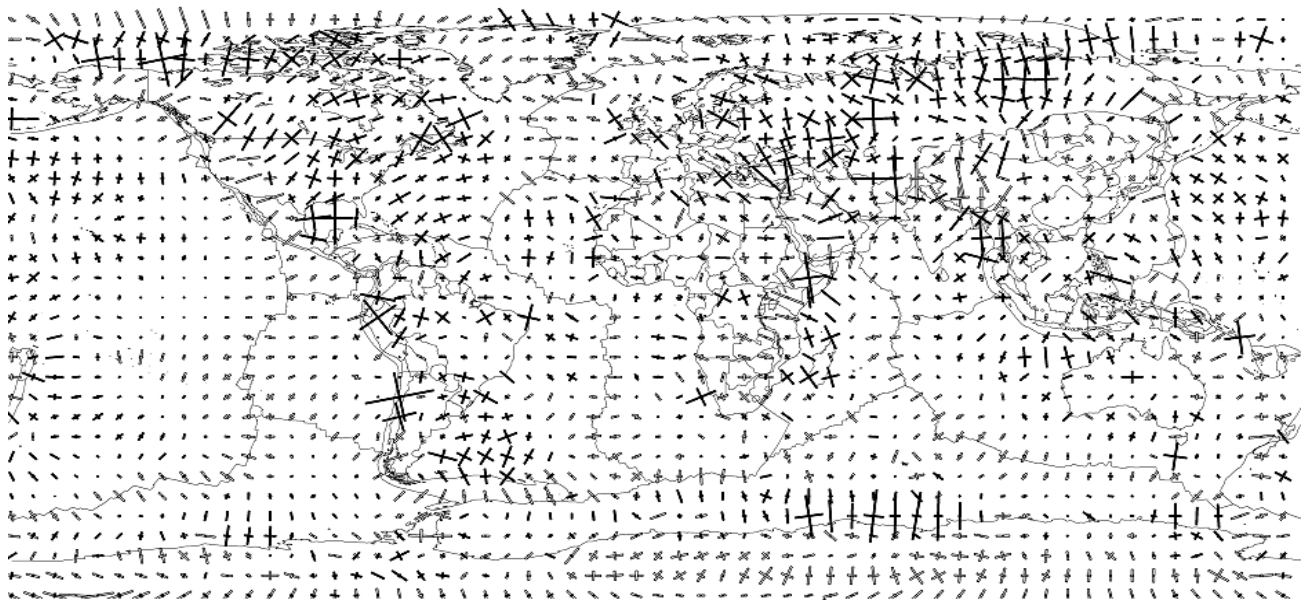


Рисунок 1.10. Результаты расчетов из работы [Коптев, Ершов, 2010], темные сегменты – режим сжатие, серые режим растяжения.

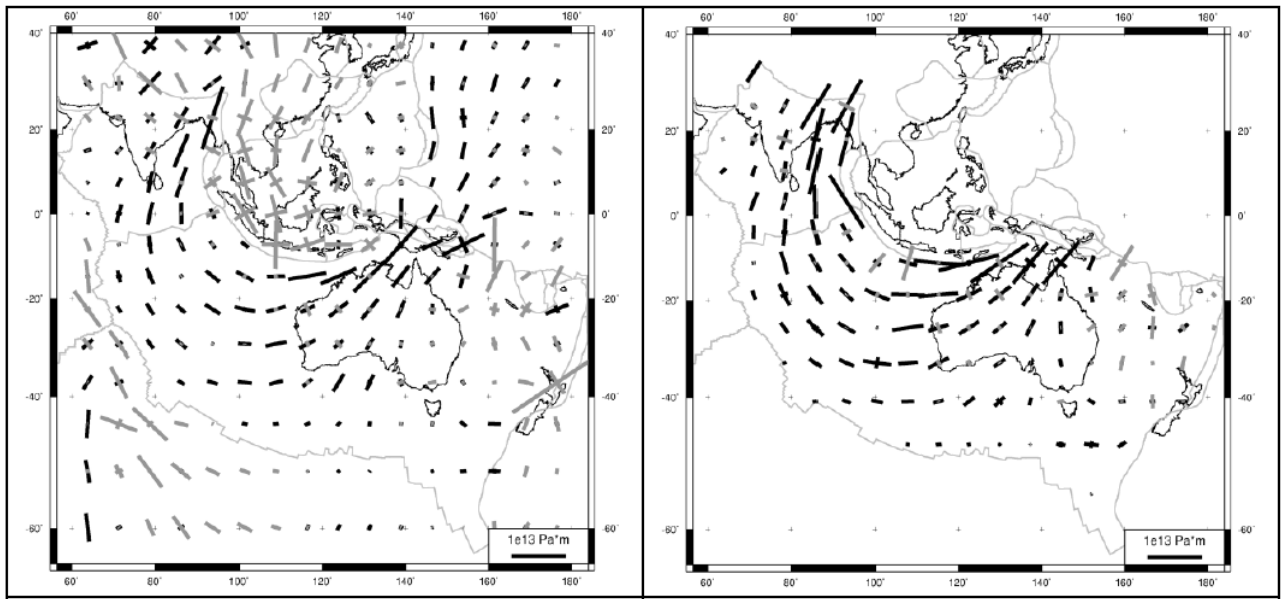


Рисунок 1.11. Модели полей напряжений в Индо-Австралийской плите по двум моделям, учитывающим границы плит, из [Коптев и др., 2013].

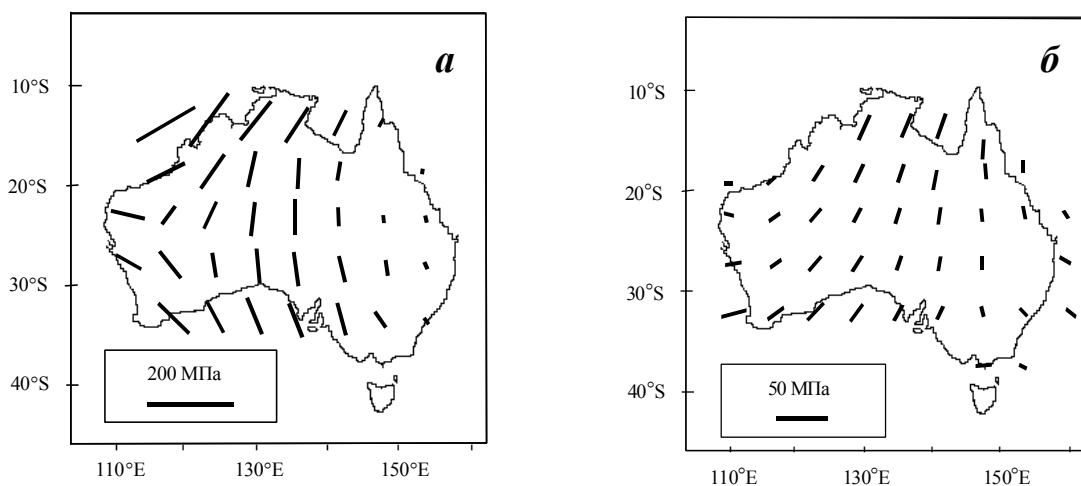


Рисунок 1.12. Расчетные поля напряжений в Австралии по модифицировано по результатам расчетов некоторых моделей в работах (а) – [Cloetingh, Wortel, 1986] и (б) – [Coblentz et al., 1995].

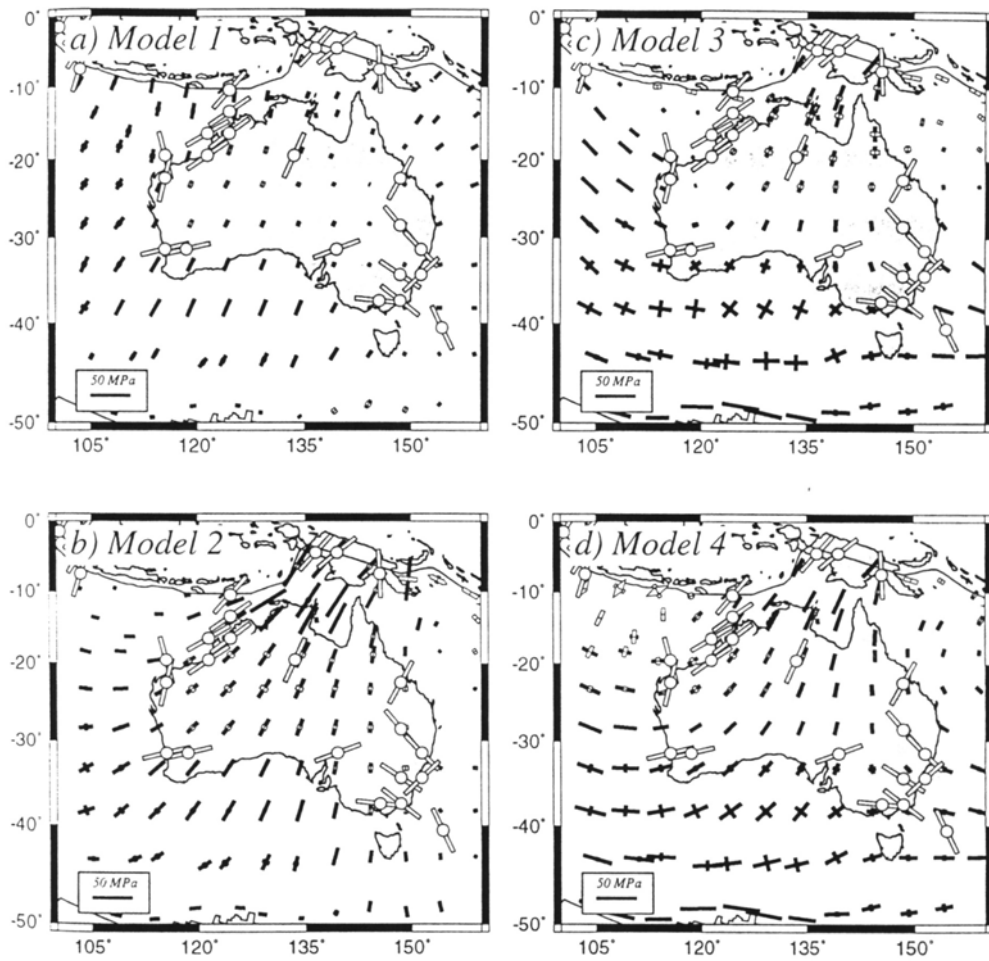


Рисунок 1.13. Четыре модели австралийского поля напряжений из работы [Coblentz et al., 1995].

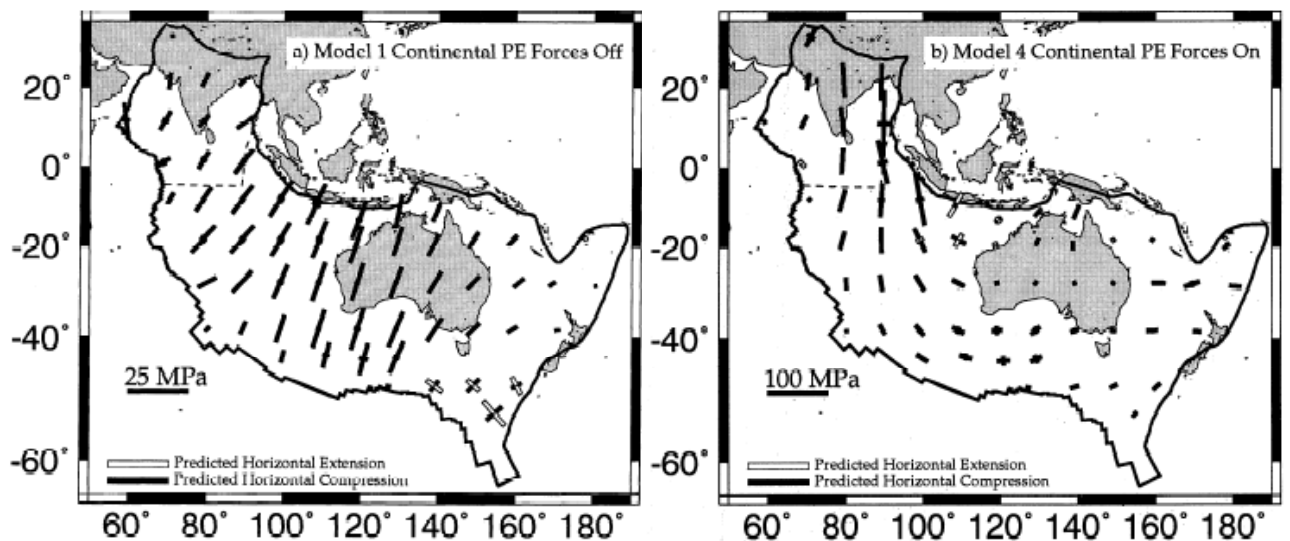


Рисунок 1.14. Две модели полей напряжений в Индо-Австралийской плите из работы [Coblentz et al., 1999].

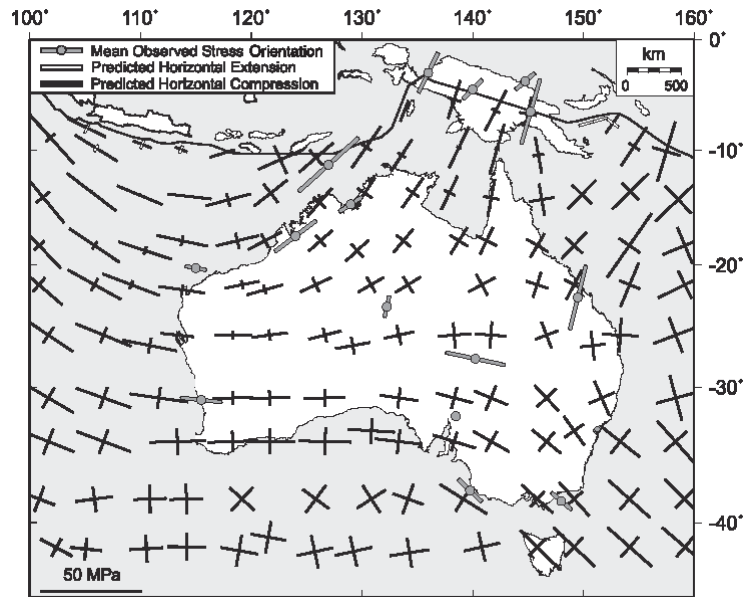


Рисунок 1.15. Осредненное поле напряжений Австралии, рассчитанное по пяти моделям в работе [Reynolds et al., 2002].

### 1.8. Недостатки используемых методов

Покажем на примере, что подход (основанный на решении обратной задачи теории упругости, использующей оптимизацию отклонения расчетных напряжений от экспериментальных данных) вносит сильный произвол в определение величин тензора напряжений. Для этого рассматривается задача интерполяции, в которой отклонение расчетных данных от экспериментальных в дискретных точках по определению равно нулю.

Пусть известны главные направления  $\theta_j$  в точках  $M_j(\xi_j, \eta_j)$ , тогда возможно провести интерполяцию напряжений так, чтобы в данных точках главные направления были точно равны заданным. Для этого имеется бесчисленное число способов, поскольку можно выбрать любые системы интерполяционных функций. Однако, во-первых выбор системы аппроксимирующих функций должен быть таким, чтобы обеспечивалось выполнение уравнений равновесия, а при использовании упругой реологии, должны выполняться также и условия совместности, например, в форме Бельтрами-Митчелла, а во-вторых, в соответствии с принципом бережливости (экономии, например, [Jeffreys, 1939; MacKay, 2005]), нужно использовать наименьшее количество наиболее простых

интерполяционных функций, которое необходимо для того, чтобы удовлетворить всем данным.

Для двух данных в круге разумно использовать следующую интерполяционную формулу, обеспечивающую линейную интерполяцию девиаторных напряжений (которые определяют главные направления) относительно переменных  $x_1$  и  $x_2$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_{22} - \sigma_{11} \\ 2\sigma_{12} \end{pmatrix} = & \frac{A}{\rho^2} \begin{pmatrix} \cos 2\theta_1 & \sin 2\theta_1 \\ -\sin 2\theta_1 & \cos 2\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_2 & \eta_1 - \eta_2 \\ \eta_2 - \eta_1 & \xi_1 - \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \xi_2 \\ x_2 - \eta_2 \end{pmatrix} - \\ & - \frac{B}{\rho^2} \begin{pmatrix} \cos 2\theta_2 & \sin 2\theta_2 \\ -\sin 2\theta_2 & \cos 2\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_2 & \eta_1 - \eta_2 \\ \eta_2 - \eta_1 & \xi_1 - \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \xi_1 \\ x_2 - \eta_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

где  $\rho$  – расстояние между точками  $M_1$  и  $M_2$ ,  $A$  и  $B$  – произвольные положительные числа.

Очевидно, что в представлении (1.45) можно умножить любую из вторых строчек в средних матрицах в правой части на  $(-1)$ , поскольку, когда точка на плоскости  $M(x_1, x_2)$  стремится к  $M_1$  или  $M_2$ , то касательная компонента напряжений равна нулю. Таким образом, возникают четыре возможных варианта интерполяций. Далее можно определить все компоненты напряжений путем подстановки (1.45) в уравнения равновесия, интегрирование которых даст дополнительную постоянную. Соответственно, даже в простейшем случае тензор напряжений будет зависеть от трех произвольных постоянных, а девиатор напряжений, зависящий от двух произвольных постоянных, еще имеет четыре возможности для интерполяции, которые удовлетворяют всем уравнениям теории упругости. Эти возможности показаны на Рисунке 1.10 в виде траекторий главных напряжений и соответствующих им распределений нормальных и касательных напряжений по контуру единичного круга в зависимости от полярного угла. При этом нет нужды приводить цифровые значения по оси ординат на нижних графиках рисунков, т.к. ориентации напряжений не зависят на какую величину нормализованы последние. Как видно из приведённых рисунков картины траекторий главных напряжений существенно зависят от выбора аппроксимации

(везде принято  $A=3$ ,  $B=1$ ), и при этом, граничные напряжения разнятся не только по величинам, но и по формам кривых. При вариации констант можно добиться и других качественных картин поведения траекторий.

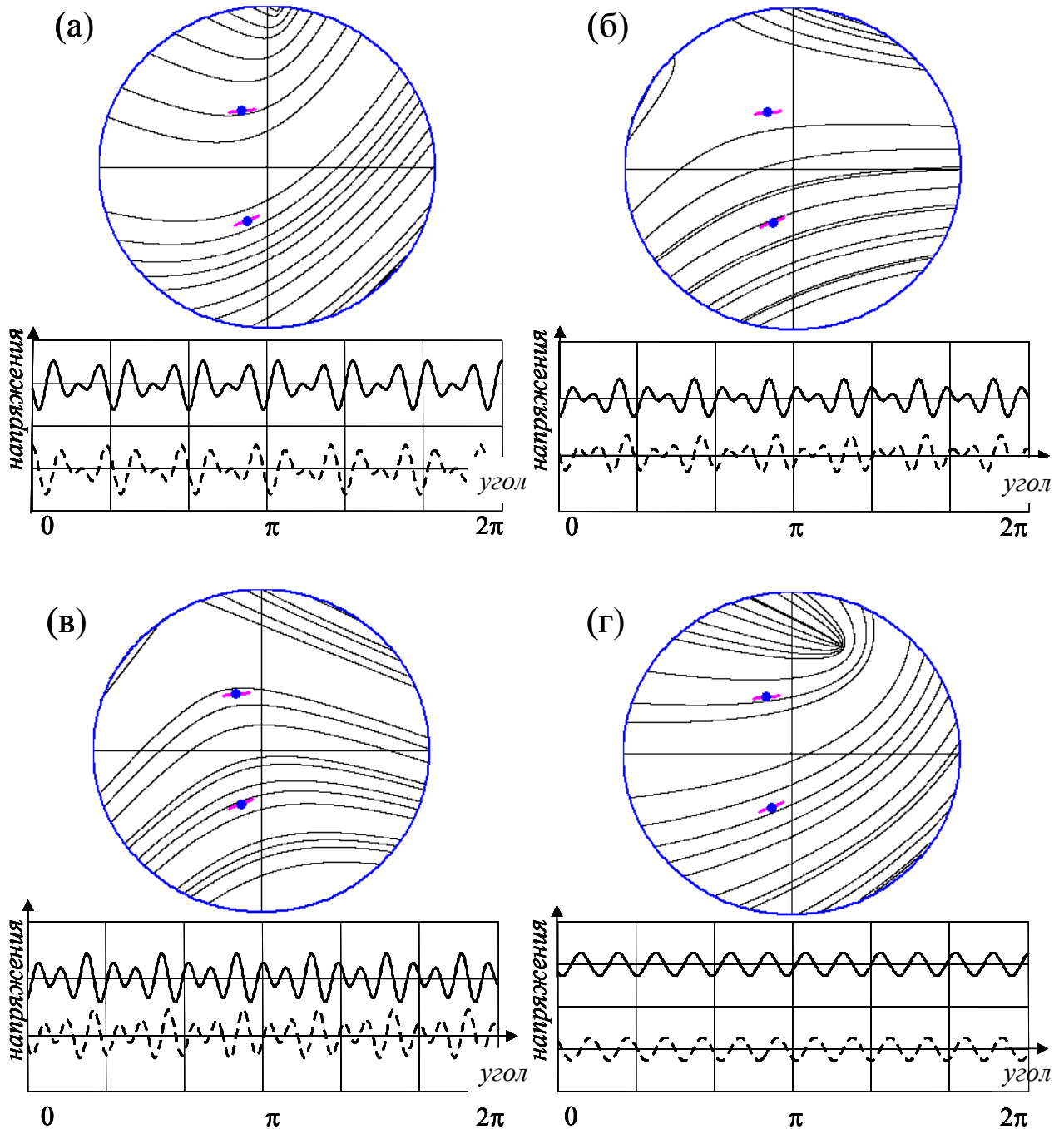


Рисунок 1.16. Интерполированные поля траекторий в круге – верхние рисунки и граничные напряжения по окружности – нижние рисунки, сплошная кривая – нормальные напряжения, пунктирная кривая – касательные напряжения; отрезок с центральной точкой – данное.



Приведенный пример свидетельствует о том, что выбор различных граничных условий может привести с одной стороны к качественно различным полям траекторий главных напряжений, но с другой стороны эти поля траекторий полностью соответствуют двум заданным направлениям. При этом все уравнения теории упругости будут удовлетворены. При увеличении числа данных количество возможностей быстро возрастает. Даже если подобрать такие краевые условия в напряжениях, что все данные будут точно интерполированы и все упругие уравнения удовлетворены, то число таких вариантов будет бесконечно большим. Этим и объясняется большое число возможных моделей в цитированных выше работах (см Рисунки 1.10-1.15). Следовательно, попытки использовать фиктивные напряжения на границе с целью удовлетворить ориентациям напряжением внутри области не могут рассматриваться в качестве перспективного подхода в задаче определения полей напряжений по дискретным данным. В следующих главах будет показано, что не любая функция двух переменных может рассматриваться в виде угла, задающего главные направления, и что при заданном поле траекторий число свободных параметров не может превышать пяти, а задание главных направлений на контуре определяет число произвольных постоянных, входящих в тензор упругих напряжений.

### ***1.9. Основные цели работы и направления исследований***

Анализ литературных источников указывает на несовершенство всех, используемых в настоящее время, подходов к определению полей напряжений в земной коре. Это выражается в том, что существующие методы не позволяют построить адекватные модели напряжений в различных регионах литосферы, как видно из приведенных выше примеров для Индо-Австралийской плиты, различные авторы получают существенно различные результаты при работе с одним и тем же набором данных по ориентациям главных напряжений. Это объясняется тем, что однозначная реконструкция полей напряжений (включая их величины) по безразмерным данным о главных направлениях в принципе невозможна. Более того, невозможно определить степень произвола, который

вносится при рассмотрении обратных задач теории упругости, поскольку возникает огромное количество возможных вариантов аппроксимации дискретных данных. С другой стороны, использование упругой модели для идентификации полей напряжений в различных регионах литосферы представляется несомненным прогрессом по сравнению с простейшими моделями, которые не учитывают тектонические силы, возникающие при взаимодействии тектонических плит. Как было показано на основе анализа, основанного на подходе Тимошенко и Гудьера [1979], трехмерная задача распадается на суперпозицию одномерной и плоской задачи при условии, что вертикальное напряжение в каждой точке являются одним из главных. При этом оценка для вертикальной компоненты дается весом вышележащих пород, а для плоской задачи необходима разработка методов решения, учитывающих данные по ориентации главных горизонтальных напряжений. Разработка и исследование таких моделей и является основной целью данной работы.

Основные направления исследований могут быть сформулированы следующим образом.

1. Необходимо разработать методы решения краевых задач теории упругости, которые не подразумевают введение величин граничных напряжений, усилий или смещений, а используют только информацию о направлениях напряжений (усилий или смещений). Такой подход диктуется типом данных, которые доступны из различных индикаторов напряжений и смещений. С математической точки зрения такие формулировки краевых задач являются некорректными, поскольку очевидно, что без знания величин напряжений или смещений, однозначные реконструкции полей напряжений невозможны. Тем не менее необходимо установить с каким произволом возможно провести реконструкцию напряжений и указать сколько измерений величин напряжений необходимо, чтобы избавиться от этого произвола.

2. Поскольку прямые формулировки плоских задач теории упругости с указанными выше типами граничных условий ранее не исследовались, то

необходимо разработать общую методику решения таких задач, включающую исследование разрешимости задачи для конкретных комбинаций граничных условий. Для этого целесообразно развить подход к решению комплексных сингулярных интегральных уравнений, разработанный Гаховым [Гахов, 1977], что и будет основным направлением исследований в Главах 3-5.

3. Необходимо разработать методы реконструкции напряжений по дискретным данным об ориентациях главных напряжений, собранных в базе данных WSM, которые распределены существенно неравномерно по всей литосфере и сосредоточены не только по границам тектонических плит, но и внутри их. Как уже отмечалось выше, методы, основанные на решении обратных задач, в данном случае не эффективны, поэтому предлагается использовать подход, основанный на методе Трефтца для комплексных потенциалов, что приводит к задаче (не краевой) оптимизации невязки между расчетными и экспериментальными ориентациями главных напряжений. Данная техника никогда ранее не применялась для анализа данных по главным направлениям тензора напряжений, поэтому необходима разработка соответствующих алгоритмов и полное исследование их эффективности, что и будет сделано с Главах 6-8.

4. Разработанные методики и алгоритмы необходимо верифицировать и показать их применимость для работы с реальными данными, в частности

- для реконструкций полей напряжений в различных районах Земли, где имеются как плотно распределенные данные по всей области (например, Европа), так и в основном граничные данные (например, Антарктическая плита);
- для изучения эволюции полей палеонапряжений;
- для исследования полей напряжений в наиболее сейсмически активных регионах Земли, особенно тех, где произошли крупные землетрясения, вызвавшие цунами, что является важнейшей практической проблемой для идентификации цунамигенных районов.

## ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 2.1. Основные уравнения статики упругой среды в декартовой системе координат

В плоской упругой задаче предполагается, что смещение в одном направлении равно нулю (плоская деформация) или компоненты напряжений, действующие на одной из координатных плоскостей незначительны (плоское напряженное состояние). В обоих этих случаях все компоненты перемещений, тензоров деформаций и напряжений зависят от двух координат.

Рассмотрим плоскую однородную упругую область подверженную действию нагрузок по границе и объемных сил. Деформированное состояние области описывается вектором смещений  $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$  в некоторой декартовой системе координат  $Ox_1x_2$ . Компоненты тензора второго ранга малых деформаций выражаются через перемещения следующим образом

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad j, k = 1, 2, \quad (2.1)$$

где компоненты  $\varepsilon_{11}$  и  $\varepsilon_{22}$  представляют относительные удлинения (сжатия) вдоль осей, а  $2\varepsilon_{12} = \gamma_{12}$ , где  $\gamma_{12}$  - деформации сдвига, т.е. угол, который представляет собой изменение между ортогональными направлениями  $x_1$  и  $x_2$  после деформации.

Из (2.1) очевидно, что существует зависимость между компонентами деформации  $\varepsilon_{jk}$ , известное как уравнение совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 0. \quad (2.2)$$

Напряженное состояние плоскости характеризуется тремя независимыми компонентами симметричного тензора напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ , которые удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0, \quad (2.3)$$

где  $f_k$  ( $k=1,2$ ) - проекции объемных сил на оси координат.

Закон Гука подразумевает, что соотношения между тензорами напряжений и деформаций линейны. В общем случае эти соотношения представляются тензорами четвертого ранга, известными как тензор упругих податливостей и тензор упругих модулей. Для плоского случая удобно выражать эти тензоры с помощью технических модулей упругости, т. е. через объемный модуль, модули упругости, коэффициенты Пуассона и модули сдвига. Для важных практических случаев плоской упругости закон Гука представлен ниже.

Для изотропных сред

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}}{E}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}}{E}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12}, \quad (2.4)$$

где  $E$  - модуль упругости при растяжении/сжатии (модуль Юнга),  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $G$  является модуль сдвига (модуль жесткости),  $2G=E(1+\nu)^{-1}$ .

Для ортотропных сред

$$\varepsilon_{11} = \frac{(1-\lambda)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}}{E}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{(1+\lambda)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}}{E}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12}. \quad (2.5)$$

Здесь  $E(1-\lambda)^{-1}=E_1$  и  $E(1+\lambda)^{-1}=E_2$ , модули упругости по  $x_1$  и  $x_2$  оси, соответственно, и  $\nu=2\nu_{12}\nu_{21}(\nu_{12}+\nu_{21})^{-1}$ ,  $\lambda=(\nu_{12}-\nu_{21})(\nu_{12}+\nu_{21})^{-1}$ ,  $\nu_{12}$  и  $\nu_{21}$  - коэффициенты Пуассона. Модули упругости и коэффициенты Пуассона не являются независимыми, они удовлетворяют отношению  $\nu_{12}/E_1=\nu_{21}/E_2$ .

Закон Гука в форме (2.4) и (2.5) выписан для плоского напряженного состояния. В случае плоской деформации соотношения для компонент сдвига остаются, в то время как для нормальных компонент, они останутся в силе, если модули заменить следующим образом.

Для изотропных сред

$$E \rightarrow E(1 - \nu^2)^{-1}, \quad \nu \rightarrow \nu(1 - \nu)^{-1}. \quad (2.6)$$

Для ортотропной среды

$$\begin{aligned} E_1 &\rightarrow \frac{E_1}{1 - \nu_{13}\nu_{31}}, & E_2 &\rightarrow \frac{E_2}{1 - \nu_{23}\nu_{32}}, \\ \nu_{12} &\rightarrow \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{1 - \nu_{13}\nu_{31}}, & \nu_{21} &\rightarrow \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{1 - \nu_{23}\nu_{32}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\nu_{kj}$  - коэффициенты Пуассона в законе Гука для пространства (см. Работнов, 1988).

Уравнения (2.1) - (2.7) представляют собой полную систему определяющих уравнений в статической плоской упругости для плоской деформации и плоского напряженного состояния. Можно далее получить эквивалентные системы уравнений в напряжениях или в перемещениях, известные как уравнения Ламе (в перемещениях) или уравнения Бельтрами-Митчелла (в напряжениях). Они будут выведены далее с использованием комплексных переменных.

## 2.2. Уравнения в комплексных координатах для изотропных сред

Для плоских задач введение комплексных переменных представляет существенные преимущества. Введем сопряженные комплексные переменные  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\bar{z} = x_1 - ix_2$ , и дифференциальные операторы следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = i \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad 2 \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (2.8)$$

Операторы высших порядков получаются путем последовательного применения операторов (2.8), например, для оператора Лапласа получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (2.9)$$

Введем также комплексный вектор перемещений  $u = u_1 + iu_2$  и комплекснозначные функции напряжений и деформаций

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2}, \quad \delta = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}}{2} + i\varepsilon_{12}, \quad P = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, \quad D = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} + i\sigma_{12}. \quad (2.10)$$

Здесь вещественные функции  $\varepsilon$  и  $P$  представляют объемное расширение и среднее напряжение, соответственно, т. е. изотропную (шаровую) части тензоров деформаций и напряжений, а комплекснозначные функций  $\delta$  и  $D$  представляют соответственно девиаторы деформаций и напряжений.

С учетом обозначений (2.10) соотношения между деформациями и перемещениями принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial(u_1 + iu_2)}{\partial x_1} - i \frac{\partial(u_1 + iu_2)}{\partial x_2} \right] = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} = \varepsilon \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial(u_1 - iu_2)}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial(u_2 + iu_1)}{\partial x_2} = \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} - i\varepsilon_{12} = -\delta \end{aligned} \quad (2.11)$$

Дифференциальные уравнения равновесия (ДУР) преобразуются в одно комплексное уравнение, путем умножения второго уравнения на  $-i$  и суммирования с первым. Это приводит к следующему выражению для ДУР

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{f}}{2} = 0, \quad (2.12)$$

где  $f$  – комплексный вектор массовых сил,  $f = f_1 + if_2$ .

Уравнения совместимости требует последовательного применения операторов в (2.8), что приводит к

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z \partial \bar{z}} + \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \delta}{\partial \bar{z}^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.13)$$

В комплексной форме закон Гука для изотропных сред имеет вид

$$P = K\varepsilon, \quad D = 2G\delta, \quad (2.14)$$

где  $K$  – объемный модуль для плоских задач,  $K = E(1+\nu)^{-1}(1-2\nu)^{-1}$  – для плоской деформации,  $K = E(1-\nu)^{-1}$  – для плоского напряженного состояния.

Уравнения совместности могут быть выражены через напряжения подстановкой (2.14) в (2.13) с последующим исключением девиатора напряжений с помощью уравнений равновесия. Для плосконапряженного состояния эти преобразования приводят к

$$\left. \begin{aligned} \frac{2G}{K} \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial \bar{z}} + \operatorname{Re} \frac{\partial^2 D}{\partial \bar{z}^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 D}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{f_1 - if_2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial \bar{z}} = -\frac{1+\nu}{4} \operatorname{Re} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}. \quad (2.16)$$

Из (2.12) и (2.16) видно, что путем исключения средних напряжений можно переписать уравнения совместности через комплексный девиатор в виде

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} - \frac{1+\nu}{4} \operatorname{Re} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}. \quad (2.17)$$

В случае плоской деформации правые части в (2.16) и (2.17) должны быть изменены в соответствии с подстановками (2.6).

Для того чтобы получить уравнения Ламе подставим (2.10) в правую часть уравнений (2.13) и полученный результат в уравнения равновесия (2.12), что приводит к

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \kappa \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z} \partial z} + \frac{\bar{f}}{K} = 0, \quad (2.18)$$

где  $\kappa = (3-\nu)(1+\nu)^{-1}$  - для плоского напряженного состояния и  $\kappa = 3-4\nu$  - для плоской деформации.

Уравнения (2.11) - (2.18) образуют полный набор основных уравнений плоской задачи теории упругости для изотропной однородной среды для общего случая массовых сил. Два наиболее важных упрощения рассматриваются далее.

Предположим, что объемные силы имеют потенциал. Это означает существование вещественной функции  $\Pi$ , удовлетворяющей соотношениям

$$f_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}, \quad f_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \Rightarrow \bar{f} = f_1 - if_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = -2 \frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (2.19)$$



Для консервативных массовых сил дифференциальные уравнения равновесия в комплексной форме имеют вид

$$\frac{\partial(P-\Pi)}{\partial z} - \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2.20)$$

Отметим, что подстановка (2.19) в (2.16) обнаруживает, что  $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left( P - \frac{1+\nu}{2} \Pi \right) = 0$ . Таким образом, для консервативных сил комбинация  $P - \frac{1+\nu}{2} \Pi$  является гармонической функцией.

Уравнения Ламе для консервативных сил в комплексной форме имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \kappa \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z} \partial z} - \frac{1}{K} \frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0. \quad (2.21)$$

Из (2.17) и (2.19) также очевидно, что комплексный девиатор удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \bar{z}^2} = -\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (2.22)$$

Если объемные силы отсутствуют система дифференциальных уравнений становится однородной и принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 \quad \left( \text{или} \quad \frac{\partial^2 D}{\partial \bar{z}^2} = 0 \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \kappa \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z} \partial z} = 0. \quad (2.23)$$

Полная система уравнений плоской статической упругости состоит из (2.23) соотношений между перемещениями и деформациями (2.11) и закона Гука (2.14).

В случае, когда потенциал массовых сил дается произвольной гармонической функцией, уравнения (2.20) и (2.22) не содержат потенциалов и, следовательно, среднее напряжение по-прежнему гармоническая функция, а девиатор напряжений не зависит от массовых сил. Последнее обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, рассматриваемых далее. В частности,

следует отметить, что такие практические случаи массовых сил, как вес или инерция (центробежные силы) обладают гармоническими потенциалами.

### 2.3. Общие решения для изотропных сред

Общее решение для плоских упругих задач в однородной изотропной среде известно как формулы Колосова-Мусхелишвили. Они могут быть получены путем последовательного интегрирования однородных уравнений (2.23). Таким образом, интегрирование третьего уравнения в (2.23) дает выражение для комплексного девиатора через две произвольные голоморфные функции, что после подстановки в первое уравнение (2.23) приводит к выражениям

$$P = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)}, \quad D = \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z). \quad (2.24)$$

Здесь и везде далее по тексту сохраняются обозначения, принятых в классических монографиях для комплексных потенциалов (голоморфная функции)  $\Phi = \Phi(z)$  и  $\Psi = \Psi(z)$ .

Отметим (2.23), что вторая производная комплексного девиатора по комплексной переменной обращается в нуль. Это позволяет отнести эту функцию к бианалитическим функциям. Однако в классическом тексте [Гахов, 1977] под полианалитической функцией порядка  $n$  понимается функция вида

$$F_n(z, \bar{z}) = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{z}^j z^j \varphi_j(z). \quad (2.25)$$

Следуя определению (2.25), бианалитическая функция должна иметь вид

$$F_2(z, \bar{z}) = \varphi_0(z) + \bar{z}z\varphi_1(z). \quad (2.26)$$

что означает, что ее производная по сопряженной комплексной переменной обращается в нуль при  $z=0$ , что необязательно выполняется для функции комплексного девиатора. Поэтому назовем последний биголоморфной функцией, чтобы отличать его от классического определения бианалитической функции.

Интегрирование уравнения Ламе в (2.23) по  $z$  и комплексное сопряжение дает

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \kappa \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \overline{F'(z)}, \quad \kappa \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = F'(z), \quad (2.27)$$

где  $F(z)$  - произвольная голоморфная функция. Исключив член с комплексно сопряженными перемещениями из одного из уравнений (2.27) найдем

$$(\kappa^2 - 1) \frac{\partial u}{\partial z} = \kappa F'(z) - \overline{F'(z)}. \quad (2.28)$$

Интегрирование (2.28) по  $z$  дает

$$(\kappa^2 - 1)u = \kappa F(z) - z \overline{F'(z)} + \overline{H(z)}, \quad (2.29)$$

где  $H(z)$  - еще одна произвольная голоморфная функция. Очевидные соотношения между голоморфными функциями могут получены путем объединения (2.29) с (2.11) и (2.14), что в конечном итоге приводит к следующему общему решению для комплексного вектора перемещения

$$2Gu = \kappa \varphi(z) - z \overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad \varphi'(z) = \Phi(z), \quad \psi'(z) = \Psi(z). \quad (2.30)$$

В случае массовых сил решения (2.24) и (2.30) должны быть дополнены добавлением частных решений, отвечающих за правые части соответствующих уравнений. Такие решения могут быть получены в различных формах в зависимости от ограничений, наложенных на массовые силы. Так Мусхелишвили [1966] предлагает использовать решение для сосредоточенной силы, действующей в произвольной точке области, с последующим интегрированием этого решения по всей рассматриваемой области. Такой подход может быть применен для массовых сил общего вида. Аналогичные результаты могут быть получены и на основе формула Помпея [Векуа, 1959], которая выражает частное решение для комплексного уравнения  $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$  с помощью особого сингулярного интеграла. Формально решение может также быть выписано с помощью неопределенных интегралов. Векуа [1959] показал эквивалентность этих двух представлений для аналитических функций двух переменных, т. е. для функций, которых можно разложить в ряд по этим переменным. Такой класс функций

охватывает многие приложения. Таким образом, для консервативных сил можно представить частные решения в виде

$$2Gu^* = \frac{1}{2} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \int \Pi dz, \quad P^* = \frac{2}{\kappa+1} \Pi, \quad D^* = -\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \int \frac{\partial \Pi}{\partial z} d\bar{z}. \quad (2.31)$$

Эти выражения должны быть добавлены к правой части общего решения (2.24) и (2.30).

Общие решения в голоморфных функциях широко используются для исследования краевых задач в следующих главах. Полезны и некоторые другие общие решения. Например, очевидно, что комплексное уравнение равновесия будет выполнено, если ввести комплекснозначную функцию  $B$  следующим образом  $\frac{\partial B}{\partial \bar{z}} = P$ ,  $\frac{\partial B}{\partial z} = D$ . Принимая во внимание (2.24), можно выразить эту функцию в виде

$$B = \overline{\varphi(z)} + T(z, \bar{z}). \quad (2.32)$$

Здесь введено обозначение для другой биголоморфной функции

$$T = \bar{z}\Phi(z) + \psi(z), \quad (2.33)$$

которая будет использоваться в следующих главах. Отметим очевидную связь между биголоморфными функциями

$$D(z, \bar{z}) = \frac{\partial}{\partial z} T(z, \bar{z}). \quad (2.34)$$

Можно заметить, что  $B$  можно рассматривать как производную вещественной функции  $A$ , т.е.  $B = \frac{\partial A}{\partial z}$ , поэтому, после интегрирования (2.32), приходим к

$$A = \bar{z}\varphi(z) + \chi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \overline{\chi(z)}, \quad \psi(z) = \chi'(z). \quad (2.35)$$

Функция  $A$  называется функцией Эйри, это бигармоническая функция (если массовые силы отсутствуют); для консервативных сил функция Эйри удовлетворяет, как видно из (2.22), уравнению

$$\frac{\partial^4 A}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = -\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (2.36)$$

Частные решения для функции напряжения  $A$  и  $B$  имеют вид

$$A^* = -\frac{1-\nu}{2} \iint \Pi dz d\bar{z}, \quad B^* = -\frac{1-\nu}{2} \int \Pi d\bar{z}. \quad (2.37)$$

Следует отметить, что в случае гармонических массовых сил функция Эйри по-прежнему остается бигармонической.

#### **2.4. Уравнения для анизотропной среды в обобщенных комплексных переменных**

Используя функции, введенные в (2.10), можно представить закон Гука для ортотропной среды в виде

$$\begin{pmatrix} P \\ \text{Re } D \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2 - \lambda^2} \begin{pmatrix} 1+\nu & -\lambda \\ -\lambda & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \text{Re } \delta \end{pmatrix}, \quad \text{Im } D = 2G \text{Im } \delta. \quad (2.38)$$

Из этого выражения видно, что, в отличие от изотропного случая, когда  $\arg(D)=\arg(\delta)$ , в анизотропной среде тензор деформации не соосен тензору напряжений. Таким образом, для ортотропного случая нельзя получить такие простые отношения между напряжением и деформацией функции, как в (2.14). Однако общее решение для произвольной анизотропной среды может быть получено с помощью функции Эйри. Это предполагает подстановку компонент напряжений, выраженных через функцию Эйри в закон Гука с последующей подстановкой в уравнение совместности. В конечном итоге это приводит к линейному уравнению в частных производных четвертого порядка относительно функции Эйри. Поскольку низшие производные не присутствуют в этом уравнении, то это позволяет представить его однородное решение в виде линейной комбинации функций вида  $F_k(x_1 + \mu_k x_2)$ , где  $\mu_k$  - четыре корня характеристического уравнения четвертой степени. Эти корни не являются вещественными, см. доказательство для общего случая анизотропии в книге [Лехницкий, 1977] и, следовательно, они представлены двумя парами комплексно

сопряженных чисел  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Далее вводятся две обобщенные комплексные переменные  $z_1=x_1+\mu_1x_2$ ,  $z_2=x_1+\mu_2x_2$ , после чего общее выражение для функции напряжений Эйри выражается в виде двух функций  $F_k(z_k)$ , которые играют роль, аналогичную потенциалам в изотропном случае. В случае объемных сил следует добавить частное решение неоднородного уравнения. Обобщенные формулы Колосова-Мусхелишвили для компонент напряжений находятся путем дифференцирования функции Эйри и, далее, могут быть выведены выражения для компонент напряжений и перемещений.

Выведем общее решение для ортотропной среды, следуя книге [Работнов, 1988], но с учетом объемных сил, считая, что они имеют потенциал  $\Pi$  (отметим, что в решении Работнова для перемещений содержатся ошибки, а именно отсутствует  $E$ , а  $\lambda$  надо заменить на  $-\lambda$ ). Дифференциальные уравнения равновесия будут удовлетворены, если компоненты напряжений в декартовых координатах выбраны следующим образом

$$\sigma_{11} = \Pi + \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \Pi + \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (2.39)$$

Подстановка (2.39) в (2.5) с последующей подстановкой результата в (2.2) приводит к уравнению, которому должны удовлетворять функции напряжения Эйри

$$(1+\lambda)\frac{\partial^4 A}{\partial x_1^4} + 2(1+\nu-\nu)\frac{\partial^4 A}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + (1-\lambda)\frac{\partial^4 A}{\partial x_2^4} = -(1+\lambda-\nu)\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1^2} - (1-\lambda-\nu)\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^2}, \quad (2.40)$$

где обозначено  $2(1+\nu)=EG^{-1}$ .

Решение однородного уравнения (2.40) ищется в форме  $A=F(x_1+i\omega x_2)$ , где для удобства введено обозначение  $\mu=i\omega$ . Это приводит к следующему характеристическому уравнению

$$(1-\lambda)\omega^4 - 2(1+\nu-\nu)\omega^2 + (1+\lambda) = 0. \quad (2.41)$$

Если корни биквадратного уравнение (2.41) положительны (что и наблюдается на практике для многих материалов), то четыре различных корня есть  $\pm p, \pm q$  ( $0 < q < p$ ). По теореме Виета,  $p^2 q^2 = (1+\lambda)(1-\lambda)^{-1}$ ,  $p^2 + q^2 = 2(1+\nu-\nu)(1-\lambda)^{-1}$ . Окончательно, общее решение однородного уравнения (2.40) может быть выражено с помощью комплексных потенциалов, которые являются функциями пары обобщенных комплексных переменных  $z_1$  и  $z_2$  в виде

$$A = 2\text{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)], \quad z_1 = x_1 + ipx_2, \quad z_2 = x_1 + iqx_2. \quad (2.42)$$

Это решение имеет место для некратных корней уравнения (2.41), в противном случае оно должно быть скорректировано. Отметим, что непосредственный переход к изотропному случаю ( $\lambda=0$  и  $\nu=\nu$ ) не представляется возможным, потому что это приводит к двум кратным корням  $\omega_{1,2}=-1$ ,  $\omega_{3,4}=1$ .

В случае, когда массовые силы отсутствуют ( $\Pi=0$ ), выражения для компонент напряжений находятся из (2.39) и (2.42) следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p^2 \text{Re}\Phi'_1(z_1) - q^2 \text{Re}\Phi'_2(z_1) \\ \sigma_{22} &= \text{Re}\Phi'_1(z_1) + \text{Re}\Phi'_2(z_1) \\ \sigma_{12} &= -p \text{Im}\Phi'_1(z_1) - q \text{Im}\Phi'_2(z_1), \end{aligned} \quad (2.43)$$

где  $\Phi_1(z_1) = F'_1(z_1)$  и  $\Phi_2(z_2) = F'_2(z_2)$ . Следовательно, для функций напряжений находим

$$\begin{aligned} 2P &= (1-p^2)\text{Re}\Phi'_1(z_1) + (1-q^2)\text{Re}\Phi'_2(z_1) \\ 4D &= (1-p)^2\Phi'_1(z_1) + (1+p)^2\overline{\Phi'_1(z_1)} + (1-q)^2\Phi'_2(z_1) + (1+q)^2\overline{\Phi'_2(z_1)} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Решения для перемещений может быть найдена подстановкой  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  из (2.43) в первые два уравнения (2.5) с последующим интегрированием, что дает (члены, соответствующие смещениям тела как жесткого целого, опущены)

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{p^2(1-\lambda)+\nu}{E}\text{Re}\Phi_1(z_1) - \frac{q^2(1-\lambda)+\nu}{E}\text{Re}\Phi_2(z_2) \\ u_2 &= \frac{(1+\lambda)+\nu p^2}{pE}\text{Im}\Phi_1(z_1) + \frac{(1+\lambda)+\nu q^2}{qE}\text{Im}\Phi_2(z_2) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Для того чтобы учесть массовые силы, необходимо добавить частные решения в однородные решения (2.42) - (2.45). Это требует интегрирования (2.40), что может быть выполнено с помощью дифференциальных операторов

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{i}{p} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial z_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{i}{q} \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (2.46)$$

Операторы высших порядков получаются путем последовательного применения (2.46), некоторые из них, используемые в дальнейшем, приведены ниже

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{q^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1 \partial z_2 \partial \bar{z}_2} = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \frac{p^2 + q^2}{p^2 q^2} \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{1}{p^2 q^2} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \quad (2.48)$$

Принимая во внимание отношения между упругими постоянными и корнями (2.41), можно заметить, что (2.48) является точным выражением левой части в (2.40) в то время как члены в правой части (2.40) можно заменить, разрешая (2.47), на

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \frac{p^2}{p^2 - q^2} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} - \frac{q^2}{p^2 - q^2} \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \frac{-p^2 q^2}{p^2 - q^2} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \frac{p^2 q^2}{p^2 - q^2} \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Это можно сделать при условии, что корни (2.42) не являются кратными.

С учетом последних формул уравнение (2.40) можно переписать в форме, пригодной для последовательного интегрирования следующим образом

$$\frac{\partial^4 A}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1 \partial z_2 \partial \bar{z}_2} = \alpha \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \beta \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2}, \quad (2.50)$$

где для краткости обозначено



$$\alpha = \frac{2(1-p^2)q^2 - v(1+p^2q^2)(1+q^2)}{2q^2(p^2-q^2)}, \quad \beta = \frac{2(q^2-1)p^2 - v(1+p^2q^2)(1+p^2)}{2p^2(p^2-q^2)} \quad (2.51)$$

Общее решение однородного уравнения (2.50) по-прежнему дается формулой (2.42). Необходимое условие вытекает из того, что произвольные функции  $F_k(z_k)$  удовлетворяют следующим уравнениям

$$\frac{\partial F_1(z_1)}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial F_2(z_2)}{\partial z_2} = 0. \quad (2.52)$$

Для строгого доказательства достаточного условия см [Лехницкий, 1977], где оно проведено для операторов более общего вида, чем (2.46), и основано на последовательном интегрировании по обобщенным комплексным переменным.

Частное решение для функции напряжений Эйри может быть представлено в следующей символической форме

$$A^* = \alpha \iint \Pi dz_2 d\bar{z}_2 + \beta \iint \Pi dz_1 d\bar{z}_1. \quad (2.53)$$

Следует отметить, что интегралы в (2.53) используются в качестве формальных операторов. Фактически эти интегралы могут быть найдены, путем замены декартовых координат в выражение для функции  $\Pi = \Pi(x_1, x_2)$  на комплексно сопряженные переменные  $(z_2, \bar{z}_2)$  в первом интеграле в (2.53) или на  $(z_1, \bar{z}_1)$  во втором с последующим повторным интегрированием по соответствующим переменным. Однако, этот метод пригоден только для функций в аналитической форме, в общем случае, интегрирование может быть выполнено численно в декартовых координатах, используя отношения (2.47).

## 2.5. Главные напряжения и главные направления

Рассмотрим линейное преобразование комплексных переменных (перенос начала координат в точку  $z_0$ , а затем поворот на угол  $\omega$ ) в виде

$$z = z_0 + e^{i\omega} z'. \quad (2.54)$$

Далее угол  $\omega$  отсчитывается против часовой стрелки от старой оси  $Ox$  в направлении новой оси  $O'x'$ .

Перенос не меняет ни длину вектора, ни его аргумент, в то время как из-за вращения аргумент получает приращение  $\omega$ . Таким образом, соотношения для комплексных векторов перемещения и объемных сил при переходе к другой системе координат, имеют вид

$$u = e^{i\omega} u', \quad \bar{f} = e^{-i\omega} \bar{f}'. \quad (2.55)$$

Дифференциальные операторы принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial z} = e^{-i\omega} \frac{\partial}{\partial z'}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = e^{i\omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}'}. \quad (2.56)$$

Подстановка (2.55) - (2.56) в (2.12) приводит к ДУР в новых переменных

$$\frac{\partial P}{\partial z'} - e^{2i\omega} \frac{\partial D}{\partial \bar{z}'} + \frac{\bar{f}'}{2} = 0. \quad (2.57)$$

Для того чтобы обеспечить инвариантность ДУР должны выполняться следующие соотношения между функциями напряжений в двух различных системах координат

$$P' = P, \quad D' = e^{2i\omega} D. \quad (2.58)$$

Как следует из (2.14) аналогичные соотношения справедливы и для функций деформаций. Легко проверить, что комплексные уравнения Ламе (2.18) также сохраняет свой вид после преобразований (2.54) - (2.56). Правила для преобразования комплексных потенциалов является следствием (2.58), т. е. голоморфные функции  $\tilde{\Phi}(z')$ ,  $\tilde{\Psi}(z')$  играют ту же роль, что и функции  $\Phi(z)$ ,  $\Psi(z)$ , если

$$\Phi(z) = \tilde{\Phi}(z'), \quad \Psi(z) = e^{-2i\omega} \left( \tilde{\Psi}(z') - \bar{z}_0 e^{i\omega} \tilde{\Phi}'(z') \right). \quad (2.59)$$

Правила преобразования компонент напряжений (деформаций) могут быть также получены из (2.58) и (2.10)

$$\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \cos 2\omega + \sigma_{12} \sin 2\omega \\
\sigma'_{22} &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \cos 2\omega - \sigma_{12} \sin 2\omega \\
\sigma'_{12} &= \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \sin 2\omega + \sigma_{12} \cos 2\omega
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Обратное преобразование (2.60) получается взаимной заменой штрихованных компонент на нештрихованные и изменением угла на обратный  $-\omega$ .

Представим девиатор напряжений в комплексно-экспоненциальной форме

$$D = \tau e^{i\alpha}, \quad \tau = |D|, \quad \alpha = \arg(D) \quad (-\pi < \alpha \leq \pi). \tag{2.61}$$

Тогда, из (2.58) следует, что

$$\tau' = \tau, \quad \alpha' = \alpha + 2\omega \quad (-\pi < \alpha' \leq \pi). \tag{2.62}$$

Угол вращения  $\omega$  может быть выбран так, что  $Im(D')=0$ , и, следовательно,  $\sigma'_{12}=0$ . Возможны два случая -  $\alpha'_1=0$  и  $\alpha'_2=\pi$ , они приводят к

$$\begin{aligned}
\alpha'_1 = 0 &\Rightarrow D' = \tau \Rightarrow \sigma'_{11} = P - \tau, \quad \sigma'_{22} = P + \tau \\
\alpha'_2 = \pi &\Rightarrow D' = -\tau \Rightarrow \sigma'_{11} = P + \tau, \quad \sigma'_{22} = P - \tau
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Таким образом, повороты на углы  $\omega = -\alpha/2$  и  $\omega = \pi/2 - \alpha/2$  определяют два ортогональные *главные направления* плоского тензора напряжений, которые могут также быть найдены как два корня  $\theta_{1,2} \in (-\pi/2, \pi/2]$  тригонометрического уравнения

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}. \tag{2.64}$$

Нормальные напряжения соосные с этими направлениями называются *главными напряжениями* плоского тензора напряжений, они далее обозначаются как  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

В дальнейшем также принимается следующее соглашение - главное напряжение  $\sigma_1$  всегда максимально, т.е.  $\sigma_2 \leq \sigma_1$ , и его направление задается углом

$\theta$  по отношению к положительному направлению вещественной оси. На основании этого соглашения, можно заключить

$$\sigma_1 = P + \tau, \quad \sigma_2 = P - \tau \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (2.65)$$

Это соглашение также позволяет избежать двойственности в (2.63), потому что в случае, когда  $\alpha'_1=0$  максимальное главное напряжение есть  $\sigma'_{22}$  и, следовательно, угол есть  $\theta = \pi/2 + \omega = \pi/2 - \alpha/2$ ; в случае, когда  $\alpha'_2=\pi$  максимальное главное напряжение есть  $\sigma'_{11}$ , таким образом, угол есть  $\theta = \omega = \pi/2 - \alpha/2$ , т. е. такой же, как и в предыдущем случае. Таким образом, индексы 1 и 2 для главных направлений могут быть далее опущены, и так как  $\alpha = \pi - 2\theta$ , то выражение для девиатора напряжений принимает вид

$$D = -\tau e^{-2i\theta}. \quad (2.66)$$

Из (2.65) и (2.66) следует, что компоненты напряжений выражаются через главные направления и главные напряжения (или функции напряжений) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= P - \operatorname{Re} D = P + \tau \cos 2\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \\ \sigma_{22} &= P + \operatorname{Re} D = P - \tau \cos 2\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \\ \sigma_{12} &= \operatorname{Im} D = \tau \sin 2\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (2.67)$$

Из третьей формулы (2.67) видно, что касательное напряжение достигнет своего максимума  $\tau$  на плоскостях, наклоненных под углом  $\pm\pi/4$  к главным направлениям, поэтому функция  $\tau$  называется *максимальным касательным напряжением* и обозначается далее  $\tau_{\max}$ .

Следует отметить, что главные напряжения являются инвариантами, т. е. они не зависят от системы координат, таким образом, среднее напряжение  $P$  и максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  также инвариантны.

В каждой точке (где  $\sigma_2 < \sigma_1$ ) существуют два ортогональных главных направления, которые можно рассматривать как касательные к двум семействам

кривых. Последние называются *траекториями главных напряжений*, они образуют ортогональную сеть в рассматриваемой области. В точке, где  $\sigma_2 = \sigma_1$ , главные направления не определены, следуя терминологии, принятой в фотоупругости такая точка в дальнейшем называется *изотропной точкой*. Очевидно, что изотропные точки - суть есть комплексные корни уравнения  $D=0$ , они могут быть как дискретными, так и непрерывными. Классификация изотропных точек, как показали Каракин и Мухамедиев [1993], может быть основана на соотношениях между двумя комплексными коэффициентами,  $A$  и  $B$  в асимптотике функции напряжения  $D$  вблизи ее корня  $z_*$ , т. е. на  $D(z, \bar{z}) = A(\bar{z} - \bar{z}_*) + B(z - z_*) + \dots$ . Так, если  $|A| > |B|$ , то это изотропная точка заблокированного типа ( $A$ -тип), если  $|A| < |B|$  то это неблокированная точка ( $B$ -тип), терминология из [Kuske, Robertson, 1974]. Примеры траекторий главных напряжений с изотропными точками будут постоянно обсуждаться в следующих главах.

## 2.6. Различные формы уравнений равновесия

Так как два семейства траекторий напряжений ортогональны, то их можно рассматривать как оси ортогональных криволинейных координат. Тогда все уравнения упругости можно переписать в этих криволинейных координатах (уравнения равновесия Ламе-Максвелла).

Давайте сперва рассмотрим произвольный гладкий контур, задаваемый уравнением  $\zeta = \zeta(s)$ , и определим следующие производные по контуру

$$\frac{d\zeta}{ds} = e^{i\vartheta}, \quad \frac{d\bar{\zeta}}{ds} = e^{-i\vartheta}, \quad \frac{d\bar{\zeta}}{d\zeta} = e^{-2i\vartheta}, \quad (2.68)$$

где  $s$  - длина дуги вдоль контура, а  $\vartheta$  - угол между касательной к контуру и действительной осью (отсчитываемый против часовой стрелки от оси  $Ox$ ).

Дифференциал произвольной функции двух комплексных сопряженных переменных,  $f = f(z, \bar{z})$ , дифференцируемой по обоим этим переменным имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}, \quad (2.69)$$

на контуре  $z=\zeta$ , тогда, путем деления обеих частей (2.69) на  $ds$ , находим следующее выражение для производной функции  $f$  по длине дуги

$$\frac{df}{ds}(\zeta) = \frac{d\zeta}{ds} \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} + \frac{d\bar{\zeta}}{ds} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\bar{\zeta}} = e^{i\vartheta} \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} + e^{-i\vartheta} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\bar{\zeta}}. \quad (2.70)$$

Принимая во внимание, что  $\frac{df}{ds} = e^{i\vartheta} \frac{df}{d\zeta}$ , из (2.70) найдем следующие выражения для дифференциальных операторов по контурным переменным  $s$  и  $\zeta$

$$\frac{d}{ds} = e^{i\vartheta} \frac{\partial}{\partial z} + e^{-i\vartheta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{d}{d\zeta} = \frac{\partial}{\partial z} + e^{-2i\vartheta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \quad (2.71)$$

Заменяя дифференцирование по комплексным переменным в соответствии с (2.8) можно заметить, что первый оператор в (2.71) фактически представляет собой производную по направлению.

Для криволинейной ортогональной системы координат, которая обеспечивает взаимно-однозначное соответствие с комплексными координатами можно формально использовать правило дифференцирования сложной функции, для того, чтобы представить дифференциальные операторы в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial z}{\partial q} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial q} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad (2.72)$$

где  $s$  и  $q$  являются длинами дуг вдоль координатных линий. Эти формулы можно преобразовать, учитывая, что на контуре справедливы следующие соотношения

$$\frac{\partial \zeta}{\partial q} = i \frac{\partial \zeta}{\partial s}, \quad \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial q} = -i \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial s}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial s} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial s} = 1. \quad (2.73)$$

Здесь принято, что нормали и касательные к контуру расположены как оси  $Ox_2$  и  $Ox_1$  соответственно. Поэтому на контуре

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial \zeta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}, \quad \frac{\partial}{\partial q} = i \frac{\partial \zeta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \zeta} - i \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}. \quad (2.74)$$

Разрешая (2.74) относительно комплексных производных, найдем

$$2 \frac{\partial \zeta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial s} - i \frac{\partial}{\partial q}, \quad 2 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial}{\partial s} + i \frac{\partial}{\partial q}. \quad (2.75)$$

Следует отметить, что в силу (2.73)

$$\left( \frac{\partial}{\partial s} - i \frac{\partial}{\partial q} \right) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial s} = \left( \frac{\partial}{\partial s} + i \frac{\partial}{\partial q} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial s} = 0. \quad (2.76)$$

Таким образом, оператор Лапласа в координатах  $(s, q)$  имеет вид

$$\Delta \equiv 4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial q^2}. \quad (2.77)$$

Связи между частными производными второго порядка по длине дуги и контурной переменной даются выражениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} &= 2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \left( \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial s^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \\ \frac{\partial^2}{\partial q^2} &= 2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} - \left( \frac{\partial \zeta}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \left( \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial s^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \end{aligned} \quad (2.78)$$

и

$$\begin{aligned} 4 \left( \frac{\partial \zeta}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial s} - i \frac{\partial}{\partial q} - 2 \frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{\partial \zeta}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial}{\partial s} - i \frac{\partial}{\partial q} \right) \\ 4 \left( \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial s} + i \frac{\partial}{\partial q} - 2 \frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial}{\partial s} + i \frac{\partial}{\partial q} \right) \end{aligned} \quad (2.79)$$

Принимая во внимание (2.71) их можно переписать через угол касательной к контуру следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} &= 2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} + e^{2i\vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} + 2i \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} + e^{-2i\vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} - 2i \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{\zeta}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \\ \frac{\partial^2}{\partial q^2} &= 2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} - e^{2i\vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} + 2i \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} - e^{-2i\vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} - 2i \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{\zeta}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned}
4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} &= e^{-2i\vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial s} - i \frac{\partial}{\partial q} - 2i \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial}{\partial s} - i \frac{\partial}{\partial q} \right) \\
4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}^2} &= e^{2i\vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial s} + i \frac{\partial}{\partial q} + 2i \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial}{\partial s} + i \frac{\partial}{\partial q} \right)
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Для декартовых координат имеем  $s=x_1$ ,  $q=x_2$  и  $\vartheta=0$ , тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}^2}, & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2, & \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}^2} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Для двух взаимно ортогональных направлений  $\zeta_1(s_1)$ ,  $\zeta_2(s_2)$  дифференциальные операторы находятся из (2.71) и (2.75) в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{e^{-i\vartheta}}{2} \left( \frac{\partial}{\partial s_1} - i \frac{\partial}{\partial s_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{i\vartheta}}{2} \left( \frac{\partial}{\partial s_1} + i \frac{\partial}{\partial s_2} \right) \tag{2.83}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{2i\vartheta}}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta_1} - \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \right) \tag{2.84}$$

Здесь предполагается, что касательные векторы в точке пересечения контуров  $\zeta_1(s_1)$  и  $\zeta_2(s_2)$  образуют правую пару (как действительная и мнимые оси в комплексной плоскости), т. е. составляют с осью  $Ox$  углы  $\vartheta$  и  $\vartheta + \pi/2$  соответственно.

Подстановка (2.83) в ДУР (2.20) приводит к

$$\frac{\partial(P-\Pi)}{\partial s_1} - i \frac{\partial(P-\Pi)}{\partial s_2} = e^{2i\vartheta} \left( \frac{\partial D}{\partial s_1} + i \frac{\partial D}{\partial s_2} \right). \tag{2.85}$$

Заменой девиатора по (2.66) с последующим разделением действительной и мнимой части, получается два ДУР в криволинейных координатах на функции напряжений и главные направления



$$\begin{aligned} \frac{\partial(P-\Pi)}{\partial s_1} + \cos 2(\vartheta - \theta) \left( \frac{\partial \tau}{\partial s_1} + 2\tau \frac{\partial \theta}{\partial s_2} \right) - \sin 2(\vartheta - \theta) \left( \frac{\partial \tau}{\partial s_2} - 2\tau \frac{\partial \theta}{\partial s_1} \right) &= 0, \\ \frac{\partial(P-\Pi)}{\partial s_2} - \cos 2(\vartheta - \theta) \left( \frac{\partial \tau}{\partial s_2} - 2\tau \frac{\partial \theta}{\partial s_1} \right) - \sin 2(\vartheta - \theta) \left( \frac{\partial \tau}{\partial s_1} + 2\tau \frac{\partial \theta}{\partial s_2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.86)$$

Полагая  $\vartheta = \theta$  в (2.86), получим уравнения Ламе-Максвелла

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + 2\tau \frac{\partial \theta}{\partial s_2} = \frac{\partial \Pi}{\partial s_1}, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + 2\tau \frac{\partial \theta}{\partial s_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial s_2}. \quad (2.87)$$

В фотоупругости часто используются ДУР вдоль направления максимального напряжения сдвига. Полагая  $\vartheta = \theta + \pi/4$  можно вывести эти уравнения из (2.86) в виде

$$\frac{\partial(P-\Pi)}{\partial r_1} - \frac{\partial \tau}{\partial r_2} + 2\tau \frac{\partial \theta}{\partial r_1} = 0, \quad \frac{\partial(P-\Pi)}{\partial r_2} - \frac{\partial \tau}{\partial r_1} - 2\tau \frac{\partial \theta}{\partial r_2} = 0, \quad (2.88)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  - длины дуг вдоль кривых касательные к которым соосны направлениям максимальных касательных напряжений. Эти кривые часто называют *линиями скольжения*.

ДУР в полярных координатах  $(\rho, \vartheta)$  находятся с использованием соотношений,  $s_1 = \rho$ ,  $s_2 = \rho\vartheta$ , что приводит к

$$\frac{\partial(P-\Pi)}{\partial \rho} - i \frac{1}{\rho} \frac{\partial(P-\Pi)}{\partial \vartheta} = e^{2i\vartheta} \left( \frac{\partial D}{\partial \rho} + i \frac{1}{\rho} \frac{\partial D}{\partial \vartheta} \right) \quad (2.89)$$

Обычный вид ДУР через компоненты напряжений в полярных координатах могут быть легко получены из (2.89) путем замен,  $2P = \sigma_\rho + \sigma_\vartheta$ ,  $2D = e^{-2i\vartheta} (\sigma_\vartheta - \sigma_\rho + 2i\sigma_{\rho\vartheta})$  с последующим разделением действительной и мнимой частей.

Для справки выпишем выражения для вторых производных по комплексно-сопряженным переменным

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} = \frac{e^{2i\vartheta}}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} + 2i \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \right), \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{e^{-2i\vartheta}}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} - 2i \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \right) \quad (2.90)$$

Для смешанной производной см (2.77). С помощью этих выражений легко составить уравнения совместности деформаций (2.13) и уравнения в перемещениях (2.18) в терминах главных направлений. Они здесь не приводятся, поскольку не пригодятся в дальнейшем.

## ***2.7. Исследование полей траекторий главных напряжений, возникающих в плоской задаче теории упругости***

При анализе полей напряжений часто используются поля трех компонент напряжений, которые по сути менее информативны чем поля их комбинаций, например, максимальных главных напряжений или максимальных касательных напряжений, поскольку эти характеристики являются инвариантными и входят в различные прочностные критерии. В последующих главах будет широко использоваться и поля траекторий главных напряжений, которые также весьма информативны для задач геомеханики и фотоупругости. Здесь возникает вопрос нельзя ли интерполировать поле траекторий из каких-либо наблюдений главных напряжений внутри области и далее проинтегрировать уравнения равновесия в форме Ламе-Максвелла? Так собственно и поступают при определении напряжений в фотоупругости, где получение полей траекторий из картины изохром не представляет особой трудности. Однако работа с дискретными данными существенно отличается, поскольку использование различных методов интерполяции может приводить к существенно разным результатам. В связи с этим возникает вопрос о том, существуют ли какие-либо критерии, которые позволят отбраковывать некорректные интерполяции полей траекторий. В более общем виде этот вопрос сводится к тому, чтобы разобраться является ли произвольно нарисованная сетка двух ортогональных семейств кривых полей траекторий какой-либо плоской задачи упругости или, другими словами, удовлетворяет ли поле угла  $\theta$  каким-нибудь уравнениям. В случае пластичности

по критерию Треска ( $\tau_{\max} = \text{const}$ ) очевидно, что должно выполняться уравнение (2.22) в котором вместо  $D$  следует использовать  $\tau_{\max} \exp(-2i\theta)$ . Случай упругости был подробно разобран в работах [Мухамедиев, Галыбин, 2004; Mukhamediev, Galybin, 2007] где показано, что угол  $\theta$  есть аргумент биголоморфной функции и указан метод ее нахождения. Далее приводится один из возможных подходов, который можно рассматривать в качестве критерия отбраковки полей траекторий главных напряжений, полученных различными интерполяционными методами.

Рассмотрим алгоритм, который путем последовательных операций дифференцирования, позволяет установить допустимость использования некоторой функции двух переменных в качестве поля траекторий главных напряжений. Хотя алгоритм относительно прост, он требует наложить некоторые ограничения на существования производных высоких порядков функции  $\alpha(z, \bar{z})$ , которую мы будем считать достаточно гладкой функцией по обоим переменным. Фактически далее определяются необходимые условия того, что некоторое поле траекторий соответствует теории упругости.

Следующее тождество выполнено в любой точке области

$$D(z, \bar{z}) = e^{2i\alpha(z, \bar{z})} \overline{D(z, \bar{z})}. \quad (2.91)$$

Дифференцируя (2.91) дважды по сопряженной переменной с учетом третьего уравнения (2.23) найдем

$$\frac{\partial^2 e^{2i\alpha(z, \bar{z})}}{\partial \bar{z}^2} D(z, \bar{z}) + 2 \frac{\partial e^{2i\alpha(z, \bar{z})}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \overline{D(z, \bar{z})}}{\partial \bar{z}} + e^{2i\alpha(z, \bar{z})} \frac{\partial^2 \overline{D(z, \bar{z})}}{\partial \bar{z}^2} = 0. \quad (2.92)$$

Поскольку  $\frac{\partial^2 \overline{D(z, \bar{z})}}{\partial \bar{z}^2}$  есть сопряженная биголоморфная функция, ее вторая

производная по  $z$  должна быть равна нулю. Соответственно

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ e^{-2i\alpha(z, \bar{z})} \left[ \frac{\partial^2 e^{2i\alpha(z, \bar{z})}}{\partial \bar{z}^2} D(z, \bar{z}) + 2 \frac{\partial e^{2i\alpha(z, \bar{z})}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \overline{D(z, \bar{z})}}{\partial \bar{z}} \right] \right\} = 0. \quad (2.93)$$

Подстановка комплексно сопряженной формулы (2.93) во вторую формулу Колосова-Мусхелишвили приводит к следующему выражению

$$A_1(z, \bar{z})\Phi'(z) + A_2(z, \bar{z})\Psi(z) + A_3(z, \bar{z})\Phi''(z) + A_4(z, \bar{z})\Psi'(z) = 0. \quad (2.94)$$

Здесь комплекснозначные функции  $A_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} A_1(z, \bar{z}) &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \bar{z} B_1(z, \bar{z}), & A_2(z, \bar{z}) &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} B_1(z, \bar{z}), \\ A_3(z, \bar{z}) &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \bar{z} B_2(z, \bar{z}), & A_4(z, \bar{z}) &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} B_2(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Комплекснозначные функции  $B_1$  и  $B_2$  выражаются через аргумент  $\alpha(z, \bar{z})$  следующим образом

$$\begin{aligned} B_1(z, \bar{z}) &= e^{2i\alpha(z, \bar{z})} \frac{\partial^2 e^{-2i\alpha(z, \bar{z})}}{\partial z^2} = -2i \frac{\partial^2 \alpha(z, \bar{z})}{\partial z^2} - 4 \left( \frac{\partial \alpha(z, \bar{z})}{\partial z} \right)^2 \\ B_2(z, \bar{z}) &= 2e^{2i\alpha(z, \bar{z})} \frac{\partial e^{-2i\alpha(z, \bar{z})}}{\partial z} = -4i \frac{\partial \alpha(z, \bar{z})}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Из формул (2.95) и (2.96) следует, что уравнение (2.94) тождественно удовлетворяется, если функция  $\alpha(z, \bar{z})$  есть гармоническая, поскольку тогда все  $A_k=0$ .

Положим вначале  $A_4=0$  и считаем, что  $\alpha(z, \bar{z})$  не есть гармоническая функция. Тогда  $\Delta \alpha(z, \bar{z})$  будет некоторой голоморфной функцией переменной  $z$ , но из-за того, что эта функция вещественная, она должна быть равна некоторой постоянной  $C$ , что делает возможным найти производную  $\alpha(z, \bar{z})$

$$4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \alpha(z, \bar{z}) = C, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{1}{4} C \bar{z} + f(z), \quad (2.97)$$

где  $f(z)$  – произвольная голоморфная функция. Подстановка (2.96) в (2.95) с учетом (2.97) дает

$$A_1(z, \bar{z}) = -\frac{3}{2} C^2 \bar{z} + 4Cf(z), \quad A_2(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2} C^2, \quad A_3(z, \bar{z}) = -2iC. \quad (2.98)$$

Тогда (2.94) принимает следующий вид

$$\left[ -\frac{3}{2}C^2\bar{z} + 4Cf(z) \right] \Phi'(z) - \frac{1}{2}C^2\Psi(z) - 2iC\Phi''(z) = 0. \quad (2.99)$$

Дифференцирование (2.99) по сопряженной переменной приводит к соотношению

$$C^2\Phi'(z) = 0, \quad (2.100)$$

которое означает либо  $C=0$ , либо  $\Phi'(z)=0$ . Во всех случаях функция  $\alpha(z, \bar{z})$  будет гармонической. Таким образом случай  $A_4=0$  аналогичен случаю гармонического аргумента, когда (2.94) необходимо выполняется.

Далее выполним следующие шаги.

Делим (2.94) на  $A_4$  и дифференцируем его по сопряженной переменной. Это позволяет исключить функцию  $\Psi'(z)$  и приводит к следующему уравнению

$$C_1(z, \bar{z})\Phi'(z) + C_2(z, \bar{z})\Psi(z) + C_3(z, \bar{z})\Phi''(z) = 0. \quad (2.101)$$

Здесь комплекснозначные функции  $C_k$  ( $k=1,2,3$ ) есть

$$C_1(z, \bar{z}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{A_1(z, \bar{z})}{A_4(z, \bar{z})}, \quad C_2(z, \bar{z}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{A_2(z, \bar{z})}{A_4(z, \bar{z})}, \quad C_3(z, \bar{z}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{A_3(z, \bar{z})}{A_4(z, \bar{z})}. \quad (2.102)$$

Если какой-либо из  $C_k$  тождественно равен нулю, то можно найти (например, в случае  $C_3=0$ )

$$C_1(z, \bar{z})\Phi'(z) = -C_2(z, \bar{z})\Psi(z). \quad (2.103)$$

Это немедленно дает, что для выполнения уравнения (2.101) требуется удовлетворить следующее условие на коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln \frac{C_1(z, \bar{z})}{C_2(z, \bar{z})} = 0. \quad (2.104)$$

Если ни одна из функций  $C_k$  не является тождественным нулем, то уравнение схожее с (9.103) может быть получено из (9.101) делением на  $C_3$  и последующим дифференцированием по сопряженной переменной, что нужно для того, чтобы

исключить одну из оставшихся голоморфных функций, например,  $\Phi''(z)$ . Это приводит к соотношению

$$\Phi'(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{C_1(z, \bar{z})}{C_3(z, \bar{z})} = -\Psi(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{C_2(z, \bar{z})}{C_3(z, \bar{z})}. \quad (2.105)$$

Из (2.105) следует

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ \ln \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{C_1(z, \bar{z})}{C_3(z, \bar{z})} - \ln \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{C_2(z, \bar{z})}{C_3(z, \bar{z})} \right] = 0. \quad (2.106)$$

Таким образом, если поле траекторий соответствует упругой задаче, то необходимо выполняется соотношение (2.106) при условии, что функция  $\alpha(z, \bar{z})$  не есть гармоническая. При этом функции  $C_k$  определяются по формулам (2.102) и (2.95). Если  $\alpha(z, \bar{z})$  - гармоническая, то очевидно, что она также является допустимой для упругости.

## 2.8. Выводы и замечания по главе

В главе дано систематическое изложение теории упругости в случае плоской задачи с использованием комплексных переменных. Оно опирается на классические работы [Векуа, 1948; 1959; Мусхелишвили, 1966; Лехницкий, 1977; Работнов, 1979], но содержит дополнения, учитывающие объемные силы. В частности, показано, что для гармонических массовых сил функция Эйри по-прежнему остается бигармонической, а средние напряжения – гармонической функцией. Опираясь на эту технику получены выражения для уравнений теории упругости для произвольных ортогональных координат, в частности вдоль траекторий главных напряжений (уравнения Ламе-Максвелла) и вдоль линий скольжения.

Следует подчеркнуть, что условие того, что средние напряжения представляются гармонической функцией, допускает обобщение на случай, когда реология среды не является упругой. При выполнении этого условия, все постановки краевых задач, в которых не используется закон Гука, эквивалентны упругим постановкам. Таким образом, если при обработке экспериментальных

данных удастся показать, что шаровая часть тензора напряжений допускает приближение гармонической функцией, то такая среда может рассматриваться в виде упругой.

Проведено исследование полей траекторий главных напряжений, возникающих в упругой задаче и определены необходимые условия, налагаемые на гладкую функцию двух переменных, при которых она может рассматриваться в виде поля траекторий главных напряжений, допустимого в упругости. Показано, что не любая сетка, представленная системой двух семейств ортогональных кривых, может рассматриваться в виде траекторий главных напряжений в упругой постановке, а только такая, где главные направления представимы аргументом биголоморфной функции. Это существенно сужает число интерполяционных методов, способных реконструировать поля траекторий по дискретным данным.

### ГЛАВА 3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

#### 3.1. Граничные значения функции комплексных переменных и ее производных

Пусть  $\Gamma$  - граница плоской односвязной области  $\Omega$  и  $\zeta$  точка на  $\Gamma$ . За положительное направление обхода контура  $\Gamma$  принимается такое, когда область остается слева.

Уравнение контура может быть задано в параметрическом виде

$$\zeta = \zeta(s), \quad \zeta \in \Gamma, \quad 0 \leq s \leq l, \quad (3.1)$$

где  $s$  - длина дуги вдоль контура.

Пусть в точке  $\zeta$  проведена касательная. Направление касательного вектора определяется углом  $\vartheta = \vartheta(\zeta)$  по отношению к положительному направлению действительной оси при условии, что контур проходится против часовой стрелки. Учитывая уравнения контура (3.1), угол определяется следующим выражением

$$e^{i\vartheta(\zeta)} = \frac{d\zeta}{ds} = \zeta', \quad \zeta \in \Gamma. \quad (3.2)$$

Далее понадобятся единичные касательный ( $\mathbf{l}$ ) и нормальный ( $\mathbf{n}$ ) вектора к контуру, их положительные направления показаны на Рисунке 3.1. Векторы  $\mathbf{l}$  и  $\mathbf{n}$  могут быть выражены через угол  $\vartheta$  (Рисунок 3.1)

$$\mathbf{l} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta = e^{i\vartheta}, \quad \mathbf{n} = \sin \vartheta - i \cos \vartheta = -ie^{i\vartheta}. \quad (3.3)$$

Заметим, что из (3.2) и (3.3) следует, что

$$\mathbf{l} = \zeta', \quad \mathbf{n} = -i\zeta'. \quad (3.4)$$



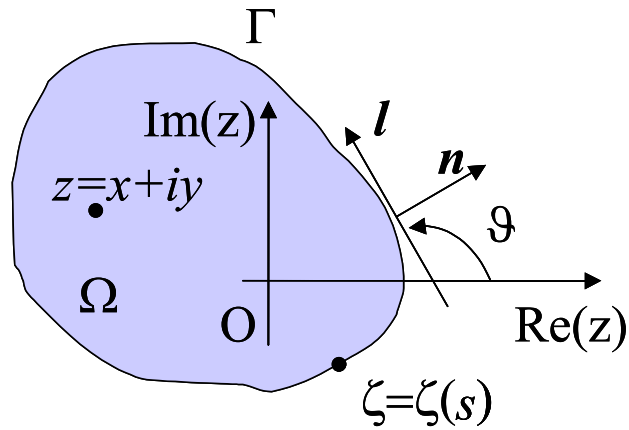


Рисунок 3.1. Положительные направления единичных касательного ( $l$ ) и нормального ( $n$ ) векторов к контуру  $\Gamma$ , ограничивающему односвязную область  $\Omega$ ,  $s$  -длина дуги контура.

**Граничные значения.** Пусть  $\Gamma$  - гладкий замкнутый контур, ограничивающий односвязную область  $X$ . На границе переменные  $z$  и  $\bar{z}$  не являются независимыми, следовательно, граничное значение функции двух переменных  $f(z, \bar{z})$ , заданной в  $\Omega$ , может быть представлено в различных формах

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z, \bar{z}) = f(\zeta, \bar{\zeta}) = f(\zeta) = f(\zeta(s)) = f(s), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (3.5)$$

Следует отметить, что здесь и далее по тексту одинаковые обозначения сохраняются для функции двух переменных и для ее краевого значения, хотя последнее есть функция одной переменной (следует отметить, что в (3.5)  $f(s)$  получается из  $f(\zeta)$  заменой  $\zeta = \zeta(s)$  и, таким образом, отличается от  $f(\zeta)$ ). Разница подчеркивается аргументом, либо комплексным  $\zeta$ , либо действительным  $s$ . Кроме того, аргумент для краевого значения функции во многих случаях может, для краткости, быть опущен.

Следует различать крайние значения, полученные предельным переходом из внутренней или внешней областей. Граничные значения комплекснозначной функции  $f(z, \bar{z})$  и ее скачок на контуре определяются следующим образом:

$$f^{\pm} \equiv f^{\pm}(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} f(z, \bar{z}), \quad \zeta \in \Gamma, \quad z \in \Omega^{\pm}, \quad (3.6)$$

$$\langle f \rangle \equiv f^+(\zeta) - f^-(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (3.7)$$

Здесь и далее индексы " $\pm$ " относятся к граничным значениям функций, определенных во внутренней (внешней) области соответственно, для краткости они могут быть опущены, если это не приводит к неправильному толкованию.

Производная по направлению, определяемому единичным комплексным вектором  $\mathbf{m} = \exp(i\omega)$  ( $|\mathbf{m}|=1$ ), вычисляется по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{m}} = \mathbf{m} \frac{\partial f(z, \bar{z})}{\partial z} + \bar{\mathbf{m}} \frac{\partial f(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}}. \quad (3.8)$$

Очевидно, что для любой вещественной функции  $f$  ( $\text{Im}(f)=0$ ) производная в (3.8) также вещественна.

Производные функции  $f$  на контуре  $\Gamma$  определяются как предельные значения

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} &= \mathbf{l} \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial f}{\partial z} + \bar{\mathbf{l}} \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \zeta' \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial f}{\partial z} + \bar{\zeta}' \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} &= \mathbf{n} \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial f}{\partial z} + \bar{\mathbf{n}} \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -i\zeta' \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial f}{\partial z} + i\bar{\zeta}' \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Очевидно, что (см также соответствующие формулы для дифференцирования вдоль траекторий главных напряжений)

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial \zeta} \zeta' = e^{i\vartheta} \frac{\partial f}{\partial \zeta}. \quad (3.10)$$

Чтобы различать производные по  $\zeta$  или  $s$  используются следующие обозначения

$$\check{f}' = \check{f}'(s) = \frac{\partial f(s)}{\partial s}, \quad f' = f'(\zeta) = \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta}. \quad (3.11)$$

Можно также использовать соответствующий субиндекс, т.е.  $\check{f}' = f'_s(s)$ ,  $f' = f'_\zeta(\zeta)$ .

Необходимо различать производные по контуру и краевые значения производных. Для последних удобно использовать субиндексы, например,

$$f'_z(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial f(z, \bar{z})}{\partial z}, \quad f'_{\bar{z}}(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial f(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}}.$$

### 3.2. Граничные значения комплексных потенциалов и функций напряжений

Краевые значения комплексных потенциалов определяются непосредственной подстановкой контурной переменной вместо комплексной переменной, что очевидно из-за голоморфности. Это верно и для всех их производных, т.е. краевое значение производной совпадает с контурной производной.

Для введенных ранее функций напряжений ( $P$  и  $D$ ) и деформаций ( $\varepsilon$  и  $\delta$ ) краевые значения находятся предельным переходом (3.5). Так для функций напряжений имеем

$$P(\zeta) = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}, \quad D(\zeta) = \bar{\zeta}\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta). \quad (3.12)$$

Краевое значение биголоморфной функции (2.33) также находится непосредственно

$$T(\zeta) = \bar{\zeta}\Phi(\zeta) + \psi(\zeta). \quad (3.13)$$

Комплексный вектор напряжений на границе принимает вид

$$\sigma(\zeta) = P(\zeta) + e^{-2i\vartheta(\zeta)} \overline{D(\zeta)} = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + e^{-2i\vartheta(\zeta)} (\zeta \overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)}). \quad (3.14)$$

Усилия на контуре (далее комплекснозначная функция  $F$ ) определяются из условия  $\sigma(\zeta) = F'(\zeta)$ , откуда легко видеть, что (3.14) удовлетворяются если выбрать

$$F(\zeta) = \varphi(\zeta) + \overline{T(\zeta)} = \varphi(\zeta) + \zeta \overline{\Phi(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)}. \quad (3.15)$$

Для комплексного вектора смещений ( $W(z, \bar{z}) = 2G\mathbf{u}(z, \bar{z})$ ) найдем

$$W(\zeta) = \kappa\varphi(\zeta) - \overline{T(\zeta)} = \kappa\varphi(\zeta) - \zeta \overline{\Phi(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}. \quad (3.16)$$

Его контурная производная на основании правила дифференцирования сложной функции есть

$$W'(\zeta) = \kappa\Phi(\zeta) - \overline{\Phi(\zeta)} - e^{-2i\vartheta(\zeta)}(\zeta\overline{\Phi'(\zeta)} - \overline{\Psi(\zeta)}). \quad (3.17)$$

Из (3.14), (3.17) вытекает связь

$$(\kappa + 1)\Phi(\zeta) = W'(\zeta) + \sigma(\zeta). \quad (3.18)$$

Суммируя (3.15) и (3.16) также найдем

$$(\kappa + 1)\varphi(\zeta) = W(\zeta) + F(\zeta). \quad (3.19)$$

Таким образом суммы в правых частях (3.18) и (3.19) представляют собой краевые значения голоморфных функций.

Хорошо известно, что любая голоморфная функция может быть представлена интегралом Коши (см., например, [Гахов, 1977]). Введем следующее представление для потенциала  $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{t - z} dt, \quad (3.20)$$

где функция контура  $g=g(\zeta)$  удовлетворяет условию Гёлдера.

На основании формул Сохоцкого-Племеля граничные значения потенциала имеют вид

$$\varphi^{\pm}(\zeta) = \pm \frac{1}{2} g(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{t - \zeta} dt. \quad (3.21)$$

Здесь уместно ввести компактные обозначения для сингулярного интеграла в (3.21), которые будут широко использоваться дальше. А именно, обозначим

$$\mathbf{S}(g) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{t - \zeta} dt. \quad (3.22)$$

Тогда (3.21) может быть представлено в виде

$$2\varphi^{\pm} = \pm g + \mathbf{S}(g). \quad (3.23)$$

Очевидно, что функция  $g=g(\zeta)$  есть скачок потенциала на контуре

$$g(\zeta) = \langle \varphi(\zeta) \rangle, \quad \zeta \in \Gamma. \quad (3.24)$$

Принимая во внимание (3.19) можно заключить

$$(\kappa+1)g(\zeta) = \langle W(\zeta) + F(\zeta) \rangle, \quad \zeta \in \Gamma. \quad (3.25)$$

Как показано в [Гахов, 1977] граничные значения производных  $m$ -го порядка голоморфной функции на замкнутом контуре даются формулами (3.21), в которых плотность заменяется на производную функции контура  $m$ -го порядка (при условии, что последняя удовлетворяет условию Гёлдера). Тогда для потенциала  $\Phi(z)$  имеем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g'(t)}{t-z} dt. \quad (3.26)$$

Его предельные значения на контуре есть

$$2\Phi^{\pm} = \pm g' + \mathbf{S}(g'). \quad (3.27)$$

Аналогично предыдущему выразим плотность в (3.26) через скачки векторов напряжений и производной смещений

$$(\kappa+1)g'(\zeta) = \langle W'(\zeta) + \sigma(\zeta) \rangle, \quad \zeta \in \Gamma. \quad (3.28)$$

Для потенциалов  $\psi(z)$  и  $\Psi(z)$  можно было бы ввести аналогичные представления, вводя другое обозначение для функции контура. Однако, как будет видно далее, более удобны представления, включающие функцию  $g=g(\zeta)$  в плотность. Поскольку обе плотности должны быть определены из решения конкретной краевой задачи, то это никоим образом не ограничивает общности. Будем далее искать потенциал  $\psi(z)$  в виде

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(t) - \bar{t}g'(t)}{t-z} dt, \quad (3.29)$$

где предполагается, что плотность и ее производная удовлетворяют условию Гёлдера. Для потенциала  $\Psi(z)$  имеем

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h'(t) - \bar{t}g''(t) - e^{-2i\vartheta(t)}g'(t)}{t-z} dt. \quad (3.30)$$

Для краевых значений этих потенциалов по формулам Сохоцкого-Племеля найдем

$$2\Psi^{\pm} = \pm h \mp \bar{\zeta}g' + \mathbf{S}(h - \bar{t}g'), \quad (3.31)$$

$$2\Psi^{\pm} = \pm h' \mp \bar{\zeta}g'' \mp e^{2i\vartheta}g' + \mathbf{S}(h' - \bar{t}g'' - e^{2i\vartheta}g'). \quad (3.32)$$

Выпишем формально соответствующие выражения для краевых значений функций напряжений, усилий, смещений и их производных

$$2P^{\pm} = \pm(g' + \bar{g}') + \mathbf{S}(g') + \overline{\mathbf{S}(g')} \quad (3.33)$$

$$2D^{\pm} = \pm(h' - e^{-2i\vartheta}g') + \mathbf{S}(h' - e^{-2i\vartheta}g') - \mathbf{S}((\bar{t} - \bar{\zeta})g'') \quad (3.34)$$

$$2T^{\pm} = \pm h + \mathbf{S}(h) - \mathbf{S}((\bar{t} - \bar{\zeta})g') \quad (3.35)$$

$$2F^{\pm} = \pm(g + \bar{h}) + \mathbf{S}(g) + \overline{\mathbf{S}(h)} - \overline{\mathbf{S}((\bar{t} - \bar{\zeta})g')} \quad (3.36)$$

$$2W^{\pm} = \pm(\kappa g - \bar{h}) + \kappa \mathbf{S}(g) - \overline{\mathbf{S}(h)} + \overline{\mathbf{S}((\bar{t} - \bar{\zeta})g')} \quad (3.37)$$

$$2\sigma^{\pm} = \pm(g' + e^{-2i\vartheta}\bar{h}') + \mathbf{S}(g') + \overline{\mathbf{S}(g')} + \\ + e^{-2i\vartheta}\overline{\mathbf{S}(h' - e^{-2i\vartheta}g')} - e^{-2i\vartheta}\overline{\mathbf{S}((\bar{t} - \bar{\zeta})g'')} \quad (3.38)$$

$$2W'^{\pm} = \pm(\kappa g' - e^{-2i\vartheta}\bar{h}') + \kappa \mathbf{S}(g') - \overline{\mathbf{S}(g')} + \\ + e^{-2i\vartheta}\overline{\mathbf{S}(h' - e^{-2i\vartheta}g')} - e^{-2i\vartheta}\overline{\mathbf{S}((\bar{t} - \bar{\zeta})g'')} \quad (3.39)$$

Заметим, что оператор  $\mathbf{S}((\bar{t} - \bar{\zeta})g')$  не является сингулярным поскольку

$$\lim_{\zeta \rightarrow t} \frac{\bar{t} - \bar{\zeta}}{t - \zeta} = e^{-2i\vartheta(t)}, \quad t \in \Gamma. \quad (3.40)$$

Далее переобозначим его как регулярный

$$\mathbf{R}_1(g) = -\mathbf{S}((\bar{t} - \bar{\zeta})g') = -\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} - \bar{\zeta}}{t - \zeta} g'(t) dt = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{d\bar{t}/dt}{t - \zeta} - \frac{\bar{t} - \bar{\zeta}}{(t - \zeta)^2} \right) g(t) dt. \quad (3.41)$$

Введем также другие регулярные интегральные операторы, отталкиваясь от следующих свойств сингулярного интеграла

$$\mathbf{S}[\mathbf{S}(g)] = g, \quad (3.42)$$

$$\overline{\mathbf{S}(g)} = -\mathbf{S}(\bar{g}) + \mathbf{R}_2(\bar{g}), \quad (3.43)$$

$$\mathbf{S}(fg) = f\mathbf{S}(g) + \mathbf{R}_3(f, g). \quad (3.44)$$

Здесь

$$\mathbf{R}_2(\bar{g}) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{g(t)}}{t - \zeta} \left( \frac{t - \zeta}{\bar{t} - \bar{\zeta}} \frac{d\bar{t}}{dt} - 1 \right) dt, \quad \mathbf{R}_2(\bar{g}) = \overline{\mathbf{R}_2(g)} \quad (3.45)$$

есть регулярный интеграл, потому что его ядро является ограниченным (из (3.40) очевидно, что член в скобках стремится к нулю, когда  $\zeta \rightarrow t$ ). а другой регулярный интеграл следует из регуляризации сингулярного

$$\mathbf{R}_3(f, g) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) - f(\zeta)}{t - \zeta} g(t) dt, \quad (3.46)$$

где функция  $f(t)$  должна удовлетворять условию Гёлдера.

С учетом формул (3.41)-(3.46) можно переписать формулы (3.33)-(3.39) в виде

$$2P^{\pm} = \pm(g' + \bar{g}') + \mathbf{S}(g' - \bar{g}') + \mathbf{R}_2(\bar{g}') \quad (3.47)$$

$$2D^{\pm} = \pm(h' - e^{-2i\vartheta} g') + \mathbf{S}(h' - e^{-2i\vartheta} g') + \mathbf{R}_1(g') \quad (3.48)$$

$$2T^{\pm} = \pm h + \mathbf{S}(h) + \mathbf{R}_1(g) \quad (3.49)$$

$$2F^{\pm} = \pm(g + \bar{h}) + \mathbf{S}(g - \bar{h}) + \overline{\mathbf{R}_1(g)} + \mathbf{R}_2(\bar{h}) \quad (3.50)$$

$$2W^{\pm} = \pm(\kappa g - \bar{h}) + \mathbf{S}(\kappa g + \bar{h}) - \overline{\mathbf{R}_1(g)} - \mathbf{R}_2(\bar{h}) \quad (3.51)$$

$$2\sigma^{\pm} = \pm(g' + e^{-2i\vartheta}\bar{h}') + \mathbf{S}(g' - e^{-2i\vartheta}\bar{h}') + e^{-2i\vartheta}\overline{\mathbf{R}_1(g')} + \mathbf{R}_2(\bar{g}') + \\ + e^{-2i\vartheta}\mathbf{R}_2(\bar{h}' - e^{2i\vartheta}\bar{g}') + \mathbf{R}_3(e^{-2i\vartheta}, \bar{h}' - e^{2i\vartheta}\bar{g}') \quad (3.52)$$

$$2W'^{\pm} = \pm(\kappa g' - e^{-2i\vartheta}\bar{h}') + \mathbf{S}(\kappa g' + e^{-2i\vartheta}\bar{h}') - e^{-2i\vartheta}\overline{\mathbf{R}_1(g')} - \mathbf{R}_2(\bar{g}') - \\ - e^{-2i\vartheta}\mathbf{R}_2(\bar{h}' - e^{2i\vartheta}\bar{g}') - \mathbf{R}_3(e^{-2i\vartheta}, \bar{h}' - e^{2i\vartheta}\bar{g}') \quad (3.53)$$

Выражения (3.48)-(3.53) содержат функцию  $h=h(\zeta)$ , которая представляет скачок биголоморфной функции  $T=T(\zeta)$  при переходе через контур. Эта функция не имеет прямого механического смысла, в отличие от функции  $g=g(\zeta)$  (механический смысл которой следует из (3.25) и (3.28)), она является вспомогательной и может быть исключена из граничных условий. Рассмотрим как это осуществить на примере классических краевых задач плоской теории упругости (по классификации Мусхелишвили [1966])

**Первая краевая задача.** Пусть на контуре известны усилия  $F_0^{\pm}$ , а, следовательно, и их скачок  $\langle F_0 \rangle$  при переходе через контур тоже известен. Тогда можно выразить функцию  $h = \langle \bar{F}_0 \rangle - \bar{g}$  и подставить ее в выражение для краевого значения (3.50), что приводит к паре сингулярных интегральных уравнений, СИУ, для внутренней и внешней областей

$$\mathbf{S}(g) + \frac{1}{2}\overline{\mathbf{R}_1(g)} - \frac{1}{2}\mathbf{R}_2(g) = F_0^{\pm} \mp \frac{1}{2}\langle F_0 \rangle - \frac{1}{2}\overline{\mathbf{S}(\langle \bar{F}_0 \rangle)}. \quad (3.54)$$

В случае, когда на контуре задан вектор напряжений  $\sigma_0$ , то  $e^{-2i\vartheta}\bar{h}' = \langle \sigma_0 \rangle - g'$  и, следовательно,  $\bar{h}' - e^{2i\vartheta}\bar{g}' = e^{2i\vartheta}\langle \sigma_0 \rangle - e^{2i\vartheta}(g' + \bar{g}')$ , что приводит к СИУ

$$\mathbf{S}(g') + \frac{1}{2}e^{-2i\vartheta}\overline{\mathbf{R}_1(g')} + \frac{1}{2}\mathbf{R}_2(\bar{g}') - \\ - \frac{1}{2}e^{-2i\vartheta}\mathbf{R}_2(e^{2i\vartheta}(g' + \bar{g}')) + \frac{1}{2}\mathbf{R}_3(e^{-2i\vartheta}, -e^{2i\vartheta}(g' + \bar{g}')) = \\ = \sigma_0^{\pm} + \frac{1}{2}\mathbf{S}(\langle \sigma_0 \rangle) - \frac{1}{2}e^{-2i\vartheta}\mathbf{R}_2(e^{2i\vartheta}\langle \sigma_0 \rangle) - \frac{1}{2}\mathbf{R}_3(e^{-2i\vartheta}, e^{2i\vartheta}\langle \sigma_0 \rangle) \quad (3.55)$$



**Вторая краевая задача.** СИУ в случае известных перемещений  $W_0$  строится аналогичным образом с той лишь разницей, что выражение для  $h$  должно быть принято в форме  $h = \kappa \bar{g} - \langle \bar{W}_0 \rangle$ . Это дает

$$\kappa \mathbf{S}(g) - \frac{\kappa}{2} \mathbf{R}_2(g) - \frac{1}{2} \overline{\mathbf{R}_1(g)} = W_0^\pm \mp \frac{1}{2} \langle W_0 \rangle - \frac{1}{2} \overline{\mathbf{S}(\langle \bar{W}_0 \rangle)}. \quad (3.56)$$

Вид уравнений (3.54) и (3.56) совпадает с известными результатами, например, [Линьков, 1999], при условии, что первые два слагаемых в правых частях (3.54) и (3.56) переписываются как  $(F_0^+ + F_0^-)/2$  или  $(W_0^+ + W_0^-)/2$  соответственно. Если рассматривается только внутренняя (или только внешняя) область, то соответствующие скачки могут быть положены равными нулю, тогда (3.54) и (3.56) принимают обычный вид. Оба СИУ имеют нулевые индексы и, следовательно, они имеют единственное решение (см следующий параграф).

В случае, когда вектор усилий (напряжений) непрерывен при переходе через контур формула (3.47) сохраняет свой вид, а формулы (3.48)-(3.55) упрощаются. Этот случай будет нужен для исследования составных областей, поэтому приведем преобразованные формулы (3.48)-(3.55), полагая  $\langle F \rangle = 0$ , т.е.  $h = -\bar{g}$ , что с учетом  $h' = -e^{-2i\vartheta} \bar{g}'$  приводит к следующим выражениям

$$2D^\pm = \mp e^{-2i\vartheta} (g' + \bar{g}') - \mathbf{S}(e^{-2i\vartheta} (g' + \bar{g}')) + \mathbf{R}_1(g') \quad (3.57)$$

$$2\Gamma^\pm = \mp \bar{g} - \mathbf{S}(\bar{g}) + \mathbf{R}_1(g) \quad (3.58)$$

$$2F^\pm = 2\mathbf{S}(g) + \overline{\mathbf{R}_1(g)} - \mathbf{R}_2(g) \quad (3.59)$$

$$2W^\pm = \pm(\kappa + 1)g + (\kappa - 1)\mathbf{S}(g) - \overline{\mathbf{R}_1(g)} + \mathbf{R}_2(g) \quad (3.60)$$

$$2\sigma^\pm = 2\mathbf{S}(g') + e^{-2i\vartheta} \overline{\mathbf{R}_1(g')} + \mathbf{R}_2(\bar{g}') - e^{-2i\vartheta} \mathbf{R}_2(e^{2i\vartheta} (g' + \bar{g}')) - \mathbf{R}_3(e^{-2i\vartheta}, e^{2i\vartheta} (g' + \bar{g}')) \quad (3.61)$$

$$2W'^\pm = \pm(\kappa + 1)g' + (\kappa - 1)\mathbf{S}(g') - e^{-2i\vartheta} \overline{\mathbf{R}_1(g')} - \mathbf{R}_2(\bar{g}') + e^{-2i\vartheta} \mathbf{R}_2(e^{2i\vartheta} (g' + \bar{g}')) + \mathbf{R}_3(e^{-2i\vartheta}, e^{2i\vartheta} (g' + \bar{g}')) \quad (3.62)$$

Эти выражения будут далее использоваться при составлении соответствующих интегральных уравнений неклассических краевых задач.

### 3.3. Решение интегральных уравнений

#### 3.3.1. Интегральные уравнения в классических задачах

В предыдущем параграфе были приведены примеры интегральных уравнений, которые возникают при рассмотрении двух основных задач плоской теории упругости. В обоих случаях это были сингулярные интегральные уравнения первого рода, т.е. такие, в которых отсутствует внеинтегральный член. Достоинством уравнений такого вида является то, что, во-первых, они имеют единственное решение, а, во-вторых, это решение является устойчивым, что означает, что малым возмущениям правой части соответствует малые возмущения решения. Как видно из приведенных примеров отсутствие внеинтегральных членов достигается выбором соответствующего соотношения между неизвестными функциями  $h=h(\zeta)$  и  $g=g(\zeta)$ . Следует упомянуть, что в работе [Линьков, 1999] приводятся еще две другие зависимости между искомыми функциями, кроме уже упомянутых выше для случаев первой и второй основных задач плоской теории упругости. Выбор таких соотношений, в принципе, может быть достаточно произвольным, но обязан включать комплексно сопряженные функции для того, чтобы обеспечить независимость комплексных потенциалов  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ .

Можно показать, что сведение к СИУ первого рода далеко не обязательно. Например, для второй основной задачи, когда на контуре заданы смещения, можно из (3.60) получить соответствующее СИУ вида

$$\pm (\kappa + 1)g + (\kappa - 1)\mathbf{S}(g) - \overline{\mathbf{R}_1(g)} + \mathbf{R}_2(g) = 2W_0^\pm. \quad (3.63)$$

Полагая, для простоты, что регулярные операторы отсутствуют (что соответствует, например, случаю полуплоскости) можно также легко получить решение этого СИУ путем применения к обеим частям (3.63) оператора

$$\pm \frac{\kappa+1}{4\kappa} \mathbf{I}(\cdot) - \frac{\kappa-1}{4\kappa} \mathbf{S}(\cdot), \quad (3.64)$$

где  $\mathbf{I}(g)=g$  есть единичный оператор. Принимая во внимание (3.42) найдем

$$g = \pm \frac{\kappa+1}{2\kappa} W_0^\pm - \frac{\kappa-1}{2\kappa} \mathbf{S}(W_0^\pm). \quad (3.65)$$

Прямое решение СИУ (3.56) при отсутствии регулярных операторов получается применением сингулярного оператора, что дает

$$g = \frac{1}{2\kappa} \mathbf{S}(W_0^+ + W_0^-) + \frac{1}{2\kappa} (W_0^+ - W_0^-). \quad (3.66)$$

Несмотря на то, что формулы (3.65) и (3.66) выглядят разными, непосредственная проверка показывает, что они определяют одни и те же краевые значения потенциала  $\varphi(z)$ , а именно

$$2\varphi^\pm = \pm g + \mathbf{S}(g) = \frac{1}{\kappa} W_0^\pm \pm \frac{1}{\kappa} \mathbf{S}(W_0^\pm). \quad (3.67)$$

Таким образом решения (3.65) и (3.66) эквивалентны.

Кроме первой, второй и смешанной (когда на одной границы части заданы усилия на другой смещения, см. [Мусхелишвили, 1966]) краевых задач в приложениях используется еще ряд граничных условий. Например, Джонсон [1989] рассматривает контактные задачи, в которых задаются нормальные перемещения и касательные усилия либо тангенциальное перемещение и нормальное давление, либо, когда задаются нормальные перемещения и условия трения, связывающее нормальные и касательные напряжения на границе. В последнем случае СИУ принадлежит к типу уравнений (3.63), соответственно его решение также единственно и устойчиво. Также широко используется модель упругого (винклеровского) основания, где смещения принимаются пропорциональными напряжениям (например, [Галин, 1953]). В этом случае возникают интегро-дифференциальные уравнения, которые также имеют внеинтегральный член, но содержат производную искомой функции под интегралом. Примеры применения различных методик для решения таких СИУ можно найти в работах [Koiter, 1955; Каландия, 1973; Салганик, 1977]. Следует

отметить, что во всех этих формулировках могут быть получены единственные решения, иногда в аналитическом виде (для простых областей), но чаще численно. Соответственно разработаны численные методы, алгоритмы и программы для решения возникающих систем СИУ. Более того, решения являются еще и устойчивыми по отношению к малым вариациям граничных условий, что свидетельствует о том, что стандартные краевые задачи являются корректными.

В последнее время получили распространение так называемые обратные задачи теории упругости, в которых решения также единственны, но не являются устойчивыми. Эти задачи обычно связаны с обработкой данных измерений на некоторой свободной от напряжений поверхности, что делает задачу переопределенной, но взамен она может быть не доопределена на другой части границы. Последнее обстоятельство требует применения специальных методов численной регуляризации для того чтобы получаемое решение было более устойчиво к вариациям в правых частях соответствующих интегральных уравнений, которые принадлежат классу уравнений Фредгольма первого рода, и которые, как известно, см [Тихонов, Арсенин, 1974], относятся к некорректным задачам. Подробнее с задачами этого типа можно ознакомиться в обзоре [Bonnet, Constantinescu, 2005], найти примеры решений можно в работе [Galybin, 2016] и цитированных там источниках. Мы далее не останавливаемся на обратных задачах, отмечая при этом, что граничные условия, которые там обычно используются, принадлежат к стандартным.

### **3.3.2. Интегральные уравнения в краевых задачах для аналитических функций**

Упомянутые выше граничные условия не исчерпывают все возможные формулировки, но характерны для многих инженерных приложений. В последующих главах будут подробно изучены некоторые виды граничных условий, которые расширяют класс изученных ранее краевых задач теории упругости. С математической точки зрения эти задачи сводятся к СИУ с

комплексно сопряженной неизвестной функцией, которая, как видно из формул для граничных значений, приведенных в предыдущем параграфе, в общем случае присутствует во всех граничных условиях, как стандартных, так и тех, которые будут изучены далее. Поэтому целесообразно рассмотреть общий тип СИУ, проанализировать его разрешимость и наметить схему его численного решения. Последнее особо важно для СИУ с однородной правой частью, которые исследуются далее, т.к. применение стандартных численных методов приводит к тривиальному решению.

Здесь следует отметить, что СИУ в случае стандартных формулировок обладают свойствами интегральных уравнений Фредгольма, в частности они разрешимы только при ненулевой правой части, в то время как СИУ более общего вида удовлетворяют условиям теорем Нётера [Гахов, 1977]. В отличие от уравнений Фредгольма, разрешимость СИУ в общем случае определяется его характеристическим уравнением, которое имеет вид

$$ag + c\mathbf{S}(g) = f. \quad (3.68)$$

Решение этого уравнения сводится к решению соответствующей краевой задачи Римана для кусочно аналитических функций  $H^\pm$ , которая немедленно следует из (3.68) после применения к нему формул Сохоцкого-Племеля, что дает

$$H^+ = GH^- + \tilde{f}, \quad G = \frac{a-c}{a+c}, \quad \tilde{f} = \frac{f}{a+c}. \quad (3.69)$$

Решение задачи Римана зависит от индекса комплекснозначной функции  $G$ , который определяется через приращение аргумента функции  $G$  после полного обхода контура  $\Gamma$  против часовой стрелки по формуле

$$K \equiv \text{Index}(G) = \frac{1}{2\pi i} [\ln(G)]_\Gamma = \frac{1}{2\pi} [\arg(G)]_\Gamma. \quad (3.70)$$

По теоремам Нётера, если  $K < 0$ , то СИУ в общем случае неразрешимо, при  $K > 0$  уравнение имеет  $K$  линейно независимых решений, при  $K = 0$  неоднородное уравнение имеет единственное решение, а однородное неразрешимо (тривиальное решение не принимается во внимание). Таким образом есть существенная разница

в разрешимости уравнений с ненулевым индексом от стандартных уравнений СИУ теории упругости, имеющих нулевой индекс. Последнее очевидно для случая  $a=0$ , как в уравнениях (3.54)-(3.56), тогда  $G=-1$  и соответственно  $Index(G)=0$ . При постоянных  $a$  и  $c$ , функция  $G$  тоже константа. Ее индекс равен нулю, а значит при ненулевой правой части уравнение типа (3.63) имеет единственное решения, как и уравнения (3.54)-(3.56).

При ненулевом индексе однородные СИУ становятся разрешимыми, но прямое применение какого-нибудь численного метода к (3.68) либо приведет к тривиальному решению (для однородного уравнения), либо к потере решений (для неоднородного уравнения). Для сведения СИУ к уравнению Фредгольма, Гахов [1977] приводит (наряду с другими способами) способ Карлемана-Векуа, который заключается в регуляризации СИУ путем решения характеристического уравнения. При этом правая часть регуляризованного уравнения уже содержит многочлен степени  $K-1$  с произвольными комплексными коэффициентами, который отвечает за решение однородного уравнения. Подробнее этот подход приведен ниже для СИУ более общего случая. Его ценность состоит в том, что после регуляризации возникает возможность численного решения эквивалентного уравнения Фредгольма, поскольку решение последнего единственно, а его правая часть ненулевая, даже если исходное СИУ было однородным.

Гахов [1977] исследовал разрешимость специального сингулярного интегрального уравнения, содержащего комплексно сопряженную неизвестную функция  $g$  следующего вида

$$ag + b\bar{g} + c\mathbf{S}(g) + d\overline{\mathbf{S}(g)} + \mathbf{K}(g) + \overline{\mathbf{L}(g)} = f. \quad (3.71)$$

Здесь  $\mathbf{K}(g)$  и  $\mathbf{L}(g)$  – любые регулярные операторы, а комплекснозначные функции  $a, b, c, d, f$  непрерывны на контуре. Идея Гахова заключается в том, чтобы применить оператор вида левой части (3.71) с другими коэффициентами к СИУ (3.71) и подобрать коэффициенты этого оператора так, чтобы новое уравнение (которое тоже в общем случае имеет вид (3.71)) уже не имело бы комплексно сопряженной функции в своей характеристической части. После чего открывается

возможность использовать анализ, примененный к СИУ (3.68). Было показано, что разрешимость СИУ определяется индексом комплекснозначной функции  $G$  после обхода контура  $\Gamma$ , который вычисляется по формулам

$$2K \equiv \text{Index}(G) = \frac{1}{2\pi i} [\ln(G)]_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} [\arg(G)]_{\Gamma} \quad (3.72)$$

$$G = \frac{A-iB}{A+iB}, \quad A-iB = (\bar{a} + \bar{c})(a-c) + (b+d)(\bar{d} - \bar{b})$$

Если  $2K > 0$  (здесь коэффициент 2 введен для удобства), то решение однородного ( $f=0$ ) имеет  $2K$  линейно независимых решений и зависит от  $4K$  вещественных постоянных, в противном случае однородное СИУ не имеет решений.

Далее приводятся два близких друг к другу подхода, которые основаны на методе Гахова и позволяют строить численные решения.

### 3.3.3. Подход 1 - Сведение к уравнению Фредгольма.

Здесь идея Гахова об исключении комплексно сопряженной искомой функции реализована несколько по-другому, чем в оригинале. Кроме того, покажем, что применение регуляризации Карлемана-Векуа к СИУ с комплексно сопряженными неизвестными функциями приводит к уравнению Фредгольма второго рода. Решение этого уравнения может включать в себя больше параметров, чем решение соответствующего характеристического СИУ лишь в исключительных случаях. Это расширяет результат Гахова в отношении числа решений характеристического и полного СИУ, не содержащего комплексно сопряженных неизвестных. Укажем также подход к численной реализации.

Рассмотрим следующий оператор:

$$\mathbf{N}(g) = ag + b\bar{g} + c\mathbf{S}(g) + d\overline{\mathbf{S}(g)} + \mathbf{Reg}(g, \bar{g}). \quad (3.73)$$

Здесь регулярный оператор имеет представление:

$$\mathbf{Reg}(g, \bar{g}) = \int_{\Gamma} K_1(t, \zeta) g(t) dt + \int_{\Gamma} K_2(t, \zeta) \overline{g(t)} dt, \quad (3.74)$$

где  $K_i(t, \zeta)$  ( $i=1,2$ ) регулярные ядра, удовлетворяющие условию Гёлдера.

Комплексное сопряжение (3.73) имеет вид

$$\overline{\mathbf{N}(g)} = \bar{b}g + \bar{a}\bar{g} + \bar{d}\mathbf{S}(g) + \bar{c}\overline{\mathbf{S}(g)} + \overline{\mathbf{Reg}(g, \bar{g})}. \quad (3.75)$$

Исключая комплексное сопряжение сингулярного оператора, находим

$$\begin{aligned} \bar{c}\mathbf{N}(g) - d\overline{\mathbf{N}(g)} &= (a\bar{c} - \bar{b}d)g + (b\bar{c} - \bar{a}d)\bar{g} + (c\bar{c} - d\bar{d})\mathbf{S}(g) + \\ &+ \bar{c}\mathbf{Reg}(g, \bar{g}) - d\overline{\mathbf{Reg}(g, \bar{g})} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Полагая  $\mathbf{N}(g)=0$ , получим выражение для комплексно-сопряженной неизвестной функции:

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \frac{a\bar{c} - \bar{b}d}{\bar{a}d - b\bar{c}}g + \frac{c\bar{c} - d\bar{d}}{\bar{a}d - b\bar{c}}\mathbf{S}(g) + \\ &+ \frac{\bar{c}}{\bar{a}d - b\bar{c}}\mathbf{Reg}(g, \bar{g}) - \frac{d}{\bar{a}d - b\bar{c}}\overline{\mathbf{Reg}(g, \bar{g})}, \quad \bar{a}d - b\bar{c} \neq 0. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Обратная подстановка (3.77) в (3.73) позволяет извлечь характеристическую часть в виде

$$\left( a + b \frac{a\bar{c} - \bar{b}d}{\bar{a}d - b\bar{c}} - d \frac{c\bar{c} - d\bar{d}}{\bar{a}d - b\bar{c}} \right) g + \left( c + b \frac{c\bar{c} - d\bar{d}}{\bar{a}d - b\bar{c}} - d \frac{a\bar{c} - \bar{b}d}{\bar{a}d - b\bar{c}} \right) \mathbf{S}(g). \quad (3.78)$$

После упрощений, полное уравнение,  $\mathbf{N}(g)=0$ , может быть приведено к следующей символической форме:

$$\begin{aligned} Ag + iBS(g) + \mathbf{regular}(g, \bar{g}) &= 0, \\ A = a\bar{a} - b\bar{b} - c\bar{c} + d\bar{d}, \quad iB = \bar{a}c - a\bar{c} - b\bar{d} + \bar{b}d, \end{aligned} \quad (3.79)$$

где  $\mathbf{regular}(g, \bar{g})$  - регулярный оператор, линейный относительно неизвестной функции и ее комплексного сопряжения, он имеет вид, аналогичный (3.74).

Регулярные операторы влияют на разрешимости  $\mathbf{N}(g)=0$  только в исключительных случаях [Гахов, 1977], поэтому ими можно пренебречь. Тогда число линейно независимых решений определяется только характеристическим СИУ, а оно контролируется индексом задачи Римана, коэффициент которого есть



$$G = \frac{A-iB}{A+iB}, \quad A-iB = (\bar{a} + \bar{c})(a-c) + (b+d)(\bar{d} - \bar{b}). \quad (3.80)$$

Таким образом индекс,  $2K$ , определяется следующим образом:

$$2K \equiv \text{Index}(G) = \frac{1}{2\pi i} [\ln(G)]_{\Gamma} = \frac{1}{\pi} \arg(A-iB)|_{\Gamma}. \quad (3.81)$$

Эта формула очевидно совпадает с (3.72) поскольку индекс  $G$  в два раза больше чем индекс  $A-iB$ . Другими словами, он рассчитывается как, деленное на  $2\pi$ , приращение  $\arg(G)$  после полного обхода границы  $\Gamma$  в положительном (против часовой стрелки) направлении.

Полное уравнения (3.79) является однородным. Оно, однако, имеет не меньше независимых решений, чем соответствующее ему характеристическое. Это может быть показано применением регуляризации Карлемана-Векуа [Гахов, 1977]. Вводя обозначение  $f = -\mathbf{regular}(g, \bar{g})$ , можно формально записать решение (3.79) для односвязной области, ограниченной гладким замкнутым контуром  $\Gamma$  в виде [Гахов, 1977]

$$g = Af - iBZ \left[ \mathbf{S}(Z^{-1}f) - P_{2K-1} \right], \quad Z(t) = t^{-K} e^{\Lambda(t)}, \quad \Lambda(t) = \mathbf{S}(\ln(t^{2K} G(t))) \quad (3.82)$$

Здесь  $P_{2K-1}$  является произвольным многочленом степени  $(2K-1)$  с комплексными коэффициентами. Из перестановочности сингулярных и регулярных операторов, следует, что (3.82) принимает вид уравнения Фредгольма:

$$g + \mathbf{K}(g, \bar{g}) = iBZ P_{2K-1}, \\ \mathbf{K}(g, \bar{g}) = A \mathbf{regular}(g, \bar{g}) - iB \mathbf{regular}(\mathbf{S}(g), \mathbf{S}(\bar{g})) - iBZ \mathbf{R}_3(Z^{-1}, \mathbf{regular}(g, \bar{g})) \quad (3.83)$$

СИУ (3.79) эквивалентно (3.83) при условии, что однородное уравнение (3.83) неразрешимо. Последнее может иметь место только в исключительных случаях, когда единица есть собственное число ядра интегрального уравнения (3.83); в противном случае (3.83) имеет единственное решение, которое зависит от  $2K$  комплексных постоянных. Таким образом, решение (3.79) и, следовательно, исходного однородного уравнения ( $\mathbf{N}(g)=0$ ) также зависит от  $2K$  комплексных постоянных или от  $4K$  вещественные постоянных.

Следует отметить, что для открытых контуров или для многосвязных областей регуляризации Карлемана-Векуа по-прежнему не дает дополнительных решений, подробности обсуждаются в [Гахов, 1977] для обычного СИУ, которое не содержит комплексного сопряжения неизвестной функции.

Уравнение (3.83) открывает также возможность применения численных методов для решения. Действительно, можно построить линейно-независимые решения (3.83), решая его численно для различных правых частей.

$$g_m + \mathbf{K}(g_m, \bar{g}_m) = iBZ \zeta^m, \quad m = 0, \dots, K-1. \quad (3.84)$$

После чего полное решение, зависящее от  $2K$  комплексных коэффициентов  $C_m$ , принимает вид

$$g(\zeta) = \sum_{m=0}^{2K-1} C_m g_m(\zeta). \quad (3.85)$$

Для неоднородного уравнения  $\mathbf{N}(g)=f$  решение будет включать один дополнительный член, соответствующий его правой части. Нужно отметить, что в общем случае, условие однозначности перемещений может сократить число независимых коэффициентов до  $2K-1$ .

### 3.3.4. Подход 2 - Суперпозиция решений однородного и неоднородного СИУ.

Некоторым недостатком первого численного подхода является относительно высокий порядок вложенных интегралов в ядре уравнения Фредгольма. Далее предлагается модифицированный метод, который более экономичен с вычислительной точки зрения.

Следуя Гахову [Гахов, 1977], введем следующий оператор (но без регулярных операторов)

$$\Theta(\cdot) = a\mathbf{I}(\cdot) - b\overline{\mathbf{I}(\cdot)} - c\mathbf{S}(\cdot) - d\overline{\mathbf{S}(\cdot)}, \quad (3.86)$$

где  $\mathbf{I}(\cdot)$  - тождественный оператор,  $\mathbf{I}(g)=g$ .

Применим этот оператор к однородному СИУ общего вида (3.71), что позволяет исключить сопряжение в характеристической части нового уравнения. Тогда уравнение примет вид

$$\begin{aligned} Ag + iBSg + Ug + \overline{Vg} &= 0 \\ A = a\bar{a} - b\bar{b} - c\bar{c} + d\bar{d}, \quad iB = \bar{a}c - a\bar{c} + \bar{b}d - b\bar{d}, \quad \text{Im}(A) = \text{Im}(B) = 0 \end{aligned} \quad (3.87)$$

Здесь  $U$  и  $V$  некоторые регулярные операторы, которые возникают после применения оператора  $\Theta$  и перестановок сингулярных и регулярных операторов.

Будем искать общее решение однородного СИУ (3.87) в виде суммы двух неизвестных функций

$$g = g_0 + g_1. \quad (3.88)$$

Здесь  $g_0$  представляет общее решение однородного характеристического уравнения

$$Ag_0 + iBSg_0 = 0 \quad (3.89)$$

и  $g_1$  - есть любое частное решение неоднородного СИУ

$$Ag_1 + iBSg_1 + Ug_1 + \overline{Vg_1} = f_0, \quad (3.90)$$

правая часть которого выражается через решение уравнения (3.89) в виде

$$f_0 = -Ug_0 - \overline{Vg_0}. \quad (3.91)$$

Преимущество представления (3.88) очевидно из того факта, что прямая попытка решить (3.87) любым численным методом даст только тривиальное решение из-за однородной правой части. С другой стороны, частное численное решение может быть найдено для неоднородного СИУ (3.90), как только станет известно  $g_0$ . Поэтому, в качестве первого шага, для численного решения необходимо сначала найти полный набор линейно независимых решений СИУ (3.89). Рассмотрим эту операцию подробно.

Во-первых, сведем СИУ (3.89) к следующей задаче Римана с помощью формул Сохоцкого-Племеля для голоморфной функции  $\varphi$ , см. формулу (3.23). Это дает

$$(A + iB)\varphi^+ - (A - iB)\varphi^- = 0. \quad (3.92)$$

Поделив (3.92) на  $|A+iB|$  найдем

$$\exp(i\lambda)\varphi^+ - \exp(-i\lambda)\varphi^- = 0, \quad (3.93)$$

где угол  $\lambda$  является аргументом  $A+iB$ .

$$\lambda = \arg(A + iB). \quad (3.94)$$

Пусть неотрицательное число  $K$  - есть индекс функции  $A-iB$ , определяемый через приращение угла  $-\lambda$  после полного обхода контура  $\Gamma$  против часовой стрелки, то есть следующим образом

$$K = \text{Index}(A - iB) = \text{Index}(\exp(-i\lambda)) = -\frac{1}{2\pi} [\lambda]_{\Gamma} \geq 0 \quad (3.95)$$

Тогда (3.93) приобретает вид

$$\zeta^K \exp(i\lambda)(\zeta^{-K}\varphi^+) - \zeta^{-K} \exp(-i\lambda)(\zeta^K\varphi^-) = 0 \quad (3.96)$$

Принимая во внимание, что  $\text{Index}(\zeta^K) = K$  получим

$$\text{Index} \left[ \zeta^{\pm K} \exp(\pm i\lambda) \right] = \pm \frac{1}{2\pi i} [K \ln \zeta + i\lambda]_{\Gamma} = 0 \quad (3.97)$$

Это позволяет определить некоторую голоморфную функцию  $q$  через скачок ее граничных значений при переходе через контур, т.е. через  $q^+ - q^- = i\lambda + K \ln \zeta$ . По формулам Сохоцкого-Племеля можно найти граничные значения этой функции в виде

$$2q^{\pm} = \pm(i\lambda + K \ln \zeta) + S(i\lambda + K \ln t). \quad (3.98)$$

Тогда

$$\exp(2q^{\pm}) = \zeta^{\pm K} e^{\pm i\lambda} \exp[S(i\lambda + K \ln t)] \quad (3.99)$$

и (3.96) принимает вид

$$\exp(2q^+)(\zeta^{-K}\varphi^+) = \exp(2q^-)(\zeta^K\varphi^-). \quad (3.100)$$

Здесь экспоненциальные члены имеют нулевой индекс в то время как член в скобках в левой стороне имеет полюс порядка  $K-1$  (считаем, что  $\varphi^+(0)=0$ , так как это значение не влияет на напряжения) и член в скобках в правой части ведет себя на бесконечности как  $\zeta^{K-1}$  (предполагается, что  $\varphi^-(\infty)=0$ ). В соответствии с обобщенной теоремой Лиувилля [Гахов, 1977] можно ввести голоморфную функцию  $R$  во всей плоскости, которая имеет полюса порядка  $K-1$  в нуле и на бесконечности, которая и решает однородную задачу Римана. На контуре это решение принимает вид

$$\exp(2q^+)(\zeta^{-K}\varphi^+) = \exp(2q^-)(\zeta^K\varphi^-) = R, \quad (3.101)$$

где выражение для голоморфной функции  $R$  выглядит следующим образом

$$R(\zeta) = \frac{c_{-K+1}}{\zeta^{K-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{\zeta} + c_0 + c_1\zeta + \dots + c_{K-1}\zeta^{K-1}. \quad (3.102)$$

Следовательно

$$\varphi^+ = \exp(-2q^+)\zeta^K R(\zeta), \quad \varphi^- = \exp(-2q^-)\zeta^{-K} R(\zeta) \quad (3.103)$$

и соответственно

$$g_0 = \left[ \zeta^K \exp(-2q^+) - \zeta^{-K} \exp(-2q^-) \right] R(\zeta). \quad (3.104)$$

Используя граничные значения функций  $\exp(2q^\pm)$ , определенные в (3.99), получим окончательное выражение для решения однородной задачи Римана в виде

$$g_0 = -2i \sin(\lambda) \exp[-S(K \ln \zeta + i\lambda)] R(\zeta). \quad (3.105)$$

Второй шаг заключается в нахождении частных решений неоднородного СИУ (3.90), где правая часть является линейной комбинацией однородных решений с

произвольными комплексными коэффициентами. Другими словами, СИУ (3.100) должно быть решено для разных правых частей, что может быть записано в виде

$$Ag_1^j + iBS_1^j + U_1^j + \bar{V}_1^j = F_j, \quad j = 0 \dots 2K - 2. \quad (3.106)$$

Здесь функции  $F_j$  выражаются через решение однородного СИУ, и с учетом (3.102) и (3.91), принимают вид

$$F_j(\zeta) = 2iU \left[ \sin(\lambda) \exp[-S(K \ln \zeta + i\lambda)] \zeta^{j-K+1} \right] - \overline{2iV \left[ \sin(\lambda) \exp[-S(K \ln \zeta + i\lambda)] \zeta^{j-K+1} \right]} \quad j = 0 \dots 2K - 2 \quad (3.107)$$

Очевидно, что для расчета (3.107), необходимо выполнить численное интегрирование двух повторных интегралов. Это является преимуществом по сравнению с первым подходом, где требовалось больше вычислительных усилий. Следует отметить, что, если  $U$  и  $V$  являются комплексными сопряженными операторами, тогда  $F_j$  будут вещественными функциями.

Для нахождения частных решений  $g_1^j$  можно использовать любой подходящий численный метод. После того, как они будут найдены, общее решение для  $g_1$  получается линейной комбинацией частных решений  $g_1^j$  с коэффициентами  $c_j$  из (3.102). Оно имеет вид

$$g_1(\zeta) = \sum_{j=0}^{2K-2} c_{j-K+1} g_1^j(\zeta). \quad (3.108)$$

Объединяя решения для  $g_0$  и  $g_1$  получаем следующую окончательную форму для общего решения СИУ (3.87) в форме

$$g(\zeta) = \sum_{j=0}^{2K-2} c_{j-K+1} \left[ g_1^j(\zeta) - 2i\zeta^{j-K+1} \sin(\lambda) \exp[-S(K \ln \zeta + i\lambda)] \right]. \quad (3.109)$$

Это решение справедливо для СИУ (3.71) с любыми коэффициентами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , которые порождают функции  $A$  и  $B$ .

### 3.4. Основные выводы по главе

Получены выражения для краевых значений голоморфных и биголоморфных функций, а также для комплекснозначных функций смещений, напряжений и усилий, через вспомогательные плотности скачков комплексных потенциалов. Эти выражения использованы для составления СИУ в классических постановках и будут далее использоваться при составлении соответствующих интегральных уравнений неклассических краевых задач.

На основе подхода Гахова [Гахов, 1977] для СИУ, содержащего комплексно сопряженную неизвестную функцию, разработаны подходы к определению числа его независимых решений и разработаны два варианта для численного решения однородного СИУ.

Результаты данной главы представляют методику исследования краевых задач теории упругости с однородной правой частью, которые рассматриваются далее. Эта методика состоит из следующих шагов.

1. Выбор таких соотношений между искомыми функциями в интегралах типа Коши для комплексных потенциалов, которые позволяют либо автоматически удовлетворить одно из граничных условий, либо упрощают вид получаемых далее интегральных уравнений.
2. Сборка комплексного СИУ общего вида (3.71), при условии, что нет возможности получить редуцированное СИУ или систему более простых СИУ.
3. Определение числа линейно независимых решений путем исследования характеристического уравнения или эквивалентной ему задачи Римана.
4. Переход к интегральным уравнениям, приспособленным для численных расчетов. Это достигается одним из указанных выше методов, основанных либо на сведении к уравнению Фредгольма, либо на суперпозиции общего решения однородного характеристического СИУ и частного решения неоднородного полного уравнения.

Достоверность результатов, получаемых по указанной выше методике, обеспечивается полученными ранее по отдельности теоремами Нётера для характеристического уравнения вида (3.68), разработанным Векуа методом регуляризации полных уравнений вида (3.68) с добавлением регулярных интегралов (способ Карлемана-Векуа по классификации Гахова) и результатами Гахова для уравнений вида (3.71). Также следует упомянуть, что метод суперпозиции решений в Подходе 2, упоминается в книге [Джонсон, 1989] с отсылкой на недоступную работу [Сёнгена, 1954] в связи с решением СИУ типа (3.63) для разомкнутого контура, где также возникает одно нетривиальное решение однородного СИУ. Это обстоятельство указывает на корректность предложенной численной схемы в Подходе 2.



## ГЛАВА 4. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С НЕПОЛНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

### 4.1. Граничные условия в направлениях

Любая комплекснозначная функция комплексно-сопряженных переменных может быть выражена через ее модуль и аргумент в комплексно-экспоненциальной форме

$$H(z, \bar{z}) = \rho(z, \bar{z})e^{i\phi(z, \bar{z})}, \quad \rho = |H|, \quad \phi = \arg(H) \quad (-\pi < \phi \leq \pi). \quad (4.1)$$

В классических формулировках в качестве функции  $H$  выступает либо вектор смещений, либо вектора усилий или напряжений. В любом случае задается краевое значение этой функции на контуре, что приводит к корректной задаче по определению комплексных потенциалов (и соответственно компонент смещений, деформаций и напряжений). Такие задачи, в частности, обладают единственными решениями (если не считать перемещений тела как жесткого целого, которое не влияет на напряженно-деформированное состояние). Единственность также означает, что соответствующее СИУ имеет нулевой индекс, как это имеет место с уравнениями (3.54) и (3.56), поскольку они являются интегральными уравнениями первого типа, т.е. не содержат неизвестную функцию вне интеграла.

В этой главе анализируется разрешимость краевых задач, в которых модуль функции  $H$  является неизвестным на контуре. В широком смысле такие задачи могут быть отнесены к неклассическим постановкам, однако далее будет показано, что главным отличием от классических КЗ плоской упругости является неединственность. Потому можно предложить использовать термин «КЗ с неполными граничными условиями» для того чтобы подчеркнуть возможность существования конечного числа линейно независимых решений.

Введем далее следующие обозначения для краевых значений аргументов девиатора напряжений ( $D$ ) смещений ( $W$ ) и усилий ( $F$ )

$$\arg D = \alpha(\zeta), \quad \arg W = \beta(\zeta), \quad \arg F = \gamma(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (4.2)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  - заданные функции комплексной точки  $\zeta$  на гладком контуре  $\Gamma$  (открытом или замкнутом). Из этих граничных условий можно сформировать три возможные комбинации:  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\alpha, \gamma)$ ,  $(\beta, \gamma)$  что приводит к трем формулировкам КЗ в направлениях.

В качестве второй группы граничных условий введем производные аргументов по нормали.

$$\frac{\partial \arg D}{\partial n} = \alpha'_n(\zeta), \quad \frac{\partial \arg W}{\partial n} = \beta'_n(\zeta), \quad \frac{\partial \arg F}{\partial n} = \gamma'_n(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (4.3)$$

где  $\alpha'_n$ ,  $\beta'_n$  и  $\gamma'_n$  - заданы на  $\Gamma$  с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ . Можно составить 3 комбинации условий (4.2) и (4.3), т.е.  $(\alpha, \alpha'_n)$ ,  $(\beta, \beta'_n)$ ,  $(\gamma, \gamma'_n)$  которые порождают еще три возможные формулировки.

Далее будут подробно изучены две формулировки из упомянутых выше шести, которые представляют практический интерес для реконструкции полей напряжений. Смешанные, например,  $(\alpha, \beta'_n)$ , не рассматриваются, поскольку их практическая ценность неочевидна.

Условия (4.2) также могут быть объединены с обычными граничными условиями, которые предполагают, известные скачки векторов напряжений или смещения при переходе через контуры между соседними областями (в специальных случаях скачки могут быть равны нулю, что обеспечивает непрерывность). Эти условия могут быть представлены в следующем виде

$$\langle \sigma \rangle = p(\zeta), \quad \langle W \rangle = w(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (4.4)$$

где  $p$  и  $w$  заданные функции контура.

Можно формально рассмотреть шесть комбинаций граничных условий (4.2) и (4.4):  $(\alpha, p)$ ,  $(\beta, p)$ ,  $(\gamma, p)$ ,  $(\alpha, w)$ ,  $(\beta, w)$ ,  $(\gamma, w)$ ; далее мы подробно их изучим, на примере гладкого не самопересекающегося замкнутого контура, разделяющего всю комплексную плоскость на внутреннюю и внешнюю.

Отметим, что задачи типа  $(\alpha, \alpha'_n)$  были ранее введены Гаховым [Гахов, 1977] при формулировке одной из краевых задач для полианалитических функций вида

$$F_n(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k z^k \chi_k(z), \text{ где } \chi_k(z) - \text{аналитические функции. Заметим, что}$$

используемые здесь биголоморфные функции  $T$  и  $D$  по форме несколько отличается от гаховского вида, т.к.  $\partial_{\bar{z}} F_2(z, \bar{z}) = 0$  при  $z=0$ , а производные  $\partial_{\bar{z}} T$ ,  $\partial_{\bar{z}} D$  в нуле могут быть отличны от нуля. Гахов [1977] предлагает общий подход к сведению таких задач к системе задач для аналитических функций, но отмечает, что в произвольном случае «Решение таких краевых задач представляет вопрос весьма сложный», и рассматривает подробно только формулировки для круга. Идея использовать граничные условия типа  $(\alpha, \alpha'_n)$  для плоских упругих задач принадлежит Мухамедиеву [Мухамедиев, 1997]. Как видно, ни одно из упомянутых выше граничных условий (4.2)-(4.4) не содержит данные по величинам смещений, напряжений и усилий, что оправдывает использование термина «неполные граничные условия».

При анализе различных краевых задач мы следуем схеме, приведенной в конце предыдущей главы, которая подразумевает, что, если определено решение для искомых плотностей комплексных потенциалов, то значит сами потенциалы, а, следовательно, и все компоненты напряжений и смещений могут быть найдены интегрированием. Если решение не единственно, то линейно независимые решения формируют общее решение, путем их линейной комбинации, т.е. это решение зависит от некоторого числа произвольных постоянных. Основная цель - это определить эти числа, т.е. определить все возможные напряженные состояния, которые удовлетворяют выбранным парам граничных условий. В этом смысле формулировка «найти комплексные потенциалы» или «все возможные напряженные состояния» являются эквивалентными. Ниже используются обе формулировки, и обе они означают, что требуется

- Установить разрешимость задачи при выбранной паре граничных условий и определить число линейно-независимых решений (и число произвольных постоянных).
- Получить выражения для плотностей комплексных потенциалов, что фактически и решает задачу.

Окончательные выражения для потенциалов и компонент напряжений не приводятся.

#### **4.2. Краевая задача в ориентациях главных напряжений для односвязной конечной области**

##### **4.2.1. Постановка задачи $(\alpha, \alpha'_n)$**

Пусть  $\Omega$  внутренняя односвязная конечная область с границей  $\Gamma$ . Замкнутый контур  $\Gamma$  предполагается гладким с непрерывной меняющейся кривизной. Контур  $\Gamma$  может быть задан в параметрическом виде  $\zeta = \zeta(s) = x(s) + iy(s)$ , где  $s$  длина дуги контура,  $0 < s < l$ . Гладкость означает, что функции  $x(s)$  и  $y(s)$  непрерывные функции вместе с их первыми двумя производными по  $s$  (см. 3.1).

Рассматриваемая далее краевая задача формулируется следующим образом: *найти все возможные напряженные состояния в  $\Omega$  по паре граничных условий  $(\alpha, \alpha'_n)$  на  $\Gamma$ .*

Везде в  $\Omega$  биголоморфная функция  $D$  представима в комплексно-экспоненциальной форме

$$D(z, \bar{z}) = |D(z, \bar{z})| e^{i \arg D(z, \bar{z})}. \quad (4.5)$$

Переменные  $(z, \bar{z})$  для функции  $D$  могут быть опущены в формулах, которые справедливы внутри области. На границе, смотря по необходимости, используется либо комплексный  $\zeta$ , либо вещественный  $s$  аргумент.

Здесь будем использовать соглашение, принятое в геомеханике, т.е. считать, что минимальное главное напряжение является максимальным сжимающим

напряжением,  $T_2$ , которое положительно ( $T_2 = -\sigma_2$ ), тогда модуль девиатора (т.е. максимальное касательное напряжение,  $\tau_{\max}$ ) связан с главными напряжениями  $T_1$  и  $T_2$  следующим образом

$$\tau_{\max} = |D| = \frac{1}{2}(T_2 - T_1), \quad T_2 \geq T_1. \quad (4.6)$$

Аргумент связан с главным направлением тензора напряжений  $\theta$  как

$$\arg(D) = -2\theta, \quad (4.7)$$

т.е.  $\theta$  - угол наклона минимального главного напряжения  $T_1$ , отсчитываемый в положительном направлении против часовой стрелки от вещественной оси.

Напомним, что под термином "траектории главных напряжений (ТГН)" понимаются кривые, касательные к которым совпадают с направлениями соответствующих главных напряжений  $T_1$  или  $T_2$  в любой точке. ТГН формируют криволинейную ортогональную сетку внутри области.

#### 4.2.2. Граничные условия

Граничные условия, упомянутых в 4.1, могут быть выражены следующим образом

$$\Gamma : \arg D = \alpha(s), \quad \frac{\partial \arg D}{\partial n} = \alpha'_n(s). \quad (4.8)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  единичный вектор внешней нормали к контуру;  $\alpha(s)$  и  $\alpha'_n(s)$  - заданные функции на контуре. Первое условие в (4.8) предписывает (с помощью (4.7)) направление ТГН на  $\Gamma$ . Второе условие выражает изменения угла наклона траектории  $\theta$  на  $\Gamma$  в направлении внешней нормали. Можно показать, что граничные условия (4.8) также могут быть выражены через кривизну ТГН на  $\Gamma$  (*curv*) следующим образом

$$\Gamma : \arg D = \alpha(s), \quad \text{curv} = -\text{Re} \left[ e^{i(\vartheta(s) + \frac{1}{2}\alpha(s))} (\alpha'_s(s) + i\alpha'_n(s)) \right], \quad (4.9)$$

где функция  $\alpha'_s(s) = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s)$  известна, а угол  $\vartheta = \vartheta(s)$  показан на Рисунке 3.1. Для простоты далее используются граничные условия в форме (4.8). Тем не менее к ним также можно относиться как к условиям, наложенным на наклон и кривизну траекторий главных напряжений на  $\Gamma$ .

Граничные условия (4.8) могут быть выражены через краевые значения комплексных потенциалов  $\Phi'(z)$  и  $\Psi(z)$ . В соответствии с (4.5) имеем следующее тождество внутри  $\Omega$

$$\operatorname{Im}\left(e^{-i \arg D} D\right) = 0. \quad (4.10)$$

Оно следует из того, что выражение в скобках есть модуль функции  $D$ , который является вещественной функцией всюду в области, включая контур. Подставляя второе равенство (3.12) в (4.10) и переходя к контуру можно преобразовать первое условие в формулах (4.8) к следующему виду

$$\operatorname{Im}\left(e^{-i \alpha(s)} (\bar{\zeta} \Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta))\right) = 0, \quad (4.11)$$

где  $\zeta = \zeta(s)$  принадлежит  $\Gamma$ . Трансформируем второе условие в (4.8) с помощью равенства

$$\operatorname{Im} \frac{\partial \left( e^{-i \arg D} D \right)}{\partial n} = 0, \quad (4.12)$$

которое выполняется везде в  $\Omega$  для любого направления  $\mathbf{n}$  потому что производная  $\frac{\partial}{\partial n}$  является вещественным оператором (см. 3.1). С учетом (4.10) формула (4.12) может быть переписана в виде

$$\operatorname{Im} \left( e^{-i \arg D} \frac{\partial D}{\partial n} \right) = e^{-i \arg D} D \frac{\partial \arg D}{\partial n}. \quad (4.13)$$

Подстановкой  $D$  из (3.12), дифференцированием и переходом к контуру, принимая  $n = -i\zeta'$  для внешней нормали (см 3.1 для деталей), получим следующее условие

$$\operatorname{Im}\left(e^{-i\alpha(s)}\left(-i\zeta'(\bar{\zeta}\Phi''(\zeta)+\Psi'(\zeta))+i\bar{\zeta}'\Phi'(\zeta)\right)\right)=e^{-i\alpha(s)}(\bar{\zeta}\Phi'(\zeta)+\Psi(\zeta))\alpha'_n(s). \quad (4.14)$$

Дифференцированием (4.10) по контурной переменной найдем

$$\operatorname{Im}\left(e^{-i\alpha(s)}\left(\zeta'(\bar{\zeta}\Phi''(\zeta)+\Psi'(\zeta))+\bar{\zeta}'\Phi'(\zeta)\right)\right)=e^{-i\alpha(s)}(\bar{\zeta}\Phi'(\zeta)+\Psi(\zeta))\alpha'_s(s). \quad (4.15)$$

Следует отметить, что пара граничных условий (4.14), (4.15) не полностью эквивалентна исходным условиям (4.11), (4.14). Использование (4.15) вместо (4.11) вносит в решение дополнительную произвольную действительную постоянную. Выражения (4.14) и (4.15) представляют краевые условия задачи, когда на контуре  $\Gamma$  вместо (4.8) задан градиент  $\alpha$ .

Удобно вместо пары вещественных условий (4.14) и (4.15) ввести эквивалентное комплексное граничное условие. Самый простой способ получить такое условие – это использовать тождество

$$\frac{\partial\left(e^{-i\arg D}D\right)}{\partial z}=\overline{\left(\frac{\partial\left(e^{-i\arg D}D\right)}{\partial\bar{z}}\right)}. \quad (4.16)$$

Выражение (4.16) представляет тождество, поскольку  $e^{-i\arg D}D$  является реальной функцией. После несложных преобразований (4.16) можно переписать в одной из следующих эквивалентных форм

$$\frac{\partial D}{\partial z}=\overline{\left(\frac{\partial\left(e^{-2i\arg D}D\right)}{\partial\bar{z}}\right)}, \quad \frac{\partial\left(e^{-2i\arg D}D\right)}{\partial z}=\overline{\left(\frac{\partial D}{\partial\bar{z}}\right)}. \quad (4.17)$$

Выражая  $D$  из (3.12), видим, что любое из тождеств (4.16), (4.17) может играть роль граничных условий для нахождения комплексных потенциалов  $\Phi'(z)$ ,  $\Psi(z)$  по их крайним значениям на  $\Gamma$ . Одна из возможных форм для искомого граничного условия приведена ниже

$$e^{-i\alpha(s)}(\bar{\zeta}\Phi''(\zeta)+\Psi'(\zeta))-e^{i\alpha(s)}\overline{\Phi'(\zeta)}=2ie^{-i\alpha(s)}(\bar{\zeta}\Phi'(\zeta)+\Psi(\zeta))\alpha'_\zeta(s). \quad (4.18)$$

Производная

$$\alpha'_\zeta(s) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial \arg D(z, \bar{z})}{\partial z} \quad (4.19)$$

в правой части (4.18) известна, т.к. она выражается через известные производные  $\arg(D)$  по касательному и нормальному направлениям  $\alpha'_s(s)$ ,  $\alpha'_n(s)$  на контуре.

### 4.2.3. Интегральное представление для комплексных потенциалов

Введем новые обозначения для действительной и мнимой частей контурной производной вспомогательной функции  $g=g(\zeta)$

$$\mu(t) = \operatorname{Re}(g'(t)), \quad \nu(t) = \operatorname{Im}(g'(t)). \quad (4.20)$$

Тогда потенциалы примут вид

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) + i\nu(t)}{t-z} dt, \quad \Psi(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{2\mu(t)e^{-2i\vartheta(t)} + \bar{t}(\mu'(t) + i\nu'(t))}{t-z} dt. \quad (4.21)$$

Представления (4.21) должны удовлетворять условию однозначности перемещений, которое выражается в виде

$$\int_{\Gamma} [\mu(t) + i\nu(t)] dt = 0. \quad (4.22)$$

После подстановки (4.21) во вторую формулу (3.12) получается следующее интегральное представление для биголоморфной функции  $D$

$$D(z, \bar{z}) = \frac{-1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(t)e^{-2i\theta(t)}}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t-z} (\mu'(t) + i\nu'(t)) dt. \quad (4.23)$$

Поскольку граничные условия содержат производную дивергента по нормали потребуется выражения для частных производных дивергента по комплексно-сопряженным переменным. Эти производные функции  $D$  внутри области имеют следующий вид



$$\begin{aligned}\frac{\partial D(z, \bar{z})}{\partial z} &= \frac{-1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu'(t) - 2i\mu(t)\vartheta'(t)}{t-z} e^{-2i\vartheta(t)} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t-z} \frac{\mu'(t) + iv'(t)}{t-z} dt, \\ \frac{\partial D}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu'(t) + iv'(t)}{t-z} dt\end{aligned}\quad (4.24)$$

Определим теперь граничные значения девиатора и его производных через функции, введенные в (3.57)

$$D^{\pm} = \mp e^{-2i\vartheta} \mu - \mathbf{S}(e^{-2i\vartheta} \mu) + \frac{1}{2} \mathbf{R}_1(\mu + iv) \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial D}{\partial z} \right|_{z \rightarrow \zeta}^{\pm} &= \mp e^{-2i\vartheta} \left( \frac{3}{2} \mu' + \frac{1}{2} iv' - 2i\mu\vartheta' \right) - \\ &- \mathbf{S} \left( e^{-2i\vartheta} (\mu' - 2i\mu\vartheta') + \frac{1}{2} e^{-2i \arg(t-\zeta)} (\mu' + iv') \right)\end{aligned}\quad (4.26)$$

$$\left. \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} \right|_{z \rightarrow \zeta}^{\pm} = \pm \frac{1}{2} (\mu' + iv') + \frac{1}{2} \mathbf{S}(\mu' + iv'). \quad (4.27)$$

В (4.26) учтено, что граничное значение интеграла

$$I(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t-z} \frac{\mu'(t) + iv'(t)}{t-z} dt \quad (4.28)$$

есть [Саврук, 1981]

$$2I^{\pm} = \pm (\mu' + iv') e^{-2i\vartheta} + \mathbf{S} \left( e^{-2i \arg(t-\zeta)} (\mu' + iv') \right). \quad (4.29)$$

Рассмотрим далее только внутреннюю область и выделим характеристические части в интегралах (4.25)-(4.27) используя регуляризацию (3.46)

Извлекая характеристическую часть в представлении (4.25) и заменяя дифференцирование по комплексной координате дифференцированием по  $s$  (формула (3.11)) можно переписать выражение (4.25) в виде

$$e^{2i\vartheta} D = -\mu - \mathbf{S}(\mu) - \mathbf{M}_1(\mu, \check{\mu}' + i\check{v}'). \quad (4.30)$$

Здесь введено обозначение для регулярного интегрального оператора

$$\mathbf{M}_1(\mu, \check{\mu}' + i\check{\nu}') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [K_1(t, \zeta)\mu(t) + K_2(t, \zeta)(\check{\mu}'(t) + i\check{\nu}'(t))] dt, \quad (4.31)$$

а регулярные ядра  $K_1(t, \zeta)$  и  $K_2(t, \zeta)$  имеют вид

$$K_1(t, \zeta) = 2 \frac{e^{-2i\vartheta(t)} e^{2i\vartheta(\zeta)} - 1}{t - \zeta}, \quad K_2(t, \zeta) = e^{2i\vartheta(\zeta)} e^{-i\vartheta(t)} e^{-2i \arg(t - \zeta)}. \quad (4.32)$$

Теперь можно получить выражение для краевого значения производной по нормали функции  $D$  на основе формул (3.9). Извлекая характеристическую часть в интегральном представлении, найдем

$$e^{2i\theta} \frac{\partial D}{\partial n} = 2\mu\check{\theta}' - \check{\nu}' + 2i\check{\mu}' + \mathbf{S}(2\mu\check{\theta}' - \check{\nu}' + 2i\check{\mu}') + \mathbf{M}_2(\mu, \check{\mu}', \check{\nu}'). \quad (4.33)$$

Здесь введено еще одно обозначение для регулярного интегрального оператора

$$\mathbf{M}_2(\mu, \check{\mu}', \check{\nu}') = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [K_3(t, \zeta)(\check{\mu}'(t) + i\check{\nu}'(t)) + K_4(t, \zeta)(\check{\mu}'(t) - 2i\mu(t)\check{\theta}'(t))] dt, \quad (4.34)$$

а регулярные ядра  $K_1(t, \zeta)$  и  $K_2(t, \zeta)$  заданы следующими выражениями

$$K_3(t, \zeta) = \frac{e^{-i\vartheta(t)} e^{i\vartheta(\zeta)} + e^{-2i \arg(t - \zeta)} e^{3i\vartheta(\zeta)} e^{-i\vartheta(t)} - 2}{t - \zeta}, \quad (4.35)$$

$$K_4(t, \zeta) = 2 \frac{e^{-3i\vartheta(t)} e^{3i\vartheta(\zeta)} - 1}{t - \zeta}.$$

#### 4.2.4. Система сингулярных интегральных уравнений и ее разрешимость

Подставляя представления (4.30) и (4.33) в граничные условия (4.10) и (4.13), приходим к системе сингулярных интегральных уравнений, СИУ.

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \left\{ e^{-i(2\vartheta + \alpha)} [\mu + \mathbf{S}(\mu) + \mathbf{M}_1(\mu, \check{\mu}' + i\check{\nu}')] \right\} = 0 \\ \operatorname{Im} \left\{ e^{-i(2\vartheta + \alpha)} [2\mu\check{\theta}' - \check{\nu}' + 2i\check{\mu}' + \mathbf{S}(2\mu\check{\theta}' - \check{\nu}' + 2i\check{\mu}') + \mathbf{M}_2(\mu, \check{\mu}', \check{\nu}')] \right\} + \\ + \alpha'_n e^{-i(2\vartheta + \alpha)} [\mu + \mathbf{S}(\mu) + \mathbf{M}_1(\mu, \check{\mu}' + i\check{\nu}')] = 0. \end{cases} \quad (4.36)$$

Система (4.36) является однородной системой СИУ, так что, в соответствии с теоремами Нётера [Гахов, 1977], число ее независимых решений должны определяться из индекса задачи. Кроме того, регулярные операторы не сильно влияют на число независимых решений. В соответствии с Гаховым, минимальное число независимых решений зависит от характеристического уравнения. Регулярная часть может увеличить это число, но все эти случаи должны рассматриваться в качестве исключительных. Поэтому для анализа разрешимости системы можно пренебречь всеми регулярными интегральными операторами. Однако пренебрежение только  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  в (4.36) не является достаточным из-за наличия сопряженных сингулярных операторов, порождаемых выделением мнимых частей. Для того чтобы свести систему к форме без сопряженных сингулярных операторов необходимо использовать свойства сингулярного оператора (3.43) и отбросить регулярный оператор  $\mathbf{R}_2$ . После чего можно записать систему характеристических сингулярных интегральных уравнений, соответствующей системе (4.36) в виде

$$\begin{cases} e^{-i\eta}[\mu + \mathbf{S}(\mu)] - e^{i\eta}[\mu - \mathbf{S}(\mu)] = 0 \\ e^{-i\eta}[\lambda + \mathbf{S}(\lambda)] - e^{i\eta}[\bar{\lambda} - \mathbf{S}(\bar{\lambda})] + 2i\alpha'_n e^{-i\eta}[\mu + \mathbf{S}(\mu)] = 0. \end{cases} \quad (4.37)$$

Здесь  $\eta = 2\vartheta + \alpha$  – известный угол и  $\lambda$  вспомогательная функция, выраженная через неизвестные функции  $\mu$  и  $\nu$  соотношением

$$\lambda = (2\mu\bar{\theta}' - \bar{\nu}') + 2i\bar{\mu}'. \quad (4.38)$$

В общем случае, одно характеристическое уравнения,  $a\mu + b\mathbf{S}(\mu) = 0$ , может быть сведено к краевой задаче Римана путем введения кусочно голоморфных функций  $A^\pm$ , которые являются граничными значениями интеграла типа Коши от функции  $\mu$ . Тогда на основе формул Сохоцкого-Племеля  $\mu = A^+ - A^-$ ,  $\mathbf{S}(\mu) = A^+ + A^-$ . Поэтому однородная задачи Римана принимает вид  $A^+ = GA^-$ , где  $G = (a-b)(a+b)^{-1}$ . Эта задача имеет нетривиальные решения, если и только если индекс задачи неотрицателен. Индекс,  $K$ , определяется как разделенное на  $2\pi$  приращение аргумента комплекснозначной функции  $G$  при обходе контура в положительном

направлении [Гахов, 1977]. Число однородных решений задачи Римана равно  $(K+1)$ . Однако число независимых решений характеристического уравнения равно  $K$  из-за того, что интегралы типа Коши должны обращаться в нуль на бесконечности.

Первое уравнение в (4.21) приводится к задаче Римана с коэффициентом  $G=e^{2i\eta}$ . Его индекс определяется интегралом

$$K = \text{Index}(G) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} d\eta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} (2\vartheta'(t) + \alpha'(t)) dt. \quad (4.39)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае интеграл (4.39) всегда целочисленный. Тогда решение для однородной задачи Римана можно записать в виде (Гахов, 1977)

$$\begin{aligned} A^+(z) &= e^{\Lambda^+(z)} P_{K-1}(z), & A^-(z) &= e^{\Lambda^-(z)} z^{-K} P_{K-1}(z), \\ \Lambda^{\pm}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln(-t^{-K} e^{2i\eta(t)})}{t-z} dt, \end{aligned} \quad (4.40)$$

где  $P_{K-1}(z)$  произвольный многочлен степени  $(K-1)$ . Применяя формулы Сохоцкого-Племеля можно получить краевое значение кусочно-голоморфной функции  $\Lambda(\zeta)$

$$\Lambda^{\pm} = \pm \frac{1}{2} \ln(-\zeta^{-K} e^{2i\eta}) + \frac{1}{2} \mathbf{S}(\ln(-\zeta^{-K} e^{2i\eta})), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (4.41)$$

Принимая во внимание соотношение  $e^{\Lambda^{\pm}(\zeta)} = \mp \zeta^{\mp \frac{K}{2}} e^{\pm i\eta} e^{\mathbf{S}(i\eta - \frac{K}{2} \ln \zeta)}$  найдем решение для  $\mu$  и  $\mathbf{S}(\mu)$  в виде

$$\mu = -2ZP_{K-1} \cos \eta, \quad \mathbf{S}(\mu) = -2iZP_{K-1} \sin \eta, \quad Z = Z(\zeta) = \zeta^{-\frac{K}{2}} e^{\mathbf{S}(i\eta - \frac{K}{2} \ln \zeta)}. \quad (4.42)$$

Второе уравнение системы (4.37) может быть сведено к аналогичной однородной задаче Римана. Пусть  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ , где  $\lambda_1 = \text{Re}(\lambda)$  и  $\lambda_2 = \text{Im}(\lambda)$ ;  $\lambda_2$  уже известны из решения первого уравнения. Введем новые кусочно-голоморфные функции  $B_k$  ( $k=1,2$ ) так что  $\lambda_k = B_k^+ - B_k^-$ ,  $\mathbf{S}(\lambda_k) = B_k^+ + B_k^-$ . Тогда  $\lambda + \mathbf{S}(\lambda) = 2(B_1^+ + iB_2^+)$ ,

$\bar{\lambda} - \mathbf{S}(\bar{\lambda}) = -2(B_1^- - iB_2^-)$  голоморфны внутри и вне контура соответственно. Известная функция  $\alpha'_n(\zeta)$  может также быть представлена в виде разницы краевых значений кусочно-голоморфных функций  $\alpha'_n{}^\pm(z)$ , заданных интегралом типа Коши с действительной плотностью  $\alpha'_n$

$$\alpha'_n(\zeta) = \alpha'_n{}^+(\zeta) - \alpha'_n{}^-(\zeta), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\alpha'_n(t)}{t-z} dt = \begin{cases} \alpha'_n{}^+(z), & z \in \Omega^+ \\ \alpha'_n{}^-(z), & z \in \Omega^- \end{cases} \quad (4.43)$$

Принимая во внимание, что

$$2i\alpha'_n e^{-i\eta} [\mu + \mathbf{S}(\mu)] = 4i(\alpha'_n{}^+ - \alpha'_n{}^-) e^{-i\eta} A^+ = 4i(e^{-i\eta} \alpha'_n{}^+ A^+ + e^{i\eta} \alpha'_n{}^- A^-) \quad (4.44)$$

и, вводя новые кусочно-голоморфные функции  $B^\pm$ , получим

$$B^+ + e^{2i\eta} B^- = 0, \quad B^+ = B_1^+ + iB_2^+ + 2i\alpha'_n{}^+ A^+, \quad B^- = B_1^- - iB_2^- + 2i\alpha'_n{}^- A^-. \quad (4.45)$$

Индекс в этой задаче такой же, как и в предыдущей. Таким образом, общее решение этой задачи дается формулами (4.40), в котором вместо многочлена  $P_{K-1}(z)$ , необходимо поставить другой произвольный многочлен  $P_{K-1}^*(z)$ . Теперь решение для  $\lambda_1$  может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= B^+ - B^- - i(B_2^+ + B_2^-) - i(\alpha'_n{}^+ A^+ - \alpha'_n{}^- A^-) = \\ &= -2ZP_{K-1}^* \cos \psi - 2i\mathbf{S}(\tilde{\mu}') - i(\alpha'_n \mathbf{S}(\mu) + \mu \mathbf{S}(\alpha'_n)). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Таким образом установлено, что

- разрешимость системы (4.36) зависит только от индекса задачи определяемого по формуле (4.39), для  $K \leq 0$  ограниченного решения не существует;
- при  $K > 0$  решение системы (4.37) содержит  $2K$  комплексные константы.

Если каждая комплексная константа рассматривается как две вещественные независимые константы, то общее число независимых константы, не будет равна  $4K$ , так как должны быть выполнены некоторые дополнительные условия. Эти условия вытекают из того что функции  $\mu$  и  $\lambda_1$  действительные, а также из того, что должны быть удовлетворены условия однозначности смещений,

определяемые формулой (4.22). Для иллюстрации вышесказанного в следующей главе будет продемонстрировано как происходит уменьшение числа независимых констант для случая единичной окружности.

Следует отметить, что решение системы характеристических уравнений может быть использовано в качестве метода эквивалентной регуляризации исходной системы (4.36). Если  $K > 0$ , то будет получена система, состоящая из двух уравнений типа Фредгольма. В отличие от системы (4.36), система будет неоднородной из-за наличия нетривиальных однородных решений системы (4.37). В соответствии с теоремами Фредгольма [Михлин, 1949] неоднородная задача всегда разрешима, если соответствующая однородная задача неразрешима. Этот подход уже обсуждался в Главе 3, где было указано, что уравнение Фредгольма (3.83) может быть неразрешимо только в исключительных случаях.

В следующей главе будут получены аналитические решения задачи  $(\alpha, \alpha'_n)$  для произвольного контура с однородными граничными условиями и для единичного круга с произвольными граничными условиями.

### ***4.3. Плоская упругая краевая задача с ГУ в виде ориентаций перемещений и усилий на замкнутом контуре***

#### **4.3.1. Постановка задачи $(\beta, \gamma)$**

Пусть  $\Gamma$  - гладкий замкнутый контур, ограничивающий односвязную внутреннюю область  $\Omega$  и заданный как в предыдущем параграфе 4.2.

Пусть направление смещений и усилий (интеграла от вектора напряжений, см (3.15)) известно, тогда граничные условия могут быть выражены в виде

$$\Gamma: \arg W = \beta, \quad \arg F = \gamma. \quad (4.47)$$

Здесь  $\beta = \beta(\zeta)$  и  $\gamma = \gamma(\zeta)$  - заданные вещественные функции. Они удовлетворяют условиям Гёльдера на  $\Gamma$ , за исключением, возможно, некоторого числа точек, где они могут иметь разрывы первого рода и испытывать скачок  $2\pi$ , что является следствием определения функции  $\arg$ .

Рассматриваемая далее краевая задача формулируется следующим образом. Установить разрешимость задачи в  $\Omega$  по заданным граничным ориентациям усилий и перемещений (4.47), не зная их величин на  $\Gamma$ .

На контуре функции  $W$  и  $F$  могут быть представлены в комплексно-экспоненциальной форме

$$W = \omega e^{i\beta}, \quad F = \rho e^{i\gamma}, \quad (4.48)$$

где  $\omega$  и  $\rho$  - неизвестные модули  $W$  и  $F$  соответственно. С учетом (3.15)-(3.16) можно выразить граничных значений голоморфной и биголоморфной функций в следующем матричном виде

$$(1 + \kappa) \begin{pmatrix} \varphi \\ \Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\beta} & e^{i\gamma} \\ -e^{-i\beta} & \kappa e^{-i\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \rho \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Разрешая (4.49) относительно модулей имеем

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \rho \end{pmatrix} = \frac{1 + \kappa}{\Delta} \begin{pmatrix} \kappa e^{-i\gamma} & -e^{i\gamma} \\ e^{-i\beta} & e^{i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \Gamma \end{pmatrix}, \quad \Delta = \Delta(\zeta) = \kappa e^{i(\beta-\gamma)} + e^{-i(\beta-\gamma)}. \quad (4.50)$$

Так как  $\omega$  и  $\rho$  являются вещественными функциями, граничные условия (4.47) могут быть представлены через любые линейно независимые сочетания, выражающие тот факт, что  $\text{Im}(\omega) = \text{Im}(\rho) = 0$ . Некоторые комбинации представлены ниже. Например, следующая матричная форма может быть получена непосредственно из (4.50)

$$\text{Im} \left\{ \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \kappa e^{-i\gamma} & -e^{i\gamma} \\ e^{-i\beta} & e^{i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \Gamma \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Различные скалярные формы могут быть получены из (4.49) - (4.50). В следующем разделе используется форма

$$\text{Im} \left( e^{i\gamma} (\Gamma + \bar{\varphi}) \right) = \text{Im} \left( e^{i\beta} (\Gamma - \kappa \bar{\varphi}) \right) = 0. \quad (4.52)$$

После несложных преобразований (4.51), с целью исключить комплексно-сопряженную функцию  $T$ , можно записать граничные условия в комплексной форме

$$\left( \kappa e^{2i\beta} + e^{2i\gamma} \right) \bar{\varphi} = (1 + \kappa) \varphi + \left( e^{2i\beta} - e^{2i\gamma} \right) \Gamma. \quad (4.53)$$

Эта форма также будет использоваться для дальнейшего анализа. Могут быть также получены и некоторые другие скалярные или комплексные представления граничных условий, но они не приводятся, т.к. не будут использоваться далее.

#### 4.3.2. Интегральные представления для голоморфных функций.

Основная цель настоящего раздела состоит в исследовании разрешимости задачи в общем случае и в определении числа ее независимых решений. Идея основана на сведении задачи к некоторому сингулярному интегральному уравнению, разрешимость которого была исследована [Гахов, 1977], как подробно обсуждалось в Главе 3.

Голоморфные функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  можно представить в виде интегралов типа Коши с плотностью, выраженной через скачки смещений  $\langle W \rangle$  и усилий  $\langle F \rangle$  при их переходе через контур. Эти скачки связаны со скачками голоморфной функции,  $\langle \varphi \rangle$  и биголоморфной функции  $\langle T \rangle$  соотношениями

$$\langle W \rangle = \kappa \langle \varphi \rangle - \langle \bar{T} \rangle, \quad \langle F \rangle = \langle \varphi \rangle + \langle \bar{T} \rangle. \quad (4.54)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для внешней области, предполагая, что  $\langle F \rangle = 0$ . Следует отметить, что это предположение не приводит к потере общности. Оно фактически приводит к двум решениям для внутренней и внешней области, имеющих ту же границу  $\Gamma$ . Эти решения удовлетворяют условию непрерывности усилий по контуру. Тогда остаются верными выражения комплексных потенциалов интегралами типа Коши, см (3.20), (3.26) и (3.29), с учетом того, что  $\langle F \rangle = 0$ , т.е.  $h = -\bar{g}$ , их можно переписать в виде



$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{t-z} dt, \quad (\kappa+1)g(t) = \langle W(t) \rangle, \quad (4.55)$$

$$\psi(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{g}(t) + \bar{t}g'(t)}{t-z} dt. \quad (4.56)$$

Следовательно, биголоморфная функция допускает представление

$$T(z, \bar{z}) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{g}(t) + (\bar{t} - \bar{z})g'(t)}{t-z} dt. \quad (4.57)$$

Как только функция  $g$  найдена, комплексные потенциалы находятся интегрированием из формул (4.55) -(4.56), а компоненты напряжений во внутренней и внешних областях определяются с помощью формул Колосова-Мусхелишвили.

#### 4.3.3. Сингулярные интегральные уравнения

Краевые значения функций в (4.55) и (4.57) получаются предельным переходом из внутренней области и использованием формул Сохоцкого-Племеля. С учетом того, что рассматривается только внутренняя область, они следуют из (3.23) и (3.58) и свойства (3.43)

$$2\varphi = g + \mathbf{S}(g), \quad (4.58)$$

$$2T = -\bar{g} - \mathbf{S}(\bar{g}) + \mathbf{R}_1(g) = -\bar{g} + \overline{\mathbf{S}(g)} + \mathbf{R}_1(g) - \mathbf{R}_2(\bar{g}). \quad (4.59)$$

Подстановка (4.58)-(4.59) в граничные условия в виде (4.53) дает следующие сингулярное интегральное уравнение

$$ag + b\bar{g} + c\mathbf{S}(g) + d\overline{\mathbf{S}(g)} + \mathbf{Reg}(g) = 0. \quad (4.60)$$

Здесь  $\mathbf{Reg}(g) = (e^{2i\beta} - e^{2i\gamma})(\mathbf{R}_1(g) - \mathbf{R}_2(\bar{g}))$  - регулярный (не особый) оператор и введены следующие обозначения для коэффициентов

$$a = c = (\kappa+1), \quad b = -(\kappa+1)e^{2i\beta}, \quad d = -(\kappa-1)e^{2i\beta} - 2e^{2i\gamma}. \quad (4.61)$$

Этот тип уравнений изучен [Гахов, 1977], было показано, что его разрешимость зависит от индекса задачи, определяемого как

$$2K = \frac{1}{\pi i} \left\{ \ln[(a-c)(\bar{a} + \bar{c}) - (b+d)(\bar{b} - \bar{d})] \right\}_{\Gamma}. \quad (4.62)$$

Здесь символ  $\{ \}_{\Gamma}$  обозначает приращение функции в скобках при обходе контура  $\Gamma$  в положительном направлении. Подстановка (4.61) в (4.62) приводит к следующему выражению для индекса

$$2K = \frac{1}{\pi i} \left[ \ln(\sin \delta) + \ln(\kappa + e^{-2i\delta}) + i\delta \right]_{\Gamma} = \frac{1}{\pi} [\delta]_{\Gamma}, \quad \delta = \beta - \gamma \quad (4.63)$$

Теоремы Нётера [Гахов, 1977] остаются справедливыми и для уравнения (4.60). Поэтому

- оно имеет конечное число линейно независимых решений;
- если  $n$  и  $n'$  - соответствующие числа линейно независимых решений уравнения (4.60) и союзного уравнения, то разница  $n-n'=2K$  определяет индекс,  $2K$ , характеристического уравнения.

Таким образом, число независимых решений полного уравнения (4.60) не меньше, чем  $2K$ . С другой стороны, Гахов [1977] утверждает, что случаи, в которых число независимых решений полного и характеристического уравнений различно, должны рассматриваться как исключительные. Этот вывод уже был подтвержден с помощью регуляризации полного уравнения методом Карлемана-Векуа [Гахов, 1977], как показано в Главе 3. Поэтому в общем случае можно считать, что число независимых решений есть  $2K$ . Если индекс отрицателен, то задача не имеет решения.

#### ***4.4. Краевые задачи для замкнутого контура с транзитными граничными условиями, сформулированными в направлениях смещений и усилий***

В этом параграфе рассматриваются формулировки краевых задач плоской упругости в терминах ориентаций усилий и перемещений на замкнутом контуре, разделяющем внутреннюю и внешнюю области. Эти граничные условия

сочетаются с условиями непрерывности усилий или перемещений при переходе через границу. Величины усилий и смещения на контуре неизвестны. Исследуется разрешимость четырех краевых задач для внешних и внутренних областей путем их сведения к соответствующим интегральным уравнениям. Показано, что все рассматриваемые задачи могут иметь не единственные решения, которые выражаются в виде линейной комбинации частных решений и, следовательно, содержат произвольные параметры, число которых конечно и определяется контурными ориентациями усилий и/или смещений

#### 4.4.1. Формулировки краевых задач

Пусть гладкий замкнутый контур  $\Gamma$  разделяет бесконечную изотропную однородную упругую плоскость на внутреннюю  $\Omega^+$  и внешнюю  $\Omega^-$  области. Предполагается, что неизвестные нагрузки приложены на контуре  $\Gamma$ , а объемные силы и напряжения на бесконечности отсутствуют. Рассматриваемая далее краевая задача формулируется следующим образом: *Найти все возможные напряженные состояния в  $\Omega^+$  и (или)  $\Omega^-$  по заданным граничным ориентациям усилий и (или) перемещений, не зная их величин на  $\Gamma$ .*

Используем ранее введенные обозначения для граничных значений аргументов перемещений и усилий

$$\beta = \arg W(\zeta), \quad \gamma = \arg F(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (4.64)$$

Предполагается, что известные функции  $\beta = \beta(\zeta)$  и  $\gamma = \gamma(\zeta)$  непрерывны на  $\Gamma$ , они образуют первое семейство четырех возможных граничных условий, которые могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(W^\pm e^{-i\beta^\pm}\right) = 0 &\Leftrightarrow W^\pm e^{-i\beta^\pm} = \overline{W}^\pm e^{i\beta^\pm} \Leftrightarrow e^{-i\beta^\pm} \left(\kappa\varphi^\pm - \overline{T}^\pm\right) = e^{i\beta^\pm} \left(\kappa\overline{\varphi}^\pm - T^\pm\right), \\ \operatorname{Im}\left(F^\pm e^{-i\gamma^\pm}\right) = 0 &\Leftrightarrow F^\pm e^{-i\gamma^\pm} = \overline{F}^\pm e^{i\gamma^\pm} \Leftrightarrow e^{-i\gamma^\pm} \left(\varphi^\pm + \overline{T}^\pm\right) = e^{i\gamma^\pm} \left(\overline{\varphi}^\pm + T^\pm\right). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Второе семейство условий отражает непрерывность либо усилий, либо перемещений и имеет вид

$$\begin{aligned}\langle W \rangle = 0 &\Leftrightarrow |W^+| e^{i\beta^+} = |W^-| e^{i\beta^-} \Leftrightarrow \kappa\varphi^+ - \bar{T}^+ = \kappa\varphi^- - \bar{T}^-, \\ \langle F \rangle = 0 &\Leftrightarrow |F^+| e^{i\gamma^+} = |F^-| e^{i\gamma^-} \Leftrightarrow \varphi^+ + \bar{T}^+ = \varphi^- + \bar{T}^-.\end{aligned}\quad (4.66)$$

Четыре возможных комбинаций граничных условий (4.65) и (4.66) рассмотрены ниже. Они обозначены далее КЗ-1 – КЗ-4. Докажем, что все они допускают нетривиальные решения.

**КЗ-1.** Первая комбинация предполагает, что направления векторов смещения известны по обе стороны от контура,  $\arg W^\pm = \beta^\pm$ , в то время как усилия при переходе через контур непрерывны,  $\langle F \rangle = 0$ . Краевая задача состоит в нахождении комплексных потенциалов во внешней и внутренней областях по следующей паре комплекснозначных граничных условий

$$\begin{aligned}(\kappa + 1)(\varphi^+ - \varphi^-) - e^{2i\beta^+} (\kappa\bar{\varphi}^+ - T^+) + e^{2i\beta^-} (\kappa\bar{\varphi}^- - T^-) &= 0, \\ \varphi^+ - \varphi^- + \bar{T}^+ - \bar{T}^- &= 0.\end{aligned}\quad (4.67)$$

Здесь первое уравнение было получено путем исключения комплексно-сопряженной биголоморфной функции из первых двух скалярных условий в (4.65) и с учетом второго уравнения (4.66).

**КЗ-2.** Вторая комбинация предполагает, что направления усилий известны по обе стороны контура,  $\arg F^\pm = \gamma^\pm$ , а смещения непрерывны при переходе через контур,  $\langle W \rangle = 0$ . Затем, после преобразований, аналогичных тем, что и в КЗ-1, краевые задачи для внешней и внутренней областей приводятся к следующему виду

$$\begin{aligned}(\kappa + 1)(\varphi^+ - \varphi^-) - e^{2i\gamma^+} (\bar{\varphi}^+ + T^+) + e^{2i\gamma^-} (\bar{\varphi}^- + T^-) &= 0, \\ \kappa\varphi^+ - \kappa\varphi^- - \bar{T}^+ + \bar{T}^- &= 0.\end{aligned}\quad (4.68)$$

**КЗ-3.** Эта формулировка предполагает, что направления перемещений и усилий известны одновременно по обе стороны от контура, т. е.  $\arg W^\pm = \beta^\pm$ ,  $\arg F^\pm = \gamma^\pm$ . Требуется найти решения во внешней и внутренних областях по

следующей паре комплекснозначных граничных условий, полученных исключением сопряженных биголоморфных функций и объединением скалярных условий (4.65)

$$(\kappa + 1)\varphi^{\pm} - (e^{2i\beta^{\pm}} \kappa + e^{2i\gamma^{\pm}})\bar{\varphi}^{\pm} + (e^{2i\beta^{\pm}} - e^{2i\gamma^{\pm}})T^{\pm} = 0. \quad (4.69)$$

**КЗ-4.** В этой задаче ориентации смещений,  $\arg W = \beta$ , и усилий,  $\arg F = \gamma$ , известны на границе. Однако, в отличие от КЗ-3, решение ищется либо для внешней, либо внутренней области (но не одновременно для обеих областей), поэтому индексы опущены. Граничные условия аналогичны (4.69), но дополнены условиями непрерывности либо усилий, либо смещений при переходе через контур

$$\begin{aligned} (\kappa + 1)\varphi - (\kappa e^{2i\beta} + e^{2i\gamma})\bar{\varphi} + (e^{2i\beta} - e^{2i\gamma})T &= 0, \\ \langle \bar{\varphi} \rangle = -\langle T \rangle \quad \text{или} \quad \kappa \langle \bar{\varphi} \rangle = \langle T \rangle. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Случай с непрерывными усилиями уже был подробно исследован для внутренней области в предыдущем параграфе, здесь он представлен для полноты.

#### 4.4.2. Разрешимость сингулярных интегральных уравнений для краевых задач КЗ-1 – КЗ-4.

В отличие от классических формулировок, приводящихся к СИУ (3.54) и (3.56) задачи КЗ-1 – КЗ-4 являются однородными и поэтому их можно переформулировать в терминах однородных СИУ. Это, однако, не означает, что они могут иметь только тривиальные решения. Как уже было показано, индекс соответствующего СИУ не обязательно нуль, поэтому в соответствии с теоремами Нётера, КЗ-1 – КЗ-4 могут быть разрешимы и иметь некоторое число линейно независимых решений. Число решений определяется индексом СИУ. Важно, что число решений однородного полного СИУ определяется его характеристическим СИУ, за исключением некоторых особых случаев (см. доказательство в предыдущей главе). Исследование этих особых случаев выходит за рамки данного исследования, поэтому анализ происходит следующим образом:

- (i) подстановка граничных значений функции напряжений, выраженных через неизвестные функции контура  $g$  и  $h$ , в граничные условия;
- (ii) некоторые преобразования с целью исключить функцию  $h$  из СИУ и привести СИУ к форме, пригодной для применения результатов предыдущего пункта.

**КЗ-1.** Второе граничное условие в (4.67),  $\langle F \rangle = 0$ , означает что  $h = -\bar{g}$  и краевое значение биголоморфной функции дается выражением (3.58). Используя свойство (3.43) запишем

$$T^{\pm} = \mp \frac{1}{2} \bar{g} - \frac{1}{2} \mathbf{S}(\bar{g}) + \frac{1}{2} \mathbf{R}_1(g) = \mp \frac{1}{2} \bar{g} + \frac{1}{2} \overline{\mathbf{S}(g)} + \frac{1}{2} \mathbf{R}_1(g) - \frac{1}{2} \mathbf{R}_2(\bar{g}). \quad (4.71)$$

Подстановка краевых значений в первое условие (4.67) с учетом (4.71), приводит к следующему СИУ для КЗ-1

$$2(\kappa + 1)g - (\kappa + 1)(e^{2i\beta^+} + e^{2i\beta^-})\bar{g} + (e^{2i\beta^+} - e^{2i\beta^-})[(1 - \kappa)\overline{\mathbf{S}(g)} + \mathbf{R}_1(g) - \mathbf{R}_2(\bar{g})] = 0. \quad (4.72)$$

Подстановка

$$a = 2(\kappa + 1), \quad b = -(\kappa + 1)(e^{2i\beta^+} + e^{2i\beta^-}), \quad c = 0, \quad d = (1 - \kappa)(e^{2i\beta^+} - e^{2i\beta^-}) \quad (4.73)$$

в (3.71) позволяет выписать коэффициент задачи Римана в виде

$$A - iB = -8i \sin \delta_1 e^{i\delta_1} (\kappa^2 - e^{-2i\delta_1}), \quad \delta_1 = \beta^+ - \beta^- \Rightarrow G_1 = -e^{2i\delta_1} \frac{\kappa^2 - e^{-2i\delta_1}}{\kappa^2 - e^{2i\delta_1}}. \quad (4.74)$$

Поскольку  $|\kappa| > 1$ , дробь в (4.74) не влияет на индекс, который есть

$$K_1 \equiv \text{Index}(G_1) = \frac{\delta_1}{\pi} \Big|_{\Gamma}. \quad (4.75)$$

Как видно из (4.75), разрешимость СИУ (4.72) зависит только от разности ориентаций смещений на границе, если  $K_1 \leq 0$ , то ограниченного (нетривиального) решения не существует. Для  $K_1 > 0$  решение (4.86) включает в себя многочлен  $K_1 - 1$  степени с  $K$  произвольными коэффициентами. Это означает, что решение

контролируется  $2K_1$  вещественными параметрами. Следует отметить, что это решение существуют если приращение угла  $\delta_1 = \beta^+ - \beta^-$  на  $\Gamma$  положительно, т. е. после полного обхода границы комплексный вектор  $W^+/W$  должен сделать больше полных оборотов против часовой стрелки, чем оборотов по часовой стрелке.

**КЗ-2.** Принимая во внимание, что  $\langle W \rangle = 0$  находим, что второе уравнение в (4.68) выполняется автоматически если положить  $h = \kappa \bar{g}$ . Тогда граничные значения биголоморфной функции выражаются следующим образом

$$T^\pm = \pm \frac{\kappa}{2} \bar{g} - \frac{\kappa}{2} \overline{S(g)} + \frac{1}{2} \mathbf{R}_1(g) + \frac{\kappa}{2} \mathbf{R}_2(\bar{g}). \quad (4.76)$$

Подстановка краевых значений в первое уравнение в (4.68) приводит к следующему СИУ для КЗ-2

$$\begin{aligned} 2(\kappa+1)g - (\kappa+1)(e^{2i\gamma^+} + e^{2i\gamma^-})\bar{g} + \\ + (e^{2i\gamma^+} - e^{2i\gamma^-})[(\kappa-1)\overline{S(g)} - \mathbf{R}_1(g) - \kappa\mathbf{R}_2(\bar{g})] = 0. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Подстановка

$$a = 2(\kappa+1), \quad b = -(\kappa+1)(e^{2i\gamma^+} + e^{2i\gamma^-}), \quad c = 0, \quad d = (\kappa-1)(e^{2i\gamma^+} - e^{2i\gamma^-}) \quad (4.78)$$

в (3.71) позволяет выписать коэффициент задачи Римана в виде:

$$A - iB = 8i \sin \delta_2 e^{-i\delta_2} (\kappa^2 - e^{2i\delta_2}), \quad \delta_2 = \gamma^+ - \gamma^- \Rightarrow G_2 = -e^{-2i\delta_2} \frac{\kappa^2 - e^{2i\delta_2}}{\kappa^2 - e^{-2i\delta_2}}. \quad (4.79)$$

Его индекс есть

$$K_2 \equiv \text{Index}(G_2) = -\frac{\delta_2}{\pi} \Big|_{\Gamma}. \quad (4.80)$$

В отличие от  $K_1$  в (4.89) индекс  $K_2$  не будет отрицательным, когда число полных оборотов комплексного вектора  $F^+/F$  в направлении по часовой стрелке больше, чем в противоположном направлении. В этом случае приращение  $\delta_2$  отрицательно и СИУ (4.91) разрешимо, его решение содержит до  $2K_2$  свободных

вещественных параметров, которые определяются коэффициенты произвольного многочлена  $K_2-1$  степени.

**КЗ-3.** После краевых значений функций, входящих в (4.69), получается следующая система из двух СИУ

$$\begin{aligned} (\kappa + 1)(\pm g + \mathbf{S}(g)) - (e^{2i\beta^\pm} \kappa + e^{2i\gamma^\pm})(\pm \bar{g} + \overline{\mathbf{S}(g)}) + \\ + (e^{2i\beta^\pm} - e^{2i\gamma^\pm})(\pm h + \mathbf{S}(h) + \mathbf{R}_1(g)) = 0. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Будем считать, что член  $e^{2i\beta^\pm} - e^{2i\gamma^\pm}$  не является тождественным нулем и преобразуем (4.81) к виду

$$\begin{aligned} (p^+ + p^-)g + (q^+ + q^-)\bar{g} + (p^+ - p^-)\mathbf{S}(g) + (q^+ - q^-)\overline{\mathbf{S}(g)} + h = 0, \\ (p^+ - p^-)g + (q^+ - q^-)\bar{g} + (p^+ + p^-)\mathbf{S}(g) + (q^+ + q^-)\overline{\mathbf{S}(g)} + \mathbf{R}_1(g) + \mathbf{S}(h) = 0, \end{aligned} \quad (4.82)$$

где введены следующие обозначения

$$p^\pm = \frac{1}{2} \frac{\kappa + 1}{e^{2i\beta^\pm} - e^{2i\gamma^\pm}}, \quad q^\pm = -\frac{1}{2} \frac{e^{2i\beta^\pm} \kappa + e^{2i\gamma^\pm}}{e^{2i\beta^\pm} - e^{2i\gamma^\pm}}. \quad (4.83)$$

Функция  $h$  исключается путем подстановки первого уравнения (4.82) во второе с последующим комплексным сопряжением последнего. Эти преобразования приводят к уравнению относительно функции  $g$

$$(\bar{q}^+ - \bar{q}^-)g + (\bar{q}^+ + \bar{q}^-)\mathbf{S}(g) + \frac{1}{2}\overline{\mathbf{R}_1(g)} - \frac{1}{2}\overline{\mathbf{R}_4(g, \bar{g})} = 0, \quad (4.84)$$

где регулярный оператор  $\mathbf{R}_4$  определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_4(g, \bar{g}) = (q^+ + q^-)\mathbf{R}_2(\bar{g}) + (q^+ - q^-)\mathbf{R}_2(\mathbf{S}(\bar{g})) + \mathbf{R}_3(p^+ + p^-, g) + \\ + \mathbf{R}_3(q^+ + q^-, \bar{g}) + \mathbf{R}_3(p^+ - p^-, \mathbf{S}(g)) + \mathbf{R}_3(q^+ - q^-, \overline{\mathbf{S}(g)}) \end{aligned} \quad (4.85)$$

Пренебрегая регулярными операторами в (4.84), получим характеристическое уравнение в форме, обычно принятой в теории голоморфных функций [Гахов. 1977]. На основании формул Сохоцкого-Племеля, можно далее свести



характеристическое уравнения к эквивалентной задаче Римана, которая формулируется через граничные значения голоморфной функции  $\varphi$

$$\varphi^+ = G_3 \varphi^-, \quad G_3 = -\frac{\bar{q}^-}{q^+} = -e^{i(\delta_3^+ - \delta_3^-)} \frac{\sin \delta_3^+}{\sin \delta_3^-} \frac{\kappa + e^{2i\delta_3^-}}{\kappa + e^{2i\delta_3^+}}, \quad \delta_3^\pm = \beta^\pm - \gamma^\pm. \quad (4.86)$$

Как видно из (4.86), разрешимость СИУ (4.84) зависит от разницы между ориентациями перемещений и усилий.

В случае, когда  $\delta_3^\pm \neq 0, \pm\pi$  в любой точке на  $\Gamma$  дробь в выражение для  $G_3$  не вносят вклада в индекс (учитывая, что  $\kappa > 1$ , последняя дробь в (4.86) имеет нулевой индекс). В этом случае индекс (4.86) может быть представлен в виде

$$K_3 \equiv \text{Index}(G_3) = \frac{\delta_3^+ - \delta_3^-}{2\pi} \Big|_{\Gamma}. \quad (4.87)$$

Как видно из (4.87), число линейно независимых решений КЗ-3 определяется разностью числа оборотов комплексных векторов  $W^+/W$  и  $F^+/F^-$ , которая должна быть положительной с тем, чтобы обеспечить разрешимость СИУ (4.84).

Механически случай  $\delta_3^\pm \neq 0, \pm\pi$  означает, что отношения  $W^+/F^+$  и  $W/F^-$  не должно быть вещественными в любой точке контура. Можно показать, что это имеет место, если  $\text{Im}(\varphi^\pm T^\pm) \neq 0$  на  $\Gamma$  и поэтому широкий класс напряженных состояний может удовлетворить этому ограничению. Например, в случае единичной окружности, граничные значения биголоморфных функции  $\varphi(z)T(z, \bar{z})$  можно приблизить тригонометрическими многочленами (потому что  $\bar{\zeta} = \zeta^{-1}$ ). Таким образом, это ограничение означает, что мнимые части этих полиномов не имеют корней на  $(-\pi, \pi]$ . Особые случаи, в которых ориентации усилий и смещений совпадают рассматриваются в следующей главе.

**КЗ-4.** Сначала рассмотрим случай, когда  $\langle F \rangle = 0$ . Это означает, что  $h = -\bar{g}$  и граничные значения биголоморфной функции задаются формулой (3.49).

Подстановка (3.49) и (3.23) в первое уравнение в (4.70) приводит к следующему СИУ для КЗ-4

$$\pm g \mp e^{2i\beta} \bar{g} + \mathbf{S}(g) - \left( \frac{\kappa-1}{\kappa+1} e^{2i\beta} + \frac{2}{\kappa+1} e^{2i\gamma} \right) \overline{\mathbf{S}(g)} + \frac{e^{2i\beta} - e^{2i\gamma}}{\kappa+1} (\mathbf{R}_1(g) - \mathbf{R}_2(\bar{g})) = 0. \quad (4.88)$$

Подставляя

$$a = \pm 1, \quad b = \mp e^{2i\beta^\pm}, \quad c = 1, \quad d = -\frac{\kappa-1}{\kappa+1} e^{2i\beta^\pm} - \frac{2}{\kappa+1} e^{2i\gamma^\pm} \quad (4.89)$$

в (3.71) найдем коэффициент задачи Римана в следующей форме

$$A - iB = \frac{\pm 8i}{(\kappa+1)^2} (\kappa + e^{\mp 2i\delta_4}) e^{\pm i\delta_4} \sin \delta_4, \quad \delta_4 = \beta - \gamma \Rightarrow G_4^\pm = e^{\pm 2i\delta_4} \frac{\kappa + e^{\mp 2i\delta_4}}{\kappa + e^{\pm 2i\delta_4}}. \quad (4.90)$$

Коэффициент для внутренней области совпадает с полученным в предыдущем параграфе. Для индекса находим

$$K_4^\pm \equiv \text{Index}(G_4^\pm) = \pm \frac{\delta_4}{\pi} \Big|_{\Gamma}. \quad (4.91)$$

Альтернативное решение основано на предположении  $\langle W \rangle = 0$ . Это означает, что  $h = \kappa \bar{g}$  и граничные значения биголоморфной функции определяются формулой (3.49), в которой  $h = \kappa \bar{g}$ . Подстановка этого выражения и первой формулы в (3.23) в первое уравнение в (4.70) приводит к другому СИУ для КЗ4

$$\pm g \mp e^{2i\gamma} \bar{g} + \mathbf{S}(g) + \left( \frac{\kappa-1}{\kappa+1} e^{2i\gamma} - \frac{2\kappa}{\kappa+1} e^{2i\beta} \right) \overline{\mathbf{S}(g)} + \frac{e^{2i\beta} - e^{2i\gamma}}{\kappa+1} (\mathbf{R}_1(g) + \kappa \mathbf{R}_2(\bar{g})) = 0. \quad (4.92)$$

После подстановки

$$a = \pm 1, \quad b = \mp e^{2i\gamma}, \quad c = 1, \quad d = e^{2i\gamma} \left( \frac{\kappa-1}{\kappa+1} - \frac{2\kappa}{\kappa+1} e^{2i\delta_4} \right) \quad (4.93)$$

в (3.71) становится очевидным, что выражение для коэффициента задачи Римана остается таким же, как и в (4.91). Поэтому индекс не зависит от выбора второго условия (4.70).

Решение для внутренней области существует, если после полного обхода контура число оборотов комплексного вектора  $W^+/F^+$  в направлении против

часовой стрелки больше, чем в направлении по часовой стрелке. Для внешней области ситуация противоположная, вектор  $W/F$  должен сделать больше оборотов против часовой стрелки для того чтобы обеспечить разрешимости СИУ (4.88) и (4.92). Если решения существуют, то они зависят от  $2K_4^\pm$  линейно независимых вещественных постоянных, входящих в произвольные многочлены.

#### 4.4.3. Заключительные замечания по задачам КЗ-1 – КЗ-4

Соотношения между индексами краевых задач 1-4 имеют вид

$$2K_3 = K_1 + K_2 = K_4^+ + K_4^- . \quad (4.94)$$

Как видно из (4.94), число независимых решений КЗ-3 является средним между числом решений КЗ-1 и КЗ-2, а также средним между числом решений КЗ-4 для внешней и внутренней областей. Можно отметить, что одна из задач КЗ-1 или КЗ-2 может быть неразрешимой (если  $K_1 \leq 0$  или  $K_2 \leq 0$ ), но при этом решение КЗ-3 может существовать при условии, что  $K_3 > 0$ . Аналогичным образом, КЗ-3 может быть разрешимой в то время как одно из решений КЗ-4 не существует.

Если опустить второе условия в КЗ-4, выражающее непрерывность усилий или смещений, то задача для внутренней (внешней) области не будет недоопределенной. Ее решение может быть построено путем наложения определенных соотношений на искомые функции  $g$  и  $h$ . КЗ-3 и КЗ-4 это только две возможности, которые имеют четкое толкование в механических терминах. Однако другие возможности теоретически допустимы, например, функцию  $h$  можно искать в общем виде, аналогичном, выражению (3.71), что может привести к другим выводам в отношении числа независимых решений.

Определение числа линейно независимых решений СИУ для КЗ-1 – КЗ-4 представляет основной результат этого параграфа. Анализ ориентаций смещений и усилий на границе имеет важное значение при численной реализации для обеспечения полноты решения конкретных механических проблем, которые будут рассмотрены далее для моделирования напряженных состояний специфических тектонических регионов.

#### 4.5. Краевая задача с ГУ в направлениях напряжений для составной упругой плоскости

В данном параграфе рассматривается плоскость, состоящая из двух разномодульных полуплоскостей. Если граничные условия не содержат смещений, то учет разномодульности не приводит к каким-либо изменениям в выражениях предыдущей главы для граничных значений потенциалов и функций напряжений. В противном случае нужно скорректировать приведенные ранее в Главе 3 формулы для граничных значений, что и сделано в следующем параграфе. Далее разбираются две задачи  $(\beta, p)$  и  $(\alpha, p)$ , в первой их разномодульность входит в формулировку, а во второй не входит. Обе задачи представляет теоретический базис для важного практического случая - анализа напряжений в соседних тектонических плитах - он будет рассмотрен более подробно в Главе 8.

##### 4.5.1. Задача $(\beta, p)$ для составной плоскости

###### Формулировка через комплексные потенциалы

Пусть  $\Gamma$  - гладкий замкнутый контур, разделяющий всю комплексную плоскость на две односвязные области -  $\Omega^+$  (внутренняя) и  $\Omega^-$  (внешняя), состоящих из разномодульных материалов с модулями сдвига  $G^\pm$  и коэффициентами Пуассона  $\nu^\pm$ .

Граничные значения смещений  $\mathbf{w}=(w_1, w_2)$  и усилий  $\mathbf{t}=(t_1, t_2)$  могут быть записаны в виде двух функций комплексного переменного  $\zeta \in \Gamma$  -  $W$  и  $F$  соответственно, через граничные значения комплексных потенциалов

$$\begin{aligned} 2G^\pm W^\pm &= 2G^\pm (w_1^\pm + iw_2^\pm) = \kappa^\pm \varphi^\pm - \bar{T}^\pm, \\ F^\pm &= t_1^\pm + it_2^\pm = \varphi^\pm + \bar{T}^\pm. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Здесь и далее знаки “ $\pm$ ” обозначают граничные значения, полученные при приближении к контуру  $\Gamma$  из областей  $\Omega^\pm$  соответственно, а упругие константы  $\kappa^\pm$  определяются как  $\kappa^\pm = 3 - 4\nu^\pm$  - для плоской деформации и  $\kappa^\pm = (3 - \nu^\pm)(1 + \nu^\pm)^{-1}$  - для плоского напряженного состояния; аргумент ( $\zeta$ ) комплекснозначных функций в

большинстве случаев не показан. Биголоморфная функция  $T$  - есть комбинация комплексных потенциалов (3.13).

Пусть ориентации смещений известны по обе от стороны контура, а усилия непрерывны при переходе через контур. Тогда приходим к следующей краевой задаче для голоморфных функций - *Определить две кусочно голоморфные функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  по граничным условиям на  $\Gamma$ :*

$$F^+ - F^- = 0, \quad (4.96)$$

$$\arg W^\pm = \beta^\pm, \quad (4.97)$$

при условии, что две вещественные функции  $\beta^\pm = \beta^\pm(\zeta)$  удовлетворяют условию Гёльдера на контуре.

Следует отметить, что (4.96) эквивалентно условию непрерывности вектора напряжений  $\sigma = \sigma_n + i\sigma_t$  при переходе через  $\Gamma$ , что следует из непрерывности контурной производной усилий

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} F^\pm = \varphi'^\pm + \bar{\varphi}'^\pm + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \zeta} (\zeta \bar{\varphi}''^\pm + \bar{\psi}'^\pm) = \sigma_n^\pm + i\sigma_t^\pm = \sigma^\pm, \quad \zeta \in \Gamma. \quad (4.98)$$

Краевые условия (4.97) также может быть выражено в виде

$$\operatorname{Im} \left( e^{-i\beta^\pm} W^\pm \right) = 0. \quad (4.99)$$

Как только потенциалы найдены, то поля напряжений (т.е. функции напряжений и компоненты напряжений) в обеих внешних и внутренних областях можно определить по формулам Колосова-Мусхелишвили.

Сумма уравнений в (4.95) дает следующее выражение для граничных значений голоморфной функции  $\varphi$

$$(\kappa^\pm + 1)\varphi^\pm = 2G^\pm W^\pm + T^\pm. \quad (4.100)$$

С учетом (4.96) можно представить скачок голоморфной функции  $\varphi$  в виде

$$\langle \varphi \rangle = \left\langle \frac{2G}{\kappa+1} W \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\kappa+1} T \right\rangle \equiv g. \quad (4.101)$$

Как следует из (3.13) и (4.95) скачок голоморфной функции  $\psi$  есть

$$\langle \psi \rangle = -\langle \bar{\varphi} \rangle - \bar{\zeta} \langle \varphi' \rangle \equiv h. \quad (4.102)$$

Как видно из последних двух формул, выражения для скачков формально имеют такой же вид, что и в Главе 3, но теперь включают в себя различные упругие постоянные по разные стороны от контура.

### Комплексное СИУ и его разрешимость

Граничные значения функции  $\varphi$  и сопряженной к ней формально остаются такими же, как и в (3.23), и даются следующим образом

$$2\varphi^\pm = \pm g + \mathbf{S}(g), \quad 2\bar{\varphi}^\pm = \pm \bar{g} + \overline{\mathbf{S}(g)}. \quad (4.103)$$

Функция  $h(\zeta)$  выражается через функцию  $g(\zeta)$  как  $h = -\bar{g} - \bar{\zeta}g'$  в силу непрерывности усилий, а граничные значения  $T$  принимают вид (3.58). Для получения СИУ вида (3.71) их следует переписать в виде

$$2T^\pm = \mp \bar{g} + \overline{\mathbf{S}(g)} + \mathbf{R}_1(g) - \mathbf{R}_2(g), \quad 2\bar{T}^\pm = \mp g + \mathbf{S}(g) + \overline{\mathbf{R}_1(g)} - \overline{\mathbf{R}_2(g)}. \quad (4.104)$$

Запишем систему двух вещественных СИУ, подставляя (4.103) и (4.104) в первое уравнение (4.95), а затем в (4.97), что дает

$$e^{-i\beta^\pm} \left( \pm (\kappa^\pm + 1)g + (\kappa^\pm - 1)\mathbf{S}g \right) - e^{i\beta^\pm} \left( \pm (\kappa^\pm + 1)\bar{g} + (\kappa^\pm - 1)\overline{\mathbf{S}g} \right) + \mathbf{reg}^\pm(g, \bar{g}) = 0 \quad (4.105)$$

$$\mathbf{reg}^\pm(g, \bar{g}) = e^{i\beta^\pm} (\mathbf{R}_1g - \mathbf{R}_2g) - e^{-i\beta^\pm} (\overline{\mathbf{R}_1g} - \overline{\mathbf{R}_2g}).$$

Здесь операторы  $\mathbf{reg}^\pm(.,.)$  являются регулярными, так как  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  являются регулярными, и очевидно, что их действительные части равны нулю.

Система двух вещественных уравнений (4.105) путем линейной комбинации сводится к форме (3.71). Для этого умножим эти уравнения на две разные (отличные от нуля) функции  $\exp(i\omega^\pm)$  соответственно, и суммируем их. Эта операция приводит к СИУ (3.71) со следующими коэффициентами

$$\begin{aligned}
a &= (\kappa^+ + 1)e^{-i(\beta^+ - \omega^+)} - (\kappa^- + 1)e^{-i(\beta^- - \omega^-)} \\
b &= -(\kappa^+ + 1)e^{i(\beta^+ + \omega^+)} + (\kappa^- + 1)e^{i(\beta^- + \omega^-)} \\
c &= (\kappa^+ - 1)e^{-i(\beta^+ - \omega^+)} + (\kappa^- - 1)e^{-i(\beta^- - \omega^-)} \\
d &= -(\kappa^+ - 1)e^{i(\beta^+ + \omega^+)} - (\kappa^- - 1)e^{i(\beta^- + \omega^-)}
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Подстановка (4.106) в (3.72) дает следующее выражение для коэффициента задачи Римана - функции  $G$

$$G = -e^{2i\delta} \frac{\kappa^+ \kappa^- - e^{-2i\delta}}{\kappa^+ \kappa^- - e^{2i\delta}}, \quad \delta = \beta^+ - \beta^-. \tag{4.107}$$

Как видно, эта функция не зависит от углов  $\omega^\pm$ , что означает, что эти углы могут быть выбраны произвольно, за исключением  $\omega^\pm = \pi k$ .

Так как  $\kappa > 1$ , то дробь в (4.107) не влияет на индекс, поскольку его действительная часть всегда положительна, поэтому, индекс определяется следующим образом

$$2K \equiv \text{Index}(G) = \frac{1}{\pi} [\delta]_{\Gamma}. \tag{4.108}$$

Последняя формула показывает, что индекс зависит от разности ориентаций смещения только, то есть от угла  $\delta$ , приращение которого (после полного обхода  $\Gamma$  в положительном направлении) должно быть положительным для того, чтобы обеспечить разрешимость рассматриваемой КЗ. Если  $2K \leq 0$ , то не существует ограниченных (нетривиальных) решений. Для  $2K > 0$  решение (3.71) включает в себя произвольный полином степени  $2K-1$ , что означает, что в решение линейно входит до  $4K$  вещественных параметров. Следует отметить, что степень полинома (следовательно, и число констант) может быть уменьшена, если введены определенные ограничения.

Можно несколько упростить коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  путем специального выбора углов  $\omega^\pm$ . Полагая  $\omega^\pm = -\beta^\pm$ , найдем, что два из них являются константами

$$\begin{aligned} a &= (\kappa^+ + 1)e^{-2i\beta^+} - (\kappa^- + 1)e^{-2i\beta^-}, & b &= -\kappa^+ + \kappa^- \\ c &= (\kappa^+ - 1)e^{-2i\beta^+} + (\kappa^- - 1)e^{-2i\beta^-}, & d &= -\kappa^+ - \kappa^- + 2 \end{aligned} \quad (4.109)$$

При этом выражения для коэффициентов задачи Римана не изменятся, поскольку

$$A \mp iB = \mp 8i \sin(\delta) e^{\pm i\delta} \left( \kappa^+ \kappa^- - e^{\mp 2i\delta} \right), \quad \delta = \beta^+ - \beta^-. \quad (4.110)$$

Видно, что  $\text{Index}(A \mp iB) = \pm K$ , следовательно

$$\text{Index}(G) = \text{Index}\left(\frac{A-iB}{A+iB}\right) = 2K. \quad (4.111)$$

Последняя формула совпадает с индексом, рассчитанным по формулам (4.106) - (4.107).

Численной решение этой задачи может быть найдено по формуле (3.109), т.е. путем суперпозиции всех решений однородного характеристического СИУ и частного решения полного СИУ, как подробно описано в параграфе 3.3 Главы 3.

### **Заключительные замечания по задаче $(\beta, \rho)$ для составной плоскости**

Проведен анализ разрешимости краевой задачи теории упругости с граничными условиями в ориентациях вектора смещений, заданных по обе стороны контура, разделяющего разномодульные области, для случая, когда вектор напряжений непрерывен при переходе через контур. Показано, что для положительного индекса  $2K$  решение включает полином степени  $2K-1$  с произвольными коэффициентами, которые не могут быть определены. Для случая неположительного индекса ограниченных решений не существует.

Можно надеяться на то, что для простых контуров (типа окружностей или прямых линий) возможно нахождение решения в аналитическом виде. Это связано с тем, что регулярные операторы не влияют на краевую задачу, например,  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = 0$  для соединенных полуплоскостей. Однако этого упрощения недостаточно для нахождения аналитического решения, так как в общем случае операторы  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  в (3.87) не обращаются в нуль (хотя они могут иметь



относительно простые формы для некоторых функций углов,  $\beta$ ). Следует отметить, что, если предположить, что модули векторов смещений одинаковы по разные стороны контура (например, в случае одинаковых полуплоскостей), то краевая задача распадается, что указывает на то, что граничные значения ориентаций смещений на разных сторонах контура не могут быть выбраны в качестве независимых.

Важно отметить, что разномодульность не оказывает существенного влияния на разрешимость КЗ и тем более на численный подход

#### 4.5.2. Задача $(\alpha, p)$ для составной плоскости

Рассмотрим отдельно краевую задачу, сформулированную в главных направлениях тензора напряжений, которые заданы на разных сторонах гладкого замкнутого контура  $\Gamma$ , разделяющего бесконечную изотропную однородную упругую плоскость на внутреннюю  $\Omega^+$  и внешнюю  $\Omega^-$  области.

*Определить все возможные напряженные состояния в  $\Omega^+$  и  $\Omega^-$  по заданным граничным значениям главных направлений (т.е. по граничным значениям аргумента биголоморфной функции) по обе стороны контура  $\Gamma$*

$$\arg D^\pm = \alpha^\pm \quad (4.112)$$

*при условии непрерывности вектора напряжений при переходе через контур*

$$\langle \sigma \rangle = 0. \quad (4.113)$$

Как и раньше нагрузки (смещения, усилия) на контуре неизвестны, и предполагается, что объемные силы отсутствуют, а напряжения на бесконечности могут быть постоянными, но также неизвестными ( $D^-(\infty) = D_\infty$ ), либо исчезают.

Второе граничное условие (4.113) будет автоматически удовлетворено если для искомой функции воспользоваться представлениями (3.57)-(3.62) Главы 3, что и сделано далее.

Граничные условия для главных направлений могут быть сформулированы в виде двух скалярных уравнений.

$$e^{-i\alpha^\pm} D^\pm - e^{i\alpha^\pm} \overline{D}^\pm = 0. \quad (4.114)$$

Основываясь на полученном ранее выражении (3.57) и используя обозначения (4.20) для действительной и мнимой частей неизвестной функции  $g'(t) = \mu(t) + iv(t)$ ,  $t \in \Gamma$ , можно записать граничные значения биголоморфной функции  $D$ , удовлетворяющие условию  $\langle \sigma \rangle = 0$ , в виде

$$D^\pm = \mp e^{-2i\vartheta} \mu - \mathbf{S}(e^{-2i\vartheta} \mu) + \frac{1}{2} \mathbf{R}_1(\mu + iv). \quad (4.115)$$

Из (4.115) видно, что скачок граничных значений девиатора напряжений выражается только через действительную часть неизвестной функции, то есть

$$\tau_{\max}^+ e^{i\alpha^+} - \tau_{\max}^- e^{i\alpha^-} = -2e^{-2i\vartheta} \mu. \quad (4.116)$$

Разделяя действительные и мнимые части найдем

$$\begin{aligned} \tau_{\max}^+ \cos(\eta^+) - \tau_{\max}^- \cos(\eta^-) &= -2\mu, \\ \tau_{\max}^+ \sin(\eta^+) - \tau_{\max}^- \sin(\eta^-) &= 0, \end{aligned} \quad (4.117)$$

где для краткости введено обозначение

$$\eta^\pm = \alpha^\pm + 2\vartheta. \quad (4.118)$$

Принимая во внимание неотрицательность и ограниченность максимальных касательных напряжений  $\tau^\pm$  можно получить ограничение на углы  $\alpha^\pm$ , которые, как следует из второго уравнение (4.117), должны удовлетворять неравенству

$$\sin(\eta^+) \sin(\eta^-) \geq 0. \quad (4.119)$$

Проверим случай, когда  $\alpha^+ = \alpha^-$  на всем контуре. Тогда, как следует из второго уравнения (4.117),  $\tau_{\max}^+ = \tau_{\max}^-$  на всем контуре, и, следовательно, из первого уравнения (4.117) найдем  $\mu=0$ , т.е. в этом случае возможно только

тривиальное решение, или, другими словами, решение не существует. Если  $\alpha^+ = \alpha$ ,  $\alpha^- = \pi - \alpha$  на всем контуре, что удовлетворяет неравенству (4.119), то  $\tau_{\max}^+ = \tau_{\max}^- = \tau_{\max} \geq 0$ , и тогда  $\mu = -\tau_{\max}$ . Принимая во внимание соотношения между главными направлениями и аргументом функции девиатора напряжений (см формулу (4.7)), находим ограничения, накладываемые на изменения углов траекторий главных напряжений при переходе через контур. Для примера, положим  $\vartheta = 0$ . Тогда неравенство (4.119) указывает на то, что главные направления  $\theta^+, \theta^-$  на могут лежать в соседних квадрантах как показано на Рисунке 4.1а, а должны находиться либо в первом и третьем (Рисунок 4.1б) либо во втором и четвертом. Также допустим разрыв в главных направлениях, когда они изменяются скачком на  $\pi/2$ , Рисунке 4.1в. Тривиальный случай  $\theta^+ = \theta^-$  механически допустим, но при этом краевая задача не имеет смысла, т.к. имеет тривиальное решение.

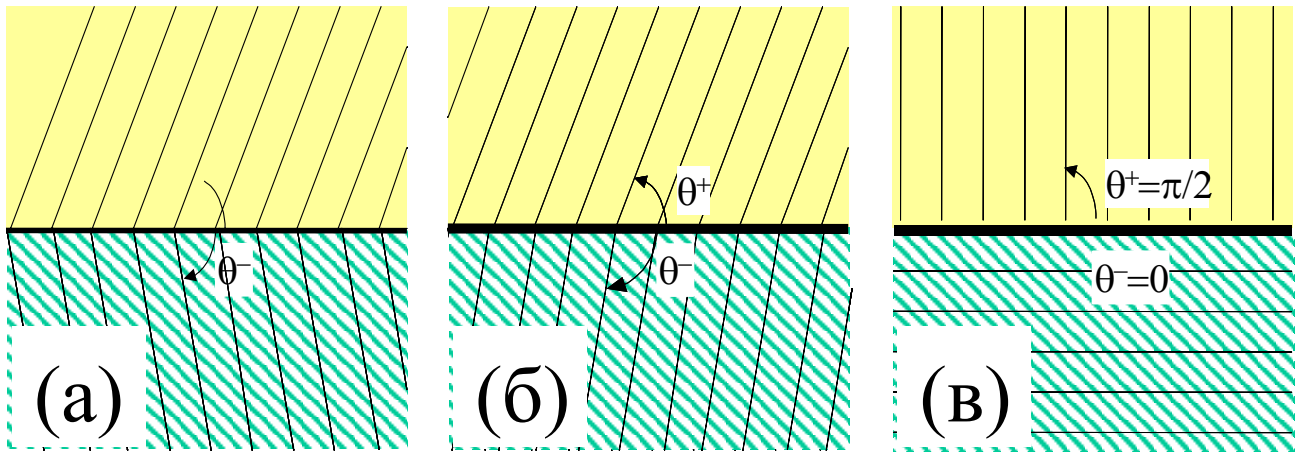


Рисунок 4.1. Примеры поведения траекторий при переходе через прямолинейный контур - недопустимое (а) и допустимые (б) и (в).

Подставляя (4.115) в (4.14) получим систему двух скалярных СИУ в виде

$$\pm 2i \sin(2\vartheta + \alpha^\pm) \mu - e^{-i\alpha^\pm} \mathbf{S}(e^{-2i\vartheta} \mu) + e^{i\alpha^\pm} \overline{\mathbf{S}(e^{-2i\vartheta} \mu)} + i \operatorname{Im} \left( e^{-i\alpha^\pm} \mathbf{R}_1(\mu + iv) \right) = 0 \quad (4.120)$$

Комбинируя два скалярных СИУ (4.120) в одно, путем исключения сопряженного сингулярного оператора (здесь нет необходимости применять оператор вида (3.86)), находим следующее комплексное СИУ

$$(2e^{4i\vartheta} - e^{-2i\alpha^+} - e^{-2i\alpha^-})(e^{-2i\vartheta}\mu) + (e^{-2i\alpha^-} - e^{-2i\alpha^+})\left(\mathbf{S}(e^{-2i\vartheta}\mu) - \frac{1}{2}\mathbf{R}_1(\mu + iv)\right) = 0. \quad (4.121)$$

Умножая (4.121) на  $e^{-4i\vartheta}$  и, вводя новую неизвестную функцию  $\rho = e^{-2i\vartheta}\mu$ , преобразуем это СИУ к более компактному виду

$$a\rho + c\left(\mathbf{S}(\rho) - \frac{1}{2}\mathbf{R}_1(\rho e^{2i\vartheta} + iv)\right) = 0, \quad (4.122)$$

где обозначено

$$a = 2 - e^{-2i\eta^+} - e^{-2i\eta^-}, \quad c = e^{-2i\eta^-} - e^{-2i\eta^+}. \quad (4.123)$$

Следуя идее суперпозиции решений (3.88), будем разыскивать решение СИУ (4.122) в виде суммы

$$g' = \rho_0 + \lambda, \quad \text{Im}(e^{2i\vartheta}\rho_0) = 0, \quad (4.124)$$

где  $\rho_0$  - есть решение характеристического уравнения, которое получается из (4.122), если опустить регулярный оператор (тогда единственная искомая функция будет функция  $\rho$ )

$$a\rho_0 + c\mathbf{S}(\rho_0) = 0. \quad (4.125)$$

Второй член в (4.124) есть частное решение полного неоднородного уравнения

$$ae^{-2i\vartheta}(\lambda + \bar{\lambda}) + c\mathbf{S}(e^{-2i\vartheta}(\lambda + \bar{\lambda})) - c\mathbf{R}_1(\lambda) = c\mathbf{R}_1(\rho_0 e^{2i\vartheta}). \quad (4.126)$$

Решение полного уравнения может быть построено любым приемлемым численным методом, поскольку его правая часть является неоднородной. Она зависит от полного решения однородного СИУ (4.125) и, следовательно, содержит неопределенные константы, которые входят линейно.

Найдем их число исследуя разрешимость соответствующей краевой задачи Римана, которая как и раньше строим по формулам Сохоцкого-Племеля, т.е. вводя голоморфную функцию  $A$  по формулам  $\rho = A^+ - A^-$ ,  $S(\rho) = A^+ + A^-$ , что дает  $(a+c)A^+ = (a-c)A^-$ . Подставляя сюда выражения для  $a$  и  $c$  из (4.123) получим

$$e^{-i\eta^+} \sin(\eta^+) A^+ = e^{-i\eta^-} \sin(\eta^-) A^-. \quad (4.127)$$

Поскольку синусы в обеих частях этого уравнения могут менять знак только одновременно, что обусловлено неравенством (4.119), они не оказывают влияния на индекс задачи Римана с коэффициентом

$$G = e^{i(\eta^+ - \eta^-)} G_0, \quad G_0 = \frac{\sin \eta^-}{\sin \eta^+}. \quad (4.128)$$

Таким образом, индекс определяется только разностью  $\eta^+ - \eta^-$  или, с учетом (4.118), разностью  $\alpha^+ - \alpha^-$  как показано ниже

$$K = \text{Index}(G) = \text{Index}\left(e^{i(\alpha^+ - \alpha^-)}\right) = \frac{1}{2\pi} [\alpha^+ - \alpha^-] \Big|_{\Gamma}. \quad (4.129)$$

Таким образом, количество линейно независимых решений характеристического уравнения (4.125), соответствующего полному (4.122), зависит от количества оборотов разности граничных значений главных направлений. Поскольку  $\alpha^\pm = \pi - 2\theta^\pm$  (в геомеханике  $\alpha^\pm = -2\theta^\pm$ ), то из условия разрешимости  $K \geq 0$  следует, что число вращений оси максимального главного напряжения при обходе контура против часовой стрелки при предельном переходе к контуру снаружи должно превышать их число, полученное переходом изнутри.

Формальное решение задачи Римана (4.127) можно выписать в виде

$$A^+(z) = P_K(z) e^{Y^+(z)}, \quad A^-(z) = z^{-K} P_K(z) e^{Y^-(z)} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln[t^{-K} G(t)]}{t-z} dt = \begin{cases} Y^+(z) & z \in \Omega^+ \\ Y^-(z) & z \in \Omega^- \end{cases} \quad (4.130)$$

Здесь  $P_K$  – многочлен степени  $K$  с произвольными комплексными коэффициентами, а функция  $G$ , определяемая по формуле (4.128), является непрерывной, поскольку синусы могут обращаться в нуль только одновременно из-за условий (4.119).

Для граничных значений по формулам Сохоцкого-Племеля имеем

$$A^\pm = \zeta^{-\frac{K}{2}} P_K \sqrt{\frac{\sin \eta^\mp}{\sin \eta^\pm}} \exp\left[\pm \frac{i}{2}(\alpha^+ - \alpha^-) + \frac{1}{2} \mathbf{S}(\ln(t^{-K} G))\right]. \quad (4.131)$$

Соответственно решение однородного характеристического СИУ (4.125) можно записать в виде

$$\rho_0 = \zeta^{-\frac{K}{2}} P_K(\zeta) U(\zeta), \quad (4.132)$$

где введено обозначение

$$U(\zeta) = \frac{\sin \eta^- e^{\frac{i}{2}(\alpha^+ - \alpha^-)} - \sin \eta^+ e^{-\frac{i}{2}(\alpha^+ - \alpha^-)}}{\sqrt{\sin \eta^+ \sin \eta^-}} e^{\frac{1}{2} \mathbf{S}(\ln(t^{-K} G))}. \quad (4.133)$$

Это решение зависит от  $K+1$  произвольных комплексных коэффициентов многочлена  $P_K$ . Обозначим их через  $C_k$  и перепишем (4.132) в виде суммы

$$\rho_0 = \sum_{k=0}^K C_k \rho_k^0, \quad (4.134)$$

где

$$\rho_k^0 = \zeta^{k - \frac{K}{2}} U(\zeta). \quad (4.135)$$

Обозначим через  $\lambda_k$  частные численные решения СИУ (4.126), соответствующие правым частям СИУ (4.126) вида  $c \mathbf{R}_1(\rho_k^0 e^{2i\vartheta})$ . Тогда используя формулы (4.124) и (4.133)-(4.135) можно выписать решение полного однородного СИУ (4.122) в виде линейной комбинации решений  $\rho_k^0$  однородного СИУ и неоднородного СИУ

$$g' = \sum_{k=0}^K C_k (\rho_k^0 e^{2i\vartheta} + \lambda_k). \quad (4.136)$$

Формально решение (4.136) зависит от  $K+1$  произвольных комплексных коэффициентов многочлена  $P_K$ , но их число будет меньше если принять во внимание, что произведение  $\rho e^{2i\vartheta} = \mu$  есть вещественная функция. Заметим, что в выкладках, проведенных выше, мы не считали, что произведение  $\rho_0 e^{2i\vartheta}$  является действительным. Также следует отметить, что, если ищется исчезающее решение на бесконечности, то многочлен  $P_K$  должен быть заменен на  $P_{K-1}$ . Интересно, что, если формально положить  $\eta = \eta^+ = -\eta^-$ , то решения для первого СИУ в задаче  $(\alpha, \alpha'_n)$ , см формулу (4.42), с точностью до обозначений полностью совпадает с решением для  $\mu_0 = \rho_0 e^{2i\vartheta}$ , т.к.  $G_0=1$  и в формуле (4.133) следует учесть, что синусы сократятся и  $\alpha^+ - \alpha^- = \eta^+ - \eta^- = 2\eta$ . В следующей главе подробно разобран случаи кругового контура для задачи  $(\alpha, \alpha'_n)$  и двух полуплоскостей для задачи  $(\alpha, p)$ , и, как будет показано, число независимых констант должно быть уменьшено в два раза. Таким образом можно заключить, что решение задачи  $(\alpha, p)$  в случае исчезающего решения на бесконечности также зависит от  $K$  линейных вещественных постоянных. При исследовании конкретных конфигураций может оказаться удобным использовать граничные значения модуля функции девиатора напряжений, которые определяются из решения системы (4.117) по формулам

$$\tau_{\max}^{\pm} = \frac{2\mu \sin \eta^{\mp}}{\sin(\eta^+ - \eta^-)}. \quad (4.137)$$

Поскольку обе эти величины есть вещественные и неотрицательные, то их подстановка в (4.136) приведет к дополнительным условиям, налагаемым на коэффициенты  $C_k$ . Более того соотношения (4.137) позволяют сразу выписать граничные значения комплекснозначной функции девиатора в виде

$$D^{\pm} = 2\mu \frac{\sin(\alpha^{\mp} + 2\vartheta)}{\sin(\alpha^+ - \alpha^-)} e^{i\alpha^{\pm}} = 2\rho \frac{\sin \eta^{\mp}}{\sin(\eta^+ - \eta^-)} e^{i\eta^{\pm}} \quad (4.138)$$

Как видно из формул (4.138), граничные значения девиатора не зависят от второй искомой функции  $v(t)$ , однако она определяется в процессе решения, и соответственно, входит в граничные значения комплексных потенциалов и функции средних напряжений  $-P$ , следовательно, и в вектор напряжений. Таким образом, напряжения в составной плоскости будет полностью определено с точностью до  $K$  линейных вещественных постоянных (либо до  $K-1$ , если напряжения на бесконечности отсутствуют).

Отметим также, что из-за отсутствия функции  $v(t)$  в формулах (4.138) для определения напряженно деформированного состояния недостаточно знать только граничные значения девиатора. Для примера, рассмотрим единичную окружность, и введем биголоморфные функции  $D^\pm(z) = D_0^\pm(z) + D_1^\pm(z)$ , где  $D_0^\pm(z)$  - некоторая заданная биголоморфная, такая, что ее мнимая часть не равна нулю всюду (это необходимо, чтобы окружность не была одной из траекторий главных напряжений),  $D_1^\pm(z) = (\bar{z} - z^{-1})X'^\pm(z)$  - биголоморфная, обращающаяся в нуль на окружности, а  $X'^\pm(z)$  - произвольные голоморфные, такие что  $X''^+(0) = 0$  и  $\bar{z}X'^-(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$  (здесь для удобства использованы производные голоморфных функций). Очевидно, что добавление функций  $D_1^\pm(z)$  к  $D_0^\pm(z)$  не меняет ни поведение  $D^\pm(z)$  в нуле и на бесконечности ни краевые значения функций  $D^\pm(\zeta)$  на окружности. Следовательно, последние могут быть использованы только для определения функций  $D_0^\pm(z)$ , а полное представление биголоморфной функции будет включать произвольную голоморфную функцию  $D_1^\pm(z)$ , т.е. общая краевая задача нахождения биголоморфной функции по ее граничным значениям является существенно недоопределенной. Покажем, что добавление функций  $D_1^\pm(z)$  к  $D_0^\pm(z)$  нарушает условия непрерывности напряжений при переходе через контур. Пусть  $D_0^\pm(z) = 0$ , тогда из уравнений



равновесия следует, что  $X'^{\pm}(z)$  есть производная комплексного потенциала  $\Phi^{\pm}(z)$ , таким образом по формуле (3.14) дополнительный вектор напряжений, возникающий на контуре за счет  $D_1^{\pm}(z)$ , будет вещественным и равным  $\sigma_r(\zeta) = 2\text{Re}[\Phi^{\pm}(\zeta)]$ , поскольку  $D_1^{\pm}(\zeta) = 0$ . Как следует из решения первых основных задач для круга и плоскости с круговым отверстием (например, [Мусхелишвили, 1966]) при одинаковых радиальных напряжениях  $\sigma_r(\zeta)$ , окружные напряжения  $\sigma_{\theta}^{\pm}(\zeta)$  имеют разные знаки при подходе к одной и той же точке контура с разных сторон от него. Более того для непрерывных нагрузок легко показать, что на окружности выполняется  $\sigma_{\theta}^{\pm}(\zeta) = \pm\sigma_r(\zeta)$  (см для проверки частный случай  $\sigma_r = \text{const}$  для случая кругового кольца в [Тимошенко, Гудьер, 1979]). Тогда их разности будут  $\sigma_{\theta}^+(\zeta) - \sigma_r(\zeta) = 0$  - для внутренности круга и  $\sigma_{\theta}^-(\zeta) - \sigma_r(\zeta) = -2\sigma_r(\zeta)$  - для внешности, что противоречит условию  $D_1^{\pm}(\zeta) = 0$ . Таким образом, добавление члена  $D_1^{\pm}(z)$  не изменяет главные направления на границе круга. Для того, чтобы они не изменились и на ободке кругового выреза, надо положить радиальные напряжения равными нулю. Это нарушает непрерывность вектора напряжений в общем случае.

#### 4.6. *Комментарии и общие выводы по главе*

В данной главе проведен анализ разрешимости нескольких краевых задач теории упругости с «неполными граничными условиями». Во всех формулировках полностью отсутствовали данные по величинам векторов напряжений, усилий и смещений на границе внутренней области либо на контуре, делящим упругую плоскость на внутреннюю и внешнюю области (транзитные условия). Анализ выполнен по схеме, разработанной в предыдущей главе, а именно

1. Формулировка через комплексные потенциалы с последующим переходом к краевым значениям функций напряжений и смещений.

2. Сведение к системе СИУ, а затем, если требуется, к комплексному СИУ.
3. Выделение характеристического СИУ и его исследование путем решения соответствующей задачи Римана.
4. Получение, когда возможно, замкнутых формул для искомым функций в СИУ.

Во всех рассмотренных задачах было обнаружено, что их решение зависит от поведения граничных значений аргументов функций напряжений, смещений или усилий. Именно они определяют индекс соответствующей краевой задачи Римана, а, следовательно, и количество линейно независимых решений и число произвольных постоянных, входящих в решение. В зависимости от формулировки индексы (целые числа) определяются как число вращений векторов главных напряжений, смещений либо усилий (либо определенных отношений этих векторов) при полном обходе контура против часовой стрелки. При этом имеет значение в каком направлении происходят эти вращения, если по часовой стрелке, то индекс положителен, если против, то отрицателен. В последнем случае решение (имеется в виду нетривиальное и ограниченное) не существует. При положительных индексах число неопределенных постоянных пропорционально индексу.

Неопределенные константы не могут быть определены без привлечения дополнительных данных, например, по точечным измерениям напряжений или смещений. Если таковые имеются, то возможно получение единственных решений, что может быть достигнуто подгонкой общего решения к дискретным данным, например, путем подбора постоянных из задачи минимизацией невязки между решением и данными в дискретных точках. Примеры таких задач будут показаны в последующих главах.

Проведенные исследования составляют теоретический базис для разработки численных методов реконструкций упругих напряжений по индикаторам напряжений и смещений, определяемых экспериментально. Все указанные краевые задачи относятся к классу некорректных, т.к. обладают неединственными

решениями. Помимо неединственности возможно и проявление неустойчивости, что будет исследовано в последующих главах при разработке численных алгоритмов.

Несмотря на то, что имеются близкие формулировки [Гахов, 1977] для полианалитических функций, все полученные здесь решения являются новыми и оригинальными, поскольку ни одна из введенных ранее функций напряжений (смещений или усилий) не является полианалитической. Хотя они и могут быть выражены посредством дифференцирования бигармонической функции Эйри (через которую выражаются компоненты напряжений), но выигрыш от этого неочевиден, из-за того, что в них также входят комплексно сопряженная переменная (неаналитическая функция), что создает такие же трудности, как и в рассмотренных задачах. Для простейших контуров (типа окружности и прямых), можно построить аналитические решения в замкнутом виде, т.к. полное и характеристическое СИУ либо совпадают, либо отличаются несущественно, что и будет сделано в следующей главе.

## ГЛАВА 5. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ ОБЛАСТЕЙ И ДЛЯ ОСОБЫХ СЛУЧАЕВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

В некоторых частных случаях простой геометрии СИУ для всех рассмотренных задач из предыдущей главы может быть радикально упрощено. Так, в случае прямой границы регулярные операторы  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  есть тождественное нули, поэтому характеристические СИУ совпадают с полными СИУ во всех рассмотренных задачах. В случае круговой границы, регулярные операторы принимают очень простую формы и полное СИУ может быть сведено к анализу характеристического СИУ аналогично тому, как это было сделано ранее.

Здесь также строятся решения для некоторых специфических случаев граничных условий, которые остаются верными и для некруговых областей. Так обсуждается альтернативный подход к построению решений в случае соосности векторов смещений и усилий, он основан на регуляризирующем множителе [Гахов, 1977]. Также строится эффективное решение в случае, когда главные направления напряжений постоянны, что пригодиться для приложений.

### 5.1. Решение задачи $(\alpha, \alpha'_n)$ для единичного круга

#### 5.1.1. Решение в общем случае

Пусть  $\Gamma$  - окружность круга единичного радиуса,  $\zeta$  - точка на ней. Тогда  $e^{i\vartheta(\zeta)} = i\zeta$  и, следовательно,  $e^{-2i\arg(t-\zeta)} = -\zeta^{-1}t^{-1}$  и регулярные ядра в формулах (4.32) и (4.35) принимают вид  $K_1 = -2(\zeta+t)t^2$ ,  $K_2 = -it^2\zeta$ ,  $K_3 = -(\zeta+2t)t^2$ ,  $K_4 = -2t^3(\zeta^2 + \zeta t + t^2)$ . Регулярные операторы (4.31) и (4.34) с учетом однозначности смещений (4.22) упрощаются  $\mathbf{M}_1 = \text{const} = -a$ ,  $\mathbf{M}_2 = \text{const} = -2a$ . Здесь  $a$  постоянная, определяемая интегралом

$$a = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(t)}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu(e^{i\omega}) d\omega. \quad (5.1)$$

Постоянная  $a$  вещественна из-за того, что функция  $\mu$  вещественна. Выражения для сопряженных операторов (3.41) принимают вид

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{S}(\mu)} &= -\mathbf{S}(\mu) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(t)}{t} dt = -\mathbf{S}(\mu) + a, \\ \overline{\mathbf{S}(\lambda)} &= -\mathbf{S}(\lambda) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda(t)}{t} dt = -\mathbf{S}(\lambda) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{2\mu(t) - \check{v}'(t) + 2\check{\mu}'(t)}{t} dt = -\mathbf{S}(\lambda) + 2a.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Здесь учтено, что  $\check{\mathfrak{G}}'(t) = 1$ .

После подстановки (5.1) в начальную систему (4.36) получаем систему

$$\begin{cases} \left\{ \operatorname{Im} \left\{ e^{-i\eta} [\mu + \mathbf{S}(\mu) - a] \right\} \right\} = 0 \\ \left\{ \operatorname{Im} \left\{ e^{-i\vartheta} [\lambda + \mathbf{S}(\lambda) - 2a] \right\} + \alpha'_n e^{-i\vartheta} [\mu + \mathbf{S}(\mu) - a] \right\} = 0. \end{cases}\quad (5.3)$$

Эта система немного отличается от системы (4.37) из-за присутствия членов с постоянными  $a$ . Таким образом, система становится неоднородной и решение, полученное для характеристического уравнений должна быть скорректировано путем добавления соответствующих частных решений. Однако, для определения числа независимых констант, этот подход менее удобен чем прямое решение задачи Римана соответствующей системе СИУ (5.3). Действительно, вводя новые кусочно-голоморфные функции  $A_1^+ = A^+ - a/2, A_1^- = A^-$ , можно трансформировать первое уравнения (5.3) к однородной задачи Римана  $A_1^+ = -e^{2i\eta} A_1^-$ , которая уже рассматривалась выше. Ее решение имеет вид (4.40).

Принимая во внимание, что  $\ln \zeta = i(\vartheta - \pi/2) = i\omega$  можно выразить решение для  $\mu$  в виде

$$\mu = \frac{a}{2} - 2\zeta^{-\frac{K}{2}} e^{i\mathbf{S}(\eta - \frac{K}{2}\omega)} P_{K-1} \cos \eta. \quad (5.4)$$

Требование, что  $\mu$  вещественная функция приводит к следующему выражению

$$0 = \mu - \bar{\mu} = \zeta^{-\frac{K}{2}} e^{i\mathbf{S}(\psi - \frac{K}{2}\omega)} \cos \psi \left[ P_{K-1} - \zeta^K e^{-2ib} \bar{P}_{K-1} \right], \quad (5.5)$$

где коэффициент  $e^{-2ib}$  порожден сопряжением сингулярного оператора. Число  $2b$  (множитель 2 введен для удобства) является вещественным и равно

$$2b = \mathbf{R}_2 \left( \psi - \frac{\kappa}{2} \omega \right), \quad (5.6)$$

где  $\mathbf{R}_2$  определяется в (3.45).

Поскольку множители вне скобок в (5.5) не равны нулю, получаем

$$\begin{aligned} P_{K-1} - \zeta^K e^{-2ib} \bar{P}_{K-1} &= \sum_{j=0}^{K-1} (C_j \zeta^j - \bar{C}_j e^{-2ib} \zeta^{K-j}) = \\ &= C_0 + \sum_{j=1}^{K-1} (C_j - \bar{C}_{K-j} e^{-2ib}) \zeta^j - \bar{C}_0 e^{-2ib} \zeta^K = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Приравнивая коэффициенты многочлена к нулю, получаем  $(K-1)$  условий на коэффициенты  $C_j$  многочлена  $P_{K-1}$

$$C_j = e^{-2ib} \bar{C}_{-j+K}, j = 1 \dots K-1. \quad (5.8)$$

Из (5.7)-(5.8) видно, что коэффициент  $C_0$  всегда равен нулю, а  $e^{ib} C_{K/2}$  – вещественный. С учетом (5.8) можно представить решение (5.4) в виде

$$\mu(\zeta) = \frac{a}{2} - 2e^{-ib} e^{iS \left( \eta - \frac{\kappa}{2} \omega \right)} \cos \eta \left( e^{ib} C_{\frac{K}{2}} + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\frac{K-1}{2}} e^{ib} C_j \zeta^{j - \frac{K}{2}} \right). \quad (5.9)$$

Как видно из (5.9) решение для  $\mu$  включает в себя  $K$  независимых вещественных констант (две вещественные постоянные  $a$  и  $e^{ib} C_{K/2}$  и  $(K-2)$  вещественные постоянные, связанные с комплексными коэффициентами  $C_j$ ).

Решение второго уравнения в (5.3) может быть получено таким же образом. Как уже было показано в предыдущем разделе, это уравнения может быть преобразовано к однородной форме за счет введения новых голоморфных функций

$$B^+ = B_1^+ + iB_2^+ - a + i\alpha_n'^+ (2A^+ - a), B^- = B_1^- - iB_2^- + 2i\alpha_n'^- A^-. \quad (5.10)$$

Тогда приходим к задаче Римана  $B^+ + e^{2i\psi} B^- = 0$ , которая уже была решена выше. Ее решение дается формулой (4.46), его можно представить в виде

$$\lambda_1 = a - 2ZP_{K-1}^* \cos \eta - 2iS(\bar{\mu}') - i\left[\alpha'_n \left(S(\mu) - \frac{a}{2}\right) + \left(\mu - \frac{a}{2}\right) S(\alpha'_n)\right]. \quad (5.11)$$

Принимая во внимание, что  $\mathbf{R}_2(\bar{\mu}') = \mathbf{R}_2(\alpha'_n) = 0$ , можно представить условие того, что  $\lambda_1$  является вещественной функцией в форме, аналогичной (5.5), с той лишь разницей, что  $P_{K-1}^*$  должно стоять вместо  $P_{K-1}$ . Таким образом, условия (5.8) также могут быть наложены на коэффициенты  $C_j^*$  многочлена  $P_{K-1}^*$ . Таким образом, окончательное выражение для  $\lambda_1$  приобретает вид

$$\lambda_1 = \frac{a}{2} + \mu^* - 2iS(\bar{\mu}') - i\left[\alpha'_n \left(S(\mu) - \frac{a}{2}\right) + \left(\mu - \frac{a}{2}\right) S(\alpha'_n)\right], \quad (5.12)$$

где  $\mu^*$  определяется по формуле (5.9) в которой  $C_j^*$  стоят вместо  $C_j$ .

Решение (5.12) содержит (K-1) вещественную неизвестную постоянную. Постоянная  $a$  уже учтена в решении (5.9).

Как только решение для  $\lambda_1$  найдено, можно получить общее решение для комплексных потенциалов. Для того чтобы их найти, необходимо определить комплексную функцию  $g$ . Сначала вещественная функция  $v$  может быть найдена по формуле (4.38). В случае единичного круга  $\bar{\mathfrak{F}}' = 1$ , следовательно, с учетом (3.10) имеем

$$\mu(\zeta) + iv(\zeta) = \mu(\zeta) + \int \frac{2\mu(\zeta) - \lambda_1(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \mu(e^{i\omega}) + i \int_{-\pi}^{\omega} \left[2\mu(e^{i\xi}) - \lambda_1(e^{i\xi})\right] d\xi. \quad (5.13)$$

Выражение (5.13) содержит дополнительную чисто мнимую постоянную интегрирования. Однако эта постоянная не влияет на поля напряжений и, следовательно, ей можно пренебречь. Таким образом, число вещественных независимых констант в решениях (5.9) и (5.13) равно  $(2K-1)$ . Принимая во внимание, что должно быть выполнено условие однозначности смещений, число

реальных независимых констант может быть уменьшено на две. Таким образом, общее число реальных независимых констант, входящих в решение для комплексных потенциалов равно  $(2K - 3)$ .

### 5.1.2. Специальный случай

Чтобы проиллюстрировать роль индекса рассмотрим следующий частный случай

$$\Gamma: \quad \alpha = \alpha_0 + N\omega, \quad \alpha'_n = 0, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.14)$$

где  $\alpha_0$  - постоянная. Целое число  $N$  в (5.14) выражается через индекс задачи как

$$N = \frac{K}{2} - 2. \quad (5.15)$$

С учетом (5.14) и (5.15) можно провести следующие упрощения в функциях, входящих в решения, полученные выше

$$\begin{aligned} \eta &= \pi + \alpha_0 + \frac{K}{2}\omega, \quad e^{iS(\eta - \frac{K}{2}\omega)} = -e^{i\alpha_0}, \\ b &= \alpha_0, \quad \cos \eta = -\frac{1}{2} \left( e^{i\alpha_0} \zeta^{\frac{K}{2}} + e^{-i\alpha_0} \zeta^{-\frac{K}{2}} \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Подстановка выражений (5.16) в решение (5.9) приводит к следующему виду для функции  $\mu(\xi)$  для рассматриваемого случая

$$\mu(\zeta) = \frac{a}{2} - \left( e^{i\alpha_0} \zeta^{\frac{K}{2}} + e^{-i\alpha_0} \zeta^{-\frac{K}{2}} \right) \left( e^{i\alpha_0} C_{\frac{K}{2}} + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\frac{K}{2}-1} e^{i\alpha_0} C_j \zeta^{j-\frac{K}{2}} \right). \quad (5.17)$$

Поскольку  $\alpha'_n = 0$ , решение для  $\lambda_1$  не содержит последний член в (5.11). Члены, содержащие  $\mu(\zeta)$ , трансформируются следующим образом



$$2i\mathbf{S}(\bar{\mu}') = -2\mathbf{S}(\zeta\mu') = -2\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{S}(\mu),$$

$$\mathbf{S}(\mu) = \frac{a}{2} - \left( e^{i\alpha_0 \zeta^{\frac{K}{2}}} - e^{-i\alpha_0 \zeta^{-\frac{K}{2}}} \right) \left( e^{i\alpha_0} C_{\frac{K}{2}} + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\frac{K-1}{2}} e^{i\alpha_0} C_j \zeta^{j-\frac{K}{2}} \right). \quad (5.18)$$

Таким образом, находим решение для  $\lambda_1$  в виде

$$\lambda_1 = \frac{a}{2} + \mu^* + 2\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{S}(\mu). \quad (5.19)$$

Подстановка (5.17)-(5.19) в (5.13) и интегрирование дает

$$\begin{aligned} \mu + i\nu = & -\frac{a}{2} + \left( e^{i\alpha_0 \zeta^{\frac{K}{2}}} - 3e^{-i\alpha_0 \zeta^{-\frac{K}{2}}} \right) \left( e^{i\alpha_0} C_{\frac{K}{2}} + 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\frac{K-1}{2}} e^{i\alpha_0} C_j \zeta^{j-\frac{K}{2}} \right) + \\ & \frac{2}{K} e^{i\alpha_0} \left( C_{\frac{K}{2}} - 2C_{\frac{K}{2}}^* \right) \left( e^{i\alpha_0 \zeta^{\frac{K}{2}}} - e^{-i\alpha_0 \zeta^{-\frac{K}{2}}} \right) + \\ & + 2i \operatorname{Im} \sum_{j=1}^{\frac{K-1}{2}} \left( C_j - 2C_j^* \right) \left( \frac{1}{j} e^{2i\alpha_0} \zeta^j - \frac{1}{K-j} \zeta^{j-K} \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Здесь мнимая постоянная интегрирования отброшена.

После интегрирования решения (5.20) по окружности, условие однозначности смещений накладывает следующее соотношения на коэффициенты

$$C_1^* + C_1 = 0. \quad (5.21)$$

Для нахождения комплексных потенциалов необходимо подставить (5.17) и (5.19) в (4.21), а затем найти интегралы. Выражение для  $\Phi(z)$  следует немедленно в виде (5.20), где вместо  $\zeta$  надо поставить  $z$  и отбросить все слагаемые, содержащие отрицательные степени. Упорядочив степенные члены в порядке возрастания показателей степеней получаем следующее выражение для  $\Phi(z)$

$$\Phi(z) = -\frac{a}{2} - 2e^{2i\alpha_0} C_1 z + \sum_{j=2}^{\frac{K-1}{2}} \frac{e^{2i\alpha_0}}{j} [(j-2)C_j + C_j^*] z^j +$$

$$e^{i\alpha_0} \tilde{C}_{\frac{K}{2}} z^{\frac{K}{2}} + \sum_{j=2}^{\frac{K-1}{2}} \frac{1}{K-j} [(K-j-2)\bar{C}_j + \bar{C}_j^*] z^{K-j} + \frac{K-4}{K-1} \bar{C}_1 z^{K-1},$$
(5.22)

где вещественная постоянная  $\tilde{C}_{\frac{K}{2}}$  равна

$$\tilde{C}_{\frac{K}{2}} = e^{i\alpha_0} C_{\frac{K}{2}} + \frac{2}{K} e^{i\alpha_0} \left( C_{\frac{K}{2}} - 2C_{\frac{K}{2}}^* \right).$$
(5.23)

Соответствующее выражение для  $\Psi(z)$  приобретает вид

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i z^2} \int_{\Gamma} \mu(t) \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} \right) dt - \frac{1}{z} \Phi'(z) =$$

$$= -2 \sum_{j=1}^{\frac{K-1}{2}} e^{2i\alpha_0} C_j z^{j-2} - e^{2i\alpha_0} C_{\frac{K}{2}} z^{\frac{K}{2}-2} - 2 \sum_{j=1}^{\frac{K-1}{2}} \bar{C}_j z^{K-j-2} - \frac{1}{z} \Phi'(z).$$
(5.24)

Комплексная функция  $D$  может быть получена подстановкой (5.22) - (5.24) в (2.24). Примеры приведены ниже.

Следует отметить, что при  $K > 2$  число независимых вещественных констант, входящих в  $\Phi'(z)$  и  $\Psi(z)$  равно  $(2K-4)$ , в то время как выражение для  $\Phi(z)$  содержит дополнительную постоянную  $a$ . Эта константа не может быть найдена с помощью метода моментов, потому что после подстановки решения, заданного формулой (5.17), в (5.1) и последующего интегрирования получается тождество. Таким образом, число независимых вещественных постоянных, влияющих на поля напряжений, в рассматриваемом случае равно  $(2K-3)$ . Для случая  $K=2$  это число равно двум.

Это число может быть выражено через число оборотов главной оси при обходе контура  $\Gamma$ . Число оборотов равно  $N/2$ , где  $N$  определяется формулой (5.14). Направления вращения показаны на Рисунке 5.1. Отрицательные  $N$

соответствует положительным (против часовой стрелки) вращениям главных осей.

Проиллюстрируем структура решение на следующих частных случаях.

Случай N=-2 (Рисунок 5.1a). В этом случае  $K=0$ , таким образом решение задачи не существует в классе функций, голоморфных внутри круга.

Случай N=-1 (Рисунок 5.1b). В этом случае  $K=2$  и функция напряжений принимает вид

$$D(z, \bar{z}) = -2e^{2i\alpha_0} C_1 \bar{z}. \quad (5.25)$$

Заметим, что  $e^{i\alpha_0} C_1$  - вещественная постоянная.

Случай N=0 (Рисунок 5.1c). В этом случае  $K=4$ . Функция напряжений имеет вид

$$D(z, \bar{z}) = e^{i\alpha_0} \left[ 2\tilde{C}_2 (z\bar{z} - 1) - 4\operatorname{Re}(e^{i\alpha_0} C_1 \bar{z}) - e^{i\alpha_0} C_2 \right]. \quad (5.26)$$

Постоянные  $e^{i\alpha_0} C_2$  и  $\tilde{C}_2$  - вещественные, следовательно, 4 вещественные независимые постоянные входят в общее решение для  $D$ .

Случай N=1 (Рисунок 5.1d). В этом случае  $K=6$ . Несмотря на то, что геометрически этот случай похож на случай  $N=-1$ , число независимых констант здесь больше. Решение для функции напряжений  $D$  может быть представлена в следующем виде

$$D(z, \bar{z}) = e^{i\alpha_0} \left\{ e^{i\alpha_0} C_2^* + 3\tilde{C}_3 z + e^{-i\alpha_0} (2\bar{C}_2 + \bar{C}_2^*) z^2 + 2e^{-i\alpha_0} \bar{C}_1 z^3 \right\} (z\bar{z} - 1) - 2e^{i\alpha_0} (C_1 \bar{z} + C_2) - e^{i\alpha_0} C_3 z - 2e^{-i\alpha_0} \bar{C}_2 z^2 - 2e^{-i\alpha_0} \bar{C}_1 z^3 \quad (5.27)$$

Здесь константы  $\tilde{C}_3$  и  $e^{i\alpha_0} C_3$  являются вещественными, остальные комплексными. Таким образом, общее число вещественных постоянных, содержащихся в решении, равно 8. В отличие от случая  $N=-1$ , где решение было линейной функцией от координат, здесь оно существенно нелинейно.

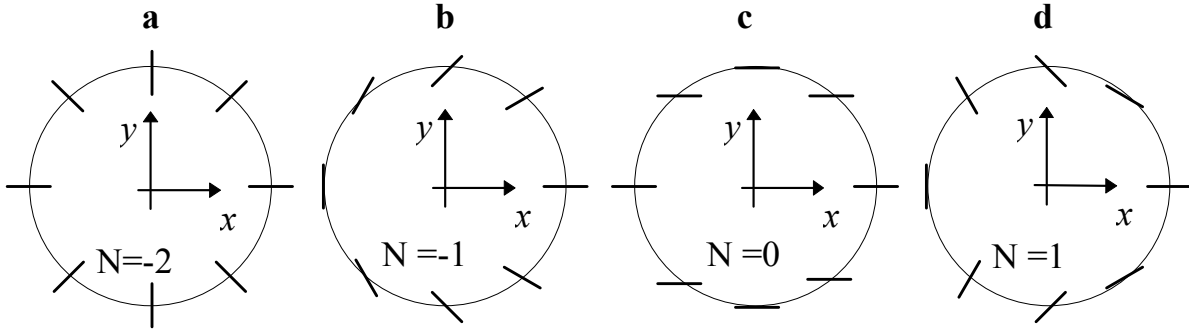


Рисунок 5.1. Изменение ориентации главных напряжений  $\theta$  вдоль контура единичной окружности для различных значений  $N$  в граничных условиях (5.14) при  $\alpha_0=0$ .

### 5.1.3. Решение для круга с помощью степенных рядов

В этом пункте рассмотренная выше задача решается с помощью техники разложения в степенные ряды, которая использовалась Мусхелишвили [1953] для анализа первой и второй краевых задач плоской упругости. Такой классический подход выбран для того, чтобы лишний раз убедиться в достоверности полученных выше результатов.

Ищем комплексные потенциалы в форме

$$\Phi'(z) = e^{i\alpha_0} \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l, \quad \Psi(z) = e^{i\alpha_0} \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l. \quad (5.28)$$

Принимая во внимание формулу (5.14) и выражения  $2i\alpha'_\zeta = Ne^{-i\omega} = N\bar{\zeta} = N\zeta^{-1}$ , которые следуют из (4.19), (3.9) и (3.10) и  $\zeta' = ie^{i\omega}$  можно перейти от граничных условий в форме (4.18) к виду

$$\zeta^{-1}\Phi''(\zeta) + \Psi'(\zeta) - (\zeta^{-1}\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta))N\zeta^{-1} - \zeta^{2N}e^{2i\alpha_0}\overline{\Phi'(\zeta)} = 0. \quad (5.29)$$

Подстановка (5.28) в (5.29) приводит к выражениям

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=-\infty}^{-3} \bar{a}_{2N-j} \zeta^j + [Na_0 + \bar{a}_{2N+2}] \zeta^{-2} + \\
& \sum_{j=-1}^{2N} [\bar{a}_{2N-j} + a_{j+2}(N-2-j) + b_{j+1}(N-1-j)] \zeta^j + \\
& \sum_{j=2N+1}^{\infty} [a_{j+2}(N-2-j) + b_{j+1}(N-1-j)] \zeta^j = 0.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях к нулю, получаем бесконечную систему линейных уравнений относительно коэффициентов  $a_j$  и  $b_j$ . Однако система сводится к конечной системе, потому что все  $a_j$  и  $b_j$  равны нулю, начиная с  $j=2N+3$  и  $j=2N+2$  соответственно. Для  $N \geq 0$  эта система состоит из  $(2N+2)$  комплексных уравнений относительно  $(4N+3)$  комплексных неизвестных  $(a_0 \dots a_N, a_{N+2} \dots a_{2N+2})$  и  $(b_0 \dots b_{N-1}, b_{N+1} \dots b_{2N+1})$  плюс одно вещественное уравнение, налагаемое на  $a_{N+1}$ , оно имеет вид

$$\begin{cases} Na_0 + \bar{a}_{2N+2} = 0, \\ a_{j+1}(N-1-j) + \bar{a}_{2N+1-j} + b_j(N-j) = 0, j = 0 \dots N-1, N+1 \dots 2N+1, \\ \text{Im}(a_{N+1}) = 0. \end{cases} \tag{5.31}$$

Следующее независимое уравнение для  $b_N$  следует из формулы (4.10)

$$\text{Im}(b_N) = 0. \tag{5.32}$$

Если каждое комплексное неизвестное считается как два вещественных, то  $(4N+4)$  вещественных параметров остаются неизвестными. Решения для системы (5.31) может быть представлена в форме

$$\begin{cases} a_{2N+1-j} = -\bar{a}_{j+1}(N-1-j) - \bar{b}_j(N-j), j = 0 \dots N-1, \\ a_{N+1} = \bar{a}_{N+1}, \\ a_{2N+2} = -N\bar{a}_0, \\ b_{2N-j} = \bar{a}_{j+1}(N-j) + \bar{b}_j(N+1-j), j = 0 \dots N-1, \\ b_{2N+1} = (N+1)\bar{a}_0. \end{cases} \tag{5.33}$$

Дополнительная вещественная постоянная (из-за интегрирования  $\Phi'(z)$ ) должна быть добавлена для определения полного тензора напряжений. Таким образом, общий результат совпадает с результатами, полученными в предыдущем пункте

Случай  $N=-1$  дает 2 независимые вещественные постоянные.

Следует отметить, что после следующих подстановок

$$\begin{cases} a_0 = -2e^{i\alpha_0} C_1, \\ a_j = (j-1)e^{i\alpha_0} C_{j+1} + e^{i\alpha_0} C_{j+1}^*, j = 1 \dots N, \\ a_{N+1} = (N+3)e^{i\alpha_0} C_{N+2} - 2e^{i\alpha_0} C_{N+2}^*, \\ b_{j-1} = -(j+1)e^{i\alpha_0} C_{j+1} - e^{i\alpha_0} C_{j+1}^*, j = 1 \dots N, \\ b_N = -(N+4)e^{i\alpha_0} C_{N+2} + 2e^{i\alpha_0} C_{N+2}^* \end{cases} \quad (5.34)$$

результаты, полученные в этом параграфе, становятся полностью идентичны результатам предыдущего параграфа. Рассмотренные там частные случаи  $N=-1, 0, 1$  также выполняются

## 5.2. Решение частного случая задачи $(\beta, \gamma)$ для единичного круга

В этом параграфе рассматривается случай окружности единичного радиуса, что позволяет применять использованную в предыдущем параграфе технику разложения в степенные ряды. Далее используются следующие обозначения: область  $\Omega$  - круг единичного радиуса,  $\Gamma$  - его окружности и  $\zeta$  - точка на ней.

### 5.2.1. Формулировка

Введем функцию  $T=T(z)$  так, что ее граничное значение на  $\Gamma$ , совпадает с граничным значением биголоморфной функции  $T=T(z, \bar{z})$ . Она может быть выбрана в виде

$$T(z) = z^{-1} \varphi'(z) + \psi(z), \quad z \in \Omega. \quad (5.35)$$

Не следует путать  $T$  с биголоморфной функцией, которая обозначена греческой буквой  $\Gamma$ . Функция  $T$  голоморфна всюду внутри круга, кроме начала координат, где она имеет полюс первого порядка. Она также может быть аналитически продолжена на окружность, где удовлетворяет условию Гёльдера.

Вначале рассмотрим следующий частный случай ориентации смещений и усилий

$$e^{i\alpha} = \zeta^N, \quad e^{i\beta} = \zeta^M. \quad (5.36)$$

Здесь и далее  $N$  и  $M$  являются целыми числами.

Можно провести более строгий анализ для случая, когда условия (5.36) представлены в виде ряда Фурье с гармониками  $\zeta^j$ . И это один из возможных подходов к задачам, поставленным на ориентации напряжений, усилий или смещений, для которых принцип суперпозиции не может быть применен непосредственно. Здесь рассматривается случай одной гармоники. Тем не менее, как будет показано, этого достаточно, чтобы проиллюстрировать основные черты задачи, отличающее ее от классических задач первого, второго или смешанного типов. А именно будет продемонстрировано, что, в зависимости от параметров  $M$  и  $N$ , может происходить потеря единственности или даже разрешимости.

Граничные условия, принятые в форме (4.52), с учетом (5.36) могут быть переписаны следующим образом

$$\kappa\varphi - \bar{T} = \zeta^{2N}(\kappa\bar{\varphi} - T), \quad \varphi + \bar{T} = \zeta^{2M}(\bar{\varphi} + T). \quad (5.37)$$

Дальнейший анализ основан на преобразовании, состоящем в умножении граничных условий на  $[2\pi i(\zeta - z)]^{-1}$  ( $z \in \Omega$ ) с последующим интегрированием по окружности. Для произвольной функции  $f$  это преобразование имеет вид интеграла типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad |z| < 1, \quad (5.38)$$

что позволяет определить голоморфную функцию прямой подстановкой  $z$  вместо  $\zeta$ , и взять интеграл, содержащий комплексное сопряжение с помощью известной формулы для круга [Мусхелишвили, 1953].

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\zeta^{\Lambda} \overline{\varphi(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = P_{\Lambda}(z), \quad |z| < 1, \quad \Lambda \geq 0. \quad (5.39)$$

Здесь  $P_{\Lambda}(z)$  - произвольный многочлен степени  $\Lambda$ . Для  $\Lambda < 0$  этот интеграл равен нулю.

Если краевое значение голоморфной функции  $\varphi(z)$  ищется в виде

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad (5.40)$$

то правая часть формулы (5.39) принимает вид

$$P_{\Lambda}(z) = \sum_{k=0}^{\Lambda} \bar{a}_k z^{\Lambda-k}. \quad (5.41)$$

Далее будут использованы интегралы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{T(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = T(z) - \frac{a_1}{z}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{T(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = (\kappa a_0 + 2\bar{a}_2) + \bar{a}_1 z. \quad (5.42)$$

Перемещения могут быть приняты равными нулю в начале координат. Это дает

$$\kappa a_0 = \overline{\psi(0)}, \quad (5.43)$$

что уже было учтено во второй формуле (5.42).

### 5.2.2. Случай $N=M$ .

В этом случае система может быть разделена на два независимых уравнения, относительно краевых значений голоморфной и бианалитической функций

$$\varphi = \zeta^{2N} \overline{\varphi}, \quad \overline{T} = \zeta^{2N} T. \quad (5.44)$$



Если  $N > 0$ , то применение (5.38) к (5.44) приводит к

$$\varphi(z) = P_{2N}(z), \quad z^{2N}T(z) = \kappa a_0 + 2\bar{a}_2 + \bar{a}_1 z. \quad (5.45)$$

Если функция  $\varphi(z)$  имеет вид (5.40), то, как следует из первого условия (5.44), половина из коэффициентов  $a_k$  не могут быть независимыми. А именно,  $a_{2N-k} = \bar{a}_k$ ,  $k = 1 \dots N$ . Также из второй формулы (5.45) видно, что  $T(z) = 0$  при  $N > 1$ . В этом случае  $\psi(z) = -z^{-1}\varphi'(z)$  и имеет место следующее решение

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^N \left( a_k z^k + \bar{a}_k z^{2N-k} \right), \quad T(z, \bar{z}) = \left( \bar{z} - \frac{1}{z} \right) \varphi'(z), \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{\kappa}{2} \bar{a}_0. \quad (5.46)$$

Условия, наложенные на  $a_1$  и  $a_2$  являются следствием условий (5.43) и  $T(z) = 0$ . Следовательно, общее решение содержит  $N-2$  комплексную и одну вещественную постоянную -  $a_N$ . Если каждая комплексная постоянная считается как две вещественные постоянные, то общее число вещественных постоянных входящих в общее решение есть  $2N-3$  ( $N=2,3,\dots$ ).

В случае  $N=1$  имеем  $\bar{T} = a_1 \zeta$ , где  $a_1$  - вещественное число, и два условия, наложенные на  $a_0, a_2$ :  $a_2 = -\frac{\kappa}{2} \bar{a}_0$  из-за (21) и  $a_2 = \bar{a}_0$  из-за  $\varphi = \zeta^2 \bar{\varphi}$ . Так как  $\kappa > 0$ , то получаем  $a_0 = a_2 = 0$ . Таким образом, общее решение содержит только вещественную постоянную и имеет вид

$$N = 1: \quad \varphi(z) = a_1 z, \quad T(z, \bar{z}) = a_1 \bar{z}, \quad a_1 = \bar{a}_1. \quad (5.47)$$

В случае  $N=0$  можно найти, что  $\varphi(z) = \bar{a}_0$ . Следовательно,  $\varphi' = 0$  и  $\psi = \bar{\psi}$ , откуда следует, что  $\psi(z) = \overline{\psi(0)} = \kappa a_0$  (последнее равенство возникает из-за (5.43)). Таким образом, смещения равны нулю всюду внутри круга, хотя приложенная сила не равна нулю,  $F(z, \bar{z}) = (1 + \kappa) \bar{a}_0$ . Такая ситуация не имеет физического смысла, поэтому  $a_0 = 0$  и задача не имеет (нетривиальных) решений в случае  $N=0$ .

В случае  $N < 0$  удобно использовать подстановки  $N = -\Lambda$ ,  $\Lambda > 0$ . Тогда после применения преобразования интегрирования (5.38) к первому граничному

условию можно заметить, что  $z^{2\Lambda}\varphi(z)=\bar{a}_0$ . Поэтому  $\varphi(z)=0$ , следовательно,  $T(z, \bar{z})=\psi(z)$ , и преобразование второго граничного условия дает

$$\psi(z)=\sum_{k=0}^{2\Lambda} b_k z^k. \quad (5.48)$$

Однако только  $\Lambda$  из  $2\Lambda$  коэффициентов независимы, т.к.  $\bar{\psi}=\zeta^{2\Lambda}\psi$ . Таким образом общее решение в этом случае принимает вид

$$N < 0: \quad \varphi(z)=0, \quad \psi(z)=\sum_{k=1}^{-N} (b_k z^k + \bar{b}_k z^{-2N-k}), \quad b_{-N}=\bar{b}_{-N}. \quad (5.49)$$

Здесь  $b_0=0$  из-за (5.40) и (5.43). Поэтому в случае  $N<0$  общее решение содержит  $2N-1$  вещественные постоянные.

### 5.2.3. Особый случай $N \neq M$

I. Случай ( $M>0, N>0$ ) исследуется в первую очередь. Применение (5.38) к граничным условиям в форме (5.37) приводит к

$$\begin{aligned} \kappa\varphi(z) - (\bar{a}_1 z + 2\bar{a}_2 + \kappa a_0) &= \kappa P_{2N}(z) - z^{2N} T(z) \\ \varphi(z) + (\bar{a}_1 z + 2\bar{a}_2 + \kappa a_0) &= P_{2M}(z) + z^{2M} T(z) \end{aligned} \quad (5.50)$$

Здесь  $P_{2M}$  и  $P_{2N}$  - многочлены с коэффициентами, определяемыми формулой (5.41).

Исключив из (5.50) функцию  $\varphi(z)$ , находим

$$\left( \kappa z^{2M} + z^{2N} \right) T(z) = \kappa P_{2N}(z) - \kappa P_{2M}(z) + (\kappa + 1)(\bar{a}_1 z + 2\bar{a}_2 + \kappa a_0). \quad (5.51)$$

Функция  $T(z)$  также может быть разложена в степенной ряд, но в отличие от разложения (5.40), разложение может начаться с  $k=-1$ . С другой стороны, как видно из (5.51), это разложение не может иметь положительные степени (в противном случае степень многочлена в левой части (5.51) будет больше, чем степень многочлена в правой части). Таким образом, эта функция имеет вид

$$T(z) = \frac{b_1}{z} + b_0, \quad (5.52)$$

где коэффициенты  $b_0$  и  $b_1$  могут быть определена подстановкой (5.52) во вторую формулу (5.42) и приравниваем коэффициентов при одинаковых степенях. Это дает

$$b_0 = \kappa \bar{a}_0 + 2a_2, \quad b_1 = a_1. \quad (5.53)$$

Подставляя (5.53) в (5.37) и разрешая последнее относительно  $\varphi$  находим

$$\kappa \left( \zeta^{2N-2M} - 1 \right) \varphi = (\kappa + 1) \zeta^{2N} \left( b_0 + b_1 \zeta^{-1} \right) - \left( \kappa \zeta^{2N-2M} + 1 \right) \left( \bar{b}_0 + \bar{b}_1 \zeta \right). \quad (5.54)$$

Предположим, что  $N > M > 0$ . Тогда существует  $2N-2M$  точек  $\zeta_m$  по окружности удовлетворяющих уравнению  $\zeta^{2N-2M} = 1$ . Эти точки

$$\zeta_m = \exp \left( i \frac{\pi m}{N-M} \right), \quad m = 0, \dots, 2N-2M-1. \quad (5.55)$$

В этих точках левая часть (5.54) обращается в нуль, поэтому коэффициенты  $b_0$  и  $b_1$  удовлетворяет следующему условию

$$\operatorname{Im} \left[ \zeta_m^{-N} \left( \bar{b}_0 + \bar{b}_1 \zeta_m \right) \right] = 0. \quad (5.56)$$

Уравнение (5.56) представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений. Ранг этой системы равен двум, поэтому она имеет только тривиальное решение, следовательно,  $b_0 = b_1 = 0$ . Таким образом из  $T=0$  и из (5.54) следует, что  $\varphi=0$  и рассматриваемая задача не имеет решений (кроме тривиального).

В случае  $M > N > 0$  этот вывод остается в силе, после умножения (5.54) на  $\zeta^{2M-2N}$  анализ будет таким же, если  $M$  заменить на  $N$  и наоборот.

II. Предположим, что  $M=0$  ( $N > 0$ ). В этом случае второе уравнение в (5.50) должно быть замещено, в соответствии с первой формулой (5.42), на следующее

$$\varphi(z) + (\bar{a}_1 z + 2\bar{a}_2 + \kappa a_0) = \bar{a}_0 + T(z) - a_1 z^{-1}. \quad (5.57)$$

Однако это не влияет на представление (5.52). Следовательно, уравнение (5.54) выполняется и анализ проведенный выше справедлив. Очевидно, что ничего не изменится, если  $N=0$  ( $M>0$ ). Таким образом, в обоих этих случаях задача не имеет решений.

III. Случай ( $M<0, N>0$ ) может быть проанализирован таким же образом, если обозначить  $\Lambda=-M$  ( $\Lambda>0$ ) и умножить второе уравнение (5.37) на  $\zeta^{2\Lambda}$ . Это приводит к

$$\kappa\varphi - \bar{T} = \zeta^{2N}(\kappa\bar{\varphi} - T), \quad \zeta^{2\Lambda}(\varphi + \bar{T}) = \bar{\varphi} + T. \quad (5.58)$$

Принимая во внимание следующий интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\zeta^{2\Lambda} \overline{T(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\zeta^{2\Lambda} (\zeta \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)})}{\zeta - z} d\zeta = Q_{2\Lambda+1}(z), \quad |z| < 1, \quad \Lambda \geq 0, \quad (5.59)$$

где  $Q_{2\Lambda+1}$  - произвольный многочлен степени  $2\Lambda+1$ , и применяя преобразование (5.38) к уравнениям (5.58), получаем

$$\begin{aligned} \kappa\varphi(z) - (\bar{a}_1 z + 2\bar{a}_2 + \kappa a_0) &= \kappa P_{2N}(z) - z^{2N} T(z), \\ z^{2\Lambda} \varphi(z) + Q_{2\Lambda+1}(z) &= \bar{a}_0 + T(z) - a_1 z^{-1}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Следующая формула может быть получена путем умножения второго уравнения в (5.60) на  $z^{2N}$  и суммирования с первым

$$\left( \kappa + z^{2\Lambda+2N} \right) \varphi(z) = R_{2\Lambda+2N+1}(z). \quad (5.61)$$

Здесь  $R_{2\Lambda+2N+1}$  - многочлен  $2\Lambda+2N+1$  степени, коэффициенты которого выражаются через коэффициенты  $Q_{2\Lambda+1}$  и  $P_{2N}$ . Как видно из (5.61), голоморфная функция  $\varphi$  является многочленом первого порядка, следовательно, из первого уравнения (5.61) становится очевидным, что  $T$  по-прежнему имеет представление (5.52) - (5.53), в котором  $a_2=0$ . С учетом этого можно переписать вторую формулу в (5.60) в виде

$$(a_1 + \bar{a}_1) z^{2\Lambda+1} + (1 + \kappa) a_0 z^{2\Lambda} - (1 + \kappa) \bar{a}_0 = 0. \quad (5.62)$$

Таким образом,  $a_0=0$  и  $\text{Re}(a_1)=0$ , следовательно,  $\varphi=a_1\zeta$ ,  $T=a_1\zeta^{-1}$ , и, если подставить эти выражения в первое граничное условие (5.58), то получаем

$$a_1\zeta^{2N-1} + a_1\zeta = 0. \quad (5.63)$$

Поэтому  $a_1=0$ , и задача имеет только тривиальные решения в случае ( $M<0$ ,  $N>0$ ).

IV. Случай ( $M>0$ ,  $N<0$ ) аналогичен предыдущему. Таким образом, если  $MN<0$ , то задача не имеет решения.

V. Случай ( $M<0$ ,  $N<0$ ). После подстановки  $M=-\Lambda$ ,  $N=-K$  ( $K>0$ ,  $\Lambda>0$ ) граничные условия принимают вид

$$\zeta^{2K}(\kappa\bar{\varphi} - \bar{T}) = \kappa\bar{\varphi} - T, \quad \zeta^{2\Lambda}(\varphi + \bar{T}) = \bar{\varphi} + T. \quad (5.64)$$

Применяя (5.38) к (5.64) найдем

$$\begin{aligned} \kappa z^{2K}\varphi(z) - Q_{2K+1} &= \kappa\bar{a}_0 - T(z) + a_1 z^{-1}, \\ \zeta^{2\Lambda}\varphi(z) + Q_{2\Lambda+1} &= \bar{a}_0 + T(z) - a_1 z^{-1}, \end{aligned} \quad (5.65)$$

где  $Q_{2K+1}$  и  $Q_{2\Lambda+1}$  - многочлены, определенные в (5.59). Суммирую эти уравнений находим

$$\left(\kappa z^{2K} + \zeta^{2\Lambda}\right)\varphi(z) = (\kappa+1)\bar{a}_0 + Q_{2K+1} - Q_{2\Lambda+1}. \quad (5.66)$$

Значит  $\varphi(z)$  является полиномом первого порядка,  $\varphi(z) = a_0 + a_1 z$ . Это, после выражения граничного значения  $T$  из (5.64), дает возможность использовать анализ, аналогичный случаю ( $M>0$ ,  $N>0$ ). Здесь коэффициенты  $a_0$  и  $a_1$  играют ту же роль, что и коэффициенты  $b_0$  и  $b_1$  в случае ( $M>0$ ,  $N>0$ ). Следовательно, они равны нулю. Поэтому  $Q_{2K+1}(z) = Q_{2\Lambda+1}(z)$ , что выполняется, если и только если  $K=\Lambda$ . Последний случай уже был рассмотрен выше. В случае  $K \neq \Lambda$  ( $M<0$ ,  $N<0$ ,  $N \neq M$ ) задача не имеет решения

Окончательно получаем, что если  $N \neq M$ , то задача не имеет (нетривиальных) решений. Сводка результатов в частном случае (5.36), приводится в Таблице 5.1.

Таблица 5.1. Сводка результатов для круга с граничными условиями вида (5.36).

$N \neq M$	Нет (нетривиальных) решений		
$N = M$	Решения могут существовать и включают в себя определенное число произвольных вещественных постоянных		
$N < 0$	$N = 0$	$N = 1$	$N > 1$
$(-2N-1)$ вещественные константы	нет (нетривиальных) решений	одна вещественная постоянная	$(2N-3)$ вещественные постоянные

### 5.3. Особый случай соосных ориентаций задачи $(\beta, \gamma)$

Пусть  $\Omega$  - односвязная область с гладкой границей  $\Gamma$ . Предполагая, что  $\beta = \gamma$ , приходим к двум краевым задачам

$$\operatorname{Im}(e^{-i\beta}\varphi) = 0, \quad \operatorname{Im}(e^{i\beta}\tau) = 0. \quad (5.67)$$

Видно, что первая является однородной задачи Гильберта в ее стандартной форме, т.е. требуется определить голоморфную функцию  $\varphi(z)$  по заданной линейной комбинации, ее действительной и мнимой частей [Гахов, 1977]. Из решения первой задачи производная  $\varphi(z)$  становится известной, следовательно, с учетом формулы (2.33), вторая задача может быть сведена к неоднородной задаче Гильберта для нахождения голоморфной функции  $\psi(z)$ .

Решения обеих этих задач может быть получены методом регуляризующего множителя [Гахов, 1977]. Это требует нахождения на контуре вещественной функции  $\lambda(\zeta)$  такой, что  $\lambda(\zeta)e^{i\beta(\zeta)}$  является краевым значением голоморфной функции  $\chi(z)$ , которая имеет нулевой порядок всюду в области, кроме начала координат, где её порядок равен индексу функции  $e^{i\beta(\zeta)}$ . Индекс определяется числом оборотов нормированного вектора перемещений  $\{\cos\beta(\zeta), \sin\beta(\zeta)\}$  при обходе контура в положительном направлении (когда область остается слева). Индекс может быть посчитан как разница между числом оборотов по и против часовой стрелки или вычислен по формуле

$$K = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \beta(\zeta) d\zeta. \quad (5.68)$$

В рассматриваемом случае индекс не является отрицательным. Это следует из того, что  $\beta = \beta(\zeta)$  является аргументом голоморфной функции  $\varphi(\zeta)$  (ее модуль  $(\omega + \rho)/(1 + \kappa)$ , как видно из (4.49)).

Разделив первое уравнение (5.67) на  $\lambda(\zeta)$  и внося его под символ  $\text{Im}$  мы немедленно приходим в задаче Шварца: найти голоморфную функцию по ее известной вещественной части на контуре. В этом случае задача принимает вид  $\text{Re}(i\chi^{-1}(\zeta)\varphi(\zeta)) = 0$ . Если  $K = 0$ , то произвольная действительная постоянная является единственным решением этой задачи. В противном случае однородная задача имеет решение в виде

$$\varphi(z) = z^K e^{i\lambda(z)} Q(z). \quad (5.69)$$

Здесь  $Q = Q(z)$  является функцией, имеющей полюс порядка  $K$  в нуле

$$Q(z) = \sum_{k=0}^K \{c_k w^k(z) + \bar{c}_k w^{-k}(z)\} \quad (5.70)$$

с произвольными комплексными коэффициентами  $c_k$ , где  $w = w(z)$  - функция, которая осуществляет конформное отображение области  $\Omega$  на единичный круг. Как видно из (5.69) и (5.70) однородное решение зависит от  $2K+1$  вещественных постоянных (каждая комплексная постоянная считается как две вещественные). Следовательно, задача для определения функции  $\varphi(z)$  имеет  $2K+1$  линейно независимых решений.

Следующая неоднородная задача вытекает из второго уравнения (5.67)

$$\text{Re}(ie^{i\beta(\zeta)}\psi(\zeta)) = g_0(\zeta), \quad \text{где} \quad g_0(\zeta) = -\text{Im}(e^{i\beta(\zeta)}\bar{\zeta}\varphi'(\zeta)). \quad (5.71)$$

После умножения обеих сторон (5.71) на  $\lambda(\zeta)$  решение этой проблемы может быть получено с помощью оператора Шварца. Гахов [1977] показал, как его можно эффективно построить, если известна функция  $w = w(\zeta)$ . Однако задача

(5.71) имеет отрицательным индекс  $-K$ . Следовательно, ее решение должно удовлетворять  $(2K-1)$  скалярным условиям разрешимости, налагаемым на  $g_0(\zeta)$  [Гахов, 1977]. Эти условия не могут быть определены до того как выписан явный вид оператора Шварца для рассматриваемой области, однако очевидно, что эти условия могут быть удовлетворены соответствующим выбором коэффициентов  $c_k$ . В результате в общем решении для  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  остаются только две действительные постоянные. Следовательно, задача может иметь два независимых решения, которые находятся, если положить, что в некоторой точке внутри области, смещения равны нулю. Таким образом, задача, может иметь единственное нетривиальное решение.

Следует отметить, что метод регуляризационного множителя может быть использован для решения задачи в общем случае поведения  $\beta$  и  $\gamma$ . Тогда необходимо использовать граничные условия в матричной форме (например, (4.51)). Далее требуется найти матрицу  $2 \times 2$ , с действительными элементами. Эта матрица должна быть определена так, что при умножении на матрицу в (4.51) она производит матрицу, элементы которой представляют собой краевые значения голоморфных функций. Затем, задача решается применением оператора Шварца. Такой алгоритм описывает возможный способ решения рассматриваемой задачи, тем не менее, метод, позволяющий провести эффективное построение регуляризирующих множителей в матричном виде, до сих пор не разработан.

#### 5.4. Решение задачи $(\alpha, \alpha'_n)$ для однородных граничных условий

В этом разделе анализируется простейший случай однородных граничных условий (4.8).

Пусть правые части в (4.8) постоянны и есть

$$\alpha = \alpha_0 = \text{const}, \alpha'_n = 0 \quad (5.72)$$

везде на контуре  $\Gamma$ . Это приводит к  $\alpha'_\zeta = 0$  на  $\Gamma$  и (4.18) принимает вид

$$e^{-i\alpha_0} (\bar{\zeta} \Phi''(\zeta) + \Psi'(\zeta)) - e^{i\alpha_0} \overline{\Phi'(\zeta)} = 0. \quad (5.73)$$



Введем следующие вспомогательные голоморфные функции

$$\varphi_*(z) = -ie^{-i\alpha_0} \Phi'(z), \quad \psi_*(z) = -ie^{-i\alpha_0} \Psi'(z) \quad (5.74)$$

Тогда

$$\Phi''(z) = ie^{i\alpha_0} \varphi'_*(z), \quad \overline{\Phi'(z)} = -ie^{-i\alpha_0} \overline{\varphi'_*(z)} \quad (5.75)$$

и граничное условие (5.73) принимает вид

$$\bar{\zeta} \varphi'_*(\zeta) + \psi_*(\zeta) + \overline{\varphi'_*(\zeta)} = 0. \quad (5.76)$$

Выражение (5.76) эквивалентно условию первой основной задачи плоской теории упругости при условии отсутствия нагрузок на границе. В силу единственности такой задачи оно имеет только тривиальное решение, соответствующее отсутствию напряжений везде в области. Последнее означает, что голоморфная функция  $\varphi'_*(z)$  представляет собой чисто мнимую константу (это очевидно из формул Колосова), что можно записать в виде

$$\varphi'_*(z) = -ic_2, \quad \operatorname{Re}(c_2) = 0, \quad z \in \Omega. \quad (5.77)$$

Интегрированием находим

$$\varphi_*(z) = -i(c_2 z + c_1), \quad (5.78)$$

где  $c_1$  – неизвестная комплексная постоянная. С учетом первой формулы в (5.74) получаем выражение для комплексного потенциала во всей области

$$\Phi'(z) = e^{i\alpha_0} (c_2 z + c_1). \quad (5.79)$$

Подстановка (5.77) и (5.78) в (5.76) позволяет найти граничное голоморфной функции  $\psi_*(\zeta)$

$$\psi_*(\zeta) = -i\bar{c}_1. \quad (5.80)$$

Интегрирование второй формулы в (5.74) позволяет определить потенциал  $\Psi(z)$  в виде

$$\Psi'(z) = e^{i\alpha_0} (\bar{c}_1 z + c_0), \quad (5.81)$$

где  $c_0$  – неизвестная комплексная постоянная.

Формируя комплексный девиатор напряжений, получаем

$$D(z, \bar{z}) = e^{i\alpha_0} (c_2 z \bar{z} + c_1 \bar{z} + \bar{c}_1 z + c_0). \quad (5.82)$$

Полученный результат справедлив, если задача ставится на производные  $\alpha$ . Для того чтобы удовлетворить первому условию (5.72) необходимо положить  $\text{Im}c_0=0$ ; тогда функция в скобках в выражении (5.82) становится вещественной. Это уменьшает число произвольных вещественных постоянных в решении на одну. Таким образом, функция напряжений  $D$  содержит только 4 вещественные константы  $c_2, \text{Re}c_1, \text{Im}c_1, c_0$ , потому что  $\text{Im}c_2 = 0$  и  $\text{Im}c_0 = 0$ .

Для полного решения задачи, т. е. для того, чтобы найти полное напряженное состояние, требуется определить функцию  $P$ . Она может быть найдена путем интегрирования (5.79) и выделением вещественной части, это приводит к выражению

$$P(z, \bar{z}) = \text{Re} \left[ e^{i\alpha_0} (c_2 z^2 + 2c_1 z + c_3) \right], \quad z \in \Omega, \quad (5.83)$$

где  $c_3$  - произвольная постоянная, порожденная интегрированием, а пятая произвольная постоянная  $\text{Re}(e^{i\alpha_0} c_3)$  должна быть вещественной.

Следует отметить, что решение (5.82) совпадает с решением (5.26) для единичного круга, полученным другим способом в параграфе 5.1. Это становится очевидным после следующей подстановки

$$c_2 = 2\tilde{C}_2, c_1 = -2e^{-i\alpha_0} \bar{C}_1, c_0 = -2\tilde{C}_2 - e^{i\alpha_0} C_2. \quad (5.84)$$

Как видно, решение задачи с однородными граничными условиями (5.72) не является единственным. Оно содержит пять произвольных вещественных постоянных, которые априори неизвестны. Можно отметить, однако, что поле траекторий главных напряжений единственно, оно формируется двумя семействами прямых линий, образующих прямоугольную сетку. Одно семейство

линий наклонена под углом  $\varphi = -\alpha_0/2$  к положительному направлению оси  $Ox$  (Рисунок 5.2).

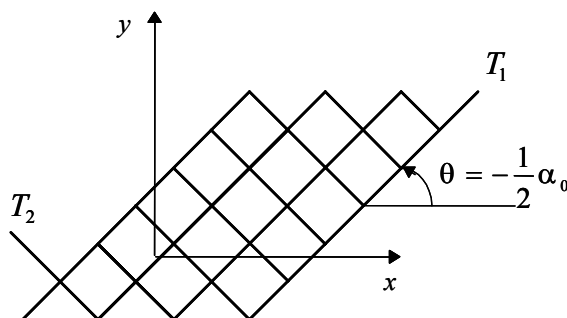


Рисунок 5.2. Однородное поле прямолинейных траекторий главных напряжений. Семейство траекторий  $T_1$  наклоненно к положительному направлению оси  $Ox$  под углом  $\theta$ .

### 5.5. Краевые задачи в ориентациях напряжений и смещений для полуплоскости

#### 5.5.1. Задача $(\alpha, p)$ для двух полуплоскостей

Рассмотрим отдельно краевую задачу, сформулированную в главных направлениях тензора напряжений, которые заданы на оси  $Ox$ , являющейся границей между двумя полуплоскостями, верхней -  $\Omega^+$  и нижней -  $\Omega^-$ .

Считаем, что напряжения непрерывны при переходе через ось  $Ox$   $\langle \sigma \rangle = 0$  и известны главные направления с двух сторон, а значит и аргументы функции девиатора  $\arg D^\pm = \alpha^\pm$ . Как и раньше нагрузки (смещения, усилия) на контуре неизвестны, и предполагается, что объемные силы отсутствуют, а напряжения на бесконечности могут быть постоянными, но также неизвестными ( $D^+(\infty) = D_\infty$ ), либо исчезают.

В этом случае регулярные операторы  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  обнуляются и СИУ приобретает вид характеристического СИУ. Найдем его коэффициенты, заменив аргументы девиатора на главные направления по формулам (4.7) и приняв во внимание, что  $\vartheta = 0$ , это дает

$$(2 - e^{4i\theta^+} - e^{4i\theta^-})\mu + (e^{4i\theta^-} - e^{4i\theta^+})\mathbf{S}(\mu) = 0. \quad (5.85)$$

Считаем, что условия (4.119) выполнены, что в терминах главных направлений приводит к неравенству

$$\sin(2\theta^+)\sin(2\theta^-) \geq 0. \quad (5.86)$$

Соответственно краевая задача Риманы также существенно упрощается

$$e^{-2i\theta^+} \sin(2\theta^+)A^+ = e^{-2i\theta^-} \sin(2\theta^-)A^-. \quad (5.87)$$

Поскольку начало координат и бесконечно удаленная точка расположены на оси  $Ox$ , то вместо степенной функции следует использовать дробно-линейную [Гахов, 1977], что позволяет записать

$$A^+ = \left[ e^{-2i(\theta^+ - \theta^-)} \left( \frac{x-i}{x+i} \right)^{-K} G_0 \right] \left( \frac{x-i}{x+i} \right)^K A^-, \quad G_0 = \frac{\sin(2\theta^-)}{\sin(2\theta^+)}, \quad (5.88)$$

где  $K$ , как и раньше, есть неотрицательный индекс определяемый по формуле (4.129), что с учетом (4.7) дает

$$K = \text{Index} \left( e^{-2i(\theta^+ - \theta^-)} \right) = \frac{1}{\pi} [\theta^+ - \theta^-] \Big|_{\Gamma}. \quad (5.89)$$

Поскольку индекс дробно-линейной функции равен единице, а индекс  $G_0$  есть нуль, член в квадратных скобках в правой части (5.88) имеет нулевой индекс. Следовательно, решение однородной задачи Римана принимает вид [Гахов, 1977]

$$A^\pm(z) = \frac{P_K(z)}{(z \pm i)^K} e^{Y^\pm(z)}, \quad Y^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ \left( \frac{t-i}{t+i} \right)^{-K} G(t) \right] \frac{1}{t-z} dt, \quad \text{Im}(z) \neq 0. \quad (5.90)$$

На оси  $Ox$  можно записать

$$A^\pm = \frac{P_K(z)}{(x^2 + 1)^{\frac{K}{2}}} \left( \frac{\sin 2\theta^-}{\sin 2\theta^+} \right)^{\pm \frac{1}{2}} e^{\mp i(\theta^+ - \theta^-)} e^{\frac{1}{2} \mathbf{S} \left[ -K \ln \left( \frac{t-i}{t+i} \right) + \ln(G(t)) \right]}. \quad (5.91)$$

Рассмотрим сопряженный сингулярный оператор, в показателе экспоненты

$$\begin{aligned}
& \overline{\mathbf{S}}\left[-K \ln\left(\frac{t+i}{t-i}\right) + \ln(G(t))\right] = \\
& = -\mathbf{S}\left[-K \ln\left(\frac{t+i}{t-i}\right) + 2i(\theta^+ - \theta^-) + \ln(G_0(t))\right] = \\
& = \mathbf{S}\left[-K \ln\left(\frac{t-i}{t+i}\right) - 2i(\theta^+ - \theta^-)\right] - \mathbf{S}[\ln(G_0(t))] = \\
& = \mathbf{S}\left[-K \ln\left(\frac{t+i}{t-i}\right) + \ln(G(t))\right] - 2\mathbf{S}[\ln(G_0(t))].
\end{aligned} \tag{5.92}$$

Здесь последний член в правой части является чисто мнимым. Обозначим его

$$2\mathbf{S}[\ln(G_0(t))] = 2i\chi, \quad \text{Im}\chi = 0. \tag{5.93}$$

Тогда решение (5.85) примет вид

$$\mu = -2i \sin(\theta^+ - \theta^- - \chi) \frac{P_K(z)}{(x^2 + 1)^{\frac{K}{2}}} \left(\frac{\sin 2\theta^-}{\sin 2\theta^+}\right)^{\pm \frac{1}{2}} e^{\left[-\frac{K}{2} \ln\left(\frac{t-i}{t+i}\right) - i(\theta^+ - \theta^-)\right]}, \tag{5.94}$$

где, как следует из (5.93), показатель экспоненты действительный. Коэффициенты многочлена должны быть чисто мнимыми постоянными, для того чтобы решение было вещественным. Таким образом, решение зависит от  $K+1$  линейных вещественных постоянных.

Полученное решение определяет предельные значения функции девиатора напряжения на оси  $Ox$ , но вне оси этого решения недостаточно, поскольку, как видно из (4.23) с учетом того, что  $g'(-\infty) = g'(\infty)$ , выражение для девиатора содержит неопределенную функцию  $v(t)$  и имеет вид

$$D(z, \bar{z}) = \frac{-1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(t)}{t-z} dt + (\bar{z} - z) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu'(t) + iv'(t)}{t-z} dt. \tag{5.95}$$

Таким образом, найдена только часть решения, соответствующая реальной части искомой плотности  $g'(x)$ , что можно записать как

$$D_\mu(z, \bar{z}) = -2\Phi_\mu(z) + (\bar{z} - z)\Phi'_\mu(z), \tag{5.96}$$

где введено обозначение для голоморфной функции в правой части через интеграл типа Коши

$$\Phi_{\mu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(t)}{t-z} dt. \quad (5.97)$$

Соответственно к решению, выраженному через функцию  $\mu(t)$ , следует добавить, для общности, слагаемые вида  $(\bar{z} - z)X^{\pm}(z)$ , где  $X^{\pm}(z)$ - произвольные голоморфные функции, убывающие на бесконечности быстрее, чем  $z^{-1}$ . Это не меняет граничных условий ни на оси  $Ox$ , ни на бесконечности и при этом функция остается биголоморфной. Таким образом, общее решение определяется с точностью до произвольных голоморфных функций, что указывает на то, что задача существенно недоопределена.

Тем не менее проведенный анализ имеет смысл для приложений, поскольку позволяет определить такие важные характеристики напряженного состояния на интерфейсе между полуплоскостями как максимальные касательные напряжения и касательные напряжения. Знание последних особо важно при оценке начала распространения сдвигового разрушения, которое реализуется в земной коре в виде землетрясений.

С другой стороны, это решение может быть скомбинировано с другими доступными граничными условиями, например, с условием, налагаемым на кривизну траекторий главных напряжений. Для примера укажем неубывающее на бесконечности решение, изображенное на Рисунке 3.1 б, принимая постоянные граничные условия  $\alpha^{\pm} = -2\theta_0^{\pm}$  на оси  $Ox$  (условия (4.119) считаем выполненными). В этом случае  $\vartheta = 0$  и регулярный оператор в (4.115) исчезает, краевая задача Римана (4.127) имеет нулевой индекс, следовательно, функции  $A^{\pm}(z)$  являются постоянными, соответственно и искомая функция также постоянная. При этом, как следует из (4.137), эта постоянная вещественна, тогда решение для граничных значений имеет вид

$$D^{\pm} = Ce^{i\alpha^{\pm}}, \quad \text{Im}(C) = 0. \quad (5.98)$$

Отметим, что это решение совпадает с решением из предыдущего параграфа, полученного при использовании однородных граничных условий (5.72).

Другая возможность состоит в привлечении краевого условий в ориентациях вектора смещений.

### 5.5.2. Комбинированная задача $(\alpha, p)$ и $(\beta, p)$ для двух полуплоскостей

Для простоты рассмотрим случай одномодульных полуплоскостей, используя пару граничных условий (4.96)-(4.97). С учетом того, что регулярные операторы обращаются в нуль, СИУ задачи (4.105) приобретает вид (опускаем индексы у упругой постоянной и используем свойства сингулярного оператора)

$$e^{-i\beta^\pm} [\pm(\kappa+1)g + (\kappa-1)\mathbf{S}(g)] - e^{i\beta^\pm} [\pm(\kappa+1)\bar{g} - (\kappa-1)\mathbf{S}(\bar{g})] = 0. \quad (5.99)$$

Соберем два скалярные уравнения в одно комплексное, исключив  $\mathbf{S}(\bar{g})$

$$(\kappa+1)\left(e^{-2i\beta^+} + e^{-2i\beta^-}\right)g - 2(\kappa+1)\bar{g} + (\kappa-1)\left(e^{-2i\beta^+} - e^{-2i\beta^-}\right)\mathbf{S}(g) = 0. \quad (5.100)$$

Считаем, что действительная часть искомой функции известна из решения предыдущей задачи. Представим комплексно сопряженную функцию через интеграл функции  $\mu(t)$  в виде

$$\bar{g} = 2M - g, \quad M' = \mu. \quad (5.101)$$

Тогда СИУ примет свой окончательный вид

$$\left(2 + e^{-2i\beta^+} + e^{-2i\beta^-}\right)g + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\left(e^{-2i\beta^+} - e^{-2i\beta^-}\right)\mathbf{S}(g) = 4M. \quad (5.102)$$

Это уравнение отличается от вида СИУ (5.85) другими углами, наличием коэффициента при сингулярном интеграле и правой части, которая получается интегрированием решения (5.94), что порождает дополнительную постоянную, которая должна быть вещественной, поскольку функция  $M$  вещественная. Таким образом, правая часть зависит от  $\kappa+2$  действительных произвольных постоянных.

Коэффициент соответствующей задачи Римана имеет вид

$$G = \frac{\kappa e^{-i\beta^-} \cos \beta^- + e^{-i\beta^+} \cos \beta^+}{\kappa e^{-i\beta^+} \cos \beta^+ + e^{-i\beta^-} \cos \beta^-}. \quad (5.103)$$

Реальные части числителя (верхний индекс) и знаменателя (нижний индекс)  $\kappa \cos^2 \beta^\pm + \cos^2 \beta^\mp > 0$  строго положительны, поэтому  $\text{Index}(G)=0$ . Следовательно, неоднородное СИУ (5.102) имеет единственное решение. Общее решение получается путем отделения мнимой части решения для функции  $g$  и суммирования ее с функцией  $M$ . При этом число произвольных постоянных не увеличится. Для вычисления напряжений нужна производная искомой функции. Это означает, что решение будет зависеть от  $K+1$  неопределенных постоянных, входящих в решение для функции  $\mu(t)$ .

### 5.5.3. Задача $(\alpha, \beta)$ для полуплоскости

Методом, указанным в предыдущем пункте, можно также построить решение задачи, когда на границе полуплоскости заданы одновременно направления главных напряжений и направления вектора смещений. Будем для определенности рассматривать верхнюю полуплоскость. Тогда можно опустить индексы у граничных значений и записать граничные условия на оси  $Ox$  в виде

$$\arg D = \alpha, \quad (5.104)$$

$$\arg W = \beta. \quad (5.105)$$

Будем продолжать искать решение, обеспечивающее непрерывность вектора напряжений при переходе через действительную ось. Однако теперь необходимо использовать только по одному из скалярных СИУ для верхней полуплоскости. Таким образом система СИУ принимает вид

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha} [\mu + \mathbf{S}(\mu)] - e^{i\alpha} [\mu - \mathbf{S}(\mu)] &= 0, \\ e^{-i\beta} [(\kappa + 1)g + (\kappa - 1)\mathbf{S}(g)] - e^{i\beta} [(\kappa + 1)\bar{g} - (\kappa - 1)\mathbf{S}(\bar{g})] &= 0. \end{aligned} \quad (5.106)$$

Перепишем систему (5.106) обозначая

$$g = M + i\Lambda, \quad M' = \mu, \quad (5.107)$$



в виде

$$\begin{aligned} \sin(\alpha)M' + i \cos(\alpha)S(M') &= 0, \\ (\kappa + 1)\cos(\beta)\Lambda - i(\kappa - 1)\sin(\beta)S(\Lambda) &= f. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Здесь правая часть второго уравнения зависит только от решения первого уравнения системы

$$f = (\kappa + 1)\sin(\beta)M + i(\kappa - 1)\cos(\beta)S(M). \quad (5.109)$$

Первое СИУ системы (5.108) является однородным, а второе неоднородным. Оба уравнение системы сводится к задачам Римана на действительной оси вида

$$A^+ = -e^{2i\alpha} A^-, \quad (5.110)$$

$$B^+ = e^{2i(\beta-\zeta)} B^- + \frac{e^{i\beta}}{\kappa + e^{2i\beta}} f, \quad \zeta = \arg(\kappa + e^{2i\beta}). \quad (5.111)$$

Индексы краевых задач (5.110) и (5.111) есть соответственно

$$2K = \text{Index}(e^{2i\alpha}) = \text{Index}(e^{-4i\theta}) = -\frac{2}{\pi} [\theta]_{-\infty}^{\infty}, \quad (5.112)$$

$$2N = \text{Index}(e^{2i\beta}) = \frac{1}{\pi} [\beta]_{-\infty}^{\infty}. \quad (5.113)$$

В формуле (5.113) учтено, что  $\text{Index}(e^{i\zeta}) = 0$ , поскольку  $\text{Re}(\kappa + e^{2i\beta}) > 0$ .

Будем далее искать исчезающее на бесконечности решение для функции  $g$  из (5.107) исходя из общего решения, [Гахов 1977]. В обоих случаях оно зависит от индекса соответствующей краевой задачи. Для первого уравнения системы решение строится аналогично задаче (5.88) и имеет окончательный вид

$$M'(x) = 2 \cos \alpha(x) \frac{P_{2K-1}(x)}{(x^2 + 1)^K} e^{-S \left[ K \ln \left( \frac{t-i}{t+i} \right) + i\alpha(t) \right]}. \quad (5.114)$$

Здесь, учитывая, что показатель экспоненты является чисто вещественным, можно заключить, что коэффициенты многочлена  $P_{2K-1}$  должны быть чисто действительными. Таким образом, если индекс (5.112) положителен, то решение

зависит от  $2K$  действительной произвольной постоянной. Если ищется ненулевое решение на бесконечности, то следует увеличить степень многочлена на единицу.

Построим решение второго уравнения системы (5.107), считая, что ее правая часть известна и временно принимая, что индекс неотрицателен. Тогда исчезающее на бесконечности решение второго уравнения системы (5.108) выписывается из общего случая [Гахов, 1977] в виде

$$\Lambda(x) = \cos(\beta(x) - \zeta(x))f(x) + i \sin(\beta(x) - \zeta(x)) \left[ Z(x) \mathbf{S} \left( \frac{f(t)}{Z(t)} \right) - \frac{\tilde{P}_{2N-1}(x)}{(x^2 + 1)^N} \right] \quad (5.115)$$

Здесь для краткости обозначено

$$Z(x) = \exp \left[ -\mathbf{S} \left( N \ln \frac{t-i}{t+i} - i\beta + i\zeta \right) \right], \quad (5.116)$$

где показатель экспоненты в правой части является вещественным, соответственно и функции  $Z(x)$  тоже вещественная. Тогда, как можно видеть, первый член в квадратных скобках в (5.115) является чисто мнимым. Следовательно, и второй член должен быть чисто мнимым для того чтобы обеспечить вещественность функции  $\Lambda$ . Значит все  $2N$  коэффициентов многочлена  $\tilde{P}_{2N-1}(x)$  есть чисто мнимые.

Общее число произвольных вещественных постоянных в решении будет очевидно равным  $2K+2N+1$ . Заметим, что единица есть следствие того, что при определении правой части второго уравнения системы, необходимо проинтегрировать (5.114), что очевидно добавляет одну вещественную постоянную. Это максимально возможное число произвольных постоянных, полученное при условии, что оба индекса являются положительными. Если один из них отрицателен, например,  $2N$ , то для существования решения должно выполняться  $-2N-1$  интегральных условий на правую часть второго уравнения (подробнее см, [Гахов, 1977]). Их всегда можно выполнить при условии, что  $2K > -2N-1$ . Таким образом для разрешимости задачи необходимо, чтобы суммарный индекс  $2K+2N+1$  был положительным числом. Более того, решений

может быть только нечетное число, т.к. оба индекса, определяемые по формулам (5.112) и (5.113) есть четные числа, что очевидно для  $2K$ , а для  $2N$  следует из того, что вектор смещений возвращается к своему начальному значению после полного обхода контура.

Следует также отметить, что для вычисления напряжений можно уменьшить число независимых констант до  $2K+2N$ , поскольку три реальные константы могут быть выбраны так, чтобы не рассматривать смещение и вращение тела как жесткого целого. Поскольку условия того, что смещения на бесконечности нулевые, уже были учтены, остается удовлетворить только условие на вращение, что и фиксирует один из коэффициентов многочлена  $\tilde{P}_{2N-1}(x)$  по условию  $\text{Im}(\Phi(0))=0$ .

#### 5.5.4. Замечание по открытым контурам

Если рассмотреть разомкнутый контур (или систему разомкнутых непересекающихся контуров), то следует сделать поправку на вычисление индекса. В краевой задаче Римана используется стандартный прием, который заключается в том, что контур дополняется до замкнутого, и на дополнительной части (частях) считается, что коэффициент задачи Римана равен единице, а свободный член нулю. Таким образом возникает краевая задача с разрывными коэффициентами. Гахов [1977] показал, что индекс задачи увеличивается на число частей разомкнутого контура. Например, в случае прямолинейной трещины на единицу. Покажем это другим методом.

Рассмотрим асимптотическое поведение комплекснозначной функции девиатора при переходе через концы трещины. Оно определяется по известной асимптотике напряжений в конце трещины вне зависимости от нагрузки на ней и имеет вид

$$\sqrt{2\pi r}D(r, \vartheta) = \left( K_I^\pm + 3iK_{II}^\pm \right) e^{-i\vartheta/2} - \left( K_I^\pm - iK_{II}^\pm \right) e^{-5i\vartheta/2}, \quad (5.117)$$

где  $K_I$  и  $K_{II}$  - коэффициенты интенсивности напряжений в конце трещины, расположенной на отрезке  $(-l, l)$ , а индексы " $\pm$ " здесь указывают на левый или правый конец соответственно (не путать с обозначениями для крайних значений), угол  $\vartheta$  - есть полярный угол в локальной системе координат  $(r, \vartheta)$  с началом в конце трещины. Уравнение (5.117) показывает, что при  $\vartheta=0$  и  $\vartheta=\pi$   $\arg(D)$  не зависит от  $K_I$  и может быть определен в следующем виде

$$\alpha^{\pm} = \arg K_{II}^{\pm} = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \operatorname{sgn} \left( K_{II}^{\pm} \right) \right). \quad (5.118)$$

Из (5.118) видно, что при переходе через конец трещины,  $\arg(D)$  получает приращение  $\pi/2$ . Таким образом коэффициент соответствующей задачи Римана в формуле (5.110) для бесконечной прямой будет удовлетворять условию Гёльдера везде кроме концов, где он имеет разрывы. Общий индекс может быть рассчитан путем суммирования числа вращений оси главных напряжений и числа скачков в концах. Последние, как видно из (5.112), добавляют единицу для конца каждой трещины. Таким образом для системы, состоящей из  $n$  трещин, общий индекс будет равен  $2K+n$ , что означает, что входящие в решение (5.114) многочлены должны иметь степени  $2K+n-1$ , а общее число вещественных постоянных нужно увеличить до  $2K+2N+2n+1$ . Тем не менее при обходе контура, состоящего из всех трещин должно быть выполнено  $n$  комплексных условий обеспечивающих однозначность смещений. Это обстоятельство оставляет опять  $2K+2N+1$  произвольных действительных постоянных.

Таким образом, случай разомкнутых контуров не изменяет числа неопределенных постоянных в полученных выше решениях краевых задач  $(\alpha, \alpha'_n)$  и  $(\alpha, \beta)$  для полуплоскости или комбинированных типа  $(\alpha, p)$ ,  $(\beta, p)$  для двух полуплоскостей.

### 5.6. Замечания и общие выводы по главе

В данной главе получены замкнутые решения краевых задач, исследованных в Главе 4, для важных частных случаев контуров или граничных условий. Кроме того, некоторые частные решения были построены другим методом, для того чтобы обеспечить непосредственную проверку метода исследования, предложенного в предыдущих двух главах. Как было показано, классический метод отыскания голоморфных функций в виде степенных рядов дает такой же результат, что и предложенный подход при решении краевых задач типа  $(\alpha, \alpha'_n)$  и  $(\beta, \gamma)$  для единичного круга.

Получены общие решения задач  $(\alpha, \alpha'_n)$  и  $(\beta, \gamma)$  для произвольного гладкого контура с простейшими граничными условиями. Отметим, что решение задачи  $(\alpha, \alpha'_n)$  с однородными граничными условиями дает однородные траектории главных напряжений всюду в рассматриваемой области. Таким образом, в однородном поле траекторий невозможно появление каких-либо искривлений в некоторой подобласти и поле напряжений всегда определяется вещественной функцией девиатора напряжений, зависящей (в общем случае) от четырех вещественных постоянных. Полное напряженное состояние зависит от пяти произвольных постоянных, что вызвано интегрированием уравнений равновесия.

При рассмотрении задач для полуплоскостей был использован итерационный метод решения задач для систем скалярных уравнений. Этот случай является вырожденным при использовании граничных условий в главных направлениях напряжений. Действительно, граничное значение функции девиатора напряжений не зависит от скачка нормальных смещений, следовательно, последний не может быть определен в результате решения. Соответственно требуется использование дополнительного условия, которое может быть наложено либо на кривизну траекторий главных напряжений, что приводит к задаче  $(\alpha, \alpha'_n)$ , либо с привлечением ориентаций вектора смещений, что приводит к комбинированным задачам типа  $(\alpha, p)$ ,  $(\beta, p)$  для двух полуплоскостей или к задаче для  $(\alpha, \beta)$  одной области. Последняя задача была решена для случая полуплоскости, но фактически

весь анализ остается в силе и для произвольной области из-за того факта, что полученная система СИУ для полуплоскости полностью совпадает с характеристическими СИУ для произвольной области. Единственная разница состоит в том, что для случая конечного замкнутого контура при факторизации коэффициента задачи Римана следует использовать степенную функцию в отличие от дробно-линейной. Однако это обстоятельство не сказывается на числе произвольных постоянных, а только несколько меняет форму решения (5.114) и (5.115).

Отметим, что результаты, полученные для составной плоскости, имеют особый интерес, т.к. описывают ситуацию с контактирующими областями. Это важно для разработки численных методов решения задач по реконструкции напряжений в составных областях, которые будут развиваться в последующих главах.

## ГЛАВА 6. ДВУМЕРНЫЕ ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ РЕКОНСТРУКЦИИ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ ПО ДИСКРЕТНЫМ ДАННЫМ О ГЛАВНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ

### 6.1. Введение

В этой главе рассматриваются задачи реконструкции полей плоских напряжений в упругой области по дискретным данным о главных направлениях тензора напряжений. Предлагается подход, основанный на метод Трефтца для комплексных потенциалов.

В первом варианте предлагаемого подхода задача сводится к определению неизвестных коэффициентов в линейной комбинации голоморфных функций, используемых для представления комплексных потенциалов во всей упругой области. Коэффициенты находятся по критерию наилучшего согласия расчетных и экспериментальных данных о главных направлениях, что приводит к линейной алгебраической системе однородных уравнений.

Во втором случае предполагается разбиение области на более мелкие подобласти (элементы) и аппроксимация комплексных потенциалов внутри элементов. Для кусочно-полиномиальной аппроксимации комплексных потенциалов во всей области все уравнения теории упругости выполняются автоматически, как и в оригинальном методе Трефтца. В точках коллокаций (на границах между элементами) требуется непрерывность комплексных потенциалов, что образует первую группу уравнений. Вторая группа формируется путем удовлетворения данных о главных направлениях, которые принимаются известными в некоторых точках внутри элементов.

В обоих случаях системы являются однородными, поэтому дополнительно предполагается, что среднее значение максимальных касательных напряжений в точках, где заданы данные, равно единице. Это гарантирует существования нетривиального решения системы, однако не обеспечивает единственности реконструкции полного тензора напряжений. Тем не менее, можно однозначно

реконструировать траектории главных напряжений. Максимальные касательные напряжения определяются с точностью до положительной мультипликативной константы. Это верно при условии, что главные направления не заданы гармоническими функциями пространственных координат, в противном случае константа должна быть заманена вещественной положительно определенной биголоморфной функцией, которая зависит от четырех вещественных постоянных. Определение средних напряжений осуществляется интегрированием, что вводит дополнительную вещественную аддитивную постоянную в полное решение для тензора напряжений.

В общем случае подход приводит к переопределенной системы линейных алгебраических уравнений, элементы которой подвержены ошибкам измерения. Приближенное решение системы ищется методом наименьших квадратов, при необходимости используется SVD регуляризация.

Предложенная методика способна идентифицировать особые (изотропные) точки в поле траектории напряжений. Это показано на примерах, которые используют для реконструкции, в этой главе рассматриваются либо синтетические или реальные данных из фотоупругости.

## **6.2. О подходе**

В Главе 1 уже отмечалось, что в геофизике дискретные данные о главных направлениях тензора напряжений используются для построения карт траекторий главных напряжений (например, [Hansen, Mount, 1990]) или в качестве входных данных для моделирования полей тектонических напряжений в земной коре (например, [Coblentz et al., 1995]). Напомним также, что ориентации напряжений вводятся [Тимошенко, Гудьер, 1970] через главные направления плоского симметричного тензора напряжений как углы наклона главных осей напряжения в какой-либо системе координат. Непрерывные поля главных направлений могут непосредственно быть использованы для определения полей упругих напряжений, например, в фотоупругости это достигается путем интегрирования уравнения равновесия (например, [Frocht, 1941]). Далее развивается альтернативный подход



для определения упругих напряжений в упругой плоскости. Он не требует интегрирования и использует главные направления в дискретных точках, чтобы однозначно определить траектории упругих напряжений, в то время как другие характеристики поля напряжений находятся с минимальным произволом.

Концепция траекторий главных напряжений происходит от фотоупругости, поэтому можно принять следующее определение [Frocht, 1941] - траектории главных напряжений (или изостаты) являются кривыми, касательные к которым совпадают с направлениями одного из главных напряжений в точках касания. Поскольку существуют два взаимно ортогональных главных направлений в каждой точке, траекторий главных напряжений можно рассматривать как криволинейные координаты. Это широко используется в фотоупругости для определения главных напряжений  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  из уравнений равновесия в форме Ламе-Максвелла для плоского случая

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} = 0. \quad (6.1)$$

Здесь  $s_k$  - длина дуги вдоль  $k^{\text{ой}}$  траектории,  $\rho_k = (\partial \theta / \partial s_k)^{-1}$  - радиус кривизны  $k^{\text{ой}}$  траектории,  $\theta$  - главное направление, которое вводится как угол между направлением  $\sigma_1$  и осью  $Ox$  (см Главу 2).

Система (6.1) представляет собой полную систему уравнений в частных производных для определения двух главных напряжений при условии, что траектории напряжений известны. Эта система гиперболического типа, характеристики которой совпадают с траекториями главных напряжений, тем самым краевая задача Коши (или Гурса) может быть поставлена для определения главных напряжений [Мухамедиев, 1991]. Следует отметить, что в фотоупругости максимальное напряжение сдвига,  $\tau_{\max} = |\sigma_1 - \sigma_2|/2$ , также наблюдаются в эксперименте поэтому, в принципе, только одно, любое из этих уравнений может быть использована как, например, в классическом методе Файлона (Filon). Подходы к определению главных напряжений подробно обсуждаются в [Frocht, 1941; Coker, Filon, 1957; Александров, Ахметзянов, 1973; Kuske, Robertson, 1974]

и других монографиях по фотоупругости. В любом случае, при интегрировании системы (6.1) должны быть заданы величины граничных напряжений.

Очевидно, что никакие определяющие соотношения для решения системы (6.1) не требуются. Таким образом, решения, найденные из этой системы можно отнести к любому материалу независимо от его механического поведения. В фотоупругости, предлагается [Александров, Ахметзянов, 1973; Kuske, Robertson, 1974] проверять результаты, полученные после интегрирования (6.1), путем их подстановки в некоторые дифференциальные уравнения второго порядка полученные из уравнений равновесия и условий совместимости деформаций. Эти условия, в случае отсутствия массовых сил, можно заменить на уравнение Лапласа (см Главу 2)

$$\Delta(\sigma_1 + \sigma_2) = 0. \quad (6.2)$$

Поэтому в фотоупругости уравнение (6.2) используется только для того, чтобы проверить точность результатов, полученных при вычислениях главных напряжений, а не как третье уравнение, налагаемое на неизвестные главные напряжения.

Полная система уравнений (6.1) - (6.2) представляет собой некорректную задачу при условии, что ориентации известны в какой-либо упругой области. В предыдущих главах было показано (см. также [Galybin, Мухамедиев, 1999]), что если на границе известны ориентации напряжений и кривизны траекторий напряжений, то это приводит к неклассической краевой задаче плоской теории упругости, которая может иметь вполне определенное конечное число линейно независимых решений или быть неразрешимой. Это зависит от индекса задачи,  $2K$ , который определяется через приращение одного из двух основных главных направлений после полного обхода границы односвязной области. Приращение рассчитывается в радианах, разделенный на  $\pi$ , это целое число или нуль. В частности, было установлено, что для  $2K < -1$  решений не существует, для  $2K = -1$  существует единственное решение и четыре решения существуют для  $2K = 0$ . Этот анализ подтверждает тот факт, что сведения о траектории напряжений в

пределах области является избыточным и приводит к некорректной задаче. Далее будет видно, что требуется применение надлежащих методов решения некорректно поставленных задач, однако, нет необходимости рассматривать краевую задачу в напряжениях для решения системы (6.1) - (6.2).

Для фотоупругости не столь важно одновременное удовлетворение всех уравнений, поскольку заранее известно, что модель является упругой и (6.2) должно быть выполнено, однако это может быть весьма важным для других приложений концепции траектории главных напряжений, особенно если ориентации напряжений известны в дискретных точках, а не непрерывно. Действительно, в отличие от метода фотоупругости, который позволяет определить непрерывное поле траекторий напряжений с некоторой точностью, ориентации напряжений в земной коре известны в некоторых дискретных точках с гораздо худшей точностью. Если данные являются достаточно плотными, то гладкое непрерывное поле траекторий напряжений может быть получены статистическими методами или интерполяцией, например, [Hansen, Mount, 1990; Lee, Angelier, 1994]. Однако следует отметить, что наличие изолированных особых точек значительно усложняет задачу интерполяции. В таких точках (в фотоупругости они известны как изотропные точки, например, [Frocht, 1941], напряжения являются гидростатическими,  $\sigma_1 = \sigma_2$ , таким образом, ориентации напряжений неопределены. Кроме того, в общем случае, поле траекторий главных напряжений, полученное таким образом, не может быть далее использовано в упругом моделировании, так как уравнение (6.2) не удовлетворено, в тоже время результаты могут быть пригодными для неупругого материала. Это указывает на то, что известное поле траекторий главных напряжений служит, в некотором смысле, для замещения реологических уравнений.

Таким образом, реконструкция траекторий главных напряжений в упругих средах должна производиться так, чтобы удовлетворить полную систему уравнений плоской упругости, например, в форме (6.1) - (6.2). Это и есть основная особенность, которая отличается настоящим подходом от прежних подходов,

основанных на чисто математических методах независимо от определяющих (реологических) уравнений для рассматриваемого материала. Другим важным элементом является то, что предлагаемая процедура позволяет одновременное определение максимального напряжения сдвига, которое будет определено с минимальным произволом.

### **6.3. Постановка задачи реконструкции напряжений**

#### **6.3.1. Формулировка**

Пусть  $\Omega$  - односвязная упругая область (конечная или бесконечная), ограниченная не самопересекающимся замкнутым контуром  $\Gamma$ . Эта область может быть подобластью большей области, которая не обязательно односвязная или ограничена. Пусть данные о главных направлениях  $\theta_j$  тензора напряжений известны в точках  $z_j$  ( $j=1 \dots N$ ), которые расположены как внутри области, так и, быть может, на ее границе.

Общая задача формулируется следующим образом:

Определить двумерное поле напряжений в  $\Omega$ , которое

- (1) *обеспечивает наилучшее согласие данных  $\theta_j$  и расчетных главных направлений в заданных точках  $z_j$ ;*
- (2) *удовлетворяет всем уравнениям плоской теории упругости сформулированных в напряжениях.*

Поскольку главные направления определяются только аргументом комплекснозначной биголоморфной функции девиатора напряжений  $D(z, \bar{z}) = \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)$ , то задача может быть рассмотрена как задача определения биголоморфной функции с последующим нахождением гармонической функции  $P(z, \bar{z}) = 2\text{Re}(\Phi(z))$  из уравнений равновесия. Таким образом исходная задача эквивалентна нахождению комплексных потенциалов  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , которые обеспечивают минимизацию суммы квадратов отклонений

аргумента комплекснозначной функции девиатора напряжений от углов  $\alpha_j = \pi - 2\theta_j$ , т.е.

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \operatorname{Im} \left[ \exp(-i\alpha_j) (\bar{z}_j \Phi'(z_j) + \Psi(z_j)) \right] \right\}^2 \Rightarrow \min. \quad (6.3)$$

Отметим, что если считать, как это принято в геомеханике, что максимальное главное напряжение есть наибольшее сжимающее напряжение (геомеханическое соглашение), то надо положить  $\alpha_j = -2\theta_j$ , что не приводит к изменению в виде (6.3).

Дальнейшая цель состоит в разработке численной схемы для определения комплексных потенциалов с использованием (6.3), построении и анализе полей траекторий главных напряжений, максимальных касательных напряжений и средних давлений на предмет их устойчивости и чувствительности к исходным данным.

### 6.3.2. Данные

Никаких формальных ограничений на распределение данных по области не накладывается. Они могут, как показано в примерах на Рисунке 6.1, быть

- (a) регулярные (например, данные в узлах регулярной сетки),
- (b) равномерные (например, данные в случайных точках, которые равномерно распределены в пределах области),
- (c) нерегулярные и неравномерные,
- (d) сформированы в кластеры.

Для характеристики степени однородности данных можно ввести характерную площадь  $\Delta = S_\Omega / N$ , где  $S_\Omega$  площадь рассматриваемой области. После этого, функция плотности данных в точке может быть получена методомдвигающегося окна, т.е. путем подсчета количества данных в квадрате с размером стороны  $\Delta^{1/2}$  и с центром в этой точке. Большие вариации этой функции указывают на

неравномерность распределения данных. Границы кластеров связаны с узкой зоной больших градиентов функции плотности данных.

Размер  $\Delta^{1/2}$  также может быть ассоциирован с характерной длиной перераспределения главных направлений. Что касается кластеров, то можно ввести еще одну характерную площадь,  $\Delta_c = S_\Omega / N_c$ , где  $N_c > 0$  число определенных кластеров, см Рисунок 6.1. Очевидно, что  $\Delta_c > \Delta$ , поэтому размер  $\Delta_c^{1/2}$  характеризует перераспределение главных направлений на большем масштабе. Если каждый кластер считается как одно данное, то введение второго характерного размера  $\Delta_c^{1/2}$  можно рассматривать как метод гомогенизации данных, т.е. кластеры отсутствуют на большем масштабе, как показано на Рисунке 6.1d. В этом случае надо искать решение из более гладкого класса, что и обеспечивает усреднение главных направлений внутри кластера.

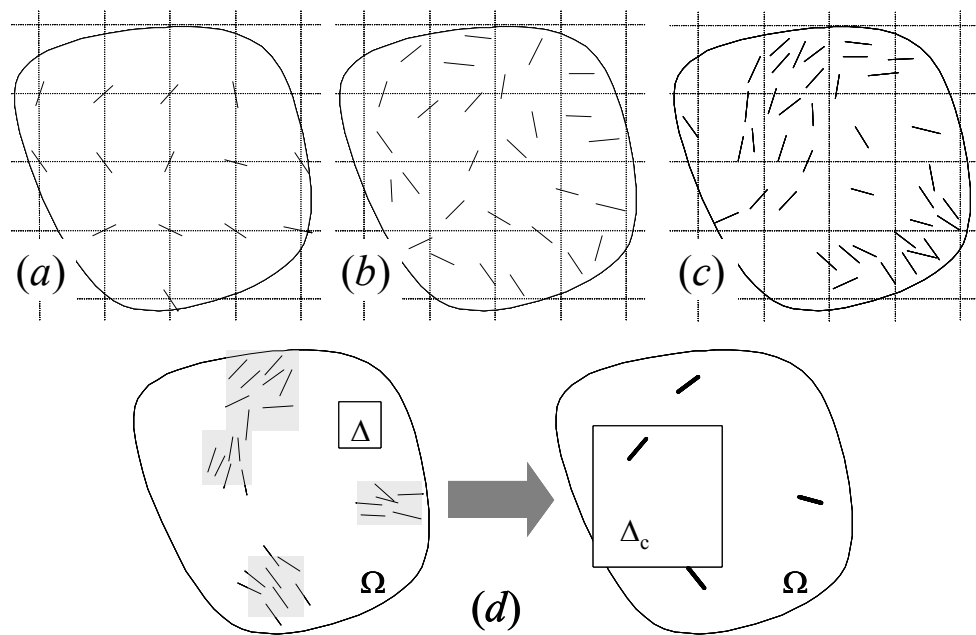


Рисунок 6.1. Типы данных. Регулярные (a), равномерные (b), нерегулярные и неравномерные данные (c); гомогенизации кластерных данных (d) (кластеры заштрихованы).

### 6.3.3. Неединственность решения и свободные параметры

В случае, когда данные известны в конечном числе точек, реконструкция поля напряжений, вообще говоря, не может быть выполнена единственным образом, что видно из следующего.

Пусть девиатор  $D_0(z, \bar{z})$  удовлетворяет всем данным по главным направлениям. Тогда можно ввести многочлен  $R(z)$ , корни которого расположены в точках  $z_j$ , и произвольную биголоморфную функцию  $D_1(z, \bar{z})$  вида

$$R(z) = \prod_{j=1}^N (z - z_j)^{r_j}, \quad D_1(z, \bar{z}) = \bar{z}\Phi'_1(z) + \Psi_1(z). \quad (6.4)$$

Здесь  $r_j$ - произвольные целые положительные числа,  $\Phi'_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$ - произвольные голоморфные функции. Сумма  $D(z, \bar{z}) = D_0(z, \bar{z}) + R(z) D_1(z, \bar{z})$  очевидно удовлетворяет уравнениям теории плоской упругости и во всех точках  $z_j$  имеет тот же аргумент, что и функция  $D_0(z, \bar{z})$  поскольку  $R(z_j) = 0$ . Таким образом  $D(z, \bar{z})$ - также решение, следовательно существует бесконечное число решений, удовлетворяющих данному набору дискретных данных.

Далее решение задачи разыскивается в некотором классе функций. Для этого предполагается использовать либо многочлены, либо кусочно-голоморфные функции. Если говорить об единственности решения по отношению к какому-то классу функций, то и в этом случае оно является неединственным. Пусть, например, решение для девиатора  $D(z, \bar{z})$  получено каким-либо способом. Очевидно, что оно удовлетворяет следующему равенству, выражающему тот факт, что максимальное касательное напряжение является вещественной функцией

$$\operatorname{Im} \left[ D(z, \bar{z}) e^{-i\alpha(z, \bar{z})} \right] = 0, \quad (6.5)$$

где, как и ранее,  $\alpha(z, \bar{z})$  есть аргумент комплекснозначной функции девиатора. Это уравнение инвариантно относительно умножения на любую вещественную

положительную постоянную. Поэтому, поле траекторий напряжений (определяемое по главным направлениям) является единственным (в некотором классе функций), но максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}(z, \bar{z})$  и, следовательно, девиатор напряжений  $D(z, \bar{z})$  определяются с точностью до свободного вещественного мультипликативного параметра. Следовательно, среднее давление (которое получается интегрированием уравнений равновесия в форме (2.12)) зависит от двух параметров, которые не влияют на траектории поля напряжений. В работе [Mukhamediev, Galybin, 2007] доказано, что полный тензор напряжений может включать до пяти свободных параметров в случае, когда поле главных направлений является гармонической функцией. Однако случай гармонического аргумента является исключительным, он подробно обсуждается ниже, где приводятся обоснования того, почему нет необходимости рассматривать этот случай при построении численных решений. Далее ограничимся общим решением  $\tilde{D}(z, \bar{z}), \tilde{P}(z, \bar{z})$  которое представляется в следующем виде

$$\tilde{D}(z, \bar{z}) = bD(z, \bar{z}), \quad \tilde{P}(z, \bar{z}) = a + bP(z, \bar{z}), \quad (6.6)$$

где  $D(z, \bar{z}), P(z, \bar{z})$  являются частными решениями,  $a$  и  $b > 0$  - вещественные константы.

Следует отметить, что как только определена функция комплексного девиатора, то по ее аргументу  $\alpha(z, \bar{z})$  определяются главные направления, после чего поле траекторий главных напряжений однозначно находится путем интегрирования системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dz}{ds_k} = e^{i\left(\theta(z, \bar{z}) + (k-1)\frac{\pi}{2}\right)}, \quad (6.7)$$

где  $k=1$  соответствует траекториям наибольшего главного напряжения, а  $k=2$  ортогональным к ним траекториям наименьшего главного напряжения. В случае использования «геомеханического соглашения» эти траектории меняются



местами. Интегрирование (6.7) не встречает значительных трудностей и везде далее выполняется численно. Поэтому, когда аргумент  $D(z, \bar{z})$  известен в любой точке области, поле траекторий можно считать известным везде, за исключением особых точек, которые будут проанализированы ниже.

Далее рассмотрим алгоритмы построения частных решений в (6.6) по дискретным данным.

#### 6.4. Численный подход

##### 6.4.1. Метод Трэфтца для комплексных потенциалов

Решение основано на использовании тождества (6.5), которое имеет место для комплекснозначной функции напряжений  $D$  всюду в рассматриваемой области. Это тождество справедливо как для упругой, так и для неупругой среды, оно выражает лишь тот факт, что  $e^{-i\alpha}D$  является вещественной функцией, т.е. модулем  $D$ . В случае упругости, который здесь и рассматривается, можно переписать (6.5) через голоморфные функции следующим образом

$$\operatorname{Im}\left\{e^{-i\alpha(z, \bar{z})}[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]\right\} = 0, \quad z \in \Omega. \quad (6.8)$$

Очевидно, что, если (6.8) выполнено во всех дискретных точках  $z_j$ , где известны данные по главным направлениям, то это решает поставленную выше задачу минимизации (6.3). Однако следует принять во внимание, что, в отличие от краевых задач, где граничные условия могут быть заданы произвольно, главные направления и, следовательно, аргумент  $\alpha$ , как показано в работах [Мухамедиев, Галыбин, 2004; Mukhamediev, Galybin, 2007], должен быть выбран так, чтобы удовлетворять системе уравнений плоской теории упругости. Таким образом, можно ожидать определенные численные трудности, если данные  $\alpha_j$  выбраны произвольно, хотя какое-то упругое решение может быть найдено и в этом случае из-за использования конечного числа данных. Следует также отметить, что реальные данные подвержены ошибкам измерений, из-за чего точное выполнение (6.8) не может быть достигнуто даже при обработке экспериментов по

фотоупругости. Как следствие, далее строится решение, которое удовлетворяет условиям (6.8) приближенно, так, что достигается минимум отклонения расчетных главных направлений от заданных в смысле метода наименьших квадратов, что и обеспечивает минимизацию в (6.3).

Для определения голоморфных функций  $\Phi'(z)$  и  $\Psi(z)$  используется метод основанный на подходе Трефтца. В соответствии с этим подходом решение некоторой системы дифференциальных уравнений разыскивается в виде линейной комбинации независимых известных функций удовлетворяющих данной системе уравнений, после чего неизвестные коэффициенты находятся из граничных условий (см., например, [Kita, Kamiya, 1995]) Различные варианты метода обсуждаются работах [Jirousek, Zieliński, 1995; Qin, 2000; Herrera, 2000]. В рассматриваемом случае роль граничных условий играют полевые дискретные данные по главным направлениям, что отличает предлагаемый здесь метод от классического метода Трефтца. В качестве независимых функций могут быть выбраны любые голоморфные функции, соответственно потенциалы представляются как линейные комбинации этих функций. Далее используются две существенно разные системы:

Вариант 1. Линейно независимые функции, голоморфные везде в  $\Omega$ , обозначаемые далее  $R_k(z)$ .

Вариант 2. Кусочно-полиномиальные функции, голоморфные внутри конечных элементов, на которые можно разбить всю область  $\Omega$ .

#### **6.4.2. Сведение к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений**

##### **Вариант 1**

Будем разыскивать комплексные потенциалы в виде

$$\Psi(z) = \sum_{k=0}^n c_k R_k(z), \quad \Phi'(z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+n+1} R_k(z). \quad (6.9)$$

Комплексные константы  $c_k$  неизвестны и должны определяться из решения задачи (6.3), после чего аргумент биголоморфной функции становится известным, как и сама эта функция. Количество неизвестных,  $2n+1$ , не должно превосходить половины числа данных  $N$ , в противном случае, как будет видно дальше, разрешающая система линейных уравнений будет недоопределенной.

Отметим, что можно использовать разное количество членов для комбинаций голоморфных функций в (6.9). Далее предполагается, что представление для  $\Phi'(z)$  имеет на один член меньше, чем для  $\Psi(z)$ , что не является обязательным, но это обеспечивает одинаковое количество членов в функциях напряжений  $P$  и  $D$ . Кроме того, дальше используется  $R_0(z) = 1$ , независимо от выбора других функций  $R_k(z)$ .

Использование (6.9) приводит к следующему выражению для биголоморфной функции

$$D(z, \bar{z}) = \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = \sum_{k=0}^{2n} c_k F_k(z, \bar{z}), \quad F_k(z, \bar{z}) = \begin{cases} R_k(z), & 0 \leq k \leq n \\ \bar{z}R_{k-n-1}(z), & n < k \leq 2n \end{cases} \quad (6.10)$$

После подстановки (6.10) в (6.8) возникает следующее функциональное уравнение

$$\operatorname{Im} \sum_{k=0}^{2n} c_k e^{-i\alpha(z, \bar{z})} F_k(z, \bar{z}) = 0, \quad z \in \Omega. \quad (6.11)$$

Уравнение (6.11) далее сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных констант  $c_k$ . Поскольку функция  $\alpha$  известна в точках  $z_j$ , то методом коллокаций получаем следующую систему  $N$  вещественных уравнений для определения  $2n+1$  комплексных констант

$$\operatorname{Im} \sum_{k=0}^{2n} e^{-i\alpha_j} F_k(z_j, \bar{z}_j) c_k = 0, \quad j = 1 \dots N. \quad (6.12)$$

Уравнение (6.12) является однородным, таким образом по крайней мере одно дополнительное условие необходимо для того, чтобы найти нетривиальное

решение. Как видно, умножение системы (6.12) на любую положительную постоянную не нарушает этой системы, что означает, что любое решение, удовлетворяющее (6.12) можно нормировать на константу. Эта константа может быть выбрана из условия, что средний модуль  $D$  по области равен единице. Так как  $|D|=e^{-i\alpha}D$ , то дополнительное уравнение принимает вид

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{2n} e^{-i\alpha j} F_k(z_j, \bar{z}_j) c_k = N. \quad (6.13)$$

Удобно переписать систему (6.12)-(6.13) в вещественной матричной форме, записывая комплексные константы как  $c_k = X_k + iX_{2n+k+1}$  (следовательно, вводя вектор  $\mathbf{x}$  из  $4n+3$  вещественных неизвестных), что приводит к

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (6.14)$$

где  $\mathbf{A}$  есть  $(N+1) \times (4n+3)$  матрица системы с вещественными коэффициентами  $A_{k,j}$  которые определены ниже;  $\mathbf{x}$  есть  $(4n+3)$  вектор вещественных неизвестных  $X_k$ ;  $\mathbf{b}$  есть  $(N+1)$  вектор, все компоненты которого равны нулю за исключением последнего, равного  $N$  как следует из (6.13)

$$A_{j,k} = \begin{cases} \operatorname{Im} \left[ e^{-i\alpha j} F_k(z_j, \bar{z}_j) \right], & 0 \leq k \leq 2n \\ \operatorname{Im} \left[ i e^{-i\alpha j} F_{k-2n-1}(z_j, \bar{z}_j) \right], & 2n < k \leq 4n+1 \end{cases}, \quad j=1 \dots N$$

$$A_{N+1,k} = \begin{cases} \sum_{j=1}^N e^{-i\alpha j} F_k(z_j, \bar{z}_j), & 0 \leq k \leq 2n \\ \sum_{j=1}^N i e^{-i\alpha j} F_{k-2n-1}(z_j, \bar{z}_j), & 2n < k \leq 4n+1 \end{cases} \quad (6.15)$$

Переопределенная система (6.14) решается далее методом наименьших квадратов, при этом для ее разрешимости необходимо чтобы  $N \geq 4n+2$ .

**Вариант 2**

Вся область разбивается на  $N_{elem}$  подобласти произвольной формы (элементы). Комплексные потенциалы для каждого  $m$ -го элемента разыскиваются в виде

$$\Phi^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^p a_k^{(m)} z^k, \quad \Psi^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^p a_{k+p+1}^{(m)} z^k, \quad m=1 \dots N_{elem}, \quad (6.16)$$

где  $a_k^{(m)}$  - неизвестные комплексные константы. Каждый элемент порождает  $2(p+1)$  комплексных неизвестных (в данном случае приводится вариант, в котором число неизвестных коэффициентов для потенциалов  $\Phi^{(m)}(z)$ ,  $\Psi^{(m)}(z)$  одинаково). Степени многочлена могут быть выбраны произвольно, однако нужно учитывать ограничения, связанные с количеством данных (см ниже). Приближение многочленами предполагает, что поле напряжений непрерывно, поэтому углы на контуре или сосредоточенные силы исключаются из рассмотрения. Непрерывность решения во всей области достигается приближенно путем введения точек коллокаций на границах между соседними элементами, в которых потенциалы предполагаются непрерывными. Число точек коллокаций не зависит от числа коэффициентов в (6.16)

Для  $c$ -ой точки коллокации  $z_c$ , лежащей на границе элементов с номерами  $m$  и  $m+1$ , условия непрерывности приводят к следующим уравнениям

$$\sum_{k=0}^p [a_k^{(m)} - a_k^{(m+1)}] z_c^k = 0, \quad (6.17)$$

$$\sum_{k=0}^p [a_{k+p+1}^{(m)} - a_{k+p+1}^{(m+1)}] z_c^k = 0, \quad m=1 \dots N_{elem}, \quad c=1 \dots N_{CP}.$$

Для точки  $z_j$  (в которой известно главное направление  $\theta_j$ ), которая лежит в элементе  $m_j$  имеем

$$\operatorname{Im} \left[ \sum_{k=0}^p \left( a_k^{(m_j)} \bar{z}_j + a_{k+p+1}^{(m_j)} \right) z_j^k \cdot e^{-i\alpha_j(z_j, \bar{z}_j)} \right] = 0, \quad j=1 \dots N, \quad (6.18)$$

где, как и прежде,  $\alpha_j = \pi - 2\theta_j$ .

Уравнений (6.17) и (6.18) являются однородными, поэтому искомые коэффициенты не могут быть определены однозначно, если не накладываеся никаких других условий. Это, как указывалось выше, отражает неоднозначность определения максимального касательного напряжения. Далее, как и в Варианте 1, предполагается, что среднее значение  $\tau_{\max}$  по всем точкам данных, равно единице. Это приводит к следующему дополнительному уравнению

$$\sum_{j=1}^N \left[ \sum_{k=0}^p \left( a_k^{(m_j)} \bar{z}_j + a_{k+p+1}^{(m_j)} \right) z_j^k \cdot e^{-i\alpha_j(z_j, \bar{z}_j)} \right] = N. \quad (6.19)$$

Общая система состоит из 3 групп уравнений. Первая группа формируется из уравнений, удовлетворяющих непрерывности комплексных потенциалов в точках коллокаций (6.17), далее рассматриваются только действительные уравнения, полученные выделением действительных и мнимых частей. Вторая группа (6.18) включает исходные данные о главных направлениях и последние два уравнения представляют действительную и мнимую части (6.19). Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно быть символически записана в матричном виде

$$\mathbf{C}\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (6.20)$$

где  $\mathbf{C}$  -  $s \times n$  матрица ( $s = 4N_{CP} + N + 2$ ,  $n = u N_{elem}$ ),  $u = 4(p + 1)$  представляет число неизвестных действительных параметров внутри каждого элемента;  $\mathbf{a}$  является вектором неизвестных с действительными коэффициентами, где комплексные коэффициенты для каждого элемента есть  $a_0^{(m)} = a_{0,1}^{(m)} + i a_{0,2}^{(m)}$ ,

тогда  $\mathbf{a} = \left\{ a_{0,1}^{(1)}, a_{0,2}^{(1)}, \dots, a_{2p+1,1}^{(1)}, a_{2p+2,2}^{(1)}, a_{2p+1,1}^{(N_{elem})}, a_{2p+1,2}^{(N_{elem})}, \dots, a_{2p+1,1}^{(N_{elem})}, a_{2p+1,2}^{(N_{elem})} \right\}$ .

Правая часть есть вектор-столбец  $\mathbf{b} = (0, 0, \dots, 0, N)^T$  длины  $s$ . Для разрешимости необходимо  $s > n$ .

Матрица  $\mathbf{C}$  зависит от качества данных, типа и размера элемента. Алгоритм формирования матрицы  $\mathbf{C}$  состоит в следующем, [Irsa, Galybin, 2010]. Сначала вводятся два массива переменных, один для уравнений непрерывности

$$\mathbf{F}_{jp} = \left\{ z_j^0, iz_j^0, \dots, z_j^p, iz_j^p \right\}, \quad \text{и второй для уравнений в точках данных,}$$

$$\mathbf{H}_{jp} = \left\{ \bar{z}_j z_j^0 e^{-i\alpha_j}, i\bar{z}_j z_j^0 e^{-i\alpha_j}, z_j^0 e^{-i\alpha_j}, iz_j^0 e^{-i\alpha_j}, \dots, \bar{z}_j z_j^p e^{-i\alpha_j}, i\bar{z}_j z_j^p e^{-i\alpha_j}, z_j^p e^{-i\alpha_j}, iz_j^p e^{-i\alpha_j} \right\},$$

и скаляры,  $ql = \text{CPE}(j, 2)u - u$ ,  $qr = \text{CPE}(j, 3)u - u$  и  $q = \text{DE}(j, 2)u - u$ , которые относятся к соответствующему номеру колонки в матрице  $\mathbf{C}$  для  $j$ -ой точки коллокаций или точки данных. Если пронумеровать элементы и точки, то  $\text{CPE}$  можно представить в виде матрицы размера  $N_{CP} \times 3$ , состоящей из номера точки коллокации и номера его соседних элементов, в виде упорядоченной строки, т.е.  $\text{CPE} = [\#N_{CP}, \#el1, \#el2]$ .  $\text{DE}$  представляет матрицу  $N_{CP} \times 2$ , состоящий из номеров данных и номеров элементов, которым эти данных принадлежат, строки организована следующим образом  $\text{DE} = [\#N, \#el]$ . В дальнейшем для компонент матрицы  $\mathbf{C}$ , используется используемые в пакете MATLAB обозначения ( $ql:ql+u$ ), которое указывает диапазон столбца (от  $ql$  до  $ql+u$ ), когда подставляется массив переменных. Все элементы матрицы  $\mathbf{C}$  являются вещественными и задаются следующим образом:

Непрерывность функции  $\Phi'(z)$  в точках коллокаций  $j = 1, \dots, N_{CP}$

$$\begin{aligned} C[j, ql : ql + u/2] &= \text{Re}(\mathbf{F}_{jp}) \\ C[j, qr : qr + u/2] &= -\text{Re}(\mathbf{F}_{jp}) \\ C[j + N_{CP}, ql : ql + u/2] &= \text{Im}(\mathbf{F}_{jp}) \\ C[j + N_{CP}, qr : qr + u/2] &= -\text{Im}(\mathbf{F}_{jp}) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Непрерывность функции  $\Psi(z)$  в точках коллокаций  $j = 1, \dots, N_{CP}$

$$\begin{aligned} C[j + 2N_{CP}, ql + u/2 : ql + u] &= \operatorname{Re}(\mathbf{F}_{jp}) \\ C[j + 2N_{CP}, qr + u/2 : qr + u] &= -\operatorname{Re}(\mathbf{F}_{jp}) \\ C[j + 3N_{CP}, ql + u/2 : ql + u] &= \operatorname{Im}(\mathbf{F}_{jp}) \\ C[j + 3N_{CP}, qr + u/2 : qr + u] &= -\operatorname{Im}(\mathbf{F}_{jp}) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Уравнения, которые выполняются на всех точках данных  $j = 1, \dots, N$

$$C[j + 4N_{CP}, q : q + u] = \operatorname{Im}(\mathbf{H}_{jp}). \quad (6.23)$$

Последние два уравнения, вытекающие из (6.19), представляются в матричной форме как ( $j = 4N_{CP} + N + 1$ )

$$C[j, :] = \operatorname{Im} \left[ \sum_{t=4N_{CP}}^{4N_{CP}+N} C[t, :] \right], \quad C[j + 1, :] = \operatorname{Re} \left[ \sum_{t=4N_{CP}}^{4N_{CP}+N} C[t, :] \right]. \quad (6.24)$$

Как и в Варианте 1, система переопределена, следовательно, несовместна. Ее приближенное решение может также быть найдено методом наименьших квадратов.

Как только система (6.20) решена, можно найти потенциалы  $\Phi'(z)$  и  $\Psi(z)$  для каждого элемента, что достаточно для определения девиатора напряжения  $D^{(m)}(z, \bar{z}) = \bar{z}\Phi'^{(m)}(z) + \Psi^{(m)}(z)$ .

Для определения среднего давления, необходимо проинтегрировать  $\Phi'(z)$ , что дает  $P^{(m)}(z, \bar{z}) = 2 \operatorname{Re} \left( \int \Phi'^{(m)}(z) dz \right)$ . При этом непрерывность  $P(z, \bar{z})$  автоматически выполняется в точках коллокаций.



### 6.4.3. Решение системы методом разложения ее матрицы по сингулярным числам

Как отмечалось, переопределенные системы (6.14) и (6.20) решаются методом наименьших квадратов. Например, приближенное решение системы (6.20) -  $\mathbf{a}^*$  есть

$$\mathbf{a}^* = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{b}. \quad (6.25)$$

Однако, этот метод сам по себе не в состоянии обеспечить устойчивость полученного решения, неустойчивость может возникнуть из-за некорректности задачи. Для контроля точности и устойчивости решения (6.25) используются соответственно невязка и число обусловленностей (см., например, [Golub, Loan, 1989]). Для больших систем типа (6.20), матрицы системы обладают высокой степенью разреженности и, следовательно, необходимо использовать более сложные варианты метода наименьших квадратов. Например, как показано в работе [Paige, Saunders, 1982], итерационный LSQR алгоритм является эффективным для больших переопределенных и плохо обусловленных систем.

В отличие от (6.20) матрица системы (6.14) всегда является полностью заполненной, поэтому в случае высокого числа обусловленностей системы применение итерационных алгоритмов не обосновано, соответственно требуется регуляризация. Следует отметить, что правая часть системы (6.14), вектор  $\mathbf{b} = (0, \dots, 0, N)^T$ , известен точно, в то время как коэффициенты матрицы  $\mathbf{A}$  зависят от входных данных. Эта ситуация не характерна для некорректных задач, во-первых, потому что устойчивость решений не связана с ошибками в правой части и во-вторых, потому что матрица не является обязательно плохо обусловленной. В последнем случае нет необходимости применять какие-либо процедуры регуляризации, принятые для некорректных задач, подробнее в [Тихонов, Арсенин, 1977]. Таким образом, необходимо анализировать число обусловленности матрицы при решении системы, чтобы контролировать является ли матрица плохо обусловленной или нет.

Есть две основные причины по которым матрицу может стать плохо обусловленной. Прежде всего уравнение (6.13) не гарантирует, что ранг системы (6.14) равен  $4n+3$ , даже если  $N \geq 4n+2$ . Этот частный случай анализируется в следующем параграфе. Кроме того, ориентации напряжений, выраженные через углы  $\alpha_j$ , подвержены ошибкам измерений, что, в принципе, может привести к некорректности в первоначально хорошо поставленной задаче.

Подход, применяемый здесь, устраняет обе эти причины автоматически. Он основан на методе разложения по сингулярным числам – SVD регуляризации (см., например, [Golub, Loan, 1989]), что позволяет легко контролировать число обусловленностей,  $CN$ , определяемое как отношение наибольшего сингулярного числа к наименьшему. Если число обусловленностей больше некоторого критического значения,  $CN^*$ , то матрица в (6.20) заменяется близкой матрицей  $\mathbf{A}'$ , которая имеет ранг меньше чем  $rank(\mathbf{A})$ . Матрица  $\mathbf{A}'$  близка к  $\mathbf{A}$  в том смысле, что их наибольшие сингулярные числа совпадают. Эта идея широко используется при обработке изображений в целях уменьшения объема данных для хранения или передачи, например, [Andrews, Peterson, 1975; Forsythe et al., 1977; Kahar et al., 1989]. Galybin [2002; 2008] применял этот подход для регуляризации некорректных задач об идентификации напряжений в процесс-зоне впереди трещины и восстановления кривых деформаций-напряжений, в случае, когда матрица не зависит от входных данных. Конкретные подробности приводятся ниже.

Вначале сингулярное разложение матрицы  $\mathbf{A}$   $((N+1) \times (4n+3))$  находится в форме  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$ , где  $\mathbf{U}$   $((N+1) \times (N+1))$  и  $\mathbf{V}$   $((4n+3) \times (4n+3))$  ортогональные матрицы и  $\mathbf{D}$   $((N+1) \times (4n+3))$  диагональная матрица, составленная из сингулярных чисел,  $d_j \geq 0$ , расположенных в порядке убывания,  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_{4n+3}$ . Во-вторых, производится усечение матрицы  $\mathbf{D}$  так, что все ее диагональные элементы начиная с  $d_{K+1}$  заменяются нулями, в результате получается диагональная матрица  $\mathbf{D}'$  ранга  $K$ ,  $\mathbf{D}' = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_K, 0, \dots, 0\}$ . После чего находится матрица  $\mathbf{A}' = \mathbf{U}\mathbf{D}'\mathbf{V}^T$

размера  $(N+1) \times (4n+3)$  и ранга  $K$ . Наконец, система (6.14) заменяется системой  $\mathbf{A}' \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , решение которой дается формулой

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{D}'' \mathbf{U}^T \mathbf{b}. \quad (6.26)$$

Здесь  $\mathbf{D}''$  диагональная матрица размера  $(4n+3) \times (N+1)$  и ранга  $K \leq 4n+3$ . вычисляемая по правилу  $\mathbf{D}'' = \text{diag}\{d_1^{-1}, d_2^{-1}, \dots, d_K^{-1}, 0 \dots 0\}$ .

В случае  $CN \leq CN^*$  усечение матрицы  $\mathbf{D}$  не осуществляется, таким образом уравнение (6.26) дает точное решение исходной системы (6.14).

В приведенных далее примерах решения по формуле (6.26) применяются обычно тогда, когда число обусловленностей превышает  $10^5$  для матриц размерность которых не превышает  $1000 \times 1000$ , для разреженных матриц большей размерности используется LSQR алгоритм, а для устойчивых систем простое решение в форме (6.25).

### 6.5. Гармонический аргумент

Как следует из представления биголоморфной функции, ее аргумент  $\alpha$  может быть представлен в виде суммы

$$\alpha(z, \bar{z}) = \arg(\Phi'(z)) + \arg\left(\bar{z} + \frac{\Psi(z)}{\Phi'(z)}\right). \quad (6.27)$$

Первое слагаемое в левой части (6.27) является гармонической функцией в то время как второй член есть аргумент комплекснозначной гармонической функции, которая, в общем, не является голоморфной. Общий аргумент является гармоническим если второй член в (6.27) опущен или постоянен. Например, в случае нормально нагруженной полуплоскости или трещины,  $\Psi(z) = -z\Phi'(z)$ , и аргумент равен  $\pm\pi/2$ . Круговые границы также приводят к гармоническому аргументу биголоморфной функции. Общее выражение для этой функции в случае гармонического аргумента может быть принято в форме

$$D(z, \bar{z}) = (a_0 + a_1 z + \bar{a}_1 \bar{z} + a_2 z \bar{z}) \chi(z), \quad \text{Im}(a_0) = \text{Im}(a_2) = 0, \quad (6.28)$$

где  $\chi(z)$  - голоморфная функция. Следует отметить, что член в скобках в правой части уравнения (6.28) является вещественной функцией, таким образом, необходимое условие является очевидным, для строгого доказательства достаточности представления (6.28), см. [Mukhamediev, Galybin, 2007].

Уравнение (6.28) также показывает, что существуют четыре вещественные константы  $(a_0, \text{Re}(a_1), \text{Im}(a_1), a_2)$ , которые не влияют на траектории напряжений в этом частном случае. Они не могут быть определены путем решения системы (6.28), что проявляется в снижении  $\text{rank}(\mathbf{A})$ . Например, если  $\chi(z) = z$  и  $\alpha_j$  известны точно, то  $\text{rank}(\mathbf{A})$  уменьшается на 3 единицы при условии, что средний по области модуль функции  $D$  равен единице, что исключает одну независимую константу.

Для непрерывных данных, прямой подстановкой  $\alpha(z, \bar{z})$  в уравнение Лапласа можно убедиться является ли аргумент гармоническим или нет. С некоторой точностью это может быть проделано и для известных дискретных данных если они не содержат ошибок измерений. Однако, наличие экспериментальных ошибок делает невозможным отличить заранее случаи гармонических и негармонических аргументов. В приложениях, можно рекомендовать искать решение из класса негармонических аргументов и проверить потом, указывает ли результат на гармоничность аргумента. Это может быть достигнуто, например, путем апостериорной проверки следующего соотношения между комплексными потенциалами, которое следует из (6.28)

$$(\bar{a}_1 + a_2 z) \Phi'(z) - (a_0 + a_1 z) \Psi(z) = 0. \quad (6.29)$$

Однако, если нет четкого указания в данных на их гармоничность, то, в принципе, эти два случая должны рассматриваться отдельно, а затем путем сравнения результатов, можно сделать выбор в пользу одного из двух вариантов.

Система (6.14) может быть существенно упрощена для случая (6.28). Действительно после подстановки  $\chi(z) = |\chi(z)| e^{i \arg[\chi(z)]}$  в (6.28), логарифмированием обеих частей и выделением мнимой части находим

$$\ln \chi(z) - \overline{\ln \chi(z)} = 2i\alpha(z, \bar{z}), \quad \alpha(z, \bar{z}) = \arg[\chi(z)]. \quad (6.30)$$

Далее линейная система может быть сформирована, как описано выше, с той лишь разницей, что только одна голоморфная функция подлежит определению. Более того, матрица этой системы не будет зависеть от  $\alpha(z, \bar{z})$ , т.е. ошибки будут только в правой части системы. Вероятно, это был бы лучший способом для получения решения в частном случае гармонических аргументов, однако этот подход не позволяет отыскивать особые точки (см ниже), поэтому он далее не развивается.

### 6.6. *Особые точки*

Особые точки на траектории главных напряжений могут быть разделены на два класса. Первый класс ассоциируется с обычно принятыми особыми точками, где напряжения не являются непрерывными. Вторым классом известен в фотоупругости как изотропные точки, в них главные напряжения равны друг другу, следовательно, главных направлений не существует. Следует отметить, что некоторые траектории сами по себе могут представлять непрерывный набор изотропных точек, но в этом случае граница совпадает с траекторией, как, например, в случае ненагруженной изотропной плоскости с трещиной, чья поверхность нагружена нормальными усилиями. Такие случаи не представляют трудности в идентификации особых точек. Положения особых точек из первого класса также часто очевидны в случае, когда рассматриваются вырезы, сосредоточенные силы, действующих на границе или в точках разрыва граничных условиях (сосредоточенные силы и моменты, которые действуют в области являются исключительными). Таким образом, только изолированные особые точки второго класса (изотропные точки) должны быть определены при реконструкции поля траекторий главных напряжений по дискретным данным.

Два типа изотропных точек первого порядка, как правило, наблюдается в фотоупругости, хотя существование изотропной точки высшего порядка теоретически возможно (например, [Kuske, Robertson, 1974]). Эти точки могут

быть классифицированы в соответствии с асимптотикой комплекснозначной функции девиатора напряжений [Каракин, Мухамедиев, 1993] в непосредственной близости от ее нуля. Считая, что этот нуль расположен в начале координат, имеем следующее разложение

$$D(z, \bar{z}) = A\bar{z} + Bz + \dots \quad (6.31)$$

Если  $|A| > |B|$  то имеем изотропную точку  $A$ - типа (блокированная), если  $|A| < |B|$  то  $B$ - типа (неблокированная). Оба эти типа могут реализовываться одновременно в рассматриваемой области, как показано на Рисунке 6.2, на котором приведен фрагмент поля траекторией, полученных в фотоупругой балке, испытываемой на изгиб под четырехточечной нагрузкой [Frocht, 1941]. Отметим также существование особой точки первого класса,  $C$ , которая совпадает с местом приложения сосредоточенной нагрузки на границе.

Отметим следующее свойство особых точек. Пусть  $\gamma_A$  и  $\gamma_B$  замкнутые контура, соответственно охватывающий изотропные точки  $A$  и  $B$ -типа, и пусть нет других особых точек внутри этих контуров. Тогда главные направления получают соответственные приращения  $\pm\pi$  после полных обходов этих контуров (в направлении против часовой стрелки). Поэтому  $\arg(D)$  получает приращение  $\mp 2\pi$ . Это свойство запрещает применение уравнения (6.30) для областей с изотропной точки, даже если ее аргумент является гармонической функцией. Это связано с тем, что принцип аргумента для голоморфных функций (например, [Гахов, 1977]) требует компенсации приращение аргумента путем введения полюсов или нулей внутри контура. Однако, они там не предполагались. В принципе, в непосредственной близости от изотропной точки,  $z_0$ , можно было бы представить функцию  $D(z, \bar{z})$  в виде произведения множителя  $(z - z_0)$  или  $(\bar{z} - \bar{z}_0)$  на голоморфную функцию. Однако, для этого потребуются заранее идентифицировать изотропную точку, что является отдельной задачей. Подход, основанный на представлениях (6.9) либо (6.16) для комплексных потенциалов, свободен от этого недостатка и позволяет разыскивать изотропные точки обоих типов одновременно.

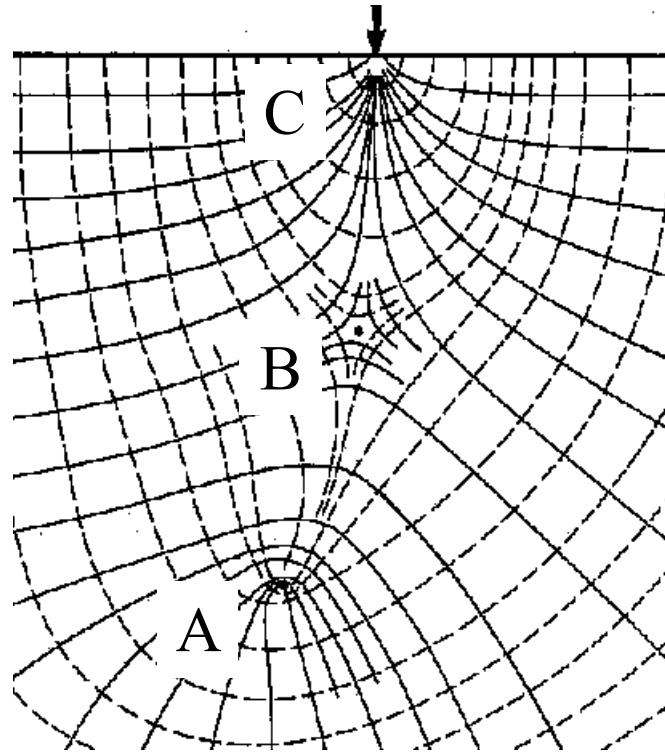


Рисунок 6.2. Особые точки на поле напряжений траектории: А - заблокированная изотропная точка (А-типа), В - неблокированная изотропная точка (В-типа), С - сингулярная точки приложения сосредоточенной нагрузки. Фрагмент поля траекторий, полученного в эксперименте с фотоупругой балки на изгиб, взят из [Frocht, 1941].

### **6.7. Синтетические примеры реконструкций полей упругих напряжений**

Проведем несколько численных экспериментов для разных типов данных. Первый тип использует синтетические данные о главных направлениях, т.е. зашумленные данные сгенерированные из комплексных потенциалов, заданных аналитически. Цель численных экспериментов – установить какие системы базисных функций дают лучшие (более стабильные) результаты и насколько эти результаты являются чувствительными к внесенным ошибкам.

### 6.7.1. Восстановление траекторий с особыми точками и полей напряжений по Варианту 1

В этом параграфе рассматривается искусственный пример, в котором главные направления моделируются при помощи функции напряжения  $D_{ideal}(z, \bar{z})$ , аналитически заданной в квадратной области  $\Omega_s = \{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ . Дискретные модельные данные получают вычислением аргумента  $D_{ideal}$  для некоторого конечного множества полевых точек с последующим введением ошибок в каждое данное. Задача этого параграфа состоит в исследовании точности реконструкции траекторий напряжений и функции напряжений, а также проверке возможности восстановления изотропных точек обоих упомянутых выше типов. Для биголоморфной функции  $D_{ideal}$  выбран следующий простой вид

$$D_{ideal}(z, \bar{z}) = C_0(z - C_1)(\bar{z} - \bar{C}_2), \quad (6.32)$$

где точки  $C_1$  и  $C_2$  расположены в  $\Omega_s$ . Из сопоставления (6.32) и (6.31) видно, что эти точки являются изотропными точками соответственно  $B$  и  $A$  - типа.

Частная форма для идеального среднего напряжения (после интегрирования уравнений равновесия) берется в виде

$$P_{ideal}(z, \bar{z}) = \text{Re}[C_0 z(z - 2C_1)]. \quad (6.33)$$

Дискретные данные находятся из (6.32) следующим образом

$$\theta_j = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg[D_{ideal}(z_j, \bar{z}_j)] + \eta_j. \quad (6.34)$$

Полевые точки  $z_j$  ( $j=1 \dots N$ ), вводятся либо регулярно, либо случайно, но в последнем случае они равномерно распределены в пределах площади при помощи, встроенной в MathCAD 6 PLUS процедуры,  $rnd(x)$ . Случайные ошибки  $\eta_j$  генерируются процедурой  $rnorn(N, mean, stdev)$ , как нормальное распределение случайных чисел с нулевым средним,  $mean=0$ , и с заданным среднеквадратическим (стандартным) отклонением,  $stdev$ . Количество полевых точек варьируется в зависимости от числа неизвестных коэффициентов в разложении (6.9) оставаясь  $N=10n$  во всех дальнейших расчетах. Комплексные



потенциалы  $\Phi'(z)$  и  $\Psi(z)$  в (6.9) разыскиваются как полиномы степени  $(n-1)$  и  $n$  соответственно, т.е.  $R_k(z)=z^k$  ( $k=0\dots n$ ).

Следующие характеристики были использованы для сравнения идеальной и восстановленной функций напряжения:

- Расстояния восстановленных особых точек от их идеальных положений  $\rho_k=|C_k-z_k^*|$ ,  $k=1,2$ , где  $z_k^*$  два разных корня уравнения  $D_{rev}(z, \bar{z})=0$  внутри квадрата  $\Omega_s$ ; они пронумерованы по отношению к ближайшей особой точке  $C_k$ .
- Отклонение восстановленных функций напряжений от идеальных рассчитывается как стандартное отклонение трех массивов  $\Delta M$ ,  $\Delta A$  и  $\Delta P$ , элементы которых представляют разницу между идеальными и восстановленными модулями ( $\Delta M$ ) и аргументами ( $\Delta A$ ) девиаторов напряжений соответственно и средними напряжениями  $\Delta P$  на множестве узловых точек  $Z_m$  ( $m=1\dots N_d$ ), равномерно распределенных в квадрате  $\Omega_s$ , т.е.  $\Delta M_m=|D_{ideal}(Z_m, \bar{Z}_m)|-|D_{rec}(Z_m, \bar{Z}_m)|$ ,  $\Delta A_m=\arg(D_{ideal}(Z_m, \bar{Z}_m))-\arg(D_{rec}(Z_m, \bar{Z}_m))$  и  $\Delta P_m=|P_{ideal}(Z_m, \bar{Z}_m)|-|P_{rec}(Z_m, \bar{Z}_m)|$ ; необходимо отметить, что полевые точки  $z_j$  не совпадают с узлами  $Z_m$ .

Для иллюстрации результатов реконструкции поля напряжений ниже приводится пример, в котором были использованы следующие параметры  $C_1=0.5+0.5i$ ,  $C_2=-0.5-0.3i$ ,  $n=4$ ,  $N=40$ ,  $N_d=100$ . В примере внесенные ошибки были в пределах  $(-5.8^\circ, 12.2^\circ)$  со стандартным отклонением  $stdev=5^\circ$ . Одно из семейств реконструированных траекторий напряжений, углов  $\theta=-0.5\arg(D_{rec}(z, \bar{z}))$ , представлено на Рисунке 6.3, там же показаны особые точки, реконструированные – квадратами, идеальные ( $C_1$  и  $C_2$ ) - кругами. Реконструированные траектории близки к идеальным, поэтому идеальные не показаны на рисунке, в этом примере  $stdev(\Delta A)=23.3^\circ$ . Смещения реконструированных особых точек от идеальных характеризуются расстояниями  $\rho_1=0.071$ ,  $\rho_2=0.04$ . На Рисунках 6.4 и 6.5 представлены изолинии идеальных и расчетных максимальных касательных напряжений  $\tau(z, \bar{z})$  и средних напряжений  $P(z, \bar{z})$ . Последние были получены из

$D_{rec}(z, \bar{z})$  интегрированием уравнений равновесия (в комплексной форме), при этом константа интегрирования опущена (что нужно для сравнения с (6.33), где эта константа отсутствует). Оба рисунка демонстрируют хорошее согласие между идеальными и реконструированными характеристиками полей напряжений. В этом примере,  $stdev(\Delta \mathbf{M})=0.138$ ,  $stdev(\Delta \mathbf{P})=0.15$ , а среднее есть нуль, что было достигнуто благодаря правильному выбору мультипликативной постоянной в реконструированном решении  $D_{rec}(z, \bar{z})$ .

Были протестированы два других типа базисных функций  $R_k$  - полиномы со случайными выбранными комплексными корнями, ( $c_j \in \Omega_s$ ), и полиномы Лежандра,  $R_k(z)=P_k(z)$ , которые имеют корни на вещественной оси. Во всех случаях не было замечено существенной разницы в результатах.

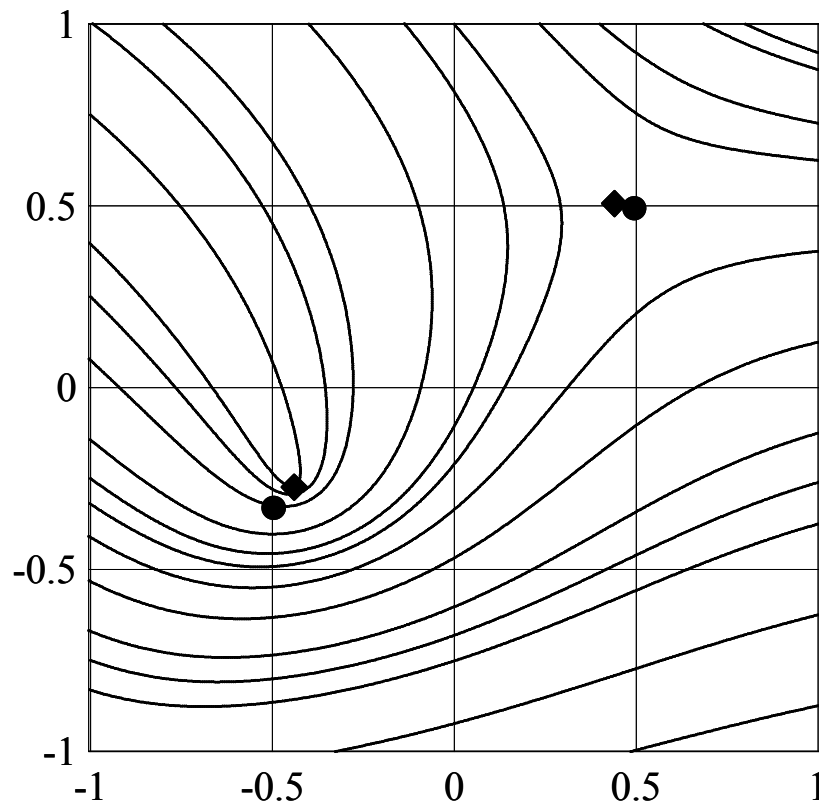


Рисунок 6.3. Траектории напряжений, реконструированные по формуле (6.28), круги - идеальные позиции особых точек, квадраты - реконструированные позиции особых точек.

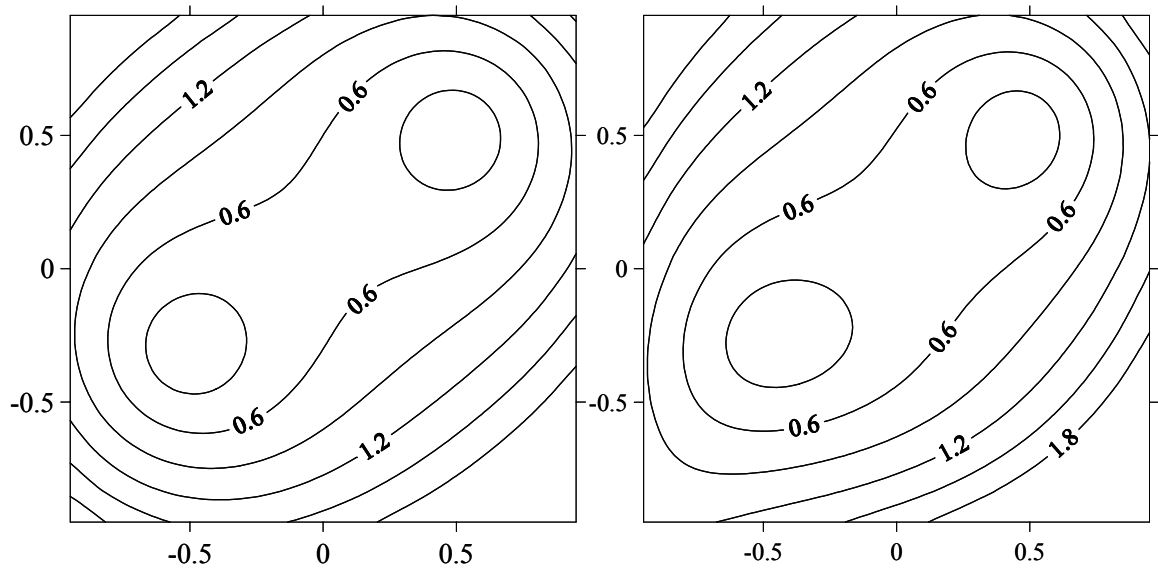


Рисунок 6.4. Изолинии идеальных (слева) и расчетных (справа) максимальных касательных напряжений.

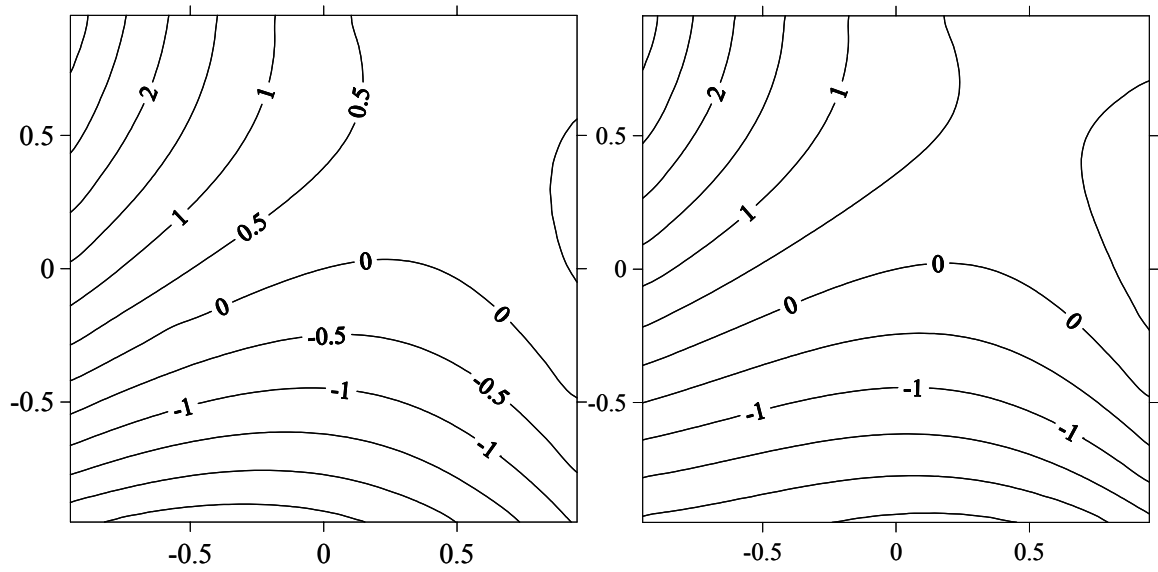


Рисунок 6.5. Изолинии идеальных (слева) и расчетных (справа) средних напряжений.

### 6.7.2. Упругий диск: гармонический аргумент (Вариант 1)

Этот синтетический пример иллюстрирует подход к реконструкции функции напряжения в случае гармонического аргумента. Из-за ошибок, внесенных в данные, численное решение для потенциалов, как и в предыдущем примере ищется в форме (6.9), что приводит к необходимости регуляризации СЛАУ.

Пусть упругий диск единичного радиуса загружен по диаметру двумя равными и противоположно направленными сосредоточенными силами,  $p$ , тогда биголоморфная функция может быть получена из комплексных потенциалов следующим образом [Мусхелишвили, 1966]

$$D_{ideal}(z, \bar{z}) = \frac{2p}{\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{(1 - z^2)^2}. \quad (6.35)$$

Здесь приложенные силы действуют вдоль действительной оси.

Как видно из (6.35), аргумент  $D_{ideal}$  является гармонической функцией поскольку знаменатель дроби в (6.35) голоморфная функция, в то время как его числитель вещественный. Таким образом, любое частное решение  $D_{rec}(z, \bar{z})$ , реконструированное по точно известным дискретным данным, не способно восстановить числитель дроби в (6.35), что в конечном итоге приводит к общему решению в форме (6.28), которое содержит четыре вещественные постоянные.

Далее, в качестве рассматриваемой области  $\Omega_h$  выбирается квадрат, вписанный в единичный круг, т.е.  $\Omega_h = \{z: |\operatorname{Re}(z)| < 2^{-1/2}, |\operatorname{Im}(z)| < 2^{-1/2}\}$ . Изолинии максимальных касательных напряжений и траектории напряжений, полученные из (6.35) в  $\Omega_h$  представлены на Рисунке 6.6, для  $p=1$ . Далее они соответственно называют идеальным модулем и идеальными траекториями напряжений. Дискретные данные находятся из (6.35) по формуле (6.34), в котором узлы  $z_j$  ( $j=1 \dots N$ ) расположены регулярно в квадрате,  $Z_j \in \Omega_h$ ; во всех примерах ниже  $N=100$ . Шум  $\eta_j$  моделируется как и в предыдущем параграфе.

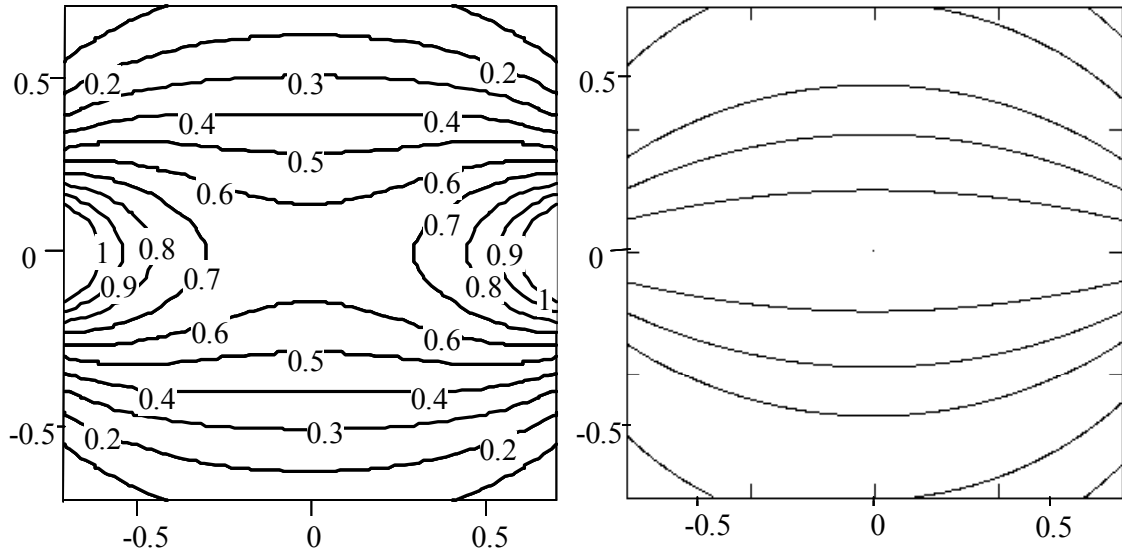


Рисунок 6.6. Идеальные изолинии модуля (слева) и идеальные траектории (справа) в квадрате  $\Omega_h$ .

Хотя отсутствие особых точек в полях траекторий, показанных на Рисунке 6.6, допускает, в принципе, возможность модификации алгоритма на основе (6.30), решение по-прежнему ищем в виде (6.9), полагая в (6.10)  $F_k(z, \bar{z}) = 0$  для всех  $k > n$ . Это приводит к сокращению размерности линейной системы до  $(N+1) \times (2n+3)$ , что достигается путем фиксирования критического значения числа обусловленностей  $CN^* = 10^5$ , как это было описано выше. Как следствие, возникает ограничение на количество функций, используемых для аппроксимации, в этом случае  $4n+2 \leq N$ , т.е.  $n \leq 24$ .

Как и в предыдущем пункте, использовались три типа  $R_k$ : полиномы, полиномы со случайными корнями и полиномы Лежандра. Не было отмечено существенной разницы в результатах, полученных с использованием различных  $R_k(z)$  при  $n \leq 16$  независимо от того был ли введен шум или нет. Однако, анализ показал, что число обусловленностей ( $CN$ ) возрастает с увеличением числа базисных функций (т.е. параметра  $n$ ). Было установлено, что для полиномов это увеличение меньше, чем для двух других типов, используемых, например, для  $n=12$ :  $CN=6 \cdot 10^5$  для полиномов Лежандра,  $CN$  колеблется в диапазоне  $(0.1-33) \cdot 10^3$  для различных многочленов с случайными корнями, тогда как для обыкновенных

полиномов  $CN=51$ . Таким образом далее в этом примере используются  $R_k(z)=z^k$ , что обеспечивает лучшую стабильность в реконструкции функции  $D_{rec}$ .

В результате решения находится многочлен  $\chi_{rec}(z)$ , голоморфный в конечной области  $\Omega_h$ . Аргументы  $\chi_{rec}(z)$  и  $D_{ideal}(z, \bar{z})$  в (6.35) получаются близкими друг к другу (как и должно быть вследствие постановки задачи минимизации), а их модули отличаются, потому что они соответственно являются модулями голоморфной и биголоморфной функций. Как уже упоминалось выше, общее решение зависит от четырех произвольных вещественных постоянных, которые не могут быть определены из исходных данных. Приближенное решение, которое лучше соответствует идеальному, можно рассматривать как частное решение, выбирая коэффициенты  $a_0, \text{Re}(a_1), \text{Im}(a_1), a_2$  в (6.28). Для случая, когда  $a_1=0$  и  $a_2=0$ , получаем решение в виде голоморфной функции  $a_0\chi_{rec}(z)$ . Модуль этой функции представлен на Рисунке 6.7 (слева), он отличается от идеального показанного на Рисунке 6.6 (шум не был введен). Если выбрать коэффициенты  $a_1=0, a_0=a_2=a$ , (что отражает факт того, что дискретные данные были сформированы из некоторой биголоморфной функции типа (6.35)), то решение принимает вид

$$D_{rec}(z, \bar{z}) = a(1 - z\bar{z})\chi_{rec}(z), \quad \chi_{rec}(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k. \quad (6.36)$$

Изолинии  $|D_{rec}(z, \bar{z})|$  показаны на Рисунке 6.7 (справа) для случая отсутствия шума в дискретных данных. Для того чтобы обеспечить лучшую визуальное сравнение идеальных и реконструированных изолиний максимальных касательных напряжений, коэффициент подобран так, что  $mean(D_{ideal})=mean(D_{rec})$  в  $\Omega_h$ .

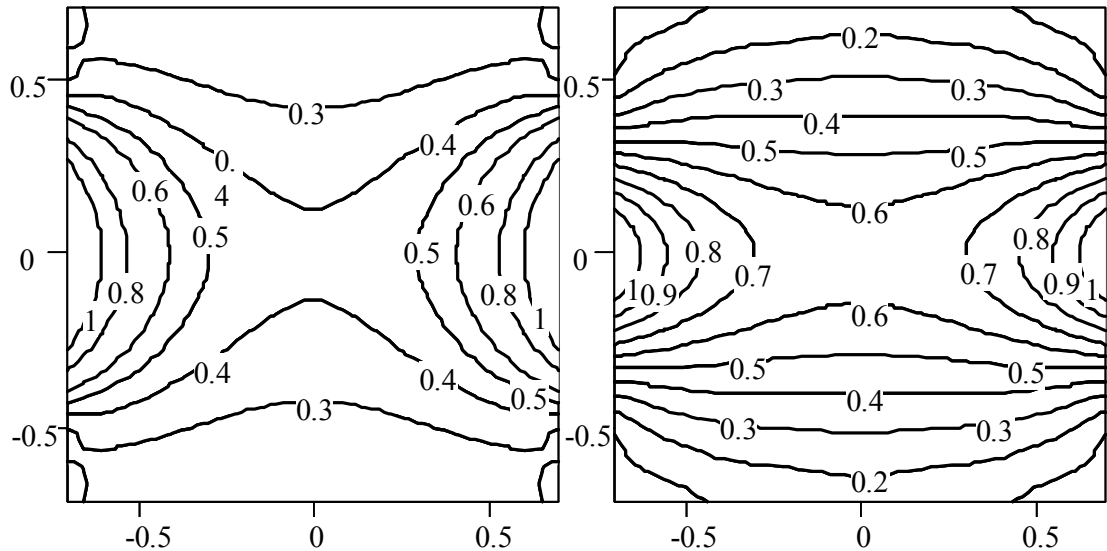


Рисунок 6.7. Изолинии модулей,  $n=12$ , без коррекции (слева) с коррекцией (справа).

Были проанализированы различные наборы шумов, которые вносятся в идеальные данные. Анализ показал, что увеличение степени многочленов с  $n=2$  до  $n=12$  приводит к лучшему согласию между реконструированными и идеальными характеристиками (траекториями напряжений, максимальным касательными напряжениями и средними давлениями). Дальнейшее увеличение не приводит к улучшению результатов, что объясняется потерей избыточности.

### 6.7.3. Восстановление полей напряжений по Варианту 2

#### Данные без шума

Для примера рассматривается идеальная функция девиатора напряжений, построенная по потенциалам, приведенным ниже

$$\Phi'(z) = -1.4 + 1.7z + 1.3z^2 + 1.4z^3, \quad \Psi(z) = -0.8 + 2.1z - 1z^2 + 1.5z^3. \quad (6.37)$$

На основе этих потенциалов данные (главные направления) сгенерированы в 100 случайных точках внутри выбранной области, ограниченной  $-1.5 < x < 2.5$  и  $-2 < y < 2$  как показано на Рисунке 6.8 (слева). Внутри области, показанной на Рисунке 6.8 (справа), существуют 3 неблокирующие изотропные точки  $B$ -типа (где  $\tau_{\max} = 0$ ), они показаны тремя черными точками.

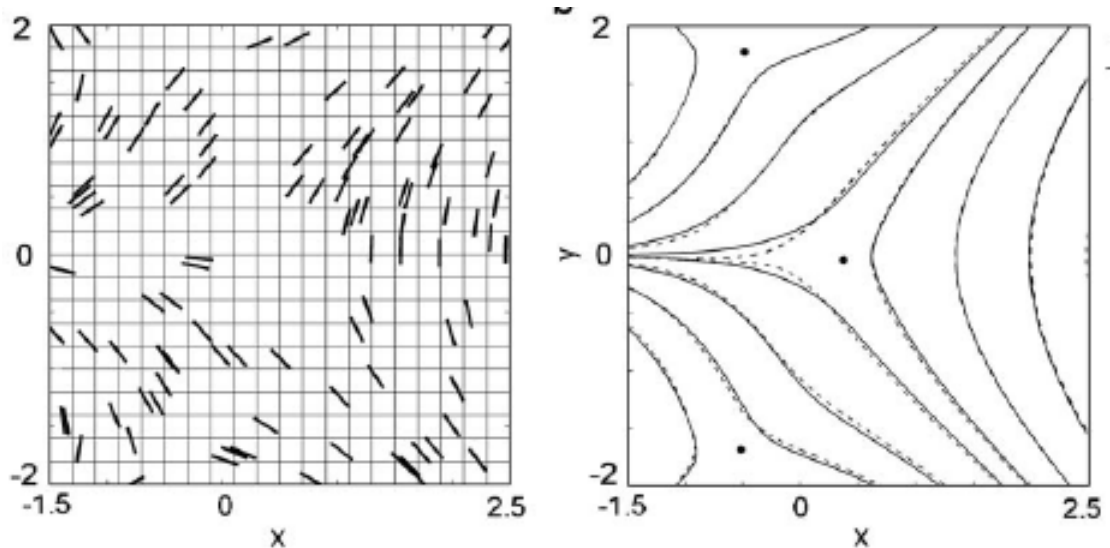


Рисунок 6.8. Слева - 100 дискретных данных и дискретизация. Справа - идеальные и реконструированные траектории напряжений. Особые точки показаны черными точками.

Дискретизация области включает 400 прямоугольных элементов с двумя точками коллокаций на каждой границе между соседними элементами, Рисунок 6.8 (слева).

Система (6.20) состоит из  $s=6182$  уравнений и  $n=3200$  неизвестных. Число обусловленностей системы равно  $CN=6700$ , невязка  $Res=11.1$ . Сравнение идеальных и реконструированных полей траекторий напряжений показано на Рисунке 6.8 (справа). Сравнение идеального и реконструировано полей максимального касательного напряжения дано на Рисунке 6.9. Диапазон максимальных касательных напряжений изменяется от нуля до примерно 240 единиц при средней погрешности в 2.3 единицы; стандартное отклонение ошибки составило 3.4 единицы. Средняя ошибка и ее стандартное отклонение вычисляются в 2500 равномерно распределенных точках.



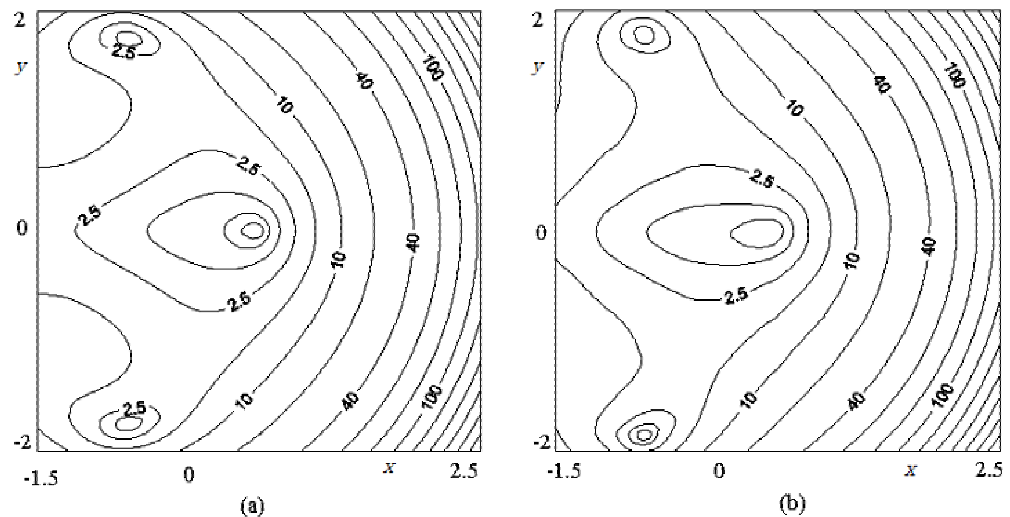


Рисунок 6.9. Изолинии идеальных (слева) и реконструированных (справа) максимальных касательных напряжений.

Как видно из обоих рисунков, наблюдается хорошее согласие между идеальным и реконструированными характеристиками полей напряжений.

### Данные с шумом

В данные предыдущего примера по главным направлениям вводиться абсолютной шум в диапазоне  $\pm 5^\circ$ . Также, как и в предыдущем примере, рассматриваются 400 прямоугольных элементов с 2 точками коллокаций на каждой границе.

Число обусловленностей системы равно  $CN=6400$  и невязка  $Res=23$ . Сравнение идеальных и реконструированных траекторий напряжений показано на Рисунке 6.10 (слева). Очевидно, что даже внесение  $\pm 5^\circ$  шума в идеальные направления главных напряжений не влияет существенно на поле траекторий.

Поля (изолинии) максимального касательного напряжения реконструированных по зашумленным данным отображаются на Рисунке 6.10 (справа). Диапазон идеальных максимальных касательных напряжений лежит в диапазоне 0-240, однако реконструированные напряжения доходят до 259. Средняя ошибка в реконструкции максимального касательного напряжения составляет 2.3 со стандартным отклонением 4.6. Массив ошибок был сформирован путем расчета отклонений идеальных и реконструированных

напряжений в 2500 равномерно распределенных точках. Как видно из Рисунка 6.10, подход основанный на конечных элементах обеспечивает хорошую точность при уровне шума сравнимом с экспериментальными ошибками измерений ориентаций напряжений в земной коре.

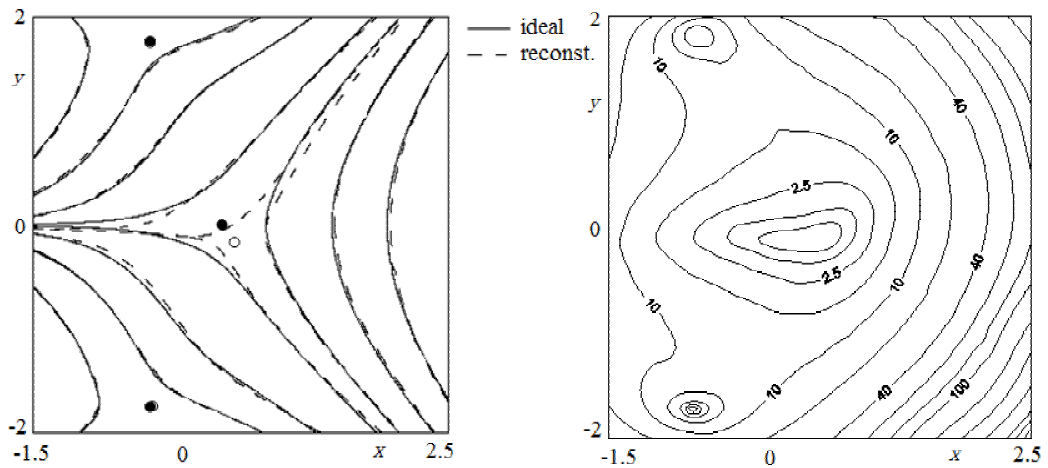


Рисунок 6.10. Слева - реконструкция траекторий напряжений по 100 случайным данным с ошибками  $\pm 5^\circ$  (идеальные – сплошная линия, реконструированные – прерывистая линия), реконструированные особые точки показаны кружками. Справа - рассчитанное поле максимальных касательных напряжений.

### 6.8. Примеры реконструкций полей упругих напряжений по данным фотоупругости

Далее рассматриваются примеры из фотоупругости, где главные направления получаются из картины траекторий напряжений, определенных по изоклинам. Эти данные также содержат ошибки, связанные с обработкой экспериментальных данных и с последующей оцифровкой.

#### 6.8.1. Четырехточечный изгиб фотоупругой балки (Вариант 1)

Поле траекторий, изображенное на Рисунке 6.2, было использовано для генерации дискретных данных для реконструкции полей траекторий напряжений и максимальных касательных напряжений. Для этого координаты точки пересечения двух семейств взаимно ортогональных траекторий были оцифрованы

с помощью программного пакета Surfer непосредственно с экрана. После того, главные направления были получены как хорды дуг, соединяющих соседние точки, лежащие на траекториях, представленных сплошными линиями. Таким образом возникают два источника ошибок из-за оцифровки и из-за замены касательных хордами.

Рассматриваемая область представляет собой прямоугольник  $|x| < 1$ ,  $|y| < 1.057$ . Входные данные представлены на Рисунке 6.11 (слева), на котором показаны 73 сегментов, представляющих главные направления. Данные сильно неоднородны и наличие изотропных точек из рисунка не очевидно.

На Рисунке 6.11 (справа) показаны реконструированные траектории напряжений и особые точки по методике, описанной выше для  $n=4$ . Использовались следующие функции  $R_k(z)$

$$R_k(z) = (z - z_{pole})^{-2} z^k, \quad z_{pole} = 0.2 + 1.4i. \quad (6.38)$$

Весовая функция в (6.38) была введена для того, чтобы учесть существование особой точки  $C$ , где сосредоточенная сила приложена к границе, см. Рисунок 6.2. Хотя точка приложения этой силы известна точно, ее положение в (6.38) было заведомо выбрано приблизительно, что было сделано для того, чтобы проверить насколько существенно это повлияет на результаты реконструкции.

Сравнение Рисунка 6.11 (справа) и Рисунка 6.2 демонстрирует хорошую точность как в определении особых точек, так и в реконструкции траектории напряжений в сравнении с фотоупругим методом. Было установлено, что в этом случае реконструкция не сильно чувствительна к выбору приближения для особой точки  $C$ -типа. Однако, введение весовой функции в (31) весьма желательно, так как позволяет восстановить траектории напряжений более точно, чем в случае без введения весовой функции. Следует отметить, что увеличение числа аппроксимирующих функций, используемых в реконструкции, без введения веса, улучшает результаты, например, для  $n=10$  траектории напряжений выглядят аналогично приведенным на Рисунке 6.11 (справа). Однако, дальнейшее

увеличение  $n$  приводит к потере избыточности, что влияет на результаты и не приводит к видимому улучшению результатов.

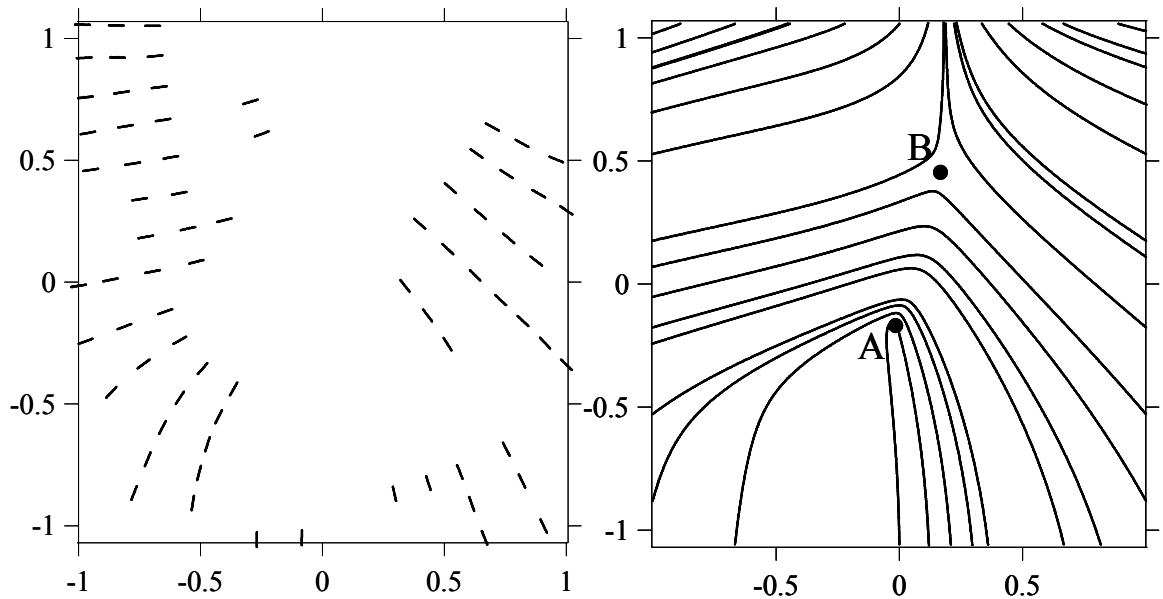


Рисунок 6.11. Реконструкция траектории напряжений и изотропных точек в фотоупругом примере при  $n=4$ : слева - входные данные, 73 точки без указаний на особые точки, справа - реконструированные траектории и особые точки A и B

Максимальные касательные напряжения представлены на Рисунке 6.12. Рисунок 6.12a показывает фрагмент картины полос, наблюдаемой в фотоупругости. Этот фрагмент был извлечен из полной картины полос, представленных в Frocht (1941), он приблизительно соответствует области, для которой выполнялась реконструкция траекторий напряжений, т.е. области, показанной на Рисунке 6.2. Рисунок 6.12b демонстрирует результаты реконструкции модуля функции  $D(z, \bar{z})$ . Изолинии, представленные на этом рисунке, были проведены с интервалом в 0.15 для того чтобы черные области в серединах обоих рисунках были приблизительно одинаковых размеров.

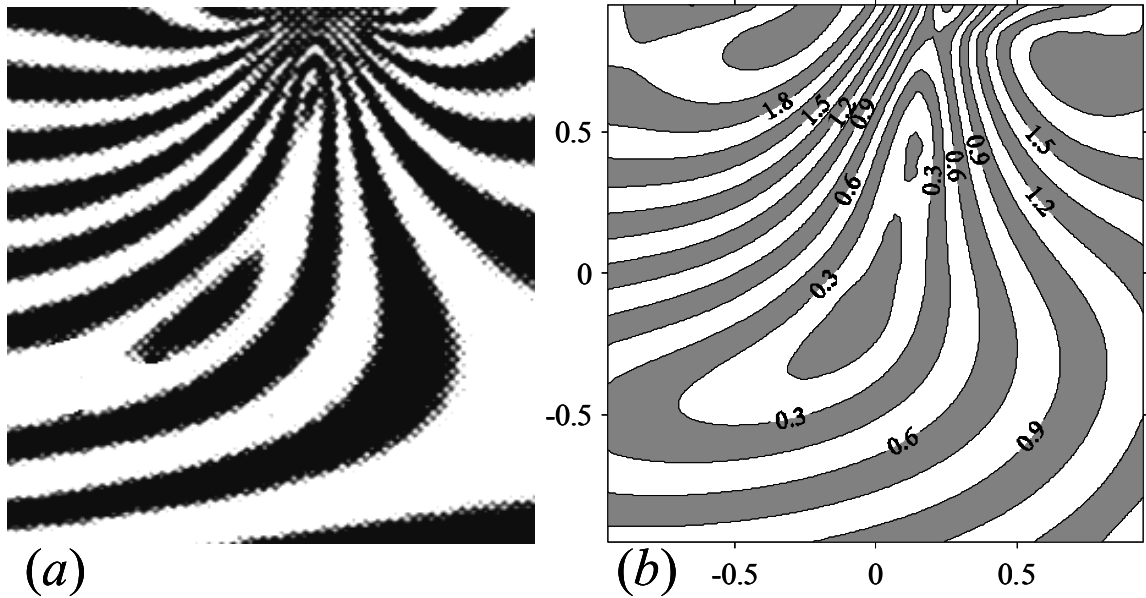


Рисунок 6.12. Реконструкция максимальных касательных напряжений: (а) - фрагмент картины полос из [Frocht, 1941]; (б) - изолинии реконструированного модуля функции напряжения  $D$ .

### 6.8.2. Четырехточечный изгиб фотоупругой балки (Вариант 2)

Используются те же данные, что и в предыдущем примере, чтобы сравнить оба подхода. Для лучшего визуального сравнения из области, показанной на Рисунке 6.2, была выделена подобласть в которой проводился расчет, она показана на Рисунке 6.13а. Особая точка  $C$  (возникшая из-за сосредоточенной силы) лежит вне границы расчетной области.

Расчетная область разбита на 400 квадратных элементов (20 на 20), с двумя точками коллокации на границе между элементами. Система состоит из  $s=6155$  уравнений относительно  $n=3200$  неизвестных, число обусловленностей матрицы  $CN=14756$ , невязка  $Res=15.9$ .

Расчетное поле траекторий напряжений показано на Рисунке 6.13б вместе с данными. Можно видеть, что реконструированные траектории находятся в хорошем согласии с экспериментальными.

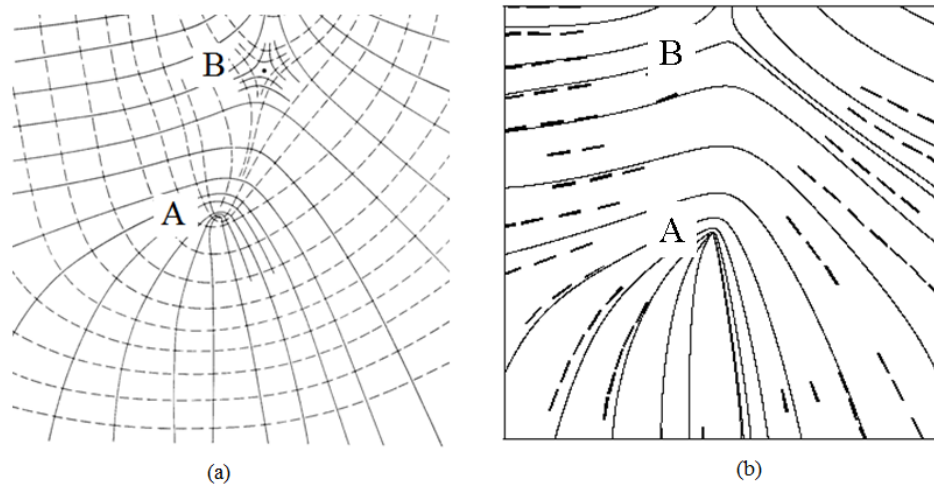


Рисунок 6.13. (a) - два семейства траекторий напряжений при 4-точечном изгибе, (b) - реконструированные траектории максимального главного напряжения по 73 данным (короткие отрезки).

Сравнение интерференционной картины, наблюдаемой в фотоупругом эксперименте, с реконструкцией поля максимальных касательных напряжений, полученным с помощью предложенного метода, приведено на Рисунке 6.14.

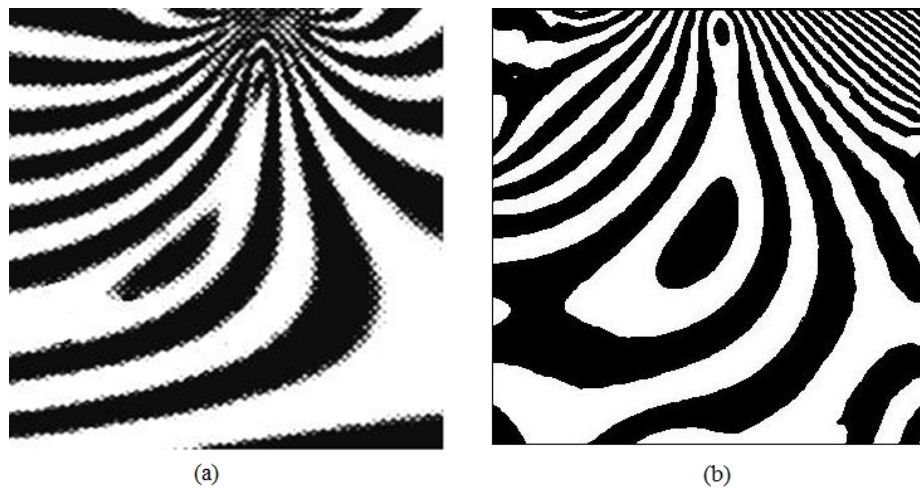


Рисунок 6.14. Интерференционные картины полос: (a) – экспериментальная из [Frocht, 1941], (b) – реконструированная.

Точные положения реконструированных особых точек не определялись, но как видно из полей траектории напряжений, а также по интерференционной

картине полос, они находятся в хорошем согласии с точками, показанными на Рисунке 6.12а.

Результаты расчетов для более мелких сеток приведены на Рисунке 6.15. Надо отметить, что поскольку особые точки расположены близко друг к другу, то в случае, когда используется небольшое число элементов, можно обнаружить лишь одну особую точку в одном из элементов. Это также связано с отсутствием достаточного числа данных, которые бы четко указывали на существование двух особых точек. Однако с увеличением числа элементов результаты существенно улучшаются.

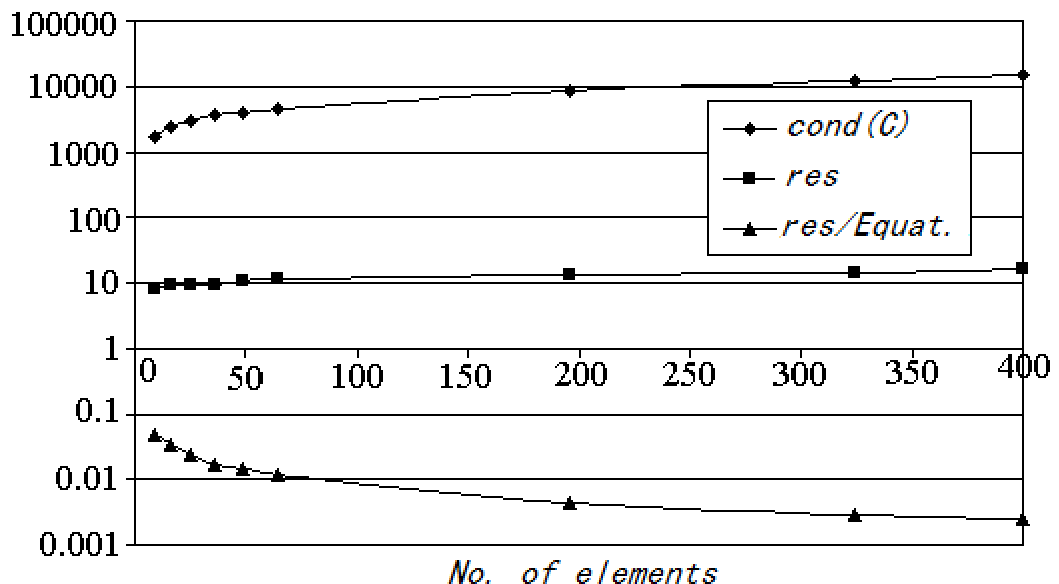


Рисунок 6.15. Уточнение результатов для экспериментов на 4-точечный изгиб, включая число обусловленности ( $cond$ ), невязку ( $res$ ) и невязку, поделенную на число уравнений ( $res/Equat.$ ).

### 6.8.3. Круговое кольцо под сосредоточенной нагрузкой

Конечно-элементный подход (Вариант 2) позволяет рассматривать более сложные области, это иллюстрируется на примере данных фотоупругого эксперимента для кольца, нагруженного двумя радиальными сосредоточенными силами [Frocht, 1941]. Остальные границы свободны от напряжений. Картина траекторий напряжений (Рисунок 6.16) была оцифрована, и из нее было выбрано

476 точек в которых вычислены главные направления. Это было сделано вручную (с помощью специальной программы, разработанной в MATLAB для оцифровки координат с монитора мышью, [Irsa, Galybin, 2009]), что вносит некоторые ошибки в дополнение к тем, которые уже были внесены в фотоупругие данные при определении траектории напряжений из интерференционной картины. Этот пример отличается от аналогичного примера, приведенного в [Irsa, Galybin, 2009], здесь добавлены дополнительные данные по главным направления на границах, которые являются свободными от напряжений. Эти дополнительные данные значительно увеличили точность реконструкции напряжений вблизи границы.

Расчетная области разбита на 360 элементов, построенных по полярной сетке, так что 8 элементов располагаются вдоль радиуса и 45 элементов расположены по окружности. Вводятся две точки коллокаций на границах между элементами. Дискретизация показана на Рисунке 6.16б. СЛАУ состоит из  $s=5877$  уравнений и  $n=2880$  неизвестных. Число обусловленностей матрицы  $CN=4500$  и невязка  $Res=255$ .

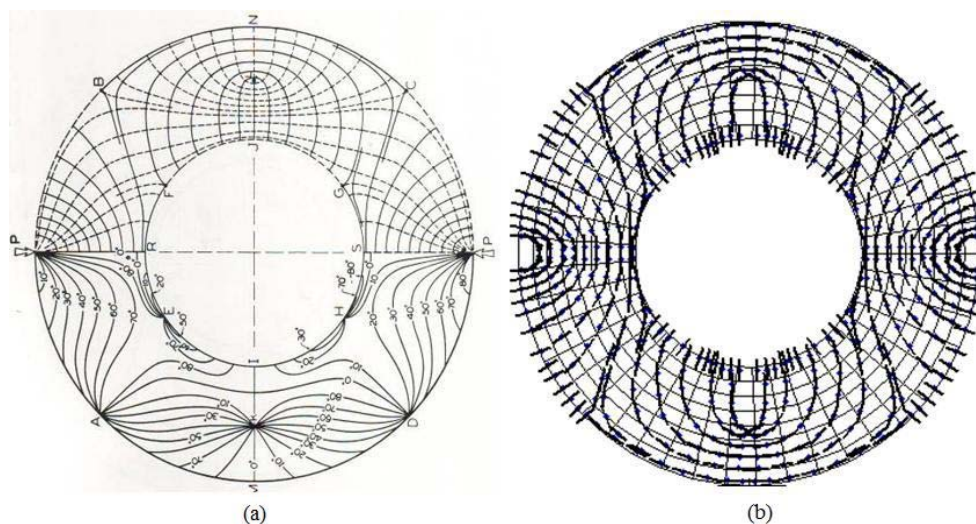


Рисунок 6.16. Траектории напряжений и изоклины из [Frocht, 1941] - (a), дискретизация и данные - (b).

Реконструированные максимальные касательные напряжения показаны на Рисунке 6.17b вместе с экспериментальной интерференционной картиной полос (Рисунок 6.17a), взятой из Frocht (1941). Из рисунка, в частности, видно, что



подход позволяет реконструировать все особые точки с удовлетворительной точностью.

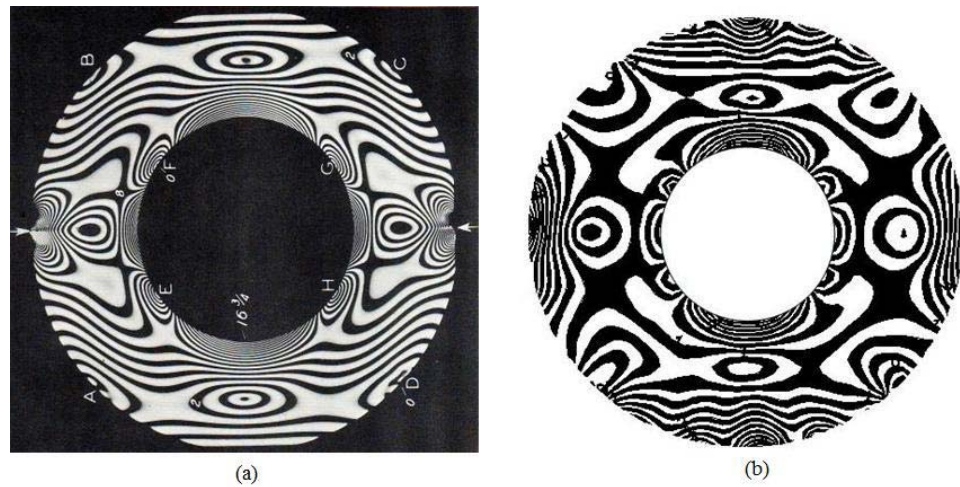


Рисунок 6.17. Интерференционная картина изохром из эксперимента [Frocht, 1941] - (a), и ее реконструкция - (b).

### 6.9. *Заключительные замечания и выводы по главе*

Примеры, представленные в данной главе, показывают, что поля упругих напряжений могут быть восстановлены с удовлетворительной точностью по дискретным данным о главных направлениях. Предлагаемый подход основан на подходе Трефтца и требует минимизации определенного функционала, который строится на отклонениях экспериментальных ориентаций главных напряжений от предполагаемых, рассчитанных из общего решения теории плоскости упругости, представленного комплексными потенциалами Колосова-Мусхелишвили. Этот подход позволяет провести пересмотр методов, используемых в фотоупругости при нахождения главных напряжений по их траекториям. Показано, что эта операция может быть выполнена без интегрирования уравнений равновесия, как это обычно делается.

Конечно-элементный вариант метода предполагает разбиение области на элементы и использует кусочно-полиномиальные аппроксимации комплексных потенциалов, что позволяет отнести его к гибриднему методу МКЭ-Трефтца.

Представляется, что гибридный вариант имеет некоторые преимущества по сравнению с использованием глобальных аппроксимаций, в частности, он дает лучшие результаты при обработке данных по четырехточечному изгибу фотоупругой балки, даже без введения весовой функции для лучшего учета сосредоточенной нагрузки, действующей на границе. Кроме того, он более устойчив при работе с зашумленными данными, что особенно важно для исследования напряжений в тектонических плитах. В работе [Irsa, Galybin, 2010] приведены результаты исследования эффективности гибридного подхода МКЭ-Трефтца, которые показывают, что слабая чувствительность к изменениям расчетной сетки является для него типичной. Вместе с тем недостаток исходных данных является существенным для точности метода. Так, на простом примере, было показано, что даже при низкой невязке реконструированное поле траекторий может существенно отличаться от идеального. Если, например, выбрать 10 случайно расположенных данных в поле напряжений, заданном потенциалами в виде некоторых многочленов третьей степени, то реконструированные траектории напряжений проходят (весьма точно) через все приведенные данные, а также определяется особая точка, однако общая картина реконструированных траекторий напряжений существенно отличается от идеальной. Важным представляется вопрос об выборе оптимального числа точек коллокаций. Анализ численных экспериментов показал, что повышение их числа не обязательно ухудшает результаты, тем не менее, лучше сохранять число точек коллокаций как можно более низким из-за вычислительных ограничений, связанных с увеличением размерности системы. Практический интерес представляет вопрос, выгоднее ли с вычислительной точки зрения увеличивать порядок аппроксимации внутри элемента или количество элементов при минимальной степени аппроксимации. Как показывают численные эксперименты, для рассмотренных выше примеров, при использовании линейной аппроксимации для потенциалов, можно получить довольно точные результаты. Сгущение сетки в этой ситуации улучшает точность, так как ошибка (невязка, отнесенная к числу уравнений) уменьшается с ростом числа элементов, однако, следует отметить, что

при этом происходит рост числа обусловленностей разрешающей системы. Так, в примере для квадратной области, при увеличении числа элементов в 3 раза от  $7^2$  до  $21^2$ ,  $CN$  возрастает на порядок, в примере, достигая  $10^4$ , что позволяет заключить, что дальнейшее увеличение числа элементов может привести к необходимости использовать регуляризацию или итерационные алгоритмы (в случае разреженных матриц).

Применение предложенной методики для проблемы реконструкции тектонических напряжений в земной коре рассмотрено в последующих главах. Представляется, что конечно-элементный подход позволяет рассматривать сложные геометрии и является наиболее перспективным для анализа напряжений в земной коре.

## ГЛАВА 7. РЕКОНСТРУКЦИИ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В данной главе приведены примеры реконструкций полей напряжений в некоторых районах Земли по данным об ориентациях главных напряжений, хранящихся в мировой базе данных по напряжениям WSM (издания 2003-2008 гг.), и примеры реконструкций палеонапряжений. Используются различные подходы, как основанные на краевой задаче, так и (в основном) на задаче оптимизации по дискретным данным. В последнем случае используются полиномиальные и конечно-элементные аппроксимации.

### *7.1. Реконструкция траекторий главных напряжений в Западной Европе*

В некоторых регионах Земли имеется плотная сеть наблюдений ориентаций главных напряжений, что делает целесообразным использование методов реконструкции напряжений, описанных в предыдущей главе. К таким регионам, например, относятся Северо-Американская и Западно-Европейская платформы. В этом параграфе приводятся реконструкции главных напряжений для последней по материалам работы [Мухамедиев, Галыбин, 2001], где можно найти более детальное обсуждение геодинамики.

Реконструкции проводились по методике полиномиальной аппроксимации (Вариант 1) для данных разного качества, которые показывают азимуты осей максимального сжатия в горизонтальном направлении -  $S_{H\_max}$ . По сравнению с другими регионами Земли количество данных высокого качества (А-качество) в исследуемом регионе достаточно высоко, в прямоугольнике между (-10° до 20°) западной долготы и (40° и 60°) северной широты, в базе данных 2003 года найдено 84 точки. Такое количество данных позволяет, в принципе, использовать многочлены до 20 степени в качестве базисных функций. Однако разброс данных наилучшего качества составляет до  $\pm 15^\circ$ , что делает аппроксимацию многочленами высоких степеней неэффективной. Более того, уже при использовании многочленов нулевой степени для комплексных потенциалов (что

приводит к отысканию только одной комплексной константы для функции девиатора напряжений) отклонение среднего реконструированного угла ориентации главных напряжений от данных качества А-С составляет  $31^{\circ}$ - $32^{\circ}$  со средним отклонением порядка  $25^{\circ}$ - $26^{\circ}$ , что практически находится в рамках вариаций исходных данных с качеством А и лучше, чем с качеством В-С. Использование линейных или квадратичных многочленов не приводит к заметному увеличению точности, более того уже при квадратичных многочленах в картине траекторий главных напряжений появляются особые (изотропные) точки, что не характерно для напряженного состояния Западно-Европейская платформы.

На Рисунках 7.1 показаны результаты реконструкции поля траекторий главного напряжения (ТГН)  $S_{H\_max}$  для литосферы Западно-Европейской платформы при разных исходных данных. На Рисунке 7.1a приведены экспериментальные данные А-качества (число данных  $N=84$ ) и прямолинейные траектории, отвечающие аппроксимации многочленами нулевой степени. На Рисунках 7.1(b,c,d) изображены численно рассчитанные траектории  $S_{H\_max}$ , причем для Рисунках 7.1(b,d) выбраны данные А-В качества ( $N=335$ ), а для Рисунка 7.1c качество данных А-С ( $N=1137$ ). Используются линейные аппроксимации в случаях, представленных на Рисунках 7.1(b,c) и кубические многочлены для случая, показанного на Рисунке 7.1d. Результаты демонстрируют однородность поля траекторий главных напряжений в Западной Европе со средним азимутом наклона ТГН около  $60^{\circ}$ .

Для сравнения приведем результаты расчетов по моделированию поля напряжений в Европе по МКЭ, выполненному в [Gölke, Coblenz, 1996]. В этой работе была решена двумерная задача теории упругости с различными наборами граничных условий. Результаты двух моделей, в которых принимались нулевые смещения на восточной и южной границах области, показаны на Рисунке 7.2. В первой модели сила push была приложена к линии Срединно-Атлантического хребта (Рисунок 7.2a). Во второй модели эта сила рассматривалась как

распределенная и рассчитывалась на основе градиента потенциальной энергии в охлаждающейся океанической литосфере (Рисунок 7.2б).

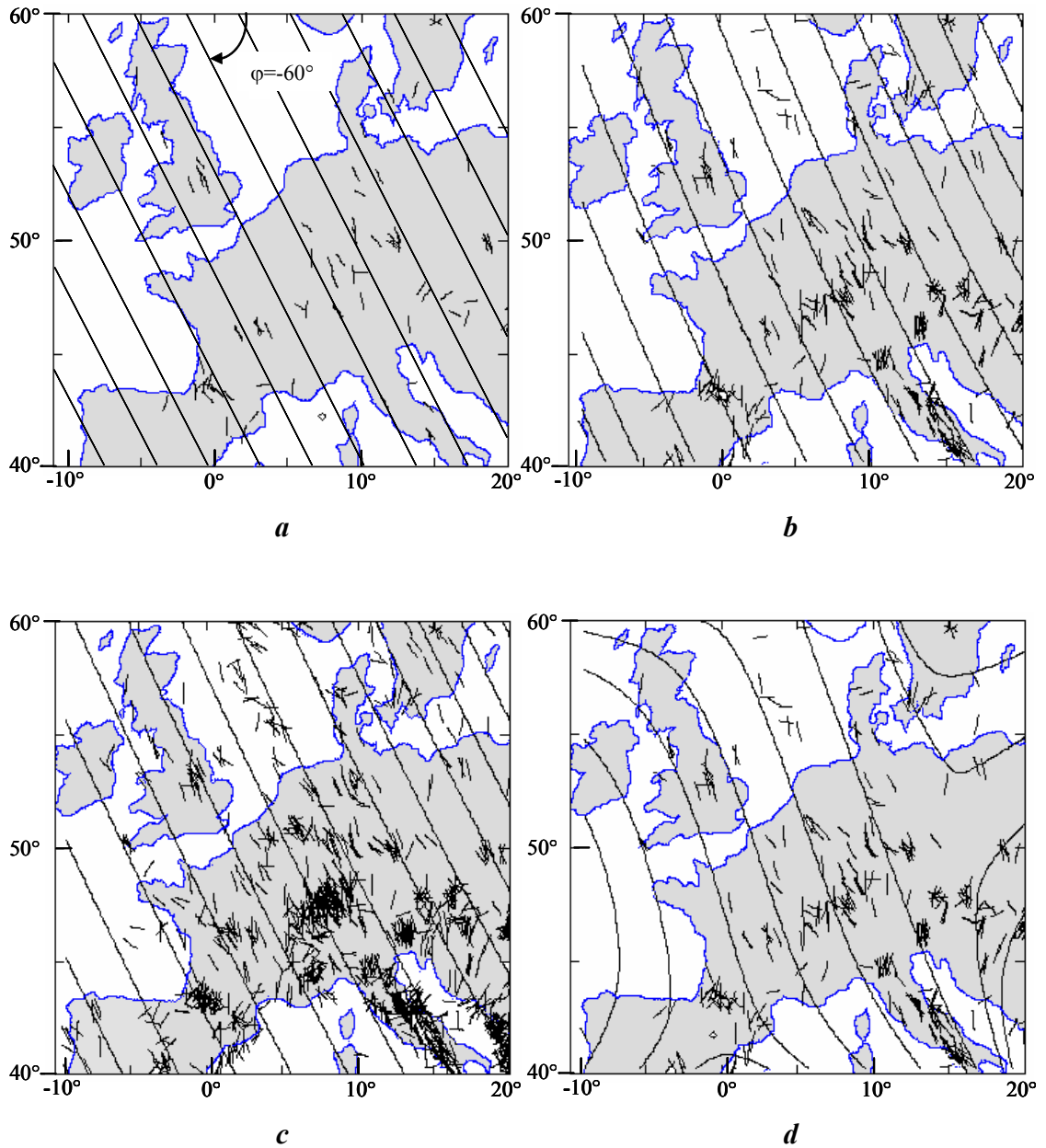


Рисунок 7.1. Реконструкция поля ТГН в литосфере Западной Европы для различных наборов исходных дискретных данных об ориентации главных напряжений  $S_{H\_max}$ , показанных короткими отрезками. Траектории показаны сплошными линиями.

Поля напряжений, рассчитанные в [Gölke, Coblenz, 1996], обладают той же самой однородной ориентацией напряжения (Рисунок 7.2), поэтому их решения могут рассматриваться как частные решения, соответствующие общему решению,

показанному на Рисунке 7.1. Произвольные постоянные в их решении фактически фиксируются выбором того или иного типа граничных условий. Силы push в статье [Gölke, Coblenz, 1996] действуют в направлении относительного движения плиты. Если бы эти силы были ортогональны к криволинейной траектории рифта, то интенсивность напряжений в области была бы меньше.

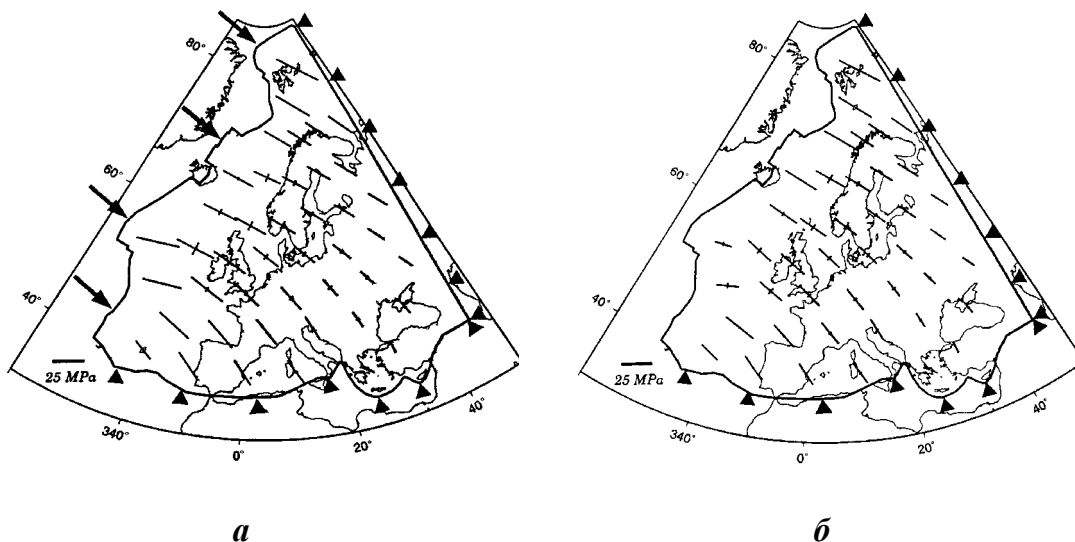


Рисунок 7.2. Ориентации напряжений, рассчитанных для Европы в работе [Gölke, Coblenz, 1996] в рамках моделей с защемленными южной и восточной границами: а – сила push приложена на линии хребта; б – распределенная сила push.

## 7.2. Моделирование полей упругих палеонапряжений по данным натуральных индикаторов

### 7.2.1. Подходы к реконструкции палеонапряжений

В качестве одной из главных задач палеогеодинамики обычно рассматривается реконструкция кинематики литосферных плит в геологическом прошлом [Зоненшайн, Кузьмин, 1993]. Относительные движения плит определяются по линейным магнитным аномалиям, по простиранию трансформных разломов, с помощью измерения остаточной намагниченности горных пород, по данным о внутриплитном магматизме, отражающем

воздействие горячих точек, и по другим геолого-геофизическим данным. При этом собственно палеодинамика, т.е. движущие силы и внутриплитные напряжения, действовавшие в прошлые эпохи, выпадают из рассмотрения.

С другой стороны, палеонапряжения в земной коре можно реконструировать на основе анализа различных натуральных индикаторов: особенностей залегания и строения геологических тел, наблюдаемой геометрии и предполагаемой кинематики структур разрушения и др., смотри, например, [Расцветаев, 1987; Amadei, Stephanson, 1997; Белоусов и др., 1997a; Fry, 2001]. Чаще всего натуральные индикаторы позволяют определять только ориентацию главных осей палеонапряжений. Получаемые результаты в ряде случаев дают возможность качественно реконструировать динамические обстановки в терминах ориентации тектонических сил в исследуемом регионе и их относительной важности, выдвигать различные сценарии хронологии событий, а также предлагать упрощенные модели развития региона. Соответствующая литература весьма обширна, что не позволяет выделить какие-либо из работ. В то же время, эти результаты пока не используются систематически в палеогеодинамических исследованиях из-за их неполноты. Действительно, реконструируемые элементы палеонапряжений дискретно и весьма нерегулярно распределены по пространству и, что важнее, отсутствует информация о величинах палеонапряжений (хотя бы относительных). Это обстоятельство зачастую приводит к мнению, что построение траекторий главных палеонапряжений (ТГПН) различными методами [Hansen, Mount, 1990; Lee, Angelier, 1994] является предельно достижимым результатом на пути определения полей палеонапряжений по ориентации их осей, например, [Zanchi et al., 2002].

В связи с отмеченным важным представляется разработать такой подход, который по данным натуральных индикаторов может поставить максимально возможные сведения о реконструируемых полях палеонапряжений. Ясно, что вряд ли возможно достоверным образом теоретически смоделировать поле полного тензора палеонапряжений. Это связано с тем, что значительная часть информации о геофизических полях, влиявших в прошлом на напряженное



состояние, безвозвратно утеряна. Поэтому и традиционные методы механики сплошной среды, ориентированные на определение полного тензора напряжений, в данном случае, наверное, неприменимы. Здесь использован подход, описанный выше, который позволяет реконструировать поля палеонапряжений по исходным дискретным горизонтальным ориентациям осей в упругой литосфере. Экспериментальные данные об осях палеонапряжений используются непосредственно как входная информация. Подход иллюстрируется на примере реконструкции эволюции полей палеонапряжений в четырех регионах, примыкающих к зоне конвергенции Аравийской и Евразийской плит.

### **7.2.2. Требования к интерпретации индикаторов палеонапряжений**

Для корректности палеореконструкций с помощью предлагаемого подхода необходимы:

1. Возможность производить пространственные выборки индикаторов одновозрастных палеонапряжений;
2. Корректная интерпретация выбранной одновозрастной совокупности индикаторов, гарантирующая выполнение уравнений равновесия среды.

Краткий комментарий к выдвинутым требованиям состоит в следующем. Под одновозрастными палеонапряжениями понимаются те, которые относятся к единой фазе тектонического развития, характеризующейся слабо изменяющимся региональным напряженным состоянием. Для того, чтобы расчетные поля палеонапряжений эффективно использовались в палеогеодинамических реконструкциях, желательна не только относительная, но и надежная абсолютная временная привязка используемой совокупности индикаторов. Второе из выдвинутых требований также является вполне очевидным: невозможность удовлетворить условиям равновесия влечет невозможность восстановить поле палеонапряжений в литосфере любой реологии и означает, что по натурным индикаторам реконструировались характеристики, не имеющие отношения к напряженному состоянию, см подробнее в [Мухамедиев, 1993; Mukhamediev,

Brady, 2002]. Важно, что не всякий способ инверсии данных о натуральных индикаторах позволяет судить о реальных полях палеонапряжений.

В настоящей работе в качестве натурального индикатора палеонапряжений использована трещиноватость осадочных горных пород. При реконструкции палеонапряжений на основе модели зарождения первичных сопряженных систем трещин в результате локализации пластических деформаций в литифицирующихся осадках [Белоусов, Мухамедиев, 1991; Белоусов и др., 1997а] отмеченные выше требования выполняются. Первое требование обеспечено тем, что направления первичной трещиноватости, по рисунку которой реконструируются оси  $S_{H\_max}$ , закладываются в известный период времени (при диагенезе осадков). Выполнение второго требования следует из того факта, что локально реконструируются лишь главные оси палеонапряжений. Если даже направления этих осей известны в каждой точке, то специальным выбором величин напряжений среду можно уравновесить [Мухамедиев, 1991].

Методические вопросы определения систем трещин по совокупности локальных замеров трещиноватости, выделения первичных и вторичных систем трещин, определения осей палеонапряжений и т.д. подробно рассмотрены в ряде работ [Белоусов и др., 1997а; Грачев, Мухамедиев, 2000], здесь они не обсуждаются.

### **7.2.3. Поля палеонапряжений в регионах, примыкающих к зоне конвергенции Аравийской и Евразийской плит**

Предложенный метод применен для реконструкции эволюции палеонапряжений в 4-х регионах, примыкающих к зоне конвергенции Аравийской и Евразийской плит, Рисунок 7.3. В этих регионах трещиноватость изучена примерно в 500 точках наблюдения (ТН). В каждой ТН замерялись элементы залегания 100 трещин внутри одного осадочного слоя и определялись оси палеонапряжений соответствующего возраста. Для реконструкции новейших палеонапряжений было использовано около 300 данных. Они заложены в

осадочных горных породах различного литологического состава – песчаниках, известняках и др.

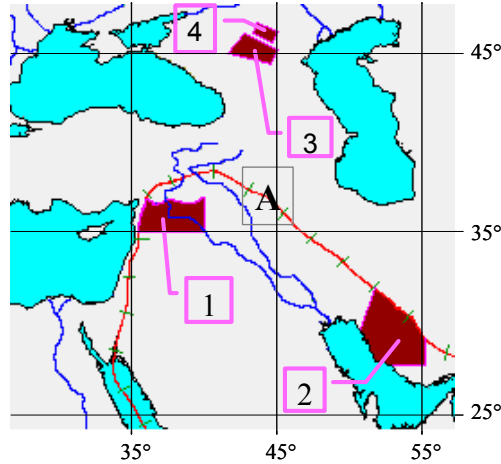


Рисунок 7.3. Регионы 1-4, для которых выполнялись реконструкции палеонапряжений.

Для каждого региона были построены розы-диаграммы осей одновозрастных палеонапряжений с учетом числа точек наблюдений, подробнее смотри [Мухамедиев и др., 2005а; Мухамедиев и др., 2005б]. Результаты сведены в компьютерную базу данных, которая содержит, к настоящему времени, информацию по более чем 250,000 замеров индивидуальных трещин, не только по указанным на Рисунке 7.3 регионам, но и в других областях (описание базы данных подробно приведено в [Белоусов и др., 1997а]). Данные по ориентациям, отсортированным по возрасту, использованы далее для моделирования в качестве входной информации.

Ниже приводятся результаты реконструкции полей палеонапряжений в каждом из регионов 1-4. Краткие сведения о структурных планах этих регионов приводятся, в основном, в соответствии с обобщающей монографией [Хаин, 2001]. Для всех 4-х регионов и для всех рассмотренных этапов развития построены поля траекторий  $S_{H,max}$ , а также карты изолиний нормализованных значений максимальных касательных напряжений  $\tau_{max}$  и масштабированных средних напряжений  $\tilde{P}$ :

$$\frac{1}{2}(S_{H,max} - S_{H,min}) = a\tau_{max}, \quad \frac{1}{2}(S_{H,max} + S_{H,min}) = a\tilde{P} + b, \quad a > 0. \quad (7.1)$$

На всех рисунках возраст полей палеонапряжений уменьшается по направлению сверху вниз. В первых колонках всех рисунков приведены: возраст; число точек наблюдения (ТН); параметры базисных многочленов:  $n$  – степень многочлена для потенциала  $\Psi(z)$ , степень многочлена  $(n+\varepsilon)$  для  $\Phi(z)$  (где  $\varepsilon=0$  или 1); значения среднего ( $\delta$ ) и стандартного отклонения ( $\sigma$ ) совокупности величин  $\delta_j$ , заданной соотношением:

$$\delta_j = \left| \theta_j^{data} - \theta_j^{rec} \right|, \quad j = 1 \dots N, \quad (7.2)$$

где  $\theta_j^{data}, \theta_j^{rec}$  – соответственно измеренные и реконструированные главные направления,  $N$  – число ТН в исследуемом регионе. Следует отметить, что число ТН невелико, что ограничивает аппроксимации комплексных потенциалов линейными или квадратичными многочленами.

При анализе эволюции палеонапряжений следует учесть, что, вследствие неоднозначности решения, изолинии полей  $\tau_{max}$  и  $P$  пронумерованы в условных единицах, соответственно возрасту. Эти единицы не следует сравнивать между собой для разновозрастных полей палеонапряжений.

Подробное обсуждение палеогеодинамики регионов, основанное на полученных результатах, не является целью данной работы. Здесь поля палеонапряжений приводятся в качестве иллюстрации возможностей предлагаемого метода и сопровождаются минимальными комментариями. Более подробное описание дано в статье [Мухамедиев и др., 2005б].

### **Регион №1. Северная часть Аравийской платформы (Алеппское поднятие)**

В пределах данного региона трещиноватость новейших осадочных горных была изучена в 53 ТН, расположенных, в основном, в известняках [Белоусов и др., 2003].

Результаты реконструкции полей новейших палеонапряжений (Рисунок 7.4) позволили установить следующие закономерности в их эволюции. Траектории, начиная с конца олигоцена-начала миоцена, разворачивались по часовой стрелке от ЗСЗ до СВ направления, которое они приобрели в плиоцене. В течение этого

же периода развития поле максимального касательного напряжения характеризовалось непрерывным смещением минимума  $\tau_{\max}$  с востока на запад. Изолинии средних напряжений изменились по простиранию с субмеридиональных на субширотные.

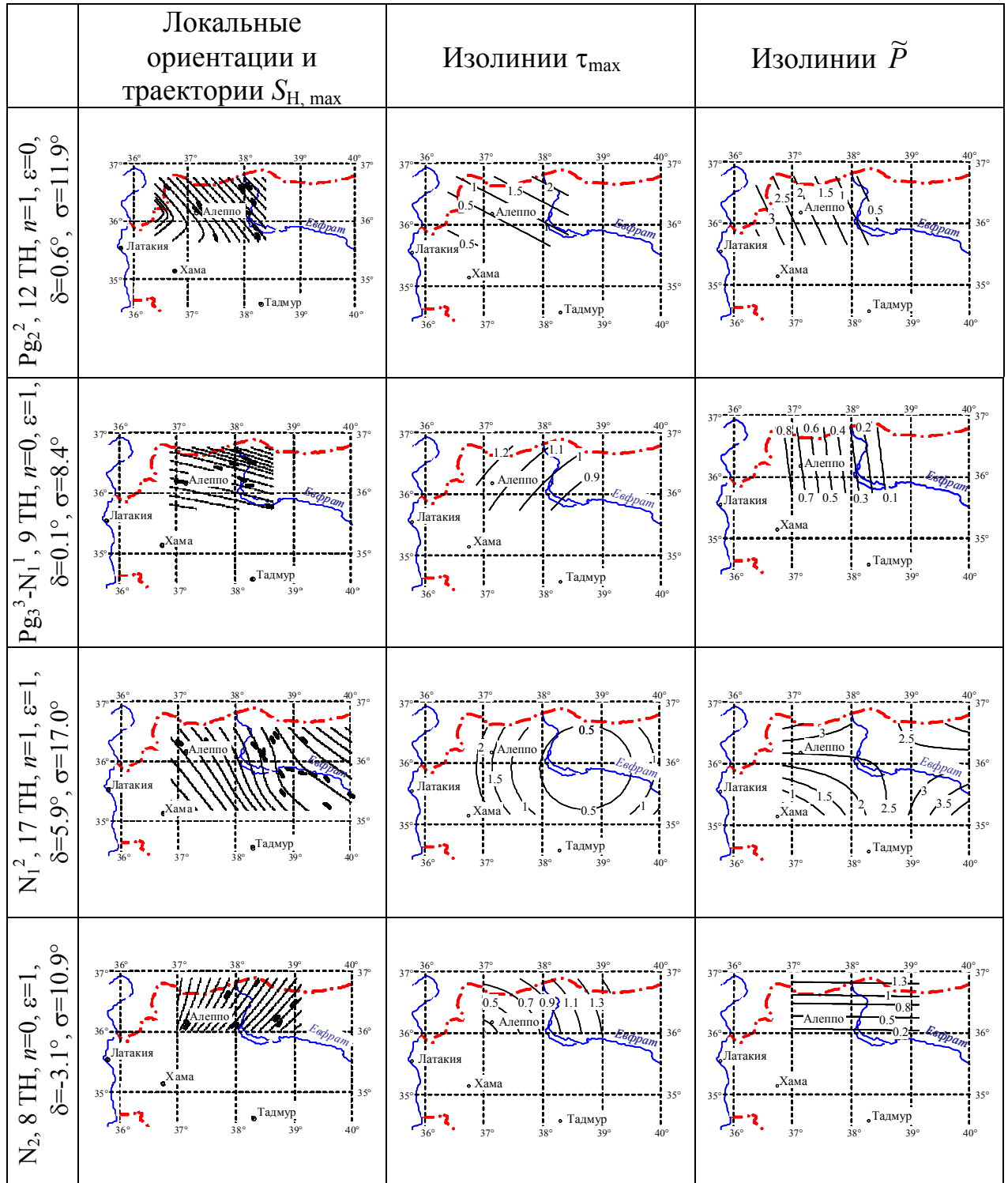
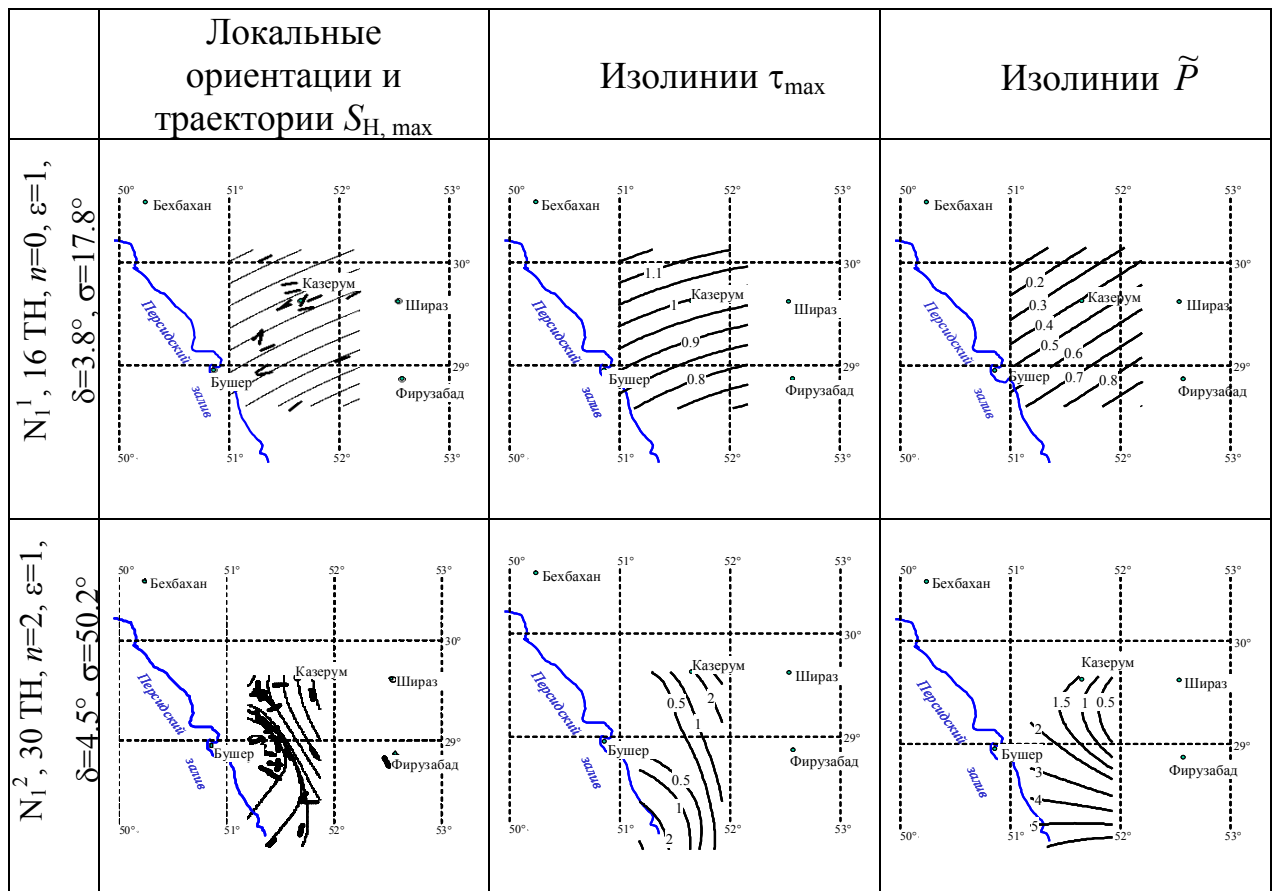


Рисунок 7.4. Эволюция поля тензора палеонапряжений в палеоген-неогеновое время в районе Алеппского поднятия.

## Регион №2. Зона сочленения Аравийской платформы с Загросской складчатой системой (Юго-Восточный Загрос)

В пределах зоны сочленения Аравийской платформы с Загросской складчатой системой трещиноватость новейших осадочных горных была изучена в 144 ТН. Точки наблюдения расположены в песчаниках (80 ТН), известняках (37 ТН), алевролитах (13 ТН) и других породах (14 ТН) [Белоусов и др., 2005а].

Эволюция поля палеонапряжений, реконструированная по предложенной методике, представлена на Рисунке 7.5. Из графиков траекторий следует, что для всех рассмотренных эпох, за исключением среднего миоцена, траектории имеют СВ ориентацию, причем их поле близко к однородному. Картины изолиний  $\tau_{\max}$  и  $\tilde{P}$  более разнообразны.



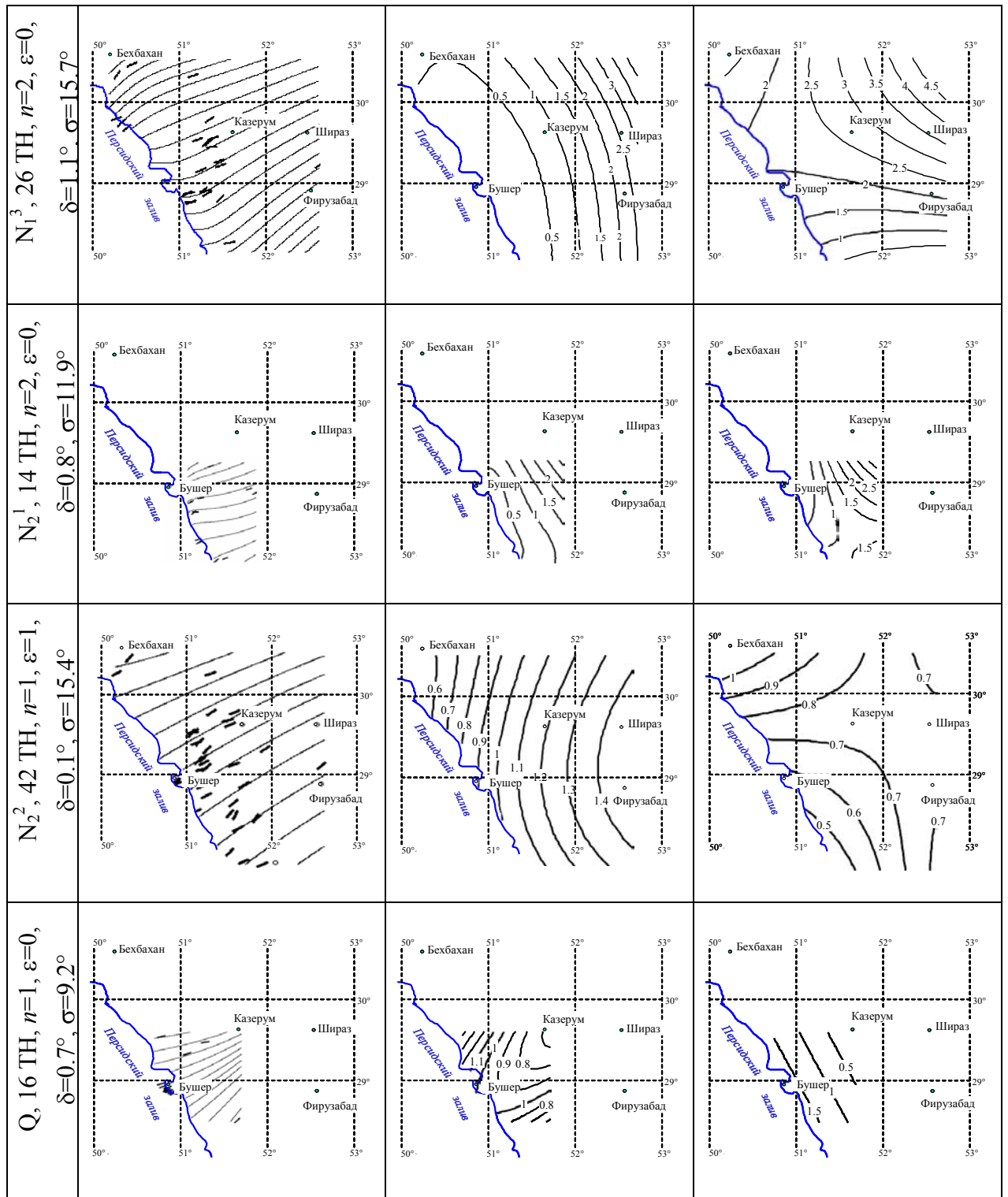


Рисунок 7.5. Эволюция поля тензора палеонапряжений в неоген-четвертичное время в районе Юго-Восточного Загроса.

### Регион №3. Восточная часть Скифской платформы (Ставропольский свод)

В пределах Ставропольского свода трещиноватость новейших осадочных горных была изучена в 59 ТН. Они расположены в песчаниках (42 ТН), известняках-ракушечниках (13 ТН) и других породах (4 ТН) [Белоусов и др., 1997а, б].

На Рисунке 7.6 представлены результаты реконструкции поля палеонапряжений в миоценовое время. Результаты показывают существенные изменения полей напряжений во времени.

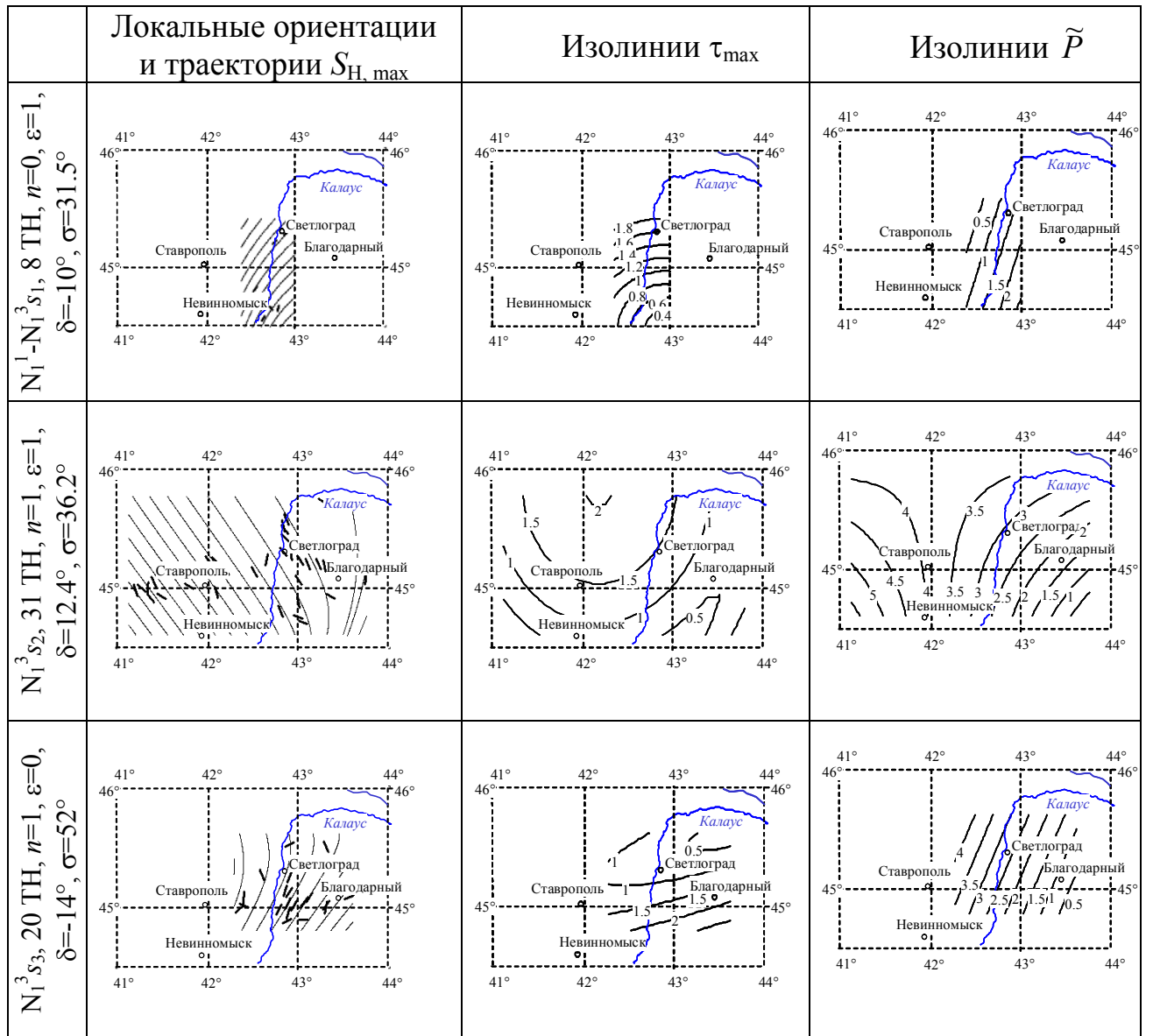


Рисунок 7.6. Эволюция миоценового поля тензора палеонапряжений в районе Ставропольского свода.



## Регион №4. Зона сочленения Скифской и Восточно-Европейской платформ (кряж Карпинского)

В пределах кряжа Карпинского трещиноватость новейших осадочных горных была изучена в 25 ТН. Они расположены в глинах (13 ТН), песчаниках (9 ТН) и известняках-ракушечниках (3 ТН) [Белоусов и др., 2005б].

Эволюция поля тензора палеонапряжений в данном регионе для плиоценового времени отображена на Рисунке 7.7. Траектории  $S_{H, \max}$  на этом этапе развития обладали СВ простиранием, что несколько отличается от реконструкции [Копп, 2000], которое указывают на субмеридиональную ориентацию осей  $S_{H, \max}$ .

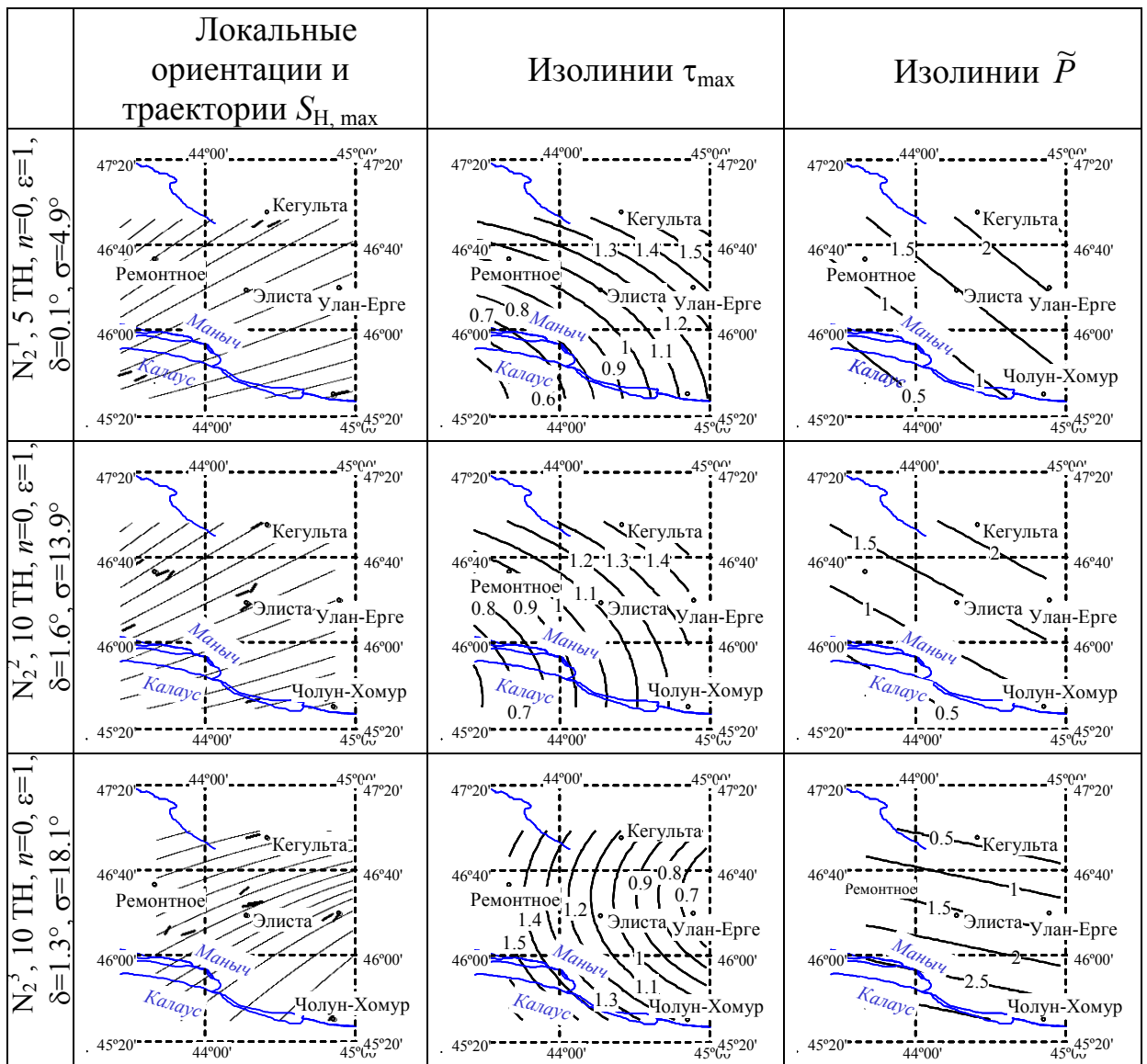


Рисунок 7.7. Эволюция плиоценового поля тензора палеонапряжений в районе кряжа Карпинского.

### 7.3. Поле напряжений в Австралии

Изучению поля напряжений австралийского региона посвящено достаточно много работ, например, [Cloetingh, Wortel, 1986; Coblenz et al., 1995; Dyksterhuis, Muller, 2004] и др. Хотя число надежных измерений ориентации напряжений по всей континентальной Австралии намного меньше, чем в Европе, считается, что ориентации напряжений первого порядка в Австралии (и даже более широко, в рамках Индо-Австралийской плиты) относительно хорошо установлены. В отличие от Западной Европы и восточной и центральной части Северной Америки, где ориентации  $S_{H,max}$  почти равномерные, ориентации напряжений в Австралии существенно варьируются. Основные особенности картины напряжений являются СВ-ЮЗ ориентации  $S_{H,max}$  в шельфе Северо-Запада, ССВ-ЮЮЗ ориентации в центральной Австралии и, примерно, З-В по всей южной части континента (более четко наблюдаются в юго-западной и юго-восточной Австралии). Следует особо отметить резкое вращение оси  $S_{H,max}$ , ориентированной З-В на юге на, примерно, С-Ю в центре (Рисунок 7.8).

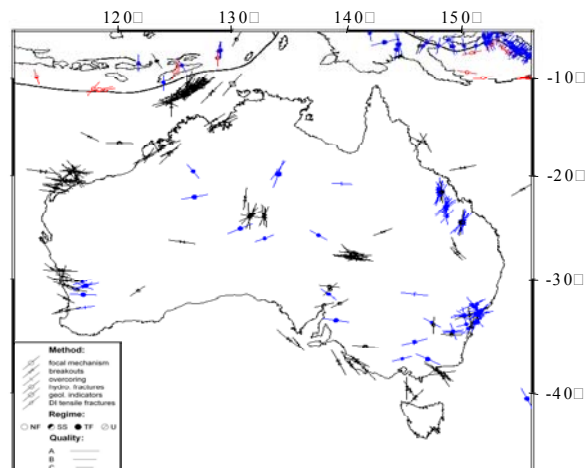


Рисунок 7.8. Ориентации главных напряжений  $S_{H,max}$  в Австралии по базе данных 2003 года.

Далее проводится реконструкция полей современных упругих напряжений на австралийском континенте как путем оптимизации по полиномиальному и конечно-элементному подходу, так и аналитически, путем подбора параметров в решении для функции комплексного девиатора напряжений.

### 7.3.1. Полиномиальная аппроксимация

Здесь использованы входные данные из мировой база данных по напряжениям 2003 года (Reinecker et al., 2003), которая имела в то время более чем 13600 точек по всему миру (сейчас более 21000), включая данные по азимуту главных напряжений. Данные имеют различное качество, начиная от  $E$  (низкое) до  $A$  (высокое), см подробности классификации в [Zoback, et al., 1989]. В расчетах используются данные, расположенные в пределах области ( $-40^{\circ}\text{S}$ ,  $-10^{\circ}\text{S}$ ) и ( $110^{\circ}\text{W}$ ,  $155^{\circ}\text{W}$ ) и имеющих качество А-С (269 точках в общей сложности). Следует отметить, что данные на континенте сильно неоднородны, что представляют трудность для анализа. Соответственно возникает вопрос о выборе степени многочленов для аппроксимации комплексных потенциалов, для чего проводится кластерный анализ исходных данных.

Обнаруживаются несколько кластеров, где данные плотные, они показаны на Рисунке 7.9 черными прямоугольниками. Эти кластеры получены из функции плотности, которая была найдена путем вычисления количества данных попадающих внутрь движущегося окна примерного размера  $2^{\circ} \times 2^{\circ}$  с шагом  $0,65^{\circ}$ . Размер окна выбран как квадратный корень из отношения площади региона и количества данных; шаг - в три раза меньше, чем размер окна. Предполагается, что данные формируют кластер, если пять или более точек попадают в окно. Анализ показывает, что число голоморфных функций  $R_k(z)$  в приближении для потенциалов не должно быть очень большим. Действительно если рассматривать каждый кластер на Рисунке 7.9 как одно обобщенное данное, то из условия  $N > 4n + 3$  (где  $N$  – число данных, а правая часть неравенства представляет число неизвестных коэффициентов, см предыдущую главу) следует что  $n=2$  является оптимальным для анализа. Coblenz et al. [1995] использовал подобную идею чтобы уменьшить количество данных в упругом моделировании австралийского поля напряжений методом конечных элементов, что потребовало усреднения ориентаций напряжений внутри кластеров. Эта процедура, однако, сильно зависит

от применяемого метода усреднения, поэтому в отличие от [Coblentz et al., 1995], в настоящих расчетах усреднение данных внутри кластеров не выполнялось.

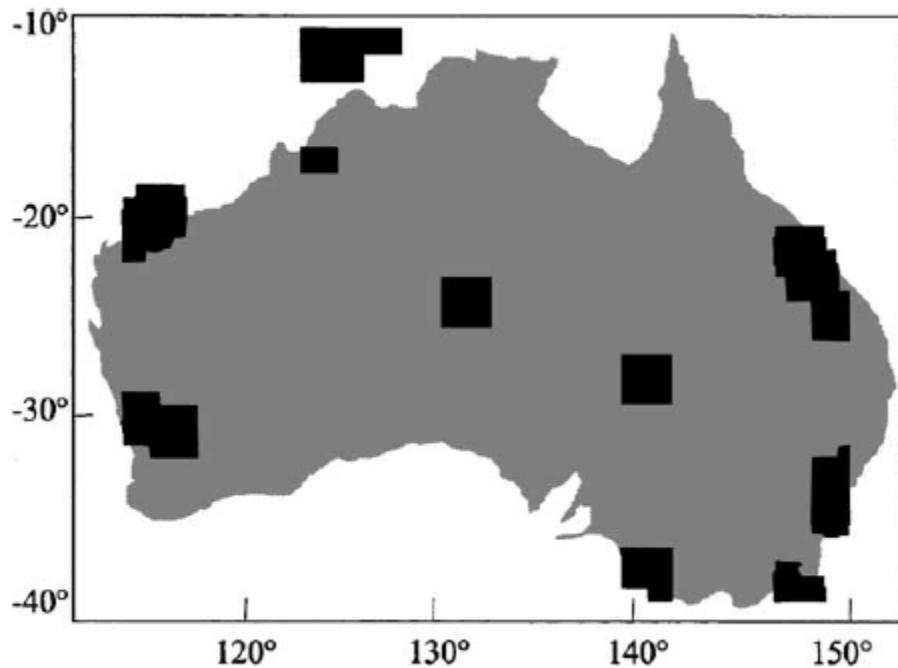


Рисунок 7.9. Установленные кластеры данных (5 или более измерений) в исследуемой области.

Далее в качестве базисных функций использовались полиномы  $R_k(z)=z^k$ , их степени варьировались от  $n=1$  до  $n=10$ . Для всех рассмотренных случаях  $n=1-10$ , было выявлено наличие особой точки  $B$ -типа на континенте которая показана на Рисунке 7.10 маленьким черным ромбом. Положение этой точки колеблется в пределах области  $(-31^\circ\text{Ю}, -25^\circ\text{Ю})$  и  $(135^\circ\text{З}, 146^\circ\text{З})$  в зависимости от  $1 \leq n \leq 10$ , в частности, для  $n=1$   $(-31^\circ\text{Ю}, 144^\circ\text{З})$ . Следует отметить, что при  $n > 4$  вблизи границы рассматриваемой области появляются другие особые точки, однако они не являются стабильными, что указывает на то, что они не являются реально существующими. Вероятнее всего, это есть следствие несоответствия количества кластеров и степеней базисных многочленов, что также подтверждает целесообразность выбора квадратичных многочленов для анализа. Следует отметить, что среднее отклонение расчетных и наблюдаемых данных, рассчитанных по формуле (7.2), составляет для  $n=2$  около  $35^\circ$ , что находится внутри диапазона надежности для совокупных данных А-С качества.

Реконструированное поле траекторий, рассчитанное для австралийского континента в случае  $n=2$  показано на Рисунке 7.10.

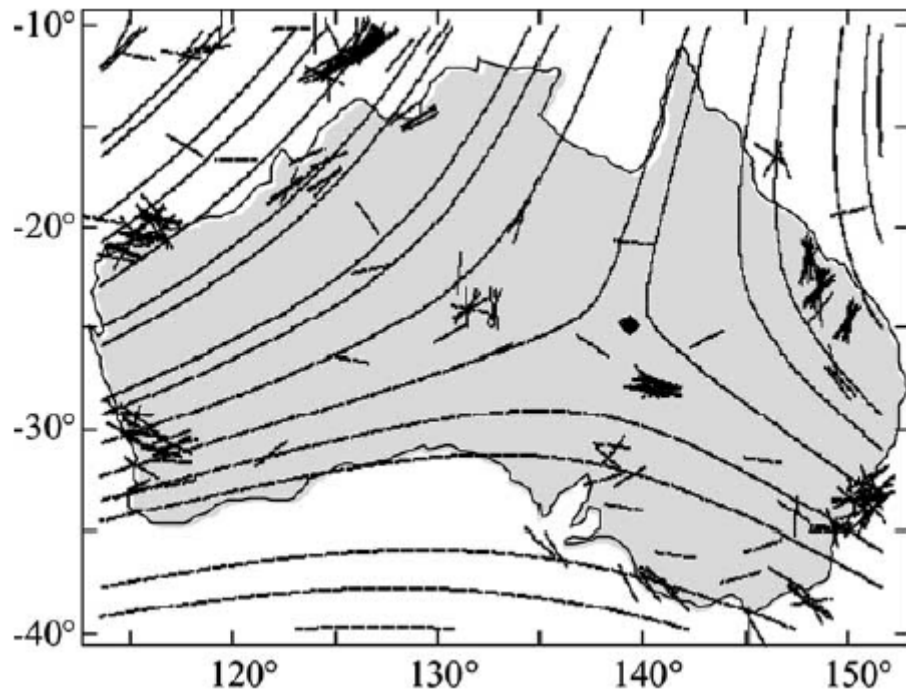


Рисунок 7.10. Реконструированные траектории и особая точка (ромб) в Австралии,  $N_{\text{data}}=269$ ,  $n=2$ , данные по ориентациям показаны отрезками.

Реконструкция по данным 2008 года также проводилась, результаты отличаются от представленных на Рисунке 7.10 незначительно, что объясняется незначительным увеличением количества данных качества А-С в исследуемом регионе с 269 в 2003 году до 291 в 2008 году. Результаты, основанные на использовании последних данных, приведены в следующем параграфе.

### 7.3.2. Конечно-элементная аппроксимация.

Предыдущие примеры оптимизации по конечно-элементному подходу (Вариант 2) демонстрируют высокую точность при реконструкции напряжений для аналитических функций как без шума, так и с шумом, а также показывают удовлетворительные результаты для примеров из фотоупругости, где данные подвержены ошибкам измерений. В этом параграфе для реконструкции поля напряжений в Австралии используются реальные геофизические данные из

последней версии базы данных WSM [Heidbach et al., 2008] и проводится сравнение с полиномиальной оптимизацией.

В качестве расчетной области выбран регион от  $115^{\circ}\text{З}$  до  $155^{\circ}\text{З}$  и от  $42^{\circ}\text{Ю}$  до  $12^{\circ}\text{Ю}$ . В области содержит 291 точек из базы данных WSM качества ABC (А - 63, В - 102 и С -126 данных). Качество данных варьируется в диапазоне от А ( $\pm 15^{\circ}$ ) до С ( $\pm 25^{\circ}$ ), для совокупности А-С, можно оценить как  $\pm 20^{\circ}$ . Метод полиномиальных аппроксимаций по всей области использует квадратичные многочлены для приближения потенциалов  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ . Конечно-элементный подход использует различное число элементов  $N_{elem}$  и точек коллокаций  $N_{CP}$  (см. Главу 6). Наблюдаются стабильные результаты для каждой конфигурации.

Результаты расчетов по обоим подходам приведены для полей ТНГ и изолиний нормализованных максимальных касательных напряжений,  $\tau_{max}$ . В примерах, показанных на рисунках, используется 33 элемента для конечно-элементного подхода (Рисунок 7-11а), частично сгущенных в области, где ожидается особая точка. Из Рисунка 7.11b видно, что не каждый элемент содержит данные, а некоторые элементы имеют до 60 точек данных. 15 точек коллокаций использованы на каждой границе между элементами. СЛАУ состоит из  $s=3773$  уравнений и  $n=264$  неизвестных. При расчете число обусловленностей было  $cond(C)=1.7 \times 10^3$ , невязка составила  $res=564$ .

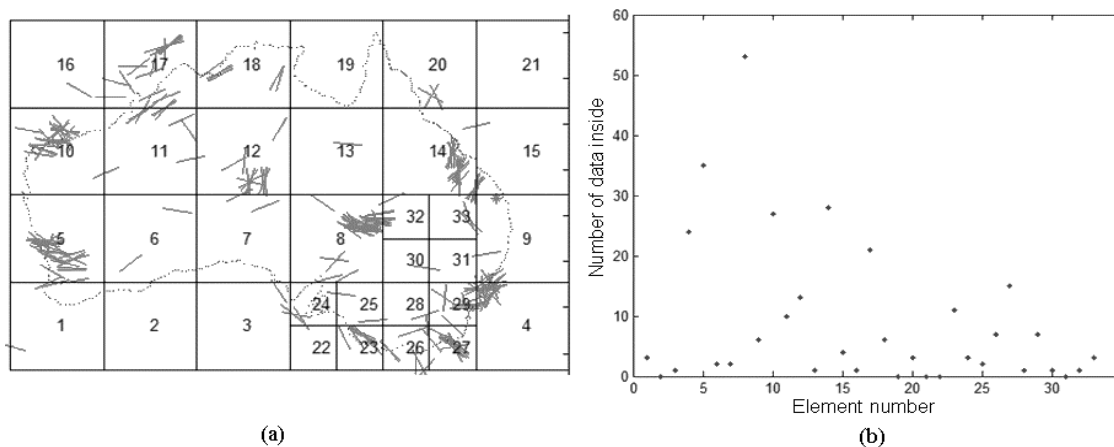


Рисунок 7.11. (а) - Дискретизации австралийского региона с использованием квадратных элементов, короткие сегменты показывают данные по ориентации главных сжимающих напряжений, и (б) - количество данных в элементах.

Траектории напряжений и поля максимальных касательных напряжений представлены на Рисунке 7.12 для полиномиальной аппроксимации, а на Рисунке 7.13 для конечно-элементной аппроксимации. Из визуального сравнения видно, что результаты схожи, хотя реконструированные позиции особых точек несколько отличаются.

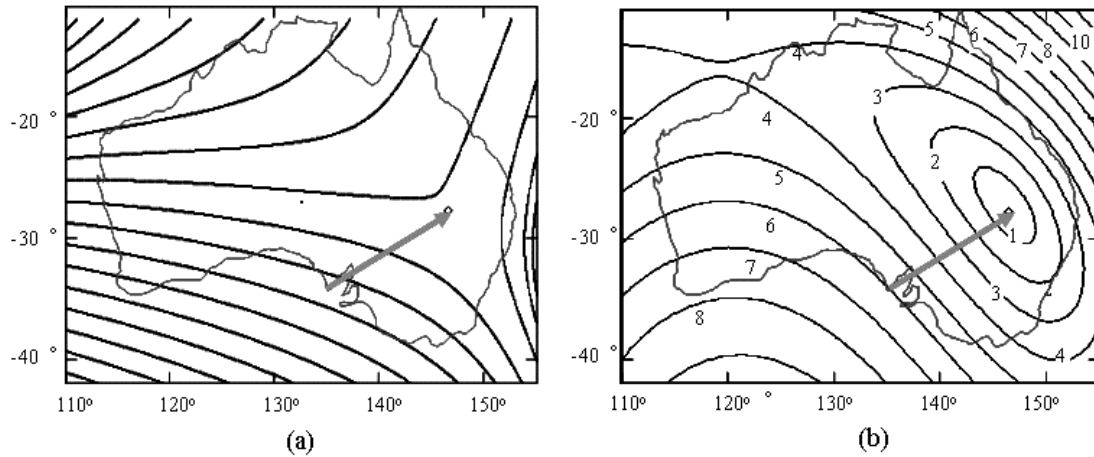


Рисунок 7.12. Результаты для полиномиальной аппроксимации внутри австралийского региона с качеством данных А,В,С (291 данных), (а) - траектории напряжений, (b) - максимальные касательные напряжения. Особая точка указана стрелкой.

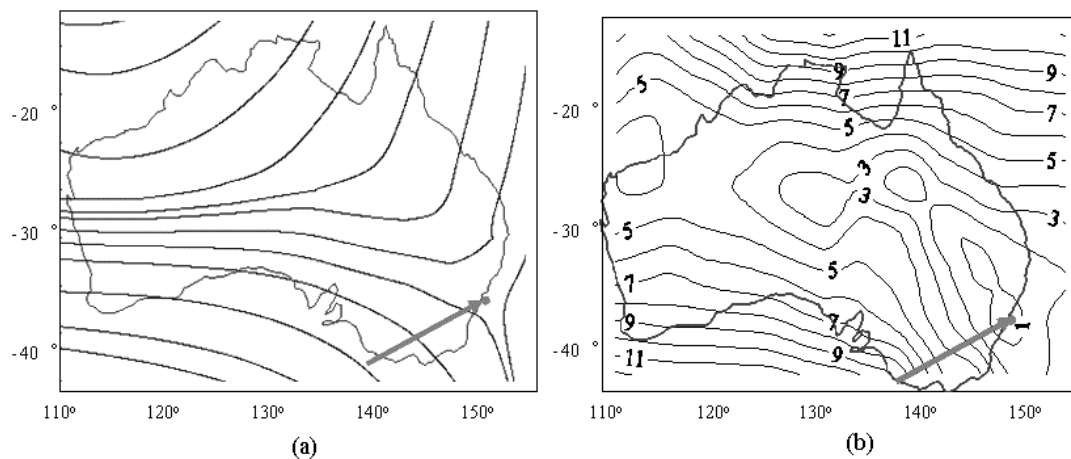


Рисунок 7.13. Конечно-элементный подход для австралийского региона с качеством данных А,В,С (291 данных), (а) - траектории напряжений, (b) - максимальные касательные напряжения. Особая точка указана стрелкой.

### 7.3.3. Приближенные аналитические решения

Приближенное решение краевой задачи, качественно описывающее напряженное состояние австралийского континента, строится на основе анализа специального случая решения задачи  $(\alpha, \alpha'_n)$  для круга, приведенного в Главе 5, а именно

$$\Gamma: \quad \alpha = \alpha_0 + 2K\omega, \quad \alpha'_n = 0, \quad 2K = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (7.3)$$

Прямое моделирование упругих напряжений в Австралии [Cloetingh, Wortel, 1985; 1986] и реконструкции по дискретным данным, представленные выше, указывают на наличие особой точки внутри континента. Это означает, что при обходе по замкнутому контуру, главные направления тензора напряжений получают приращение  $-\pi$ , а, следовательно, аргумент комплекснозначной функции девиатора,  $D(z, \bar{z})$ , при обходе изменяется на  $2\pi$ , что приводит к индексу краевой задачи  $2K=1$ . Следовательно, общее решение может включать в себя до 9 вещественных констант, а решение для  $D(z, \bar{z})$  зависит от 8 вещественных констант. Для простоты можно нормализовать комплексную координату поделив ее на некоторый характерный размер рассматриваемой области и далее рассматривать круг единичного радиуса. На основании формулы (5.27) комплексные потенциалы могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \Phi'(z) &= e^{i\alpha_0} \left[ a_0 + a_1 z + a_2 z^2 - \bar{b}_0 z^3 - a_0 z^4 \right] \\ \Psi(z) &= e^{i\alpha_0} \left[ b_0 + b_1 z + (\bar{a}_1 + 2\bar{b}_0) z^2 + 2\bar{a}_0 z^3 \right] \end{aligned} \quad \text{Im } a_2 = 0, \quad \text{Im } b_1 = 0. \quad (7.4)$$

Теперь девиатор удобно представить в виде

$$D(z, \bar{z}) = e^{i\alpha_0} \left\{ z(D_{\text{real}}(z, \bar{z}) + a_0 \bar{z}^2 + \bar{a}_0 z^2) + (1 - z\bar{z})[a_0 \bar{z} + \bar{a}_0 z^3 + b_0(1 + z^2)] \right\}, \quad (7.5)$$

где

$$D_{\text{real}}(z, \bar{z}) = a_2 \bar{z}z + a_1 \bar{z} + \bar{a}_1 z + b_1, \quad \text{Im } a_2 = 0, \quad \text{Im } b_1 = 0. \quad (7.6)$$

Придавая коэффициентам некоторые значения, можно получать различные модели напряженного состояния, при этом первое слагаемое в фигурной скобке в (7.5) имеет аргумент, совпадающий с  $\arg(z)$ , поскольку второй множитель есть вещественная функция. Второе исчезает на окружности единичного радиуса,



однако внутри является комплекснозначным, т.е. придавая разные значения коэффициентам  $a_0$  и  $b_0$  возможно получать различные поля траекторий внутри единичного круга. Если принять, что реконструируемое поле траекторий единственно, то необходимо положить  $a_0=b_0=0$ , что приводит к выражению

$$D(z, \bar{z}) = e^{i\alpha_0} z D_{\text{real}}(z, \bar{z}). \quad (7.7)$$

На Рисунке 7.14А показаны поля траекторий в случае, когда особая точка расположена в центре круга с географическими координатами  $(-25^\circ\text{Ю}, 133^\circ\text{З})$ , при выборе  $\theta=\pi/3$  ( $\alpha=-2\pi/3$ ), при этом  $D_{\text{real}}(z, \bar{z})$ - функция с произвольными коэффициентами. В этом случае аргумент  $D(z, \bar{z})$  является гармонической функцией.

В случае негармонического аргумента необходимо выбирать такие коэффициенты, чтобы второе слагаемое в фигурных скобках в (7.5) не обращалось в нуль. Один из таких примеров показан на Рисунке 7.14В, когда  $D_{\text{real}}(z, \bar{z})=1$  (т.е.  $a_1=a_2=0$ ,  $b_1=1$ ) и особая точка смещена в положение  $(-28^\circ\text{Ю}, 138^\circ\text{З})$ , что достигается соответствующим выбором констант  $a_0=0$ ,  $b_0=-0.302+0.124i$ . В этом случае координаты особой точки соответствует координатам, полученным при численной реконструкции, представленной на Рисунке 7.10, таким образом можно наблюдать достаточно неплохое согласование между результатами реконструкций полей траекторий, полученных принципиально различными методами.

Следует отметить, что в случае, когда главные направления есть гармоническая функция, т.е. решения (7.7), остается достаточный произвол для определения полного тензора напряжений, поскольку функция  $D_{\text{real}}(z, \bar{z})$  определяется с точностью до 4 вещественных параметров, следовательно, в функцию среднего давления добавиться еще одна произвольная константа, порождаемая при интегрировании уравнений равновесия. Таким образом в общее решения для плоского тензора напряжений может входить до пяти произвольных вещественных констант. Комбинируя линейно независимые решения можно получить компоненты напряжений, которые существенно отличаются друг от

друга. Однако очевидно, что, в отличие от традиционного моделирования (где количество линейно независимых решений остается неизвестным), неопределенность может быть устранена при условии, что известны замеры (или оценки) величин напряжений в некоторых дискретных точках. В принципе, даже в наихудшем случае гармонических главных направлений, достаточно 5 независимых измерений для определения единственного решения для региона Австралии; для негармонического аргумента комплекснозначной функции девиатора минимально нужно лишь два измерения напряжений (см следующий параграф для деталей).

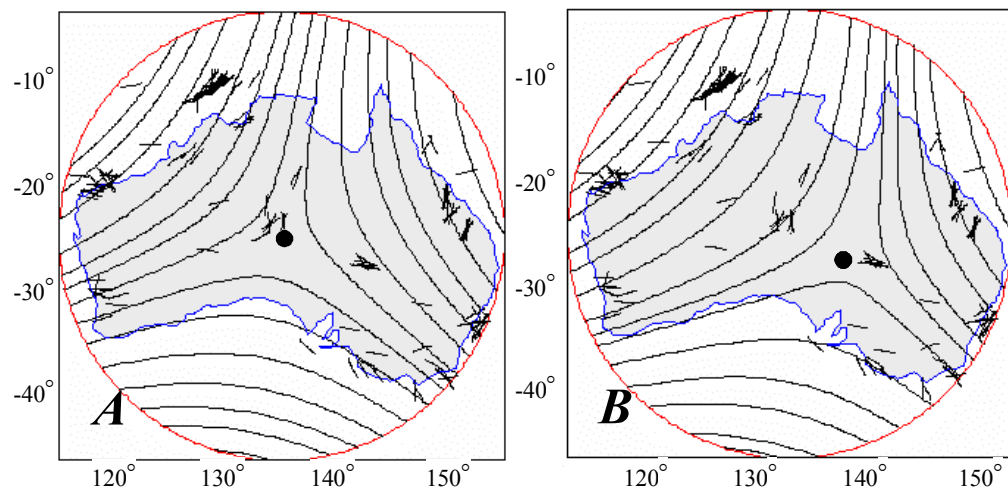


Рисунок 7.14 Поля напряжений в Австралии, реконструированные по формулам (7.3)-(7.7).

#### 7.4. Заключительные замечания по главе

В главе суммированы результаты реконструкций упругих напряжений (палеонапряжений), которые используют экспериментально установленные азимуты  $S_{H,max}$  в качестве исходных данных при реконструкции плоских напряжений. Этот факт существенно отличает настоящий подход от традиционного моделирования упругих полей, основанного на использовании специально подобранных (или «фиктивных») граничных условиях в терминах напряжений, усилий или смещений. Основное достоинство предложенного метода состоит в том, что результаты реконструкций полного тензора напряжений зависят от вполне определенного (и небольшого) числа параметров. Более того в

случае, когда главные направления не есть гармоническая функция, реконструкции полей ТГН в упругости может быть выполнена единственным образом, а поля максимальных касательных напряжений находятся с точностью до нормировочной константы. Как уже отмечалось, константы, в принципе могут быть найдены по известным величинам компонент напряжений в некоторых точках. Для этого достаточно рассмотреть дополнительную задачу оптимизации, которая может быть сформулирована как описано ниже.

Предположим, что известны нормальные,  $\sigma_n^l$ , и (или) касательные,  $\sigma_t^l$ , напряжения на  $L$  площадках (с нормальями  $\mathbf{n}_l$ ,  $l=1\dots L$ ). Отталкиваясь от общего решения в Главе 6 в форме (6.6) можно записать выражение для вектора напряжений,  $\sigma_n + i\sigma_t$ , на  $l$ -ой площадке в виде

$$\sigma_n + i\sigma_t = b + a \left( P(z_l, \bar{z}_l) + e^{-2i\vartheta_l} D(z_l, \bar{z}_l) \right), \quad l=1\dots L, \quad (7.8)$$

где  $z_l, \vartheta_l$  - соответственно положение и угол наклона  $l$ -ой площадки к положительному направлению действительной оси.

Если принять, что известны только нормальные компоненты в разных точках (которые, например, могут быть определены в широкомасштабном эксперименте по давлению закрытия трещины гидроразрыва в тех местах, где были ранее проведены гидроразрывы), то для определения неизвестных констант  $a$  и  $b$  возникает задача регрессии, которая может быть записана в виде минимизации невязки

$$\sum_{j=1}^L \left\{ \sigma_n^j - b - a \left[ P(z_j, \bar{z}_j) + \operatorname{Re} \left( e^{-2i\vartheta_j} D(z_j, \bar{z}_j) \right) \right] \right\}^2 \Rightarrow \min. \quad (7.9)$$

Очевидно, что для определения обоих параметров необходимо не менее двух измерений величин напряжений в разных точках. Пример такой реконструкции приведен в работе [Галыбин и др., 2013], где для определения постоянных  $a$  и  $b$  использованы данные по давлениям закрытия трещин гидроразрыва.

В случае гармонического аргумента константа  $a$  должна быть замещена выражением  $a_2 \bar{z}z + a_1 \bar{z} + \bar{a}_1 z + b_1$ , полученным из выражения для  $D_{\text{real}}$  из (7.6),

таким образом, все пять неизвестных констант могут быть оценены при условии, что известно не менее 5 измерений.

Другим важным вопросом, рассмотренным в данной главе, является вопрос о соответствии числа измерений числу базисных функций в полиномиальной аппроксимации или количеству элементов в конечно-элементном подходе. Касательно последнего следует отметить, что этот метод не столь чувствителен к числу данных как полиномиальные аппроксимации. Даже если нет никаких данных в некоторых элементах (как в примере на Рисунке 7.11), то оптимизация функционала выполняется, при этом решение в «пустых» элементах дополняется по непрерывности из соседних, где данные присутствуют. Очевидно, что если данных мало (как, например, с рассмотренными выше случаями реконструкции палеонапряжений), то конечно-элементный подход теряет целесообразность, поскольку в области где нет данных будет построено линейное решение по непрерывности, что, в принципе, означает глобальную аппроксимацию линейными многочленами.

Следует отметить, что экспериментальные данные по ориентациям главных напряжений известны с достаточно большим разбросом, как уже отмечалось, в лучшем случае в  $\pm 15^\circ$ , поэтому стандартный подход, в котором достаточно добиться минимальной невязки, не может быть непосредственно перенесен на задачи реконструкции напряжений в земной коре. Здесь предложены два основных подхода. Первый - проводить кластерный анализ, что позволяет (как в случае реконструкции австралийского поля напряжений) установить оптимальную степень базисных многочленов. Второй – контролировать, помимо невязки, число обусловленностей (для обеспечения стабильных результатов реконструкции) и использовать минимальные степени многочленов, которые обеспечивают отклонения реконструированных главных направлений от экспериментальных данных в пределах диапазона разброса совокупных данных разного качества, оценочно  $\pm(20^\circ-25^\circ)$ .

## ГЛАВА 8. РЕКОНСТРУКЦИИ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ. ПРИЛОЖЕНИЯ

В данной главе приводится постановка задач для реконструкции напряжений в многосвязных областях, развиваются численные методы, основанные на полиномиальных и конечно-элементных аппроксимациях. Приведены примеры реконструкций полей напряжений для регионов, разграниченных одной границей, а также для областей, состоящих из нескольких тектонических плит. Эти примеры нацелены, в основном, на исследование цунамигенных регионов Земли по данным об ориентациях главных напряжений, хранящихся в мировой базе данных по напряжениям WSM (издания 2003-2008 гг.), текущая редакция которой 2008 года содержит 21750 записей данных по ориентациям главных напряжений по всему миру.

### *8.1. Постановка задач реконструкции для многосвязных областей и модификация численных методов.*

В отличие от односвязных областей, при рассмотрении многосвязных, систему уравнений необходимо дополнить условиями непрерывности решений (в данном случае вектора напряжений) при переходе из подобласти в соседнюю, так называемыми, транзитными условиями, которые уже использовались ранее при исследовании числа независимых решений для неклассических краевых задач плоской теории упругости.

Рассмотрим конечную упругую плоскую область  $\Omega$ , состоящую из подобластей  $\Omega_i$  ( $i=1\dots N_{domain}$ ), имеющих, в общем случае, различные модули упругости (упругие модули не указываются, поскольку далее в постановке не предполагается никаких условий относительно разрыва перемещений на интерфейсах). Считаем, что главные направления тензора плоских напряжений заданы в некоторых точках, принадлежащих некоторым подобластям (необязательно все они содержат эти данные); предполагается, что набор дискретных данных содержат  $N_{data}$  точек. Считаем, что вектор напряжений

непрерывен при переходе через внутренние границы (интерфейсы)  $\Gamma_k$  между всеми соседними подобластями ( $j=1 \dots N_{\text{int}}$ ).

Общая задача формулируется следующим образом:

*Определить двумерное поле напряжений в  $\Omega$ , которое*

- (1) *удовлетворяет всем уравнениям плоской теории упругости, сформулированным в напряжениях;*
- (2) *обеспечивает наилучшее согласие данных  $\theta_j$  и расчетных главных направлений в заданных точках  $z_m$ ,  $m=1 \dots N_{\text{data}}$ ;*
- (3) *удовлетворяет условию непрерывности вектора напряжений на всех внутренних границах  $\Gamma_j$  между соседними подобластями,  $j=1 \dots N_{\text{int}}$ .*

Следует отметить, что задача, сформулированная выше, не является краевой задачей плоской упругости. В отличие от классических формулировок, число граничных условий (по два на каждый интерфейс), представляющих непрерывность вектора напряжений, является недостаточным, и поэтому решение не является единственным, значит оно может содержать произвольные функции. Из-за высокой неопределенности задачи необходимо разыскивать возможные ее решения в некотором классе функций. Далее при численной реализации используется простое семейство базисных функций, а именно кусочно линейные голоморфные функции. Однако это не делает задачу корректной в полной мере, поскольку ее решение может включать в себя некоторое число свободных параметров. Это следует из того, что величины напряжений не участвуют в формулировке, поэтому по крайней мере два параметра в общее решение остаются неопределенными. Это, во-первых, мультипликативная (положительная) константа в девиаторе тензора напряжений; и во-вторых аддитивная постоянная, которая должна быть добавлена к среднему гидростатического напряжению. Эти константы могут быть выбраны произвольно, поскольку они не влияют ни на главные направления, ни на выполнение уравнений равновесия. Как показано ранее, до 5 свободных параметров может быть включено в общее решение для

односвязной упругой изотропной области, когда это решение строится по известному полю траекторий главных напряжений. Для рассматриваемого здесь случая составной области теоретические результаты относительно числа свободных параметров еще не получены. Поэтому далее предполагается проверять количество свободных параметров путем оценки ранга матрицы соответствующей линейной системы уравнений.

Выразим условия (1)-(3) в терминах функций напряжений и комплексных потенциалов. Комплексно сопряженный вектор напряжений  $N(\zeta)-iT(\zeta)$  (где  $N(\zeta)$  и  $T(\zeta)$  - соответственно нормальные и касательные компоненты), действующий на произвольном интерфейсе  $\Gamma_j$ , определяется следующим образом

$$\overline{\sigma(\zeta)} \equiv N(\zeta) - iT(\zeta) = P(\zeta) + \frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}} D(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma_j, \quad j=1 \dots N_{\text{int}}, \quad (8.1)$$

где  $P(\zeta)$  и  $D(\zeta)$  - граничные значения функций напряжений, полученные предельным переходом полевой точки  $z$  к граничной точке  $\zeta$ . Эти величины могут иметь скачки, при переходе через интерфейс, однако вектор напряжения считается непрерывным на каждом интерфейсе, т.е.  $\langle P(\zeta) \rangle = -\frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}} \langle D(\zeta) \rangle$ , что

приводит к следующим транзитным условиям для комплексных потенциалов

$$2 \operatorname{Re} \langle \Phi(\zeta) \rangle + \zeta \frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}} \langle \Phi'(\zeta) \rangle + \frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}} \langle \Psi(\zeta) \rangle = 0, \quad \zeta \in \Gamma_j, \quad j=1 \dots N_{\text{int}}, \quad (8.2)$$

где  $\langle \dots \rangle$  обозначают скачок величины на  $j$ -ом интерфейсе.

Второе семейство условий выражает тот факт, что максимальное касательное напряжение,  $\tau_{\max} = |D|$ , является вещественной функцией, что позволяет записать

$$\operatorname{Im} \left[ e^{2i\theta_m} D(z_m, \bar{z}_m) \right] = 0, \quad z_m \in \Omega, \quad m=1 \dots N_{\text{data}} \quad (8.3)$$

или

$$\operatorname{Im} \left[ e^{2i\theta_m} (\bar{z}_m \Phi'(z_m) + \Psi(z_m)) \right] = 0, \quad z_m \in \Omega, \quad m=1 \dots N_{\text{data}} \quad (8.4)$$

Здесь принято во внимание, что в любой точке области  $\arg(D) = \pi - 2\theta$ , где  $\theta$  является главным направлением (угол между направлением наибольшего главного напряжения и действительной осью).

Как и в случае односвязной области для существования нетривиального решения следует добавить нормирующие условия вида

$$\frac{1}{N_{data}} \sum_{m=1}^{N_{data}} e^{2i\theta_m} D(z_m, \bar{z}_m) = 1, \quad z_m \in \Omega. \quad (8.5)$$

Формально задача сводится к оптимизации целевой функции

$$\sum_{m=1}^{N_{data}} \left\{ \operatorname{Im} \left[ e^{2i\theta_m} D(z_m, \bar{z}_m) \right] \right\}^2 + \text{weight} \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_j} \left[ \langle P(\zeta) \rangle + \frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}} \langle D(\zeta) \rangle \right]^2 d\zeta \Rightarrow \min \quad (8.6)$$

при условии (8.5), где  $\text{weight} > 0$  – некоторый вес, который регулирует взаимный вклад данных и условий непрерывности.

Ниже анализируются две основных численных схемы, когда рассматривается либо две или несколько подобластей. Между ними нет принципиальных различий, за исключением использования различных систем базисных функций для аппроксимации комплексных потенциалов в методе Трефтца. В одном случае используются аппроксимации многочленами степени выше первой в каждой подобласти, а в другом конечно-элементные аппроксимации, в которых в элементах потенциалы представляются многочленами первой степени.

## **8.2. Численный метод, использующий аппроксимации комплексных потенциалов в отдельных подобластях голоморфными функциями**

### **8.2.1. Метод Трефтца для функций напряжений для плоской области, состоящей из двух подобластей**

Рассмотрим контур  $\Gamma$ , который разделяет всю плоскую область  $\Omega$  на две подобласти  $\Omega^+$  и  $\Omega^-$ , ориентированные так, что при  $\Omega^+$  остается при обходе  $\Gamma$  слева, а  $\Omega^-$  справа. В случае, если контур  $\Gamma$  замкнутый, то подобласти  $\Omega^+$  и  $\Omega^-$  являются внутренней и внешней соответственно, при этом подобласть  $\Omega^-$  может быть бесконечной.



Решение для комплексных потенциалов ищется в виде линейной комбинации базисных функций  $H_k^\pm(z)$  с неизвестными комплексными коэффициентами  $c_k$  ( $k=1..N_c$ ), общее число которых  $N_c$  зависит от аппроксимации потенциалов (оно определяется далее). Функции  $H_k^\pm(z)$  голоморфны в соответствующих подобластях, а полные наборы  $H_k^\pm(z)$  должны быть линейно независимы. Независимо от выбора базисных функций предполагается, что  $H_0^\pm(z)=1$ . Далее, для определенности, будем удерживать одинаковое число членов в аппроксимациях для комплексных потенциалов  $\Phi^\pm(z)$  и  $\Psi^\pm(z)$ . Тогда в разложениях для  $\Phi'^\pm(z)$  нужно учитывать на один член меньше, и соответственно, можно записать

$$\Psi^+(z) = \sum_{k=0}^n c_k H_k^+(z), \quad \Phi'^+(z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+n+1} H_k^+(z), \quad (8.7)$$

$$\Psi^-(z) = \sum_{k=0}^n c_{k+2n} H_k^-(z), \quad \Phi'^-(z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+3n+1} H_k^-(z). \quad (8.8)$$

Интегрированием, найдем

$$\Phi^+(z) = \Phi_0^+ + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+n+1} I H_k^+(z), \quad \Phi^-(z) = \Phi_0^- + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+3n+1} I H_k^-(z). \quad (8.9)$$

Здесь  $\Phi_0^+$  и  $\Phi_0^-$  - неопределенные комплексные константы, а система независимых голоморфных функций  $I H_k^\pm(z)$  находится интегрированием  $H_k^\pm(z)$

$$\frac{d}{dz} (I H_k^\pm(z)) = H_k^\pm(z). \quad (8.10)$$

Возможно несколько упростить алгоритм, если, для практически важных приложений, принять одинаковые системы базовых функций для обеих областей. В теоретическом случае бесконечной области  $\Omega^-$  такое упрощение может быть излишним, поскольку невозможно обеспечить голоморфность системы базовых

функций во всей комплексной плоскости. Однако, поскольку дискретные данные по главным направлениям задаются в конечной области, то восстановление напряжений на удалении от этой области не имеет практического смысла (и будет сопряжено с большими ошибками). Поэтому положим далее, для простоты

$$H_k^+(z) = H_k^-(z) = H_k(z), \quad IH_k^+(z) = IH_k^-(z) = IH_k(z), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (8.11)$$

Число неизвестных  $N_c$ , подлежащих определению, складывается из  $2(2n+1)$  комплексных коэффициентов в представлениях (8.7) и (8.9) и неопределенных констант интегрирования в (8.9). Касательно последних стоит учесть, что мнимые части  $\Phi_0^+$  и  $\Phi_0^-$  могут быть опущены, так как они не влияют на напряженное состояние, и более того, необходимо определять только их разность, поскольку напряженное состояние, как показано ранее, восстанавливается с точностью до аддитивной постоянной. Таким образом, к числу констант добавляется только одна вещественная постоянная, характеризующая разность средних напряжений при переходе через границу

$$\Delta P = \operatorname{Re}(\Phi_0^+ - \Phi_0^-). \quad (8.12)$$

Соответственно, число вещественных переменных, подлежащих определению, равно

$$N_{real} = 8n + 5. \quad (8.13)$$

Введем неизвестные вещественные постоянные соотношениями

$$\begin{aligned} c_k &= C_k + iC_{2n+1+k}, \quad k = 0 \dots 2n, \\ c_{2n+1+k} &= C_{4n+2+k} + iC_{6n+3+k}, \quad k = 0 \dots 2n, \\ \Delta P &= C_{8n+4}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Принимая во внимания соотношения (8.11) и (8.14) приходим к следующим выражениям для функции напряжения.

Для внутренней области  $\Omega^+$

$$P^+(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{4n+1} C_k p_k^+(z, \bar{z}),$$

$$p_k^+(z, \bar{z}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq n \\ 2 \operatorname{Re} IH_{k-n-1}(z), & n+1 \leq k \leq 2n \\ 0, & 2n+1 \leq k \leq 3n+1 \\ 2 \operatorname{Im} IH_{k-3n-2}(z), & 3n+2 \leq k \leq 4n+1 \end{cases} \quad (8.15)$$

$$D^+(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{4n+1} C_k q_k^+(z, \bar{z}),$$

$$q_k^+(z, \bar{z}) = \begin{cases} H_k(z), & 0 \leq k \leq n \\ \bar{z} H_{k-n-1}(z), & n+1 \leq k \leq 2n \\ i H_{k-2n-1}(z), & 2n+1 \leq k \leq 3n+1 \\ i \bar{z} H_{k-3n-2}(z), & 3n+2 \leq k \leq 4n+1 \end{cases} \quad (8.16)$$

Для внешней области  $\Omega^-$

$$P^-(z, \bar{z}) = \sum_{k=4n+2}^{8n+3} C_k p_k^-(z, \bar{z}),$$

$$p_k^-(z, \bar{z}) = \begin{cases} 0, & 4n+2 \leq k \leq 5n+2 \\ 2 \operatorname{Re} IH_{k-5n-3}(z), & 5n+3 \leq k \leq 6n+2 \\ 0, & 6n+3 \leq k \leq 7n+3 \\ -2 \operatorname{Im} IH_{k-7n-4}(z), & 7n+4 \leq k \leq 8n+3 \end{cases} \quad (8.17)$$

$$D^-(z, \bar{z}) = \sum_{k=4n+2}^{8n+3} C_k q_k^-(z, \bar{z}),$$

$$q_k^-(z, \bar{z}) = \begin{cases} H_{k-4n-2}(z), & 4n+2 \leq k \leq 5n+2 \\ \bar{z} H'_{k-5n-3}(z), & 5n+3 \leq k \leq 6n+2 \\ i H_{k-6n-3}(z), & 6n+3 \leq k \leq 7n+3 \\ i \bar{z} H_{k-7n-4}(z), & 7n+4 \leq k \leq 8n+3 \end{cases} \quad (8.18)$$

Принимая во внимание выражения (8.14)-(8.18), можно свести задачу минимизации (8.6) к системе  $N$  линейных алгебраических уравнений для определения массива  $8n+5$  неизвестных  $\mathbf{C}=(C_0 \dots C_{8n+4})$

$$\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{B}, \quad (8.19)$$

где коэффициенты матрицы  $\mathbf{A}$  указаны ниже

$$a_{j,k} = \operatorname{Im} \left( e^{2i\theta_j^+} q_k^+(z_j, \bar{z}_j) \right), \quad k = 0 \dots 4n+1, j = 0 \dots N^+ - 1 \quad (8.20)$$

$$a_{j+N^+,k} = \operatorname{Im} \left( e^{2i\theta_j^-} q_k^-(z_j, \bar{z}_j) \right), \quad k = 4n+2 \dots 8n+3, j = 0 \dots N^- - 1$$

$$a_{j+N^++N^-,k} = \operatorname{Re} \left( p_k^+(\zeta_j) + e^{2i\vartheta(\zeta_j)} q_k^+(\zeta_j) \right), \quad k = 0 \dots 4n+1, j = 0 \dots N^\Gamma - 1 \quad (8.21)$$

$$a_{j+N^++N^-,k} = -\operatorname{Re} \left( p_k^-(\zeta_j) + e^{2i\vartheta(\zeta_j)} q_k^-(\zeta_j) \right), \quad k = 0 \dots 4n+1, j = 0 \dots N^\Gamma - 1$$

$$a_{j+N^++N^-,k} = -\operatorname{Re} \left( p_k^-(\zeta_j) + e^{2i\vartheta(\zeta_j)} q_k^-(\zeta_j) \right),$$

$$k = 4n+2 \dots 8n+3, j = 0 \dots N^\Gamma - 1 \quad (8.22)$$

$$a_{j+N^++N^++N^\Gamma,k} = -\operatorname{Im} \left( p_k^-(\zeta_j) + e^{2i\vartheta(\zeta_j)} q_k^-(\zeta_j) \right),$$

$$k = 4n+2 \dots 8n+3, j = 0 \dots N^\Gamma - 1$$

$$a_{j+N^++N^+,8n+1} = 1, \quad j = 0 \dots N^\Gamma - 1 \quad (8.23)$$

$$a_{N-1,k} = \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{N^+-1} e^{2i\theta_j^+} q_k^+(z_j, \bar{z}_j), \quad k = 0 \dots 4n+1 \quad (8.24)$$

$$a_{N-1,k} = \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{N^- - 1} e^{2i\theta_j^-} q_k^-(z_j, \bar{z}_j), \quad k = 4n+2 \dots 8n+3$$

Система (8.19) является, вообще говоря, переопределенной, она имеет  $8n+5$  неизвестных и  $N$  уравнений, причем  $N=N^++N^-+N^\Gamma+1$ , где  $N^+$  - число данных в  $\Omega^+$ ;  $N^-$  - число данных в  $\Omega^-$ ,  $N^\Gamma$  - число точек коллокации  $\zeta_m$  на контуре,  $\vartheta(\zeta_m)$  - угол между касательной к контуру в точке  $\zeta_m$  и действительной осью.

Система устроена так, что коэффициенты в (8.20) ответственны за соосность наблюдаемых и расчетных главных направлений, а коэффициенты в (8.21)-(8.23) обеспечивают непрерывность вектора напряжений при переходе через интерфейс между подобластями. В правой части уравнения все члены (за исключением последнего) равны нулю  $\mathbf{V}=(0,0\dots,0,1)$ . Последнее уравнение выражает тот факт,

что девиатор напряжений не может быть найден однозначно и должен быть нормализован, для того чтобы найти нетривиальное приближенное решение системы. Нормализация выбрана так, что среднее значение девиатора  $D$  по всем данным равно единице.

Приближенное решение линейной системы (8.19), как и в предыдущих случаях ищется методом наименьших квадратов с возможным использованием регуляризации при высоком значении числа обусловленностей системы. В результате решения находятся некоторые частные решения, которые определяются подстановкой полученных коэффициентов  $C_k$ , в формулы (8.15)-(8.18), при этом к функции среднего давления для внутренней области необходимо добавить найденный коэффициент  $C_{8n+4}$ . Полное же решение для обеих подобластей для реконструированные функции напряжений принимают вид

$$D^\pm(z, \bar{z}) = aF_1^\pm(z, \bar{z}), \quad P^\pm(z, \bar{z}) = b + aF_2^\pm(z, \bar{z}) \quad (8.25)$$

Здесь  $a > 0$  и  $b$  - вещественные константы, а  $F_1(z, \bar{z}), F_2(z, \bar{z})$  - частные решения, которые удовлетворяют уравнениям равновесия  $\partial_z F_2(z, \bar{z}) = \partial_{\bar{z}} F_1(z, \bar{z})$ , и представимы в виде

$$\begin{aligned} F_1^+(z, \bar{z}) &= \sum_{k=0}^{4n+1} C_k q_k^+(z, \bar{z}), & F_1^-(z, \bar{z}) &= \sum_{k=4n+2}^{8n+3} C_k q_k^-(z, \bar{z}), \\ F_2^+(z, \bar{z}) &= C_{8n+4} + \sum_{k=0}^{4n+1} C_k p_k^+(z, \bar{z}), & F_2^-(z, \bar{z}) &= \sum_{k=4n+2}^{8n+3} C_k p_k^-(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (8.26)$$

Следует отметить, что полученное решение (8.25)-(8.26) применимо для случая, когда граничные главные направления при обходе контура не получают приращение. Как было показано ранее, в этом случае индекс соответствующих краевых задач в терминах главных направлений равен нулю, что соответствует наличию двух неопределенных вещественных констант в решении для полного двумерного тензора напряжений (они представлены множителем  $a$  ( $a > 0$ ) в девиаторе и аддитивной постоянной  $b$  в среднем давлении в (8.25)). Таким

образом при применении решения по алгоритму, приведенному в этом разделе, необходимо проверять индекс главных направлений при обходе контура. На практике это может быть осуществлено методом движущегося (вдоль контура) окна, как и проделано для примеров, обсуждаемых ниже. В случае, когда данные вдоль части контура отсутствуют, проводилась линейная интерполяция. Далее в приведенных примерах реконструкции полей напряжений анализ данных показал, что в этих регионах индекс 2К может быть выбран нулем, то есть только два вещественных параметра  $a > 0$  и  $b$  остаются неопределенными в обоих решениях.

### 8.2.2. Линейная аппроксимация функций напряжений в подобластях, составляющих плоскую область

Комплексные потенциалы разыскиваются в виде кусочно-голоморфных линейных функций

$$\Psi(z) = \sum_{i=1}^N H_i(z), \quad \Phi(z) = \sum_{i=1}^N H_{N+i}(z), \quad (8.27)$$

где  $H_i(z)$  линейны в подобластях  $\Omega_i$  и равны нулю вне

$$H_i(z) = \begin{cases} c_0^{(i)} + c_1^{(i)}z & z \in \Omega_i \\ 0 & z \notin \Omega_i \end{cases}, \quad H_{N+i}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}a^{(i)} + c_2^{(i)}z & z \in \Omega_i \\ 0 & z \notin \Omega_i \end{cases}, \quad i = 1 \dots N \quad (8.28)$$

Здесь  $c_l^{(i)}$ ,  $l = 0, 1, 2$  - комплексные постоянные, в то время как  $a^{(i)}$  - вещественные.

Подставляя (8.27) и (8.28) в выражения для функций напряжений получим следующие представления

$$D(z, \bar{z}) = \sum_{i=1}^N D^{(i)}(z, \bar{z}), \quad D^{(i)}(z, \bar{z}) = \begin{cases} c_0^{(i)} + c_1^{(i)}z + c_2^{(i)}\bar{z} & z \in \Omega_i \\ 0 & z \notin \Omega_i \end{cases} \quad (8.29)$$

$$P(z, \bar{z}) = \sum_{i=1}^N P^{(i)}(z, \bar{z}), \quad P^{(i)}(z, \bar{z}) = \begin{cases} a^{(i)} + c_2^{(i)}z + \bar{c}_2^{(i)}\bar{z} & z \in \Omega_i \\ 0 & z \notin \Omega_i \end{cases}$$

Несмотря на простоту выражений (8.29), они являются достаточно общими, для того чтобы учесть наличие особых (изотропных) точек двух типов известных из фотоупругости [Kuske, Robertson, 1974]. Тип изотропной точки определяется в

соответствии с асимптотикой комплекснозначной функцией девиатора вблизи ее корней [Каракин, Мухамедиев, 1993].

Имеется семь неизвестных вещественных коэффициентов для каждой подобласти, которые в дальнейшем рассматриваются как коэффициенты упорядоченного массива

$$\mathbf{C}^{(i)} = \left( a^{(i)}, \operatorname{Re} c_0^{(i)}, \operatorname{Im} c_0^{(i)}, \operatorname{Re} c_1^{(i)}, \operatorname{Im} c_1^{(i)}, \operatorname{Re} c_2^{(i)}, \operatorname{Im} c_2^{(i)} \right), \quad i = 1 \dots N. \quad (8.30)$$

Они образуют вектор неизвестных  $\mathbf{C}$  как совокупность транспонированных строк  $\mathbf{C}^{(i)}$

$$\mathbf{C}^T = \left( \mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(2)}, \dots, \mathbf{C}^{(N)} \right). \quad (8.31)$$

Первое семейство уравнений получается путем удовлетворения условиям непрерывности (8.2) в точках коллокаций  $\zeta_k$ , что дает

$$\mathbf{M}_{\text{Con}} = \left( \mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \dots, \mathbf{U}^{(N_{\text{int}})}, \mathbf{E} \right)^T, \quad \mathbf{U}^{(n)} = \left( 0, \dots, \operatorname{Re} \mathbf{V}^{(k)}, 0, \dots, \operatorname{Re} \mathbf{V}^{(j)}, \dots, 0 \right)^T, \quad (8.32)$$

$$\left( 0, \dots, \operatorname{Im} \mathbf{V}^{(k)}, 0, \dots, \operatorname{Im} \mathbf{V}^{(j)}, \dots, 0 \right)^T,$$

где  $N_{\text{int}}$  - это номер интерфейса между  $k$ -ой и  $j$ -ой подобластями, он берется из таблицы соответствий, которая строится по специально разработанному алгоритму по оцифрованным данным о границах плит [Bird, 2003] (см. пример в следующем параграфе), а векторы  $\mathbf{V}^{(k)}$  и  $\mathbf{E}$  определяются следующим образом

$$\mathbf{V}^{(k)} = \left( 1, \frac{d\zeta_k}{d\bar{\zeta}_k}, i \frac{d\zeta_k}{d\bar{\zeta}_k}, \zeta_k \frac{d\zeta_k}{d\bar{\zeta}_k}, i\zeta_k \frac{d\zeta_k}{d\bar{\zeta}_k}, 2\operatorname{Re} \zeta_k + \frac{d\zeta_k}{d\bar{\zeta}_k}, -2\operatorname{Im} \zeta_k + i\bar{\zeta}_k \frac{d\zeta_k}{d\bar{\zeta}_k} \right) \quad (8.33)$$

$$\mathbf{E} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

Здесь вектор  $\mathbf{E}$  вводится для дополнительного уравнения, выражающего тот факт, что коэффициенты  $a^{(i)}$ ,  $i=1 \dots N$  не являются независимыми. Это, как уже упоминалось выше, является следствием формулировки, которая не включает величин напряжений.

Правая часть системы, соответствующая первому семейству уравнений, имеет вид

$$\mathbf{R}_{\text{Con}} = (0, 0, \dots, 0, \lambda)^T, \quad (8.34)$$

где коэффициент  $\lambda$  может быть выбран произвольно, в частности, принят равным нулю.

Второй набор уравнений строится на полевых данных с использованием условия (8.4), что приводят к следующей матрице

$$\mathbf{M}_{\text{data}} = \left( \mathbf{W}^{(1)}, \mathbf{W}^{(2)}, \dots, \mathbf{W}^{(N_{\text{data}})}, \mathbf{J} \right)^T, \quad \mathbf{W}^{(m)} = \left( 0, \dots, \text{Im } \mathbf{V}^{(m)}, \dots, 0 \right)^T, \quad (8.35)$$

где векторы  $\mathbf{V}^{(m)}$  и  $\mathbf{J}$  приведены ниже

$$\mathbf{V}^{(m)} = \left( 0, -e^{2i\theta_m}, ie^{2i\theta_m}, z_m e^{2i\theta_m}, i z_m e^{2i\theta_m}, \bar{z}_m e^{2i\theta_m}, i \bar{z}_m e^{2i\theta_m} \right) \quad (8.36)$$

$$\mathbf{J} = \left( 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, 1, 1, 1, 1 \right)^T$$

Последний вектор введен в систему для того, чтобы сделать ее неоднородной. Это также означает, что можно определить только нормированные максимальные касательные напряжения, то есть одна произвольная мультипликативная положительная постоянная остается неизвестной.

Общая система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) получается объединением подсистем (8.32), (8.35) следующим образом

$$\mathbf{M}\mathbf{C} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\text{Con}} \\ \mathbf{M}_{\text{data}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\text{Con}} \\ \mathbf{R}_{\text{data}} \end{pmatrix}. \quad (8.37)$$

Эта система является переопределенной она имеет  $2N_{\text{int}} + N_{\text{data}} + 2$  уравнений и  $7N$  неизвестных, ее приближенное решение находится методом наименьших квадратов (совместность проверяется путем вычисления ранга матрицы), как было описано в предыдущих главах.

Как только коэффициентами  $c_k$  найдены, решения для каждой подобласти определяются функциями напряжения в (8.29).

### 8.2.3. Конечно-элементный подход

В этом варианте решение в каждой подобласти строится на основе конечно-элементной аппроксимации, подробно описанной в Главе 6. Таким образом, к трем группам уравнений, выражающих непрерывность вектора напряжений, соосность расчетных и наблюдаемых ориентаций главных напряжений и нормализацию  $\tau_{\text{max}}$ , следует добавить уравнения (6.16)-(6.17), которые



обеспечивают (приближенно) непрерывность комплексных потенциалов на границах элементов. При этом размерность СЛАУ существенно увеличивается, но ее матрица становится сильно разреженной, что позволяет использовать хорошо разработанные алгоритмы хранения элементов и отыскания решения. Конечно-элементный подход был развит в работе [Irša, Galybin, 2011], где можно найти подробности о формировании СЛАУ. Далее будут приведены некоторые численные результаты, полученные с использования данного подхода.

### **8.3. Примеры реконструкций полей напряжений в земной коре**

#### **8.3.1. Области, состоящие из двух подобластей**

В этом пункте используются данные из проекта WSM (официальная версия 2004 года). В качестве входных данных выбираются только данные качества А-С. Реконструкции полей напряжений выполнены в двух регионах. Они включают область вблизи Суматры, где расположены эпицентры последних сильных землетрясений, и антарктическую плиту. В обоих случаях в качестве базисных функций использованы многочлены,  $H_k(z)=z^k$ .

#### **Модель поля напряжений Антарктиды**

Для определения границы Антарктической плиты используется цифровая модель границ плит [Bird, 2003]. Количество точек данных WSM 2004, обнаруженных вблизи плиты, было 353 (все они расположены ниже 40°S).

В качестве вспомогательного шага было выполнено сглаживание границы плиты по алгоритму быстрого преобразования Фурье на основе не равноотстоящих данных [Bird, 2003], что позволило провести дальнейшую параметризацию контура и аппроксимировать его замкнутой ломаной с постоянным размером сегмента, который может контролироваться при необходимости.

Дальнейшим шагом стало разделение данных на внутренние (внутри Антарктической плиты, подобласть  $\Omega^+$ ) и внешние (область вне антарктической плиты до широты 40°S, подобласть  $\Omega^-$ ). Для этой цели для пакета Mathcad был

разработан специальный алгоритм сепарации данных, который позволяет разделять данные для произвольного замкнутого контура, представленного ломаной. Было обнаружено  $N^+ = 170$  в плите и  $N^- = 183$  вне ее, их распределение показано на приведены на Рисунке 8.1.

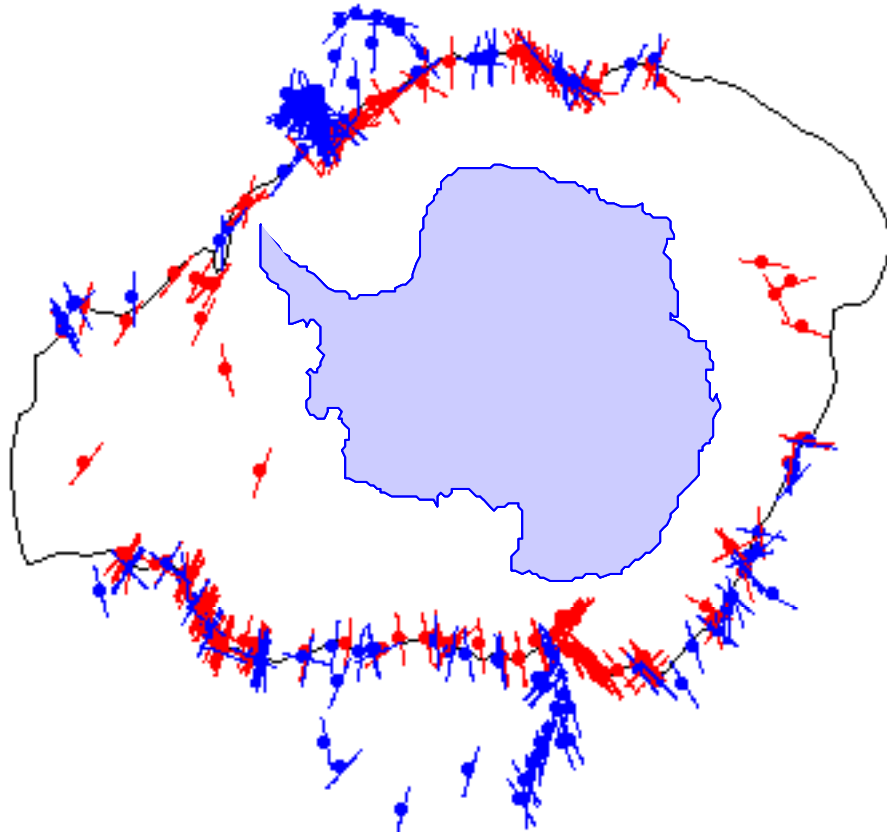


Рисунок 8.1. Геометрия и данные из проекта WSM 2004, красные сегменты – внутри плиты, синие – вне плиты.

Использовалось различное число точек коллокаций  $N^{\Gamma}$  на границе. Было установлено, что решение не очень чувствительно к числу точек коллокаций, если  $N^{\Gamma} > N^+$  (в примерах, представлены на рисунках ниже  $N^{\Gamma} = 3N^+$ ). Число искомых коэффициентов  $n$  в каждом комплексном потенциала варьировалось от 1 до 6 (в примерах ниже,  $n=2$ , таким образом, общее число неизвестных равно 20).

Результаты расчетов для внутренней области (Антарктической плиты) приведены на Рисунках 8.2 и 8.3, где соответственно приведены поля траектории напряжений, нормализованное максимальное касательное напряжение  $T_{\max} = F_1$  (Рисунок 8.3, слева) и поля среднего напряжения, в виде безразмерной функции

$F_2$  (Рисунок 8.3, справа). Результаты показывают, что поле напряжений в антарктической плите весьма неравномерно. Наличие изотропных точек в полях траекторий не обнаруживается при варьировании числа коэффициентов  $n$  в каждом комплексном потенциале от 1 до 6.

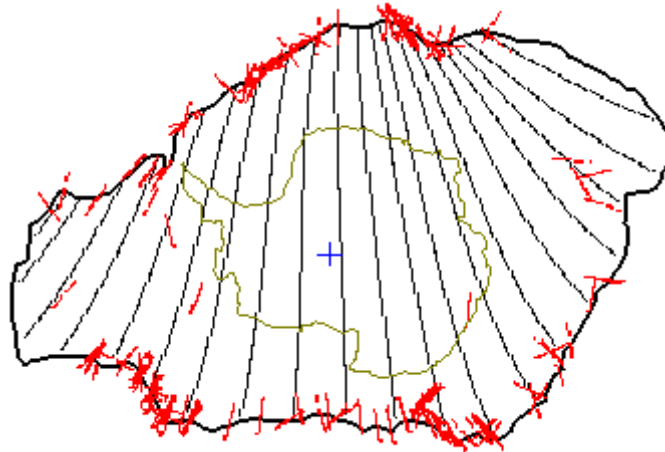


Рисунок 8.2. Расчетные траектории главных напряжений для Антарктической плиты и данные, расположенные внутри плиты.

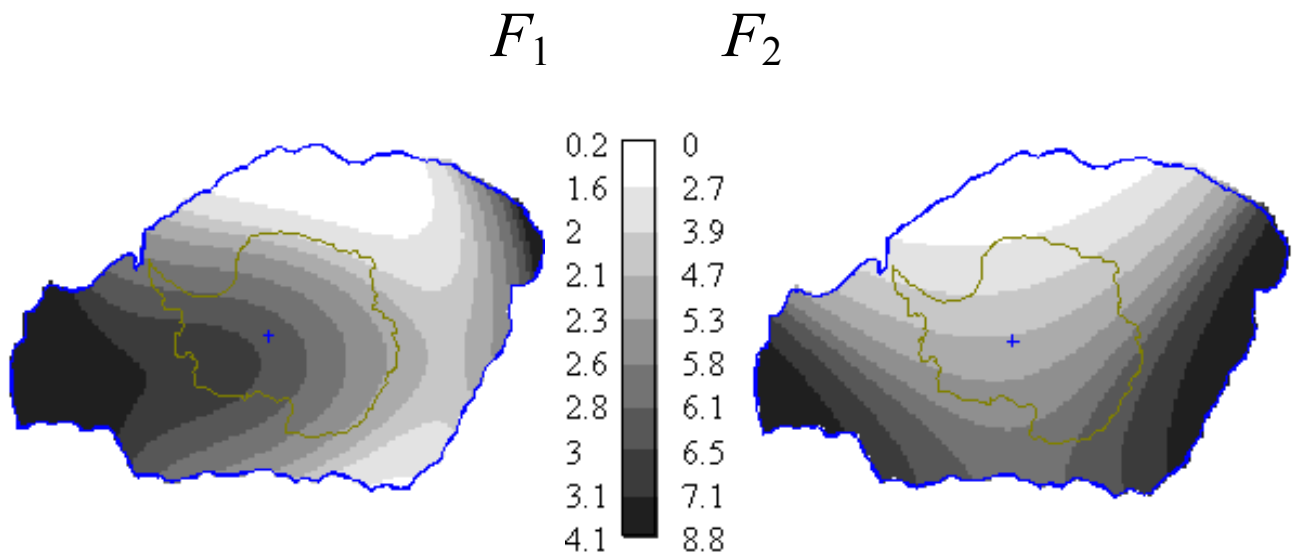


Рисунок 8.3. Пример реконструированного поля напряжений в антарктической плите: функция  $F_1$ , представляет нормированные максимальные касательные напряжения,  $T_{\max}=aF_1$ ; функция  $F_2$  представляет среднее напряжение  $P= aF_2+b$  ( $a, b - \text{const}, a>0$ ).

По данным реконструкции полей напряжений были получены распределения нормализованных напряжений по разные стороны вдоль границы Антарктической плиты. Они показаны на Рисунках 8.4 и 8.5 в зависимости от долготы. Как видно из Рисунка 8.4 расчетные нормальные ( $N$ ) и касательные ( $T$ ) напряжений, рассчитанные для внутренней и внешней областей, хорошо совпадают, что свидетельствует о том, что условия непрерывности вектора напряжений при переходе через контур удовлетворены с хорошей точностью, несмотря на приближенный характер решения из-за переопределенности системы. Полученные зависимости могут быть использованы в качестве граничных условий для проведения численных расчетов стандартными методами для более подробного анализа напряжений в Антарктиде, например, учитывающего крупные разломы и рельеф. Распределение скачков тангенциальных напряжений ( $\langle S \rangle$ ) показано на Рис 8.5. Как видно из рисунка, величина скачка незначительна по сравнению с величинами граничных напряжений (все они нормализованы на одну и ту же постоянную  $a > 0$ ).

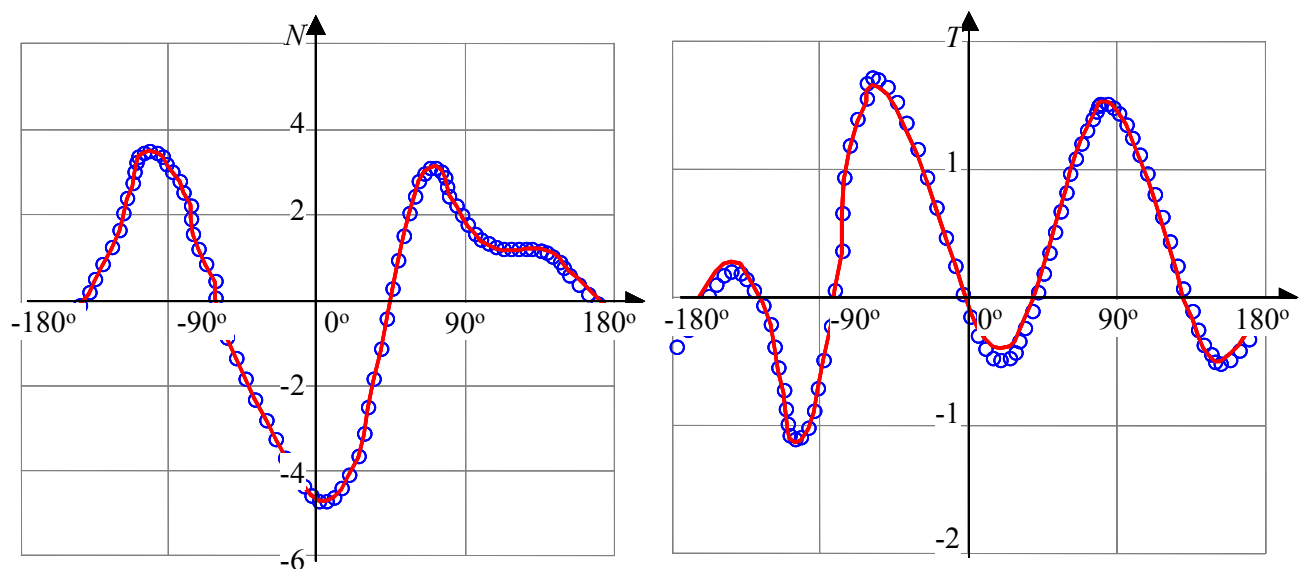


Рисунок 8.4. Распределения нормальных и касательных напряжений на границе в зависимости от долготы, сплошная кривая – решение для внутренней области, кружки – решение для внешней области.

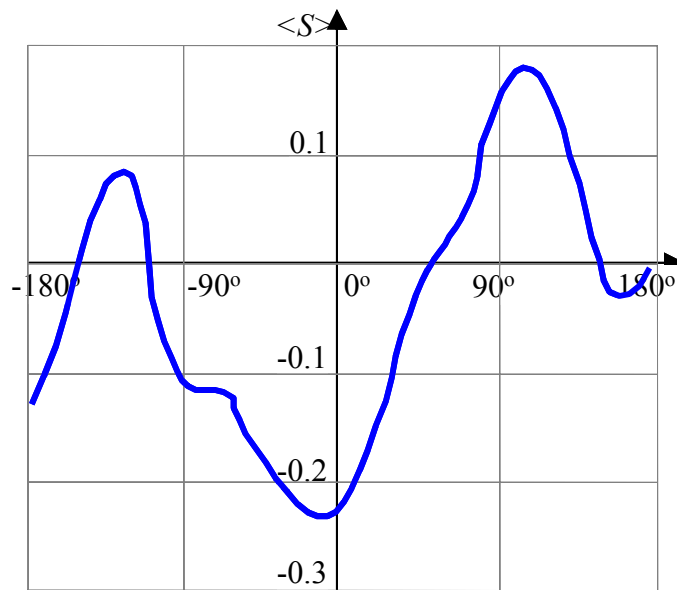


Рисунок 8.5. Распределение скачков окружного напряжения вдоль границы Антарктической плиты.

На Рисунке 8.6 показаны азимуты главных направлений вдоль границы антарктической плиты в зависимости от долготы,  $Lon$ . Сплошная кривая показывает расчетные значения, полученные в результате решения задачи, а прерывистая кривая – это простая аппроксимация вида

$$\theta(Lon) = (50 - 0.15Lon) \sin\left(\frac{\pi}{180} Lon\right). \quad (8.27)$$

Приближенные зависимости удобны для проведения расчетов в краевых задачах, в частности, подобная аппроксимация была использована для расчета пластических напряжений в Антарктиде в работе [Haderka et al., 2009].

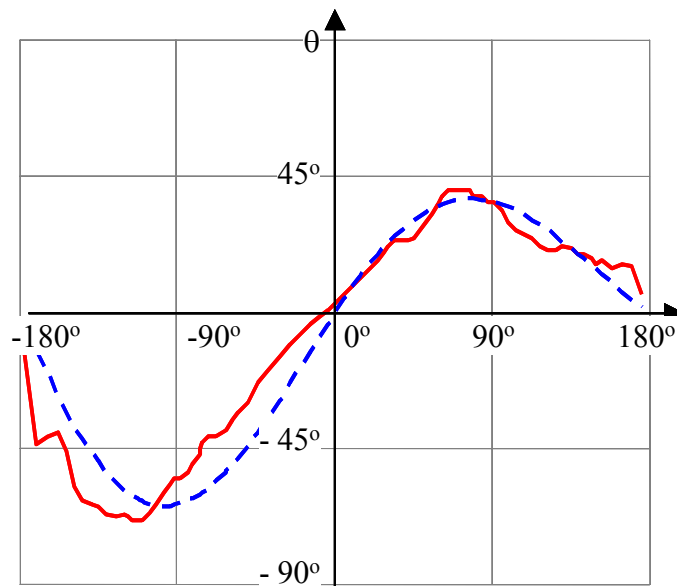


Рисунок 8.6. Расчетное распределение главных направлений на границы Антарктической плиты в зависимости от долготы – сплошная линия, аппроксимация – прерывистая линия.

### Поля напряжений вблизи Суматры

Рассматривался прямоугольный (в географических координатах) регион, ограниченный долготами  $80^{\circ}\text{W}$  и  $110^{\circ}\text{W}$  и широтами  $20^{\circ}\text{S}$  и  $10^{\circ}\text{N}$ . В нем по базе WSM 2004 было обнаружено  $N = 167$  данных А-С качества. Количество точек коллокаций выбрано таким же  $N^{\Gamma} = N$ , см. Рисунок 8.7.

Разлом Сунда представляет границу между Индо-Австралийской плитой (IAP), представленной индийской (IN) и австралийской (AU) плитами и Евразийской плитой (EAP), представлена микроплитами Сунда (SU) и Бурма (BU). Другие границы были исключены из рассмотрения, поскольку данные (приведенные на Рисунке 8.7) не показывают разницы в ориентациях главных напряжений на границах между индийской и австралийской плитами и между Сундой и Бурмой. Путем применения алгоритма сепарации было обнаружено, что из 167 точек 47 находятся в пределах IAP (подобласть  $\Omega^{+}$ ) и 120 в EAP (подобласть  $\Omega^{-}$ ).

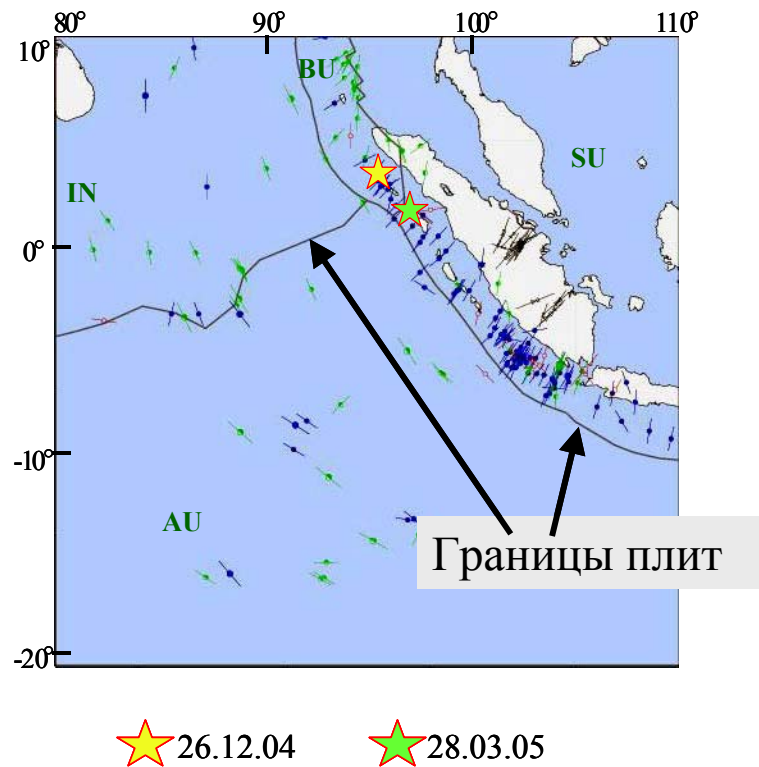


Рисунок 8.7. Регион Суматры: данные (отрезки), границы плит, эпицентры последних землетрясений 2004 и 2005 гг. Шаблон карты с данными был получен из WSM 2004.

Расчетное поле траекторий напряжений на Рисунке 8.8 подтверждает резкое изменение ориентаций напряжений по разные стороны разлома Сунды. В ЕАР траектории подходят к разлому почти перпендикулярно в IAP они, как правило, субпараллельны разлому. Это указывает на низкое сопротивление сдвигу вдоль границы между плитами.

Максимальные касательные напряжения представлены на Рисунке 8.9 вместе с эпицентрами последних крупных землетрясений. Анализ показал, что главные напряжения близки друг к другу в районе, прилегающем к разлому Сунда (светлая зона на рисунке), поскольку в этом районе максимальные касательные напряжения невелики. Эти вычисления находятся в соответствии с режимом напряжений, наблюдаемым в этой области из экспериментов (последние землетрясения 26.12.04 и 28.03.05 вызвали вертикальные движения и, как следствие, цунами).

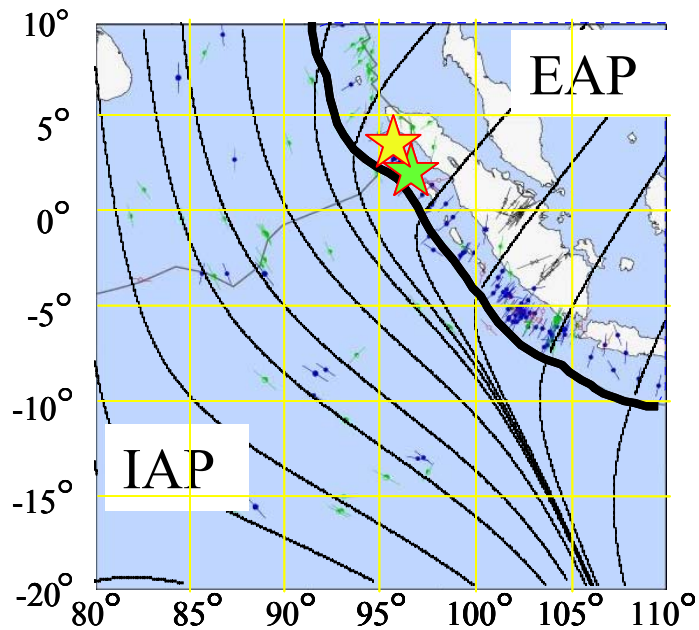


Рисунок 8.8. Траектории напряжений вблизи Суматры. Шаблон карты с данными был получен из WSM 2004. Толстая черная линия – граница между плитами. Звездочками обозначены места землетрясений 2004 и 2005 гг.

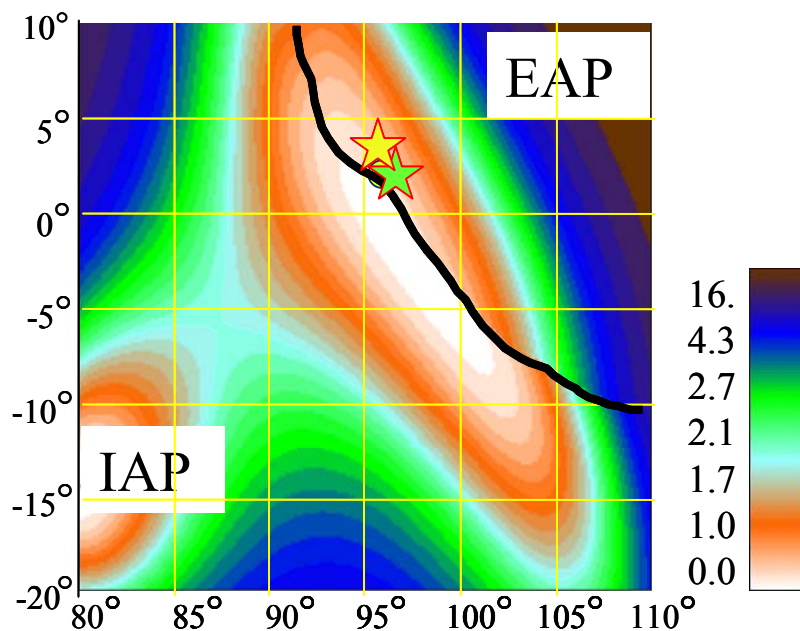


Рисунок 8.9. Поле нормированных максимальных касательных напряжений вблизи Суматры. Светлые области соответствуют низкому уровню максимальных касательных напряжений. Толстая черная линия – граница между плитами.

Звездочками обозначены места землетрясений 2004 и 2005 гг.



Рисунок 8.10 показывает распределение максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}$  вдоль широты  $3.3^\circ\text{N}$ , на которой находился эпицентр землетрясения 2004 года. Расчеты указывают на то, что точка минимума  $\tau_{\max}$  расположена по долготе в непосредственной близости от эпицентра землетрясения 26.12.04. Это обстоятельство позволяет выдвинуть гипотезу о том, что возникновение цунамигенных землетрясений наиболее вероятно в точках минимума максимальных касательных напряжений. В следующих параграфах будет проведен анализ напряжений в цунамигенных областях, основанный на данной гипотезе.

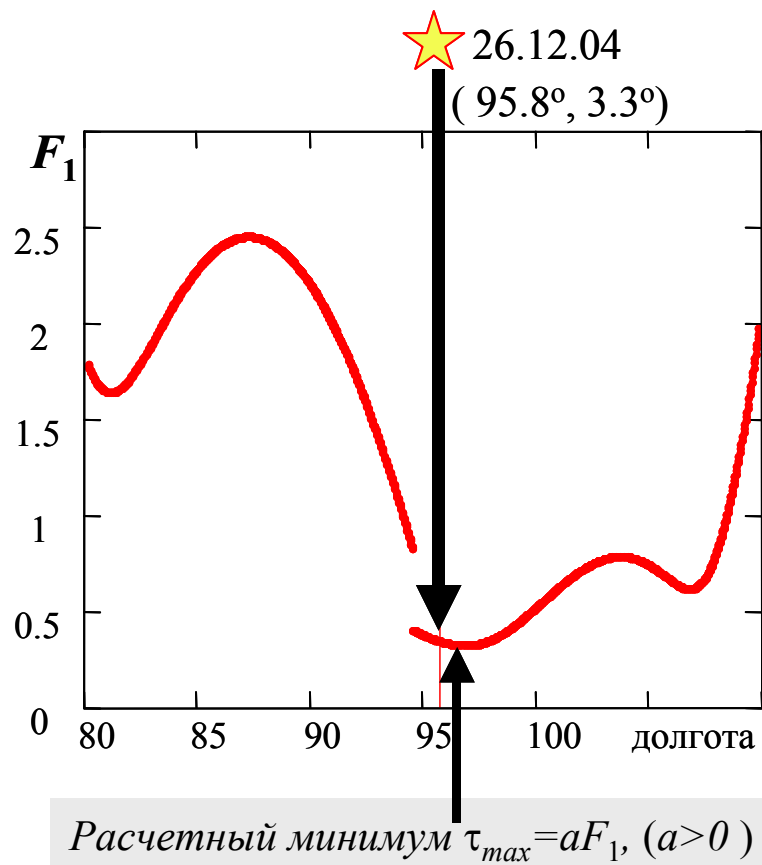


Рисунок 8.10. Профиль максимальных касательных напряжений вдоль широты  $3.3^\circ\text{N}$ .

Проведенный анализ позволяет оценить напряжения, действующие вдоль границы между IAP и EAP. Рисунок 8.11 демонстрирует профили максимальных касательных напряжений (слева) и среднего напряжения (справа) вдоль разлома

Сунда. Из-за непрерывности вектора напряжений только тангенциальное (вдоль разлома) напряжение является разрывным. Можно заметить существенную разницу в этой компоненте напряжений по обе стороны разлома (в противоположность Антарктиде, где эта разница была невелика).

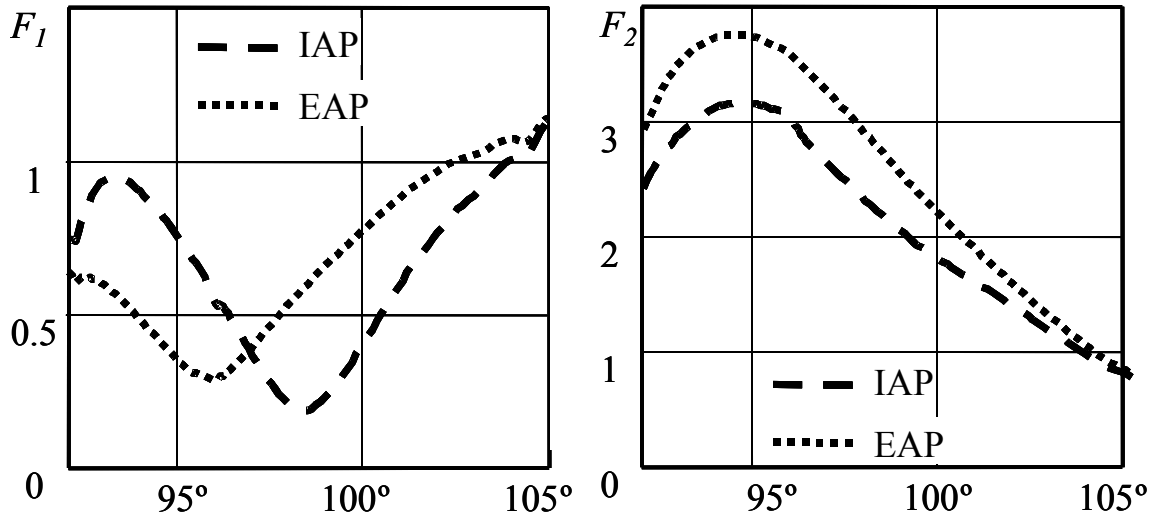


Рисунок 8.11. Напряжения вдоль разлома Сунда: максимальное касательное напряжение (слева)  $\tau_{max}=aF_1$   $a=const$ , ( $a>0$ ), среднее напряжение (справа)

$$P=aF_2+b, b=const.$$

### 8.3.2. Многосвязные области

#### Модельный пример для кусочно-линейной аппроксимации

Данные об ориентациях главных сжимающих напряжений взяты из базы данных WSM. В этом подпункте используются только данные качества А-В, что предполагает следующие допустимые ошибки в ориентациях напряжений:  $\pm 10^\circ$ - $15^\circ$  (А-качество) и в пределах  $\pm 15^\circ$ - $20^\circ$  (В-качество).

Данные о 52 границах плит оцифрованы в работе [Bird, 2003]. Каждая плита представляется упорядоченном множестве граничных точек (в географических координатах), что задает замкнутую кривую, обходимую в направлении против часовой стрелки. Последняя точка совпадает с первой точкой.

В качестве примера на Рисунке 8.12 показан фрагмент земной коры в области, заключенной между долготами  $90^\circ$  до  $140^\circ$  и широтами с  $-20^\circ$  до  $30^\circ$  с 55

данными А-качества по ориентациям напряжений. Область состоит из 16 подобластей; короткие сегменты показывают 53 ориентации наибольших сжимающих главных напряжений. Очевидно, что данные являются весьма нерегулярными и не все подобласти содержат данные.

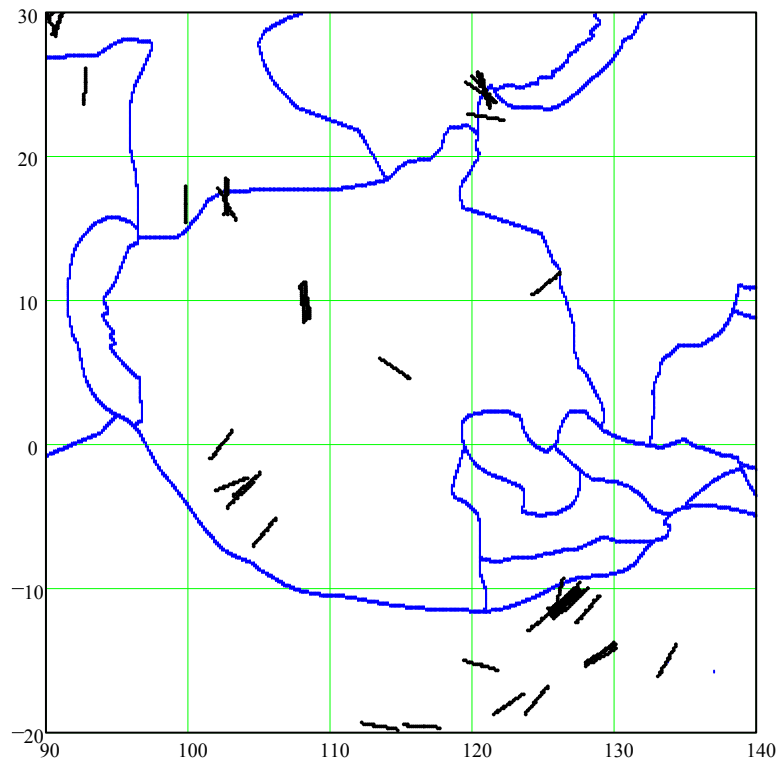


Рисунок 8.12. Область, состоящая из 16 подобластей, 35 интерфейсов, с 55 данными на ориентации напряжений.

### *Вспомогательные алгоритмы*

Были разработаны специальные алгоритмы для обработки граничных данных с целью идентификации интерфейсов между подобластями и для размещения равноотстоящих точек коллокаций на интерфейсах. Количество интерфейсов зависит от конкретной ситуации и не может быть рассчитано заранее, как в случае регулярных сеток. Например, 35 интерфейсов были найдено для области, показанной на Рисунке 8.12. Они представляют собой внутренние границы между соседними подобластями и, следовательно, существует однозначное соответствие между номером интерфейса и номерами пары граничащих подобластей.

Все интерфейсы переопределяются путем введения новых узловых точек, построенных с помощью линейной интерполяции между дискретными точками, представлявшими интерфейс изначально. Это необходимо в дальнейшем для формирования всей совокупности равноотстоящих точек коллокаций. Число узлов на разных интерфейсах различно, оно определяется длиной  $j$ -го интерфейса ( $L_j$ ) (где  $j=1\dots N_{\text{int}}$ ) и шагом ( $\Delta$ ), который вводится в качестве глобального входного параметра, поэтому число узлов на  $j$ -ом интерфейсе определяется как  $N_{\text{node}_j} = \text{floor}(L_j/\Delta)$  (функция *floor* выбирает ближайшее меньшее целое).

После первичной обработки данных сохраняется следующая информация, которая необходима для формирования системы разрешающих уравнений.

- таблица соответствия между интерфейсами и подобластями, это  $N_{\text{int}} \times 2$  матрица, ее первый столбец состоит из номеров интерфейсов, а ее второй столбец содержит номера двух соседних подобластей, границы которых формируют интерфейсы, указанные в первой колонке;
- комплексные координаты узлов на всех интерфейсах  $\zeta_k$ ,  $k = 1 \dots \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} N_{\text{node}_j}$ ;
- главные направления, углы  $\theta_m$ , в точках  $z_m$ ,  $m=1 \dots N_{\text{data}}$ ; а также
- комплексные координаты точек  $z_m$ ,  $m=1 \dots N_{\text{data}}$ , отсортированные по подобластям.

Для сортировки данных была разработана специальный алгоритм для идентификации подобласти, которой принадлежит частное данное. Этот алгоритм также используется для отображения рассчитанных полей напряжений.

#### *Реконструкция полей напряжений в модельном районе*

В качестве модели рассматривается географическая область, заключенная между долготами  $-95^\circ$  до  $-35^\circ$  и широтами  $-20^\circ$  до  $30^\circ$ . После нормализации она представляет собой квадрат  $(-1,1) \times (-1,1)$ .

Область состоит из 9 подобластей, как показано на Рисунке 8.13. Количество интерфейсов, определенных для этой конфигурации составляет 18. Безразмерная

длина интерфейсов варьируется от 0.1 до 1.32 при среднем значении 0.54, суммарная длина всех интерфейсов – 9.77. Число точек коллокаций введенных на границах составляет 105, они представлены на Рисунке 8.13 кружками.

Количество данных по ориентациям главных напряжений качества А-В внутри области – 116. Две подобласти не содержат данных, и 4 подобласти имеют 1-2 данных. СЛАУ содержит 329 уравнений и 63 неизвестных.

Результаты расчетов полей напряжений представлены на Рисунках 8.14-8.16. На Рисунке 8.14 показаны изолинии нормированных максимальных касательных напряжений, т. е. функция  $F(z)$  в выражении  $\tau_{\max}(z)=aF(z)$ , где  $a>0$  - произвольная положительная постоянная. Эта функция обращается в нуль в точке  $z^*=-0.303-0.648i$  внутри светлой области, что ассоциируется с изотропной точкой, где  $F(z^*)=0$ . Рисунок 8.15 представляет изолинии среднего гидростатического давления в масштабированной форме, т. е. функция  $H(z)$  в выражение  $P(z)=aH(z)+b$ , где  $b$  - произвольная постоянная. Поле траекторий главного сжимающего напряжения показано на Рисунке 8.16, из которого присутствие изотропной точки также очевидно.

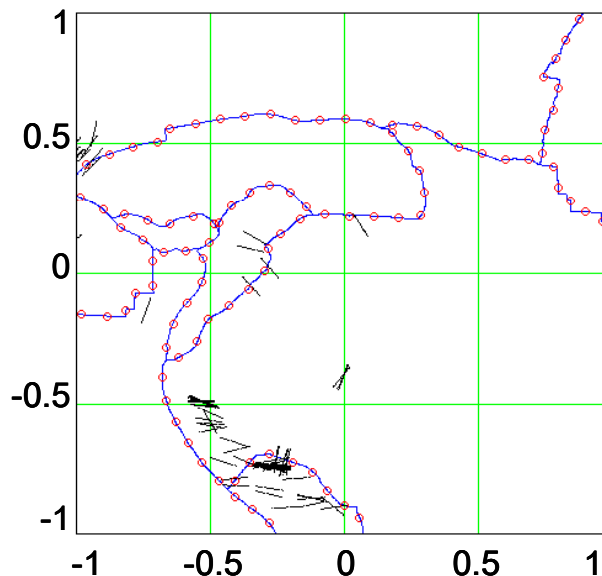


Рисунок 8.13. Расчетная области и данные; интерфейсы показаны сплошными линиями; кружки - точки коллокаций на интерфейсах; короткие отрезки представляют данные о направлениях главных напряжений.

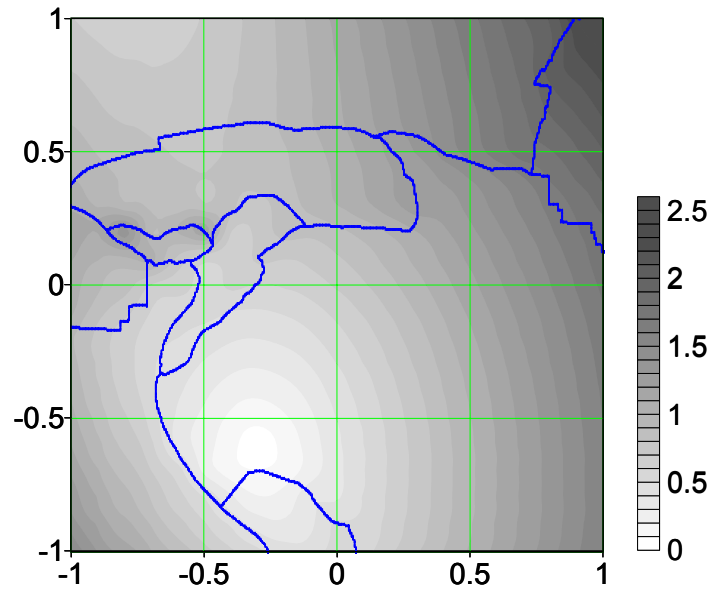


Рисунок 8.14. Изолинии максимального касательного напряжения.

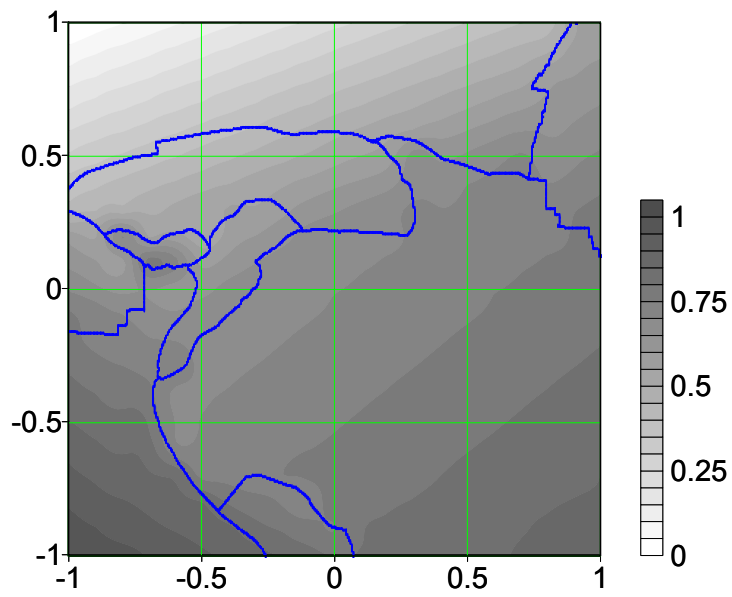


Рисунок 8.15. Изолинии среднего давления.

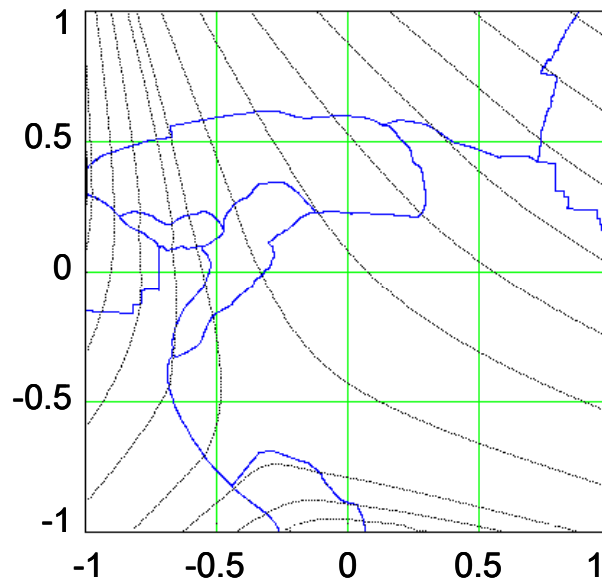


Рисунок 8.16. Поля траекторий главных сжимающих напряжений.

Поля  $\tau_{\max}(z)$  и  $P(z)$  должны иметь разрывы на интерфейсах, однако это не очень хорошо видно на Рисунках 8.14 и 8.15 из-за интерполяций, использованных для построения этих карт. Траектории напряжений также выглядят достаточно гладкими на Рисунке 8.16, однако, касательных к ним (которые и представляют ориентации главного сжимающего напряжения) испытывают скачки при переходе через интерфейсы; в некоторых коллокационных точках эти расчетные скачки составляют порядка  $10^\circ$ . На интерфейсах подобластей, в которых нет данных, напряжения остаются непрерывными. Это подчеркивает свойство разработанного алгоритма проводить гладкую интерполяцию в таких областях. С практической точки зрения те соседние подобласти, в которых нет данных, можно объединять и далее рассматривать как укрупненную подобласть, что снижает численные затраты алгоритма.

### **Цунамигенные области**

Цунами часто создаются вертикальными движениями морского дна, которые происходят в результате землетрясения, и проявляются как динамическое скольжение в вертикальном направлении вдоль разлома. Направление скольжения контролируется режимом напряжений, которые могут быть отнесены к определенной точке земной коры из анализа главных напряжений, действующих в

этой точке. Для возникновения цунами есть два благоприятных режима – сброс и надвиг (см Рисунок 1.3), они приводят к поднятию или опусканию морского дна, что и вызывает образование цунами. Эти режимы реализуются, когда вертикальное напряжение (по величине) в литосфере на данной глубине является либо наибольшим (режим NF - сброс) либо наименьшим (режим TF - надвиг) из трех главных. Если вертикальное напряжение есть промежуточное между двумя горизонтальными, то реализуется сдвиг в плоскости (режим SS), который значительно менее опасен с точки зрения возникновения цунами, поскольку это не связано с вертикальными движениями.

Дискретные данные по режимам напряжений доступны через базу данных WSM, но этого может быть недостаточно для определения режима в конкретных случаях. Например, среди четырех событий, ближайших к эпицентру ( $15.6^{\circ}\text{S}$ ,  $172^{\circ}\text{W}$ ) крупного землетрясения 29.09.2009, в WSM есть два типа TF, один SS и один NF. Это означает, что предсказания режима напряжений, основанные на статистике дискретные данные может быть неточным даже на небольших площадях. Поэтому для идентификации цунамигенных областей необходимо использовать непрерывные поля напряжений. Такую интерполяцию предлагается проводить на основе разработанного здесь метода реконструкции упругих напряжений, что позволит выделить выявить наиболее вероятный режим напряжений в регионах, где нет возможности определить его из статистического анализа дискретных данных из базы WSM. Стоит напомнить, что в отличие от предыдущих исследований здесь не вносятся никаких гипотез о движущих силах и величинах напряжений или перемещений на краях плит.

При анализе напряжений по данным до 2005 года в районе Суматры (от  $20^{\circ}\text{S}$  до  $10^{\circ}\text{N}$  и от  $80^{\circ}\text{E}$  до  $110^{\circ}\text{E}$ ) было установлено, см. Рисунки 8.9 и 8.10, что расчетная точка минимума максимальных касательных напряжений в этом районе расположена близко к эпицентру землетрясения 26.12.2004. Также было установлено наличие вытянутой зоны, расположенной вдоль границы плит, в которой наблюдается существенно меньшие  $\tau_{\max}$  чем в соседних зонах. Эпицентр



крупного землетрясения 28.03.2005 также находятся внутри этой зоны, как и эпицентр суматранского землетрясения. Это может оказаться далеко не случайным, поскольку маловероятно, что режим напряжений в этой точке может иметь тип SS, из-за того, что разница между горизонтальными напряжениями невелика. Гораздо более вероятна ситуация, когда вертикальные напряжения либо наибольшие, либо наименьшие, что соответственно определяет режимы NF или TF. Геологическая служба США (<http://earthquake.usgs.gov>) приписывает суматранскому землетрясению режим надвига, а землетрясению 28.03.2005 режим сброса. Таким образом дальнейший анализ состоит в определении областей где максимальные касательные напряжения относительно невелики. Такие области далее ассоциируются с потенциально опасными цунамигенными зонами. На этом этапе никакая другая информация, которая может быть важна для моделирования, (например, глубина, тип измерения, даты и упругие модули) не учитываются.

Рассмотрим в качестве второго примера район островов Самоа (от  $180^{\circ}\text{W}$  до  $168^{\circ}\text{W}$  и от  $25^{\circ}\text{S}$  до  $13^{\circ}\text{S}$ ), где 29.09.2009 произошло крупное землетрясение с эпицентром с координатами ( $15.6^{\circ}\text{S}$ ,  $172^{\circ}\text{W}$ ). По базе WSM в районе находятся 494 данных качества А-С. В данном районе расположены границы 6 тектонических плит с 11 интерфейсами, см. Рисунок 8.17, который также показывает поля нормализованных максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}(z)=aF(z)$  (где  $a>0$  - произвольная положительная постоянная) по трем моделям, описанным ниже. Поля напряжений нормализованы так, что среднее значения  $\tau_{\max}$  по точкам данным равно единице.

**Модель 1.** Границами плит пренебрегается и рассматривается только одна квадратная область, где решение строиться по модели глобальной аппроксимации комплексных потенциалов с использованием многочленов 4-го порядка. Изолинии максимальных касательных напряжений показаны на Рисунке 8.17а. Эпицентр события 29.09.2009 помечен звездочкой, он попадает в площадь где безразмерные максимальные касательные напряжения менее 0.25. Ближайшая

изотропная точка, где  $\tau_{\max}=0$  имеет следующие координаты (15.2°S, 171.3°W), которые не сильно отличаются от координат эпицентра землетрясения 29.09.2009.

**Модель 2.** Данная модель предполагает конечно-элементное деление всей области на прямоугольные элементы, при этом предполагается что внутри элементов комплексные потенциалы аппроксимируются линейно, а на интерфейсах они непрерывны. Последнее достигается путем приравнивания соответствующих потенциалов в коллокационных точках, расположенным на всех интерфейсах равномерно. В данном случае было введено 39 элементов трех различных размеров в зависимости от числа точек данных попадающих в элемент. На каждом интерфейсе находилось 15 точек коллокаций. Результаты показаны на Рисунке 8.17б, из которого видно, что эпицентр землетрясения 29.09.2009 попадает в зону где  $0.25 < \tau_{\max} < 0.5$  и близок к изотропной точке.

**Модель 3.** Границы между тектоническими плитами учитываются кусочно-линейной аппроксимацией, т.е. конечные элементы совпадают с плитами. Изотропная точка не определяется, но как видно из Рисунка 8.17в определяется узкая вытянутая зона пониженных максимальных касательных напряжений, значение которых в эпицентре есть,  $\tau_{\max}=0.55$ .

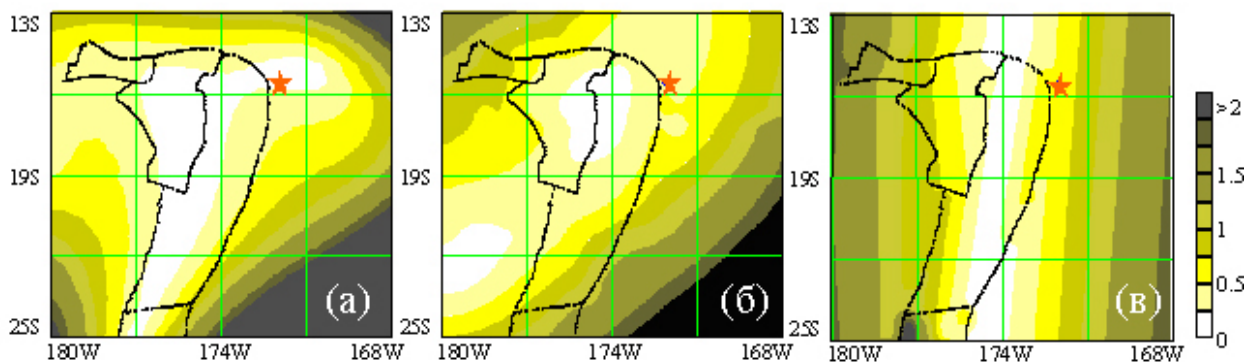


Рисунок 8.17. Три модели района Самоа – изолинии нормализованных максимальных касательных напряжений.

Изменения напряжений в цунамигенных областях после землетрясения  
26.12.2004

Одно из важных приложений разработанных методик реконструкции полей напряжений заключается в том, что по мере накопления наблюдений можно исследовать эволюцию полей современных тектонических напряжений. На практике это может оказаться весьма важным для определения потенциальных цунамигенных областей. В данном подпункте проведено исследование полей напряжений в трех таких областях – районе Сунды, где произошло крупнейшее землетрясение 2004 года, вызвавшее смертоносное цунами, районе Соломоновых островов и районе островов Тонга-Самоа, где также фиксировались землетрясения, породившие цунами. Эти три области показаны на Рисунке 8.17. Их географическое положение задается следующими координатами

- Район Сунда (долгота  $80^{\circ}\text{E}$  -  $110^{\circ}\text{E}$ , широта  $20^{\circ}\text{S}$  –  $10^{\circ}\text{N}$ ),
- Район Тонга-Самоа (долгота  $180^{\circ}\text{E}$  -  $170^{\circ}\text{W}$ , широта  $21^{\circ}\text{S}$  –  $11^{\circ}\text{S}$ ),
- Район Соломоновых островов (долгота  $142^{\circ}\text{E}$  –  $162^{\circ}\text{E}$ , широта  $14^{\circ}\text{S}$  –  $6^{\circ}\text{N}$ ).

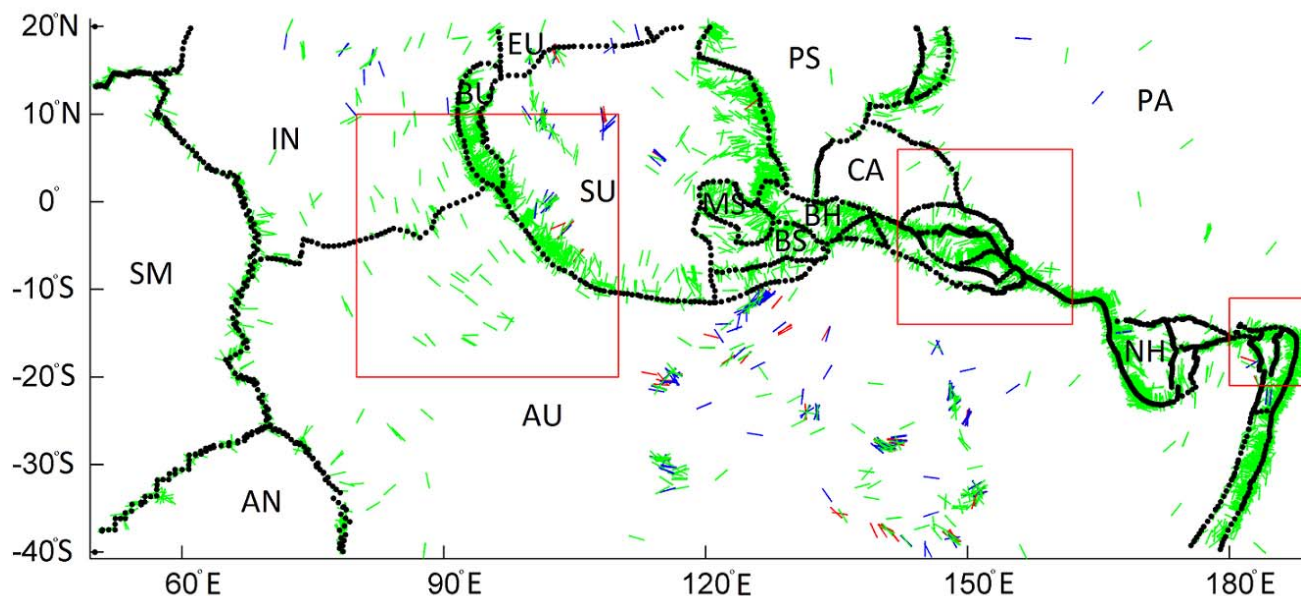


Рисунок 8.18. Цунамигенные области, квадратами отмечены три района, в которых анализируется изменения напряжений, связанное с землетрясением

26.12.2004.

Поскольку за время, прошедшее с события 26.12.2004, были получены новые данные по ориентациям напряжений, которые были включены в текущую версию базы данных WSM 2008 года, то это позволяет проанализировать изменения полей напряжений, произошедшие в результате данного события.

В районе Сунды после суматранского события 2004 года и до 2008 года (год текущей версии базы данных WSM) произошло несколько крупных землетрясений, крупнейшее из которых были в марте 2005, в мае и сентябре 2007, их магнитуды были  $M_w > 8$ . Тем не менее их суммарный сейсмический момент существенно меньше, чем у суматранского события, см электронный каталог [Ekström, Nettles, 2011]. В районе Тонга в 2007 году было одно крупное землетрясение с магнитудой  $M_w > 8$ , сейсмический момент которого составил 2.8% от суматранского. В районе Соломоновых островов также произошло одно крупное событие в апреле 2007 с сейсмическим моментом около 4% от суматранского. Таким образом можно считать, что изменения в напряженном состоянии, вызванные крупными землетрясениями 2005-2007 годов, незначительны в сравнении с изменениями из-за суматранского землетрясения 2004 года.

Задача данного исследования состоит в расчете полей напряжений до и после события 26.12.2004 в трех упомянутых областях. При этом все наборы данных, которые относятся к трем указанным областям, разделяются на два временных набора - до события 26.12.2004 и после него. Расчеты проводятся по конечно-элементному алгоритму, описанному выше и реализованному в программном виде Dr J. Irša [Irša, Galybin, 2011], при этом учитываются все границы плит, попадающие в рассматриваемый район.

Результаты расчетов полей траекторий главных напряжений и изолиний максимальных касательных (в нормализованном виде  $\tau_{\max}(z) = aF(z)$ , где  $a > 0$  - произвольная положительная постоянная.) и средних напряжений (в масштабированном виде,  $P(z) = aH(z) + b$ , где  $b$  - произвольная постоянная) приведены на рисунках ниже.

На Рисунке 8.19 приведены результаты для района Сунда. Расчет основан на использовании данных А-С качества, которых было 269 до 26.12.2004 и 585 после него. Отметим, что новые данные расположены в основном вдоль границы, поэтому результаты на отдалении от нее менее надежны, чем для реконструкции полей для ранних данных.

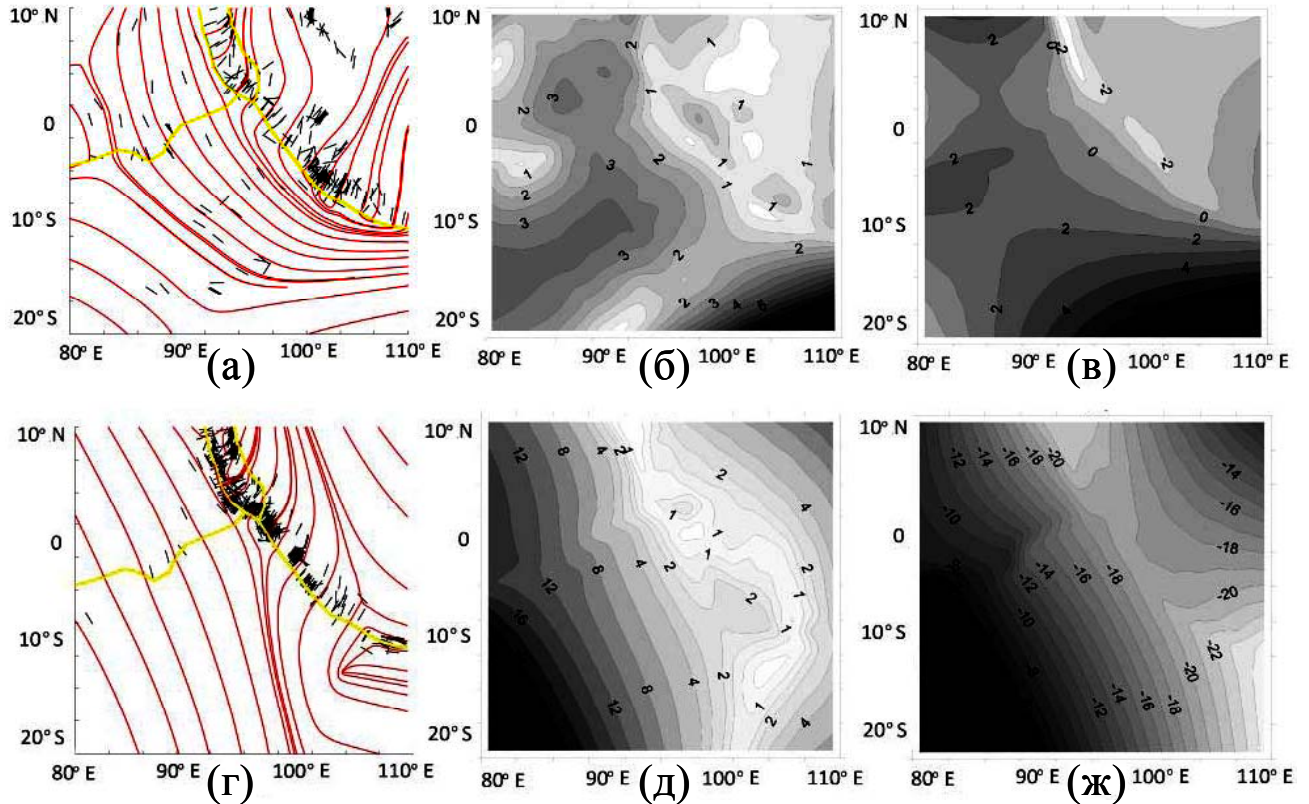


Рисунок 8.19. Напряжения в районе Сунда до 26.12.2004 (верхний ряд) и после 26.12.2004 (нижний ряд). Траектории главных напряжений (а) и (г), нормализованные максимальные касательные напряжения (б) и (д), масштабированные средние напряжения (в) и (ж).

Расчеты показывают, что поле траекторий претерпело существенные изменения в районах, где нет новых данных, однако изменения заметны и в южной части границы, где траектории перестали разворачиваться перпендикулярно, как было до землетрясения. Минимум  $\tau_{\max}$  сдвинулся на юг по границе между австралийской плитой и плитой Сунда, и более того расчеты указывают на появления изотропной тоски, чего не наблюдалось для ранних



данных. Поле средних напряжений также существенно изменилось. Таким образом можно заключить, что в результате землетрясения в поле напряжений в районе Сунда произошли существенные изменения.

В районе Соломоновых островов, расположенных на удалении порядка  $60^\circ$  от эпицентра суматранского землетрясения изменения полей напряжений менее существенно. Здесь найдены 641 данных качества С, 411 из которых получено до 26.12.2004 и 230 после. В районе 9 плит их обозначения на Рисунке 8.20 дано в сокращениях, принятых в Bird (2003). Качественные картины полей напряжений не претерпели существенных изменения, хотя разница заметны в некоторых частях области.

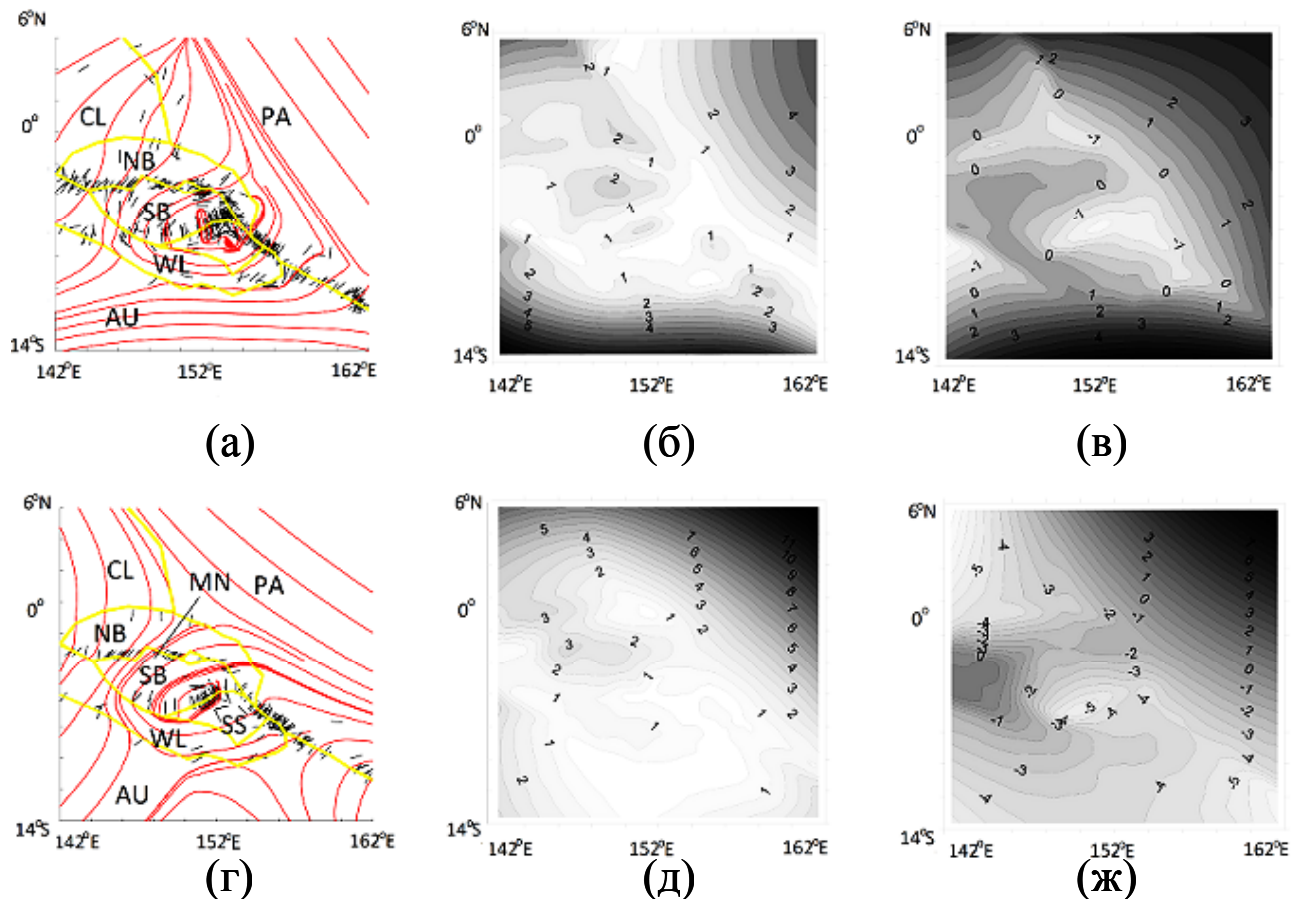


Рисунок 8.20. Напряжения в районе Соломоновых островов до 26.12.2004 (верхний ряд) и после 26.12.2004 (нижний ряд). Траектории главных напряжений (а) и (г), нормализованные максимальные касательные напряжения (б) и (д), масштабированные средние напряжения (в) и (ж).

На Рисунке 8.21 представлены поля напряжения в районе островов Тонга-Самоа, который состоит из 5 плит с 8 интерфейсами между ними. В базе WSM обнаружено 204 данных накопленных до 26.12.2004 и 135 данных полученных после. Основываясь на этих данных было установлено, что различия полей напряжений до и после суматранского землетрясения незначительны.

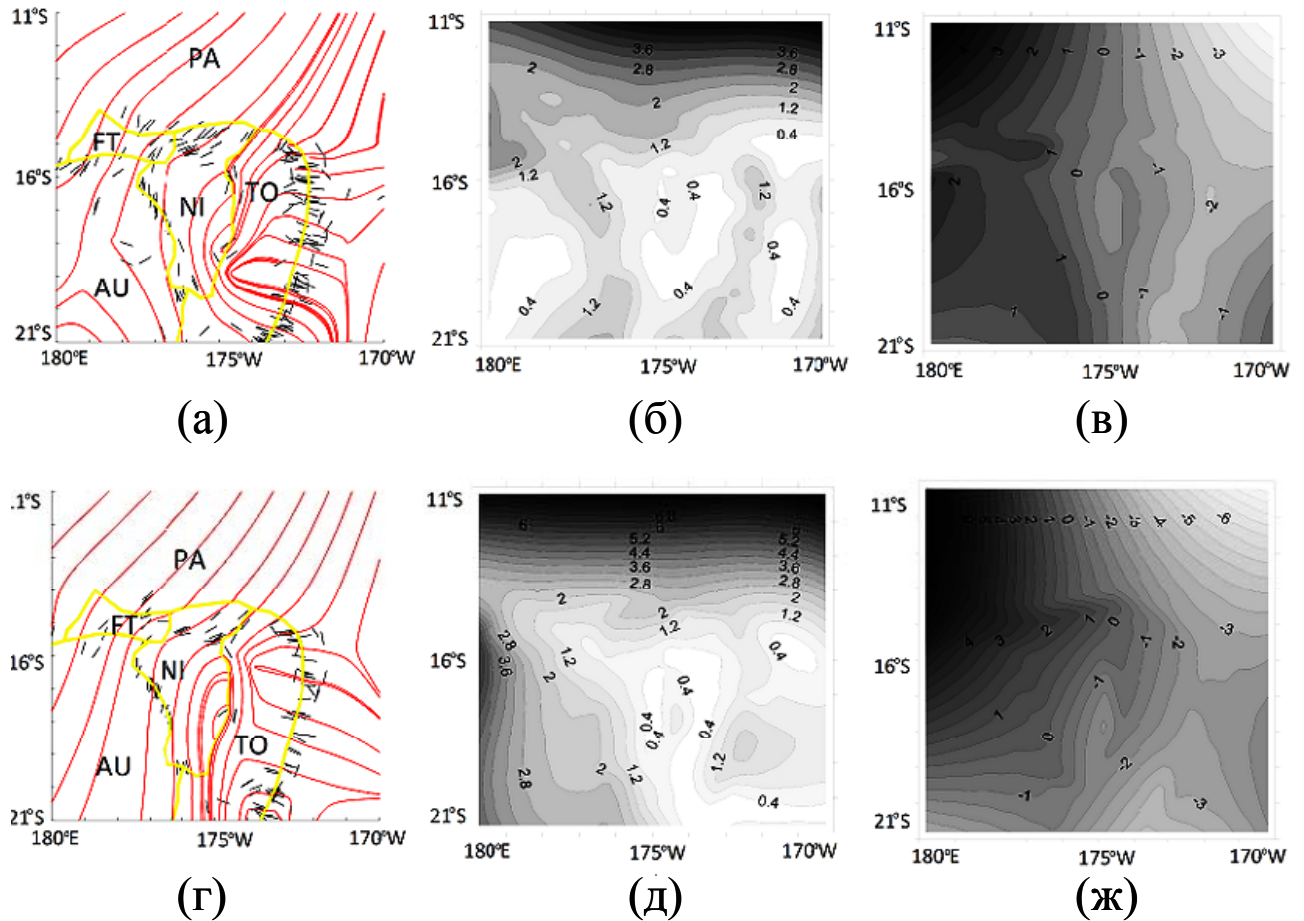


Рисунок 8.21. Напряжения в районе островов Тонга-Самоа до 26.12.2004 (верхний ряд) и после 26.12.2004 (нижний ряд). Траектории главных напряжений (а) и (г), нормализованные максимальные касательные напряжения (б) и (д), масштабированные средние напряжения (в) и (ж).

Как видно из Рисунков 8.21(а,г) есть разница в поле траекторий в австралийской плите, однако там нет данных, собранных после 26.12.2004 на удалении от границы, поэтому качество восстановления поля напряжений в юго-западной части этого района может быть невысоким. При сравнении этих

расчетов с расчетами, выполненными по всему набору данных (без временного деления), см. Рисунок 8.17, обнаруживаются различия, которые особо проявляются в тех частях, где нет данных. Как уже отмечалось реконструкции напряжения в таких местах являются менее надежными и, следовательно, более зависимыми от выбора алгоритма реконструкции.

#### **8.4. Выводы по главе**

В главе предложен и реализован численный подход для реконструкции плоских тензоров напряжений в составной области с несколькими внутренними интерфейсами. В этом методе в качестве входных данных используются только данные по ориентациям главных напряжений и условия непрерывности вектора напряжений на интерфейсах между соседними плитами. При этом, на основе анализа данных базы WSM, показано, что для рассмотренных районов

- решение для компонент напряжений содержит две произвольные вещественные постоянные;
- максимальное касательное напряжение (действующее в плоскости) содержит одну неизвестную мультипликативную постоянную;
- траектории напряжений единственны.

Анализ для двух соседних областей был выполнен для антарктической плиты и для области вблизи Суматры, где произошло разрушительное землетрясение 2004, вызвавшее цунами. Проанализированы поля траекторий напряжений и максимальных касательных напряжений. В частности, результаты для региона Суматра показывают, что эпицентры последних крупнейших землетрясений расположены в областях где максимальное касательное напряжения (действующее в плоскости) имеет низкий уровень, что объясняет возникновение разрушительных цунами в этом регионе исходя из анализа режима напряжений.

Для областей, состоящих из нескольких плит со сложными границами, были проведены расчеты в цунамигенных регионах. Анализ полей напряжений подтверждает, что эпицентра крупных землетрясений, которые вызывают цунами,



располагаются в областях с низкими значениями максимальных касательных напряжений. Это обстоятельство дает возможность провести районирование сейсмоактивных областей по режимам напряжений и установить области, где возникновение цунами наиболее вероятны.

Разработанные алгоритмы также позволили провести анализ изменения полей упругих напряжений, которые вызываются крупнейшими землетрясениями. Так на примере суматранского землетрясения 2004 года было установлено, что в районах близких к его эпицентру произошло существенное перераспределение напряжений, что вероятно, связано с развитием крупного разлома. При удалении от эпицентра влияние разлома убывает (район Соломоновых островов) и становится незначительным на далеком расстоянии (район острова Тонга-Самоа). Представляется, что указанная методика может быть использована для мониторинга накопления упругих напряжений в сейсмических районах земной коры, что будет способствовать прогнозам возникновения крупных землетрясений.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе предложены новые подходы к реконструкции полей напряжений в упругих областях геосреды на основе решений некорректных задач теории упругости. Последние включают в себя:

- краевые задачи с неполными граничными условиями, что выражается в неединственности решения, при этом доказана возможность существования конечного числа решений, зависящих линейно от конечного числа параметров, число которых определяется из анализа граничных условий;

- оптимизационные задачи по реконструкции напряжений по данным о главных ориентациях плоского тензора напряжений в дискретных точках, расположенных как внутри рассматриваемых областей, так и на границах.

На основе анализа современных литературных источников было установлено, что используемые до настоящего времени методы реконструкции упругих напряжений в земной коре, не являются совершенными. Интерполяционные и статистические методы не позволяют обеспечить выполнение основных уравнений механики сплошной среды, в то же время простейшие модели равновесия геосреды не учитывают тектонических напряжений и не находятся в согласии с натурными измерениями. Поэтому было указано на необходимость разработки соответствующих моделей, свободных от этих недостатков. В данной работе принята упругая статическая модель, которая удовлетворяет как условиям равновесия объемов геосреды, так и согласуется с наблюдаемыми индикаторами напряжений. В главе 1 было показано (на основе анализа, основанного на подходе Тимошенко и Гудьера [1979]), что общая трехмерная задача распадается на суперпозицию одномерной и плоской задач при условии, что вертикальное напряжение в каждой точке является одним из главных. При этом для плоской задачи необходимо разработка методов решения, учитывающих данные по ориентациям главных горизонтальных напряжений, что и послужило основной целью данной работы. Однако использование традиционных постановок краевых задач теории упругости, основанные на решении обратных краевых задач теории

упругости, приводит к тому, что при использовании одних и тех же данных различные модели обнаруживают существенные различия в реконструированных полях напряжений, причем как количественные, так и качественные, на что и было указано в главе 1. Более того на простом примере показано, что подход, основанный на решении обратной задачи теории упругости, использующей оптимизацию отклонения расчетных напряжений от экспериментальных данных, вносит сильный произвол в определение величин тензора напряжений. Эти обстоятельства позволили определить основные направления исследований, которые подробно сформулированы в конце главы 1. Главным образом они касаются исследования разрешимости некорректных задач теории упругости с граничными условиями не содержащими сведений о величинах граничных напряжений, усилий или смещений, а используют только информацию о направлениях напряжений (усилий или смещений), разработку численных подходов для решения таких задач, а также некраевых задач для реконструкции упругих полей по дискретным данным о направлениях главных напряжений. Основным теоретическим инструментом анализа является подход, разработанный Гаховым [1977], который устанавливает разрешимость сингулярных интегральных уравнений по исследованию разрешимости соответствующей краевой задачи Римана. Для разработки численных алгоритмов основой послужил метод Трефтца для комплексных потенциалов.

В главе 2 дано систематическое изложение теории упругости в случае плоской задачи с использованием комплексных переменных с учетом объемных сил. В частности, показано, что для гармонических массовых сил функция Эйри по-прежнему остается бигармонической функцией, а средние напряжения – гармонической функцией. Последнее обстоятельство важно, т.к. допускает обобщение на случай, когда реология среды не является упругой. Действительно, если при статистической обработке результатов измерений удастся установить, что шаровая часть тензора напряжений может быть аппроксимирована гармонической функцией, то все постановки краевых задач, в которых не используется закон Гука, являются эквивалентными упругим постановкам. В той

же главе определены необходимые условия, налагаемые на гладкую функцию двух переменных, при которых она может рассматриваться в виде поля траекторий главных напряжений, допустимого в упругости. Это подчеркивает факт, что не любая сетка, представленная системой двух семейств ортогональных кривых, может рассматриваться в виде траекторий главных напряжений в упругой постановке, что сужает число интерполяционных методов, способных реконструировать траектории по дискретным данным.

### **Основные результаты работы**

1. В главе 3 на основе подхода Гахова для интегрального уравнения, содержащего комплексно сопряженную неизвестную функцию, разработана общая методика исследования краевых задач теории упругости с однородной правой частью, которая состоит с следующим.

- Комплексные потенциалы представляются в виде интегралов типа Коши с двумя неизвестными плотностями, при этом выбираются некоторые соотношения между искомыми функциями, которые позволяют либо автоматически удовлетворить одно из граничных условий, либо упрощают вид получаемых далее интегральных уравнений.

- Путем подстановки комплексных потенциалов в краевые условия получается система двух скалярных сингулярных интегральных уравнений, которые при необходимости собираются в одно комплексное общего вида.

- Число линейно независимых решений полученного уравнения определяется путем исследования характеристического уравнения или эквивалентной ему задачи Римана.

- Переход к интегральным уравнениям, приспособленным для численных расчетов, что достигается либо путем его сведения к уравнению Фредгольма способом Карлемана-Векуа, либо путем суперпозиции общего решения однородного характеристического уравнения и частного решения полного неоднородного уравнения.

Эти результаты обосновывают защищаемое положение 1.

2. В главах 4 и 5 проведен анализ разрешимости нескольких краевых задач теории упругости с «неполными граничными условиями». Во всех формулировках полностью отсутствовали данные по величинам векторов напряжений, усилий и смещение на границе внутренней области либо на контуре, делящим упругую плоскость на внутреннюю и внешнюю области. Анализ выполнен по схеме, указанной в предыдущем пункте. Во всех исследованных задачах было определено, что их решение зависит от поведения граничных значений аргументов комплекснозначных функций напряжений, смещений или усилий, которые определяют индекс соответствующей краевой задачи Римана, а, следовательно, и число линейно независимых решений и число произвольных постоянных, входящих в решение.

Были установлены следующие выводы.

- В задаче с граничными условиями, заданными через главные направления тензора напряжений и кривизну траекторий главных напряжений, индекс краевой задачи Римана определяется только числом оборотов оси главных напряжений при обходе всего замкнутого контура в положительном направлении (против часовой стрелки). При этом индекс положителен, если ось вращается по часовой стрелке и отрицателен, если против часовой стрелки. В последнем случае задача не разрешима в классе голоморфных функций. При положительном индексе число независимых решений задачи пропорционально числу оборотов.

- Аналогичные результаты для указанной выше задачи были получены для случая круговой области. При этом приведено альтернативное решение на основе метода Мухелишвили, которое использует разложение комплексных потенциалов в степенные ряды. Оно полностью совпало с решением, полученным методом интегральных уравнений, что свидетельствует о достоверности результатов проведенного исследования.

- Для задачи с однородными граничными условиями получено однородное поле траекторий главных напряжений, что является важным прикладным результатом, в соответствии с которым, если однородные поля упругих

траекторий определяются каким-то иным методом, то они не должны допускать каких-либо локальных искажений. При этом, поле полных напряжений может зависеть от пяти произвольных вещественных постоянных.

- В задаче с граничными условиями, заданными через ориентации векторов усилий и смещений было показано, что индекс определяется приращением разности аргументов векторов смещений и усилий при обходе контура, что также есть целое число. Для разрешимости задачи необходимо, чтобы индекс был неотрицателен, в противном случае задача не имеет решения.

- Приведены решения указанной выше задачи для двух частных случаев, а именно, для случая кругового контура, которое получено методом разложений в ряды при частном виде граничных условий, и задачи для произвольного контура в случае соосных ориентаций векторов смещений и усилий, который сведен к двум краевым задачам Гильберта. В обоих частных случаях результаты, полученные другими методами, согласуются с результатами, полученными на основе общего подхода.

- Для случая полуплоскости в аналитическом виде решена краевая задача с граничными условиями, заданными через ориентацию вектора смещений и главные направления тензора напряжений. Показано, что число линейно независимых решений этой задачи определяется суммой числа оборотов осей главных напряжений и вектора смещений. Поскольку задача для полуплоскости соответствует характеристическому сингулярному интегральному уравнению задачи для произвольного контура, то вывод о разрешимости данной задачи остается верным и для произвольного гладкого контура. Следует отметить, что это решение представляет практический интерес, поскольку на практике доступны не только данные по ориентациям главных напряжений, но и данные по направлениям смещений.

Указанные результаты обосновывают защищаемое положение 2.

3. В главах 4 и 5 также проведен анализ разрешимости краевых задач теории упругости для составной плоскости с транзитными условиями на контуре,

разделяющим плоскость на внутреннюю и внешнюю области при условии непрерывности вектора напряжений при переходе через контур. Он включает в себя следующие случаи.

- По разные стороны контура заданы различные ориентации векторов усилий и смещений. В этом случае возникает четыре возможные формулировки, исследованные в параграфе 4.4. Показано, что во всех случаях, аналогично случаю внутренней области, число линейно независимых решений зависит от индекса, который определяется по разности числа оборотов векторов смещений и усилий после полного обхода контура. При этом для разрешимости задачи необходимо, чтобы индекс для внутренней области был не менее индекса для внешней области.

- Заданы различные главные направления тензора напряжений по разные стороны контура. В данном случае показано, что разрешимость задачи определяется разностью индексов для внутренней и внешней задач, а именно, число оборотов оси максимального главного напряжения при обходе контура против часовой стрелки при предельном переходе к контуру снаружи должно превышать их число, полученное переходом изнутри. Показано, что краевые условия не могут быть заданы произвольно, а должны удовлетворять ограничениям, налагаемым на геометрию траекторий главных напряжений, которая следует из рассмотрения условий равновесия на границе между областями.

- По разные стороны контура, разделяющего области, состоящие из разномодульных материалов, заданы направления векторов смещения. Показано, что, несмотря на то, что коэффициенты задачи Римана зависят от упругих свойств обеих областей, число решений остается таким же, как и в случае одномодульных областей. Этот вывод имеет практическое значение при рассмотрении контактирующих тектонических плит разной жесткости, поскольку указывает на то, что такой случай, по существу, не отличается от случая плит, имеющих

одинаковые упругие модули, что важно для разработки численных методов решения задач по реконструкции напряжений в составных областях.

Указанные выше результаты обосновывают защищаемое положение 3.

4. В главе 6 предложена методика реконструкции полей напряжений по заданным дискретным главным направлениям напряжений внутри упругой области. Она основана на методе Трефтца для комплексных потенциалов теории упругости и на задаче оптимизации невязки между расчетными и заданными ориентациями главных напряжений. Разработаны два основных варианта методики.

- В первом варианте комплексные потенциалы теории упругости аппроксимируются по всей области глобально линейными комбинациями голоморфных функций с комплексными коэффициентами, подлежащими определению. Последние находятся из системы линейных алгебраических уравнений, которая следует из задачи минимизации расчетных и экспериментальных данных по ориентациям главных напряжений. Поскольку такая система является однородной, то вводится дополнительное уравнение, которое выражает нормировку максимальных касательных напряжений.

- Второй, конечно-элементный вариант метода, предполагает разбиение области на элементы и использует кусочно-полиномиальные аппроксимации комплексных потенциалов внутри элементов, что позволяет отнести его к гибриднему методу МКЭ-Трефтца. Он также требует введения условия нормировки, поскольку в противном случае система остается однородной.

- В обоих случаях система линейных алгебраических уравнений является переопределенной, поэтому ее приближенное решение строится методом наименьших квадратов. При высоком значении числа обусловленностей системы, для обеспечения устойчивости реконструкции полей напряжений, используется либо SVD регуляризация, либо, при больших размерностях матрицы системы, итерационный LSQR алгоритм. Оба численных метода показали высокую эффективность при решении тестовых примеров.



- Для определения эффективности метода были рассмотрен ряд синтетических примеров (с целью оптимального выбора системы базовых голоморфных функций) и примеров из фотоупругих экспериментов, которые позволяют визуализировать сравнение реконструированных полей изолиний максимальных касательных напряжений и интерференционной картины полос, наблюдаемых в опыте. Проведенные расчеты указывают на эффективность метода и способность идентифицировать, так называемые, изотропные точки в полях траекторий главных напряжений (в которых не существует главных направлений) по дискретным наборам данных без предварительного определения позиций таких точек. Также даны рекомендации для практических расчетов по выбору числа базисных функций в зависимости от числа и качества данных.

Эти результаты обосновывают защищаемое положение 4.

5. В главе 7 предложенная методика реконструкции упругих напряжений была применена для анализа современных напряжений и эволюции палеонапряжений в земной коре в некоторых регионах Земли, которые рассматривались как односвязные области. Во всех случаях в качестве входной информации использовались данные по азимуту оси главных сжимающих напряжений. Были установлены следующие результаты.

- Реконструкции полей современных напряжений в Западной Европе по большому числу наблюдений, взятых из мировой базы данных WSM, демонстрируют однородность поля траекторий главных напряжений со средним азимутом наклона траекторий около  $-60^\circ$ , что согласуется с результатами предыдущих исследований, выполненных другими методами.

- На основе базы данных ИФЗ по трещиноватости осадочных пород приведены реконструкции полей палеонапряжений в четырех регионах Земли в различные геологические эпохи, что позволяет обсуждать эволюцию палеонапряжений с привлечением геомеханического подхода.

- Исследовано поле напряжений в австралийском континенте с привлечением трех подходов, а именно, полиномиальная и конечно-элементная реконструкции

по методу главы 6, а также приближенное аналитическое решение, основанное на решении краевой задачи, с граничными условиями в виде ориентаций главных напряжений, приведенной в главе 5. Во всех случаях было установлено существование изотропной точки внутри континента, что объясняет (наблюдаемое экспериментально) резкое вращение оси главных напряжений, ориентированной З-В на юге континента на, примерно, С-Ю в его центре.

- На основе расчетов для австралийского континента был проанализирован вопрос о соответствии числа измерений числу базисных функций в полиномиальной аппроксимации или количеству элементов в конечно-элементном подходе. Было установлено, что из-за существенного разброса данных (в лучшем случае в  $\pm 15^\circ$ ), стандартный подход, в котором достаточно добиться минимальной невязки, не может быть непосредственно перенесен на задачи реконструкции напряжений в земной коре. Предложены два основных подхода. Первый - проводить кластерный анализ, что позволяет установить оптимальную степень базисных многочленов. Второй – контролировать, помимо невязки, число обусловленностей (для обеспечения стабильных результатов реконструкции) и использовать минимальные степени многочленов, которые обеспечивают отклонения реконструированных главных направлений от экспериментальных данных в пределах диапазона разброса совокупных данных разного качества, оценочно  $\pm(20^\circ-25^\circ)$ .

- Предложенный подход существенно отличается от традиционного моделирования упругих полей, основанного на использовании специально подобранных (или «фиктивных») граничных условий в терминах напряжений, усилий или смещений. Основное достоинство предложенного метода состоит в том, что результаты реконструкций полного тензора напряжений зависят от вполне определенного (и небольшого) числа параметров. Более того в большинстве случаев реконструкции полей траекторий выполняется единственным образом, а поля максимальных касательных напряжений находятся с точностью до нормировочной константы. Полное поле линейно зависит от двух констант, которые могут быть определены из решения задачи регрессии, если

известны величины компонент напряжений в некоторых точках, на что указано в конце главы 7.

Данные результаты обосновывают защищаемые положения 4 и 6.

6. В главе 8 реализован численный подход для реконструкции плоских тензоров напряжений в составной области с одним или несколькими внутренними границами. В качестве входных данных используются только данные по ориентациям главных напряжений и приняты условия непрерывности вектора напряжений на границах между соседними плитами. Были проведены реконструкции полей напряжений для следующих случаев.

- Для Антарктической плиты, которая рассматривается как внутренняя область, а все прилегающие плиты как единая внешняя. Поскольку данные по направлениям известны в основном по границам Антарктической плиты, то фактически показана эффективность метода реконструкции напряжений по методу Трефтца для случая краевой задачи с транзитными граничными условиями для составной плоскости.

- Для области вблизи Суматры, где произошло разрушительное землетрясение 26.12.2004, вызвавшее цунами, проанализированы поля траектории напряжений и максимальных касательных напряжений. Показано, что эпицентры последних крупнейших землетрясений расположены в области, где максимальное касательное напряжения (действующее в плоскости коры) имеет наиболее низкий уровень, что объясняет возникновение разрушительных цунами в этом регионе исходя из анализа режима напряжений.

- Для областей, состоящих из нескольких плит со сложными границами, были разработаны алгоритмы расчета напряжений на основе кусочно-линейных аппроксимаций в подобластях и проведены реконструкции полей напряжений в цунамигенных регионах. Анализ полей напряжений подтверждает, что эпицентры крупных землетрясений, которые вызывают цунами, тяготеют к областям с низкими значениями максимальных касательных напряжений.

- Для трех регионов (Суматры, Соломоновых островов и островов Тонга-Самоа) проанализированы изменения полей упругих напряжений, вызванные суматранским землетрясением 2004, путем разбиения всего массива данных на два временных промежутка, собранных до 26.12.2004 и после (по базе данных WSM 2008 года). Было установлено, что в районах близких к его эпицентру произошло существенное перераспределение напряжений, что вероятно, связано с развитием крупного разлома. При удалении от эпицентра механическое влияние разлома убывает (район Соломоновых островов) и становится незначительным на далеком расстоянии (район острова Тонга-Самоа).

Результаты исследований, приведенный в главе 8, обосновывают защищаемые положения 5 и 7.

### **Рекомендации для направления будущих исследований**

Представляется, что разработанные методики для реконструкции напряжений в земной коре могут быть полезны для исследователей, работающих над изучением как современных полей напряжений, так и палеонапряжений, и ее применение специалистами в геодинамике будет способствовать более глубокому пониманию физических природных процессов, влияющих на изменение напряженного состояния земной коры. Исследования, описанные в главе 8, могут быть использованы для мониторинга накопления упругих напряжений в сейсмически активных районах земной коры, что будет способствовать прогнозам возникновения крупных землетрясений.

Для дальнейшего развития работ по разработке методик и алгоритмов реконструкции напряжений, по-видимому, может оказаться целесообразным разработка методов, позволяющих учитывать неупругое поведение горных пород, что характерно для рассмотрения деформирования геосреды на масштабах геологических времен. Как показано в работах [Haderka, Galybin, 2010; 2012] указанный подход может быть распространен на пластические области, находящиеся в предельном равновесии, однако требует применения других

математических методов решения краевых задач, чем те, что используются в теории упругости.

Для анализа напряжений в относительно небольших (по сравнению с региональными) областях может оказаться необходимым полное решение пространственной задачи, поскольку условие того, что одно из главных напряжений вертикально может локально нарушаться. Поэтому целесообразно развить предлагаемые подходы для реконструкции полных пространственных напряжений. Здесь также возможно опираться на методику, базирующуюся на методе Трефтца, но уже не для голоморфных функций, а для гармонических пространственных функций, через которые выражается общее решение трехмерной теории упругости. Примеры такого подхода приведены в недавних работах автора [Galybin, Irša, 2010] и [Galybin, 2016] при реконструкции контактных напряжений с использованием методов типа Трефтца.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М.: Наука. 1973. 576 с.
2. Белоусов, Т.П., Куртасов, С.Ф., Мухамедиев, Ш.А. (1997а). Делимость земной коры и палеонапряжения в сейсмоактивных и нефтегазоносных регионах Земли. М.: ОИФЗ РАН. 1997. 320 с.
3. Белоусов Т.П., Куртасов С.Ф., Мухамедиев Ш.А. (1997б). Особенности эволюции палеонапряжений и закономерности делимости земной коры (на примере Ставропольского свода) // Доклады РАН. 1997. Т. 355. № 4. С. 527-531
4. Белоусов Т.П., Акскалян Г.О., Арутюнян Т.П., Аслизаян А.А. Новейшая и современная геодинамика северной части Аравийской плиты // Тектоника и геодинамика континентальной литосферы. Материалы совещания. М.: 2003. С. 31-35
5. Белоусов Т.П., Куртасов С.Ф., Стаховская Р.Ю. (2005а). Напряженное состояние земной коры и альпийская геодинамика зоны сочленения Аравийской плиты и Загросской складчатой системы (на примере Юго-Восточного Загроса) // Геодинамика и геоэкологические проблемы высокогорных регионов. Сборник материалов Третьего международного симпозиума. М.-Бишкек. 2005.
6. Белоусов Т.П., Энман С.В., Куртасов С.Ф., Шолохов В.В., Стаховская Р.Ю. (2005б). Новейшая и современная геодинамика кряжа Карпинского. Бюллетень МОИП. Сер. геологическая. 2005.
7. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз. 1959. 628 с.
8. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехтеориздат. 1953. 264 с.
9. Галыбин А.Н, Митрушкин Д.А., Мухамедиев Ш.А., Савенков Е.Б. Вычислительные алгоритмы восстановления полей напряжений в

- упругой области по данным наблюдений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 90. 20 с.
10. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука. 1977. 640 с.
  11. Грачев А.Ф., Мухамедиев Ш.А. О трещиноватости каменноугольных известняков Московской синеклизы // Физика Земли. №1. 2000. С. 61-77
  12. Гудман Р. Механика горных пород. М.: Стройиздат 1987. 232 с.
  13. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М. Мир: 1989. 510 с
  14. Динник А.Н. О давлении горных пород и расчете крепи круглой шахты // Инженерный работник. 1926. № 3. С. 1-12.
  15. Зоненшайн Л.П., Кузьмин М.И. Палеогеодинамика. М.: Наука. 1993. 192с.
  16. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука. 1973. 304с.
  17. Каракин А.В., Мухамедиев Ш.А. Особенности в неоднородном поле траекторий главных тектонических напряжений // Физика Земли. 1993. № 11. С.27-36.
  18. Козырев А.А., Савченко С.Н. Закономерности распределения тектонических напряжений в верхней части земной коры // Физика Земли. 2009. № 11. С. 34-43.
  19. Копп М.Л. Новейшие деформации Скифской и юга Восточно-Европейской платформ как результат давления Аравийской плиты // Геотектоника. № 2. 2000. С. 26-42.
  20. Коптев А. И., Ершов А.В. Роль гравитационного потенциала литосферы в формировании глобального поля напряжений // Физика Земли. 2010. Т.46. № 12. С. 66-81.
  21. Коптев А.И., Ершов А.В., Левченко О.В. Роль коэффициента взаимодействия на границах Индо-Австралийской плиты при численном моделировании поля напряжений. // Материалы Третьей молодежной тектонофизической школы-семинара. Москва, ИФЗ РАН, 14-18 октября 2013 г. Т.1. 135-141 с.

22. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексной переменной. М.: ФИЗМАТГИЗ. 1958. 658с.
23. Лехницкий С.Г.. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука. 1977. 416 с.
24. Линьков А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб.: Наука. 1999. 382 с.
25. Михлин С.Г. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Гос. изд. техн.-теорет. лит-ры. 1949. 380 с.
26. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707с.
27. Мухамедиев Ш.А. К проблеме восстановления поля тензора напряжений в блоках земной коры // Изв.АН СССР. Физика Земли. 1991. № 5. С. 729-738.
28. Мухамедиев Ш.А. Реконструкция тектонических напряжений по разрывным сдвиговым смещениям: математические и физические ограничения // Доклады АН. 1993. Т.331. № 4. С.500-503.
29. Мухамедиев Ш.А. Процессы разрушения и напряженное состояние литосферы Земли : дисс. в виде научн. докл. на соиск. уч. степ. д.ф.-м.н. М.: ИФЗ РАН. 1997. 68 с.
30. Мухамедиев Ш.А., Галыбин А.Н. Прямой подход к определению региональных полей напряжений (на примере Западно-Европейской, Северо-Американской и Австралийской платформ) // Физика Земли. 2001. № 8. С. 23-41.
31. Мухамедиев, Ш.А., Галыбин, А.Н. Решение плоской задачи теории упругости при заданных траекториях главных напряжений // Доклады АН. 2004. Т. 396. № 1. С. 56-59.
32. Мухамедиев Ш.А., Галыбин А.Н., Белоусов Т.П. (2005а). От дискретных ориентаций главных осей палеонапряжений к реконструкции полей



- палеонапряжений в упругой литосфере // Доклады Академии Наук. 2005. Т. 403. № 1. С. 101-105.
33. Мухамедиев Ш.А., Белоусов Т.П., Галыбин А.Н. (2005б). Теоретическое моделирование полей упругих палеонапряжений по данным натуральных индикаторов // Физика Земли. № 11. С. 47-61.
34. Папкович П.Ф. Теория упругости. Ленинград/ Москва.: ОБОРОНГИЗ (Гос издательство оборонной промышленности). 1939. 640 с.
35. Работнов Ю. Н. Соппротивление материалов. М.: Физматгиз. 1963. 456 с.
36. Работнов Ю.Н., Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1979. 744 с.
37. Расцветаев Л.М. Парагенетический метод структурного анализа дизъюнктивных разрывных нарушений – В кн.: Проблемы структурной геологии и физики тектонических процессов. Ч. 2. М.: ГИН АН СССР. 1987. С. 173-235.
38. Салганик Р.Л. Тонкий упругий слой, испытывающий скачек характеристик, в бесконечном упругом теле // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1977. № 2. С. 154-163.
39. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. Изд. 3-е перераб. и доп. М.: Физ.-мат. лит. 1960. 121 с.
40. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Пер. С англ./ Под ред. Г.С. Шапиро – 2-е изд. М.: Наука. 1979. 560с.
41. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1974. 224 с.
42. Турчанинов И.А., Марков Г.А., Иванов В.И., Козырев А.А. Тектонические напряжения в земной коре и устойчивость горных выработок. Ленинград: Наука. 1978. 256 с.
43. Фрохт М. Фотоупругость. Т.1. М.: ОГИЗ. 1948. 432 с.
44. Хаин, В.Е. Тектоника континентов и океанов (год 2000).М.: Научный мир. 2001. 606 с.

45. Amadei B, Savage W.Z., Swolfs H.S. 1987. Gravitational stresses in anisotropic rock masses // *Int J Rock Mech Min Sci and Geomech Abstr* V. 24. P. 5 –14.
46. Amadei B., Stephansson O. *Rock Stress and Its Measurement*. Springer Netherlands. 1997. 490 p.
47. Anderson E. M. *The dynamics of faulting and dyke formation with application to Britain - 2d ed.*: Edinburgh: Oliver and Boyd. 1951. 206 p.
48. Andrews H.C., Patterson C.L., Outer product expansions and their uses in digital image processing // *The American Mathematical Monthly*. 1975. V. 82. P. 1-13.
49. Artyushkov E.V. Stresses in the lithosphere caused by crustal thickness inhomogeneities. *J. Geophys. Res.* 1973. V. 78. P. 7675-7708.
50. Biot, M.A. General theory of three dimensional consolidation // *J Appl Phys* 1941. V. 12. P.155–164.
51. Bird P. An updated digital model for plate boundaries // *Geochem. Geophys. Geosyst.* 2003. V. 4(3). P 1027-1080.
52. Bonnet M., Constantinescu A. Inverse problems in elasticity // *Inverse Problems*. 2005. V. 21 P. R1–R50.
53. Brady B.H.G., Brown E.T. *Rock mechanics for underground mining.- 3<sup>rd</sup> ed.* Kluwer Academic Publ. 2004. 688 p.
54. Brady B.H.G., Lemos J.V., Cundall, P.A. Stress measurement schemes for jointed and fractured rock // *Proc. Intern. Symposium on Rock Stress and Rock Stress Measurements*. Stockholm. 1986. P. 167-176.
55. Brown E.T., Hoek E. Trends in relationships between measured in-situ stresses and depth // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.* 1978. V. 15 (4). P. 211-215.
56. Cloetingh S., Wortel R. Regional stress field of the Indian plate // *Geophys Res Lett*. 1985. V. 12. P. 77–80.
57. Cloetingh S., Wortel R. Stress in the Indo-Australian plate. // *Tectonophysics*. 1986. V. 132. P. 46-67

58. Coblenz D.D., Zhou S., Hillis R.R., Richardson R.M., Sandiford M. Topography, boundary forces, and the Indo-Australian intraplate stress field // *J. Geophys. Res.* 1998. V. 103. P. 919-931
59. Coblenz, D.D., Sandiford, M., Richardson, R.M., Zhou S., Hillis R. The origins of the intraplate stress field in continental Australia // *Earth Planet. Sci. Lett.* 1995. V. 133. P. 299-309
60. Coker E.G., Filon, L.N.G. A treatise on photo-elasticity. Cambridge: At the University Press. 1957. 720 p.
61. Cornet F.H., Valette B. In situ stress determination from hydraulic injection test data // *J Geophys Res.* 1984. V. 89. P.11527–11537.
62. Dean A. H., Beatty R. A. Rock stress measurements using cylindrical jacks and flat jacks at North Broken Hill Limited. Broken Hill Mines Monograph, Australian Inst. Min. Metal., Melbourne, Australia. 1968. No. 3, P. 1-8.
63. Denham D., Windsor C.R. The crustal stress pattern in the Australian continent // *Exploration Geophys.* 1991. V. 22. P.101-105.
64. Dundurs J. Effect of Elastic Constants on Stress in a Composite Under Plane Deformations // *Journal of Composite Materials.* 1967. V. 1. P. 310-322.
65. Dyksterhuis S., Müller R.D. 2004. Modelling the contemporary and palaeo stress field of Australia using finite-element modelling with automatic optimisation // *Exploration Geophysics.* 2004. V. 35(4). P. 236-241.
66. Ekström G., M. Nettles (2011, December 9), Global CMT Web Page. <http://www.globalcmt.org>.
67. Engelder, T. Stress regimes in the lithosphere. Princeton: University Press. 1993. 457 p.
68. Fairhurst C. Measurement of in-situ stresses with particular reference to hydraulic fracturing // *Rock. Mech and Eng. Geol.* 1964. V. 2(3-4). P. 129-147.
69. Forsythe G. E., Malcolm M.A., Moler C.B. Computer methods for mathematical computations. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1977.

70. Frocht M.M. Photoelasticity, V.1. New York: John Wiley and Sons Inc. 1941. 411 p.
71. Fry N. Stress space: striated faults, deformation twins, and their constraints on paleostress // *Journal of Structural Geology*. 2001. V. 23. P. 1–9.
72. Fu R.-S., Huang, P.-H., The global stress field in the lithosphere obtained from the satellite gravitational harmonics // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1983. V.31. P. 269-276.
73. Galybin A. N. Contact inverse problem for an elastic half-space // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2016. V. 68. P. 35–41.
74. Galybin A.N., Mukhamediev Sh.A. Plane elastic boundary value problem posed on orientation of principal stresses // *J. Mech. Phys. Solids*. 1999. V.47. P. 2381-2409.
75. Galybin A.N. Determination of Softening Law by Measuring Crack Opening Displacements - In: *Structural Integrity and Fracture*. The Netherlands: Swets & Zeitlinger B.V., Lisse. 2002. P. 35-41.
76. Galybin A.N., Dyskin A.V., Jewell. R. J. A measuring scheme for determining in situ stresses and moduli at large scale // *Int J Rock Mech & Mining Sci*. 1997. V. 34 (1). P. 157-162.
77. Galybin A.N., Dyskin A.V., Tarasov B.G., Jewell R. J. An approach to the large-scale field stress determination // *Int J Geotechnical & Geological Eng.* 1999. V. 17. P. 267-289.
78. Galybin A.N., Irša J. On reconstruction of 3D harmonic functions from discrete data // *Proceedings of Royal Society A*. 2010. V. 466(2119). P. 1935-1955.
79. Gölke M., Coblenz D. Origins of the European regional stress field // *Tectonophysics*. 1996. V. 266. P. 11-24.
80. Golub, G.H., van Loan, C.F. 1989. *Matrix computations* (2nd edition), Baltimore / London: University Press, The Johns Hopkins. 1989. 642 c.

81. Haderka P., Galybin A.N., Mukhamediev Sh.A. 2009. Stress Field in Antarctic Tectonic Plate: Elastic and Plastic Models // WIT Transactions on Modelling and Simulation. 2009. V. 49. P. 257-267.
82. Haderka P., Galybin A.N. The stress trajectories method for plane plastic problems // Int J Solids & Structures. 2010. V. 48. P. 450-462.
83. Haderka, P., Galybin A.N. Plastic stress field reconstruction based on stress orientations data // The Russian Journal of Earth Sciences. 2012. V. 12. ES4001.
84. Haimson B.C., Fairhurst C. 1967. Initiation and extension of hydraulic fractures in rocks // SPE J. 1967. V. 7(3). P. 310-318.
85. Hansen K.M., Mount V.S. Smoothing and extrapolation of crustal stress orientation measurements // J. Geophys. Res. 1990. V.95 (B). P. 1155-1165.
86. Hast N. The state of stress in the upper part of the Earth's crust // Tectonophysics. 1969. V.8. P.169–211.
87. Heidbach O., Reinecker J., Tingay M., Müller B., Sperner B., Fuchs K., Wenzel F. Plate boundary forces are not enough: Second- and third-order stress patterns highlighted in the World Stress Map database // Tectonics. 2007. V. 26. TC6014.
88. Heidbach O., Tingay M., Barth A., Reinecker J., Kurfe D., Müller B. Global crustal stress pattern based on the World Stress Map database release 2008 // Tectonophysics. 2010. V. 482, P. 3–15.
89. Heidbach O., Tingay M., Barth A., Reinecker J., Kurfe D., Müller B. The World Stress Map database release 2008 doi:10.1594/GFZ.WSM.Rel2008, 2008.
90. Herrera I. Trefftz method: A general theory // Num. Meth. Partial Diff. Equations. 2000. V.16(6). P. 561-580.
91. Hillis R. R., Reynolds S. D. In situ stress field of Australia - In: Evolution and Dynamics of the Australian Plate (edited by Hillis, R. R. & Muller, R. D.) Geological Society of Australia Special Publication 22 and Geological Society of America Special Paper 372. 2003. P. 49-60.

92. Hillis R.R., Reynolds S.D. The Australian Stress Map // Journal of the Geological Society of London. 2000. V. 157. P. 915-921.
93. Hillis R.R., Meyer J.J., Reynolds S.D. The Australian Stress Map // Exploration Geophysics 1998. V. 29. P. 420-427.
94. Irša J., Galybin A.N. FEM type method for reconstruction of plane stress tensors from limited data on principal directions // Proc 31<sup>st</sup> Int Conf Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods, Southampton: WIT Press. 2009. P.57-67.
95. Irša J., Galybin A.N. Stress Trajectories Element Method for stress determination from discrete data on principal directions // Engineering Analysis with Boundary Elements .2010. V. 34 (5). P. 423-432.
96. Irša J., Galybin A.N. On STEM modelling of tectonic stress fields in tsunamigenic regions // WIT Transactions on Modelling and Simulation. 2011. V. 52. P. 203-214.
97. Jeffreys H. Theory of Probability, Third Edition. Oxford: Clarendon Press. 1939. 470 p.
98. Jirousek J., Zieliński A.P. Survey of Trefftz-type element formulations // Computers & Structures. 1995. V. 63(2). P.225-242.
99. Kahar D., Moler C., Nash S. Numerical methods and software. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1989.
100. Kirsch G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre // Zeit Ver. Dt. Ingenieure. 1898. V.42. P. 797-807.
101. Kita E., Kamiya N. Treff method: an overview // Advances in Engineering Software. 1995. V.24. P.3-12.
102. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1955.V. 8 (N2), P.164-178.
103. Kuske A., Robertson G. Photoelastic Stress Analysis. London: John Wiley & Sons, 1974. 534 p.

104. Lee J.C., Angelier J. Paleostress trajectories maps based on the results of local determinations: the "lissage" program // *Computers & Geosciences*. 1994. V.20(2). P. 161-191.
105. Ljunggren C., Yanting Chang, Janson T., Christiansson R. An overview of rock stress measurement methods // *Int J Rock Mechanics & Mining Sci*. 2003. V. 40. P. 975–989.
106. MacKay D.J.C. *Information Theory, Inference and Learning Algorithms*. Cambridge University Press. 2003. 640 p.
107. McGarr A. Some constraints on levels of shear stress in the crust from observation and theory // *J Geophys Res*. 1980. V. 85. P. 6231–6238.
108. McGarr A. On the state of lithostatic stress in the absence of applied tectonic forces // *J Geophys Res*. 1988. V. 93(13). P. 609–613.
109. McKenzie D.P. The relation between fault plane solutions for earthquakes and the directions of principal stresses // *Bull Seismol Soc Am*. 1969. V. 59. P. 591–601.
110. Mukhamediev Sh. A. Global stresses in the Western Europe lithosphere and the collision forces in the Africa-Eurasia convergence zone // *Russian Journal Of Earth Sciences* 2002. V. 4(1). P. 1–17.
111. Mukhamediev Sh.A., Brady B.H.G. On methods of the macro-stress determination by fault-slip inversions - In: *Structural Integrity and Fracture* (ed. by A.V. Dyskin, X. Hu & E. Sahouryen). Bulkema Publishers. Lisse, The Netherlands. 2002. P. 277-281.
112. Mukhamediev Sh.A. Galybin, A.N., Brady B.H.G. A direct approach to regional stress field determination based on the stress orientations. Report G 1439. Department of Civil and Resource Engineering, The University of Western Australia. 1999. 24 p.
113. Mukhamediev Sh.A., Galybin, A.N., Brady, B.H.G. Determination of stress fields in elastic lithosphere by methods based on stress orientations // *Int J Rock Mech & Mining Sci*. 2006. V. 43 (1). P. 66-88.

114. Mukhamediev Sh.A., Galybin A.N. Determination of stresses from the stress trajectory pattern in a plane elastic domain // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2007. V. 12. P. 75-106.
115. Paige C.C., Saunders M.A. LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares // *ACM Transaction on Mathematical Software*. 1982. V.8(1). P.43-71.
116. Qin H.Q. *Trefftz Finite and Boundary Element Method*. Southampton: WIT Press. 2000. 296 p.
117. Reinecker J., Heidbach O., Tingay M., Connolly P., Müller B. 2004. The 2004 release of the World Stress Map. available online at [www.world-stress-map.org](http://www.world-stress-map.org)
118. Reinecker J., Heidbach O., Mueller B., 2003. The 2003 release of the World Stress Map. available online at [www.world-stress-map.org](http://www.world-stress-map.org)
119. Reynolds S.D., Coblenz D.D., Hillis, R.R. Tectonic forces controlling the regional intraplate stress field in continental Australia: results from new finite element modelling // *Journal of Geophysical Research, Solid Earth* 2002. V.107(B7). P. 2131.
120. Rummel F, Möhring-Erdmann G, Baumgärtner J. Stress constraints and hydro-fracturing stress data for the continental crust // *Pure Appl Geophys*. 1986. V. 124(4,5). P. 875–895.
121. Sakurai S., Shimizu N. Initial stress back analyzed from displacements due to underground excavations - In: Stephansson O (ed) *Rock stress and rock stress measurements*. Centek Publishers, Lulea. 1986. P. 679–686.
122. Sano O., Hisao Ito, Hirata H. A., Mizuta Y. Review of Methods of Measuring Stress and its Variations // *Bull. Earthq. Res. Inst. Univ. Tokyo* 2005. V. 80. P. 87-103.
123. Savage W.Z., Swolfs H.S., Amadei B. On the state of stress in the near surface of the Earth's crust // *Pure Appl Geophys*. 1992.V.138. P. 207–228.
124. Sen Z., Sadagah B.H. Probabilistic horizontal stress ratios in rock // *Math Geol*. 2002. V. 34(7). P. 845–855.



125. Sjöberg J., Christiansson R., Hudson. J.A. ISRM Suggested Methods for rock stress estimation—Part 2: overcoring methods // *Int J Rock Mech & Mining Sci.* 2003. Vol. 40. P. 999-1010.
126. Stephansson, O. Rock stress measurement by sleeve fracturing // *Proc 5th congress international society of rock mechanics (ISRM)*. Melbourne. Rotterdam: Balkema. 1983. P. F129–F137.
127. Terzaghi K., Richart F.E. Stresses in rock about cavities // *Geotechnique* 1952. V.3. P. 57–90.
128. Tincelin M.E. Research on rock pressure in the iron mines of Lorraine - In: *Proc conference international sur les Pressions de Terrains et le Soutenement dans les Chantiers d'Exploitation*. 24–28 Avril, Liege. 1951. P.158–175.
129. Treuting R.G., Lynch J.J., Wishart H.B., Richards D.G. Residual stresses measurements, The Haddon Craftsmen, Inc: Scranton, Pennsylvania. 1952.
130. Wiles T.D., Kaiser P.K. In situ stress determination using the Under-excavation Technique. Parts I, II // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.* 1994. V. 31, P.439–446, P.447–45.
131. Zanchi A., Crosta, G.B., Darkal A.N. Paleostress analyses in NW Syria: constraints on the Cenozoic evolution of the northwestern margin of the Arabian plate // *Tectonophysics*. 2002. V. 357. P. 255– 278
132. Zang A., Stephansson O. *Stress Field of the Earth's Crust*. Dordrecht [u.a.]: Springer. 2010. 322p.
133. Zhao S., Müller R.D. The tectonic stress field in Eastern Australia - paper presented at PESA Eastern Australasian Basins Symposium, PESA, Melbourne, Vic, 25 - 28 November 2001. 2001. P. 61-70.
134. Zoback, M.D. 2010. *Reservoir Geomechanics*. Cambridge University Press. 461 p.
135. Zoback M.D., Mastin L.G., Barton C. In-situ stress measurements in deep boreholes using hydraulic fracturing, wellbore breakouts, and Stonely wave polarization - In: Stephansson O (ed) *Rock stress and rock stress measurements*. Centek Publishers. Lulea. 1986. P. 289–299.

136. Zoback, M.L. First and second-order patterns of stress in the lithosphere: The World Stress Map Project // J. Geophys. Res. 1992. V. 97(B8). P. 11703-11728.
137. Zoback, M.L. Stresses in the Earth's Lithosphere // Encyclopedia of Physical Science and Technology .Academic Press. 2002. V. 16. p.143-154.
138. Zoback, M.L., Zoback, M.D., Adams J., et al., Global patterns of tectonic stress // Nature. 1989. V. 341 P. 291-298.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1. СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ  
ДИССЕРТАЦИИ В 1997-2016 ГГ. В ОБРАТНОМ ХРОНОЛОГИЧЕСКОМ  
ПОРЯДКЕ**

**Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук:**

1. Haderka P., **Galybin A.N.** Plastic stress field reconstruction based on stress orientations data // *The Russian Journal of Earth Sciences*. 2012. V. **12**. ES4001, (doi:10.2205/2012ES000516).
2. **Galybin A.N.** Boundary value problems of plane elasticity involving orientations of displacements and tractions // *Journal of Elasticity*. 2011. V. **102**. P. 15-30. (doi:10.1007/s10659-010-9259-4)
3. Haderka, P and **A.N. Galybin**, 2010. The stress trajectories method for plane plastic problems // *Int Journal of Solids and Structures*. V. **48**. P. 450-462. (doi:10.1016/j.ijsolstr.2010.10.016)
4. **Galybin A.N.**, Irša J. On reconstruction of 3D harmonic functions from discrete data // *Proceedings of Royal Society A*. 2010. V. **466** (2119). P. 1935-1955. (doi:10.1098/rspa.2009.0471)
5. Irša J., **Galybin A.N.** Stress Trajectories Element Method for stress determination from discrete data on principal directions // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2010. V. **34**(5). P. 423-432. (doi:10.1016/j.enganabound.2009.12.004)
6. Mukhamediev Sh.A., **Galybin A.N.** Determination of Stresses from the Stress Trajectory Pattern in a Plane Elastic Domain // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2007. V. **12**. P. 75-106. (doi:10.1177/1081286506067093)
7. Mukhamediev Sh.A., **Galybin A.N.**, Brady B.H.G. Determination of stress fields in elastic lithosphere by methods based on stress orientations // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2006. V. **43**(1). P. 66-88. (doi:10.1016/j.ijrmms.2005.04.008),

8. Мухамедиев Ш.А., **Галыбин, А.Н.** Где и как зародились разрывы землетрясений 26.12.04 и 28.03.05 у о. Суматра // Доклады АН. 2006. Т. 406. № 1. С. 95-98.  
*в переводной версии журнала: Mukhamediev Sh.A., Galybin, A.N.* 2006. Where and how did the ruptures of December 26,2004 and March 28, 2005 earthquakes near Sumatra originate? // *Doklady Earth Sciences*. V. **406** (1). P. 52-55. (doi: 10.1134/S1028334X06010132)
9. Мухамедиев Ш.А., Белоусов Т.П., **Галыбин А.Н.** Теоретическое моделирование полей упругих палеонапряжений по данным натуральных индикаторов // Физика Земли. 2005. № 11. С. 47-61.  
*в переводной версии журнала: Mukhamediev Sh.A, T.P. Belousov, Galybin A.N.* Theoretical modelling of elastic palaeostress fields from in situ by using natural indicators // *Izvestia, Physics of the Solid Earth*. 2005. V. **41** (11). P. 902-915.
10. Мухамедиев Ш.А, **Галыбин А.Н.**, Белоусов Т.П. От дискретных ориентаций главных осей палеонапряжений к реконструкции полей палеонапряжений в упругой литосфере // Доклады Академии Наук. 2005. Т. 403. № 1. С. 101-105.  
*в переводной версии журнала: Mukhamediev Sh.A, Galybin A.N., Belousov T.P.* From Discrete Orientations of the Principal Axes of Paleostresses to the Reconstruction of Paleostress Fields in the Elastic Lithosphere // *Doklady Earth Sciences*. 2005. V. **403**(1). P. 101-105.
11. **Galybin A.N.**, Mukhamediev Sh.A. Determination of elastic stresses from discrete data on stress orientations // *Int.l Journal of Solids and Structures*. 2004. V. **41** (18-19): P. 5125-5142. (doi:10.1016/j.ijsolstr.2004.04.007)
12. **Galybin A.N.**, Mukhamediev Sh.A. On the problem of stress reconstruction from discrete orientations of principal stresses // *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata. An International Journal of Earth Sciences*. 2004. V. **45** (1) supplement: P. 338-342.

13. Мухамедиев Ш.А., **Галыбин А.Н.** Решение плоской задачи теории упругости при заданных траекториях главных напряжений // Доклады Академии Наук. 2004. Т. 396. № 1. С. 56-59.  
*в переводной версии журнала: Mukhamediev Sh.A., Galybin A.N. Solution of a plane elastic problem with given trajectories of the principal stresses // Doklady Physics. 2004. V. 49 (5). P. 311-314. (doi: 10.1134/1.1763623)*
14. **Galybin A.N.** Plane boundary value problem posed by displacement and force orientations on a closed contour // *Journal of Elasticity*. 2002. V. 65. P. 169-184. (doi:10.1016/j.ijrmms.2005.04.008)
15. Мухамедиев Ш.А., **А.Н. Галыбин.** Прямой подход к определению региональных полей напряжений (на примере Западно-Европейской, Северо-Американской и Австралийской платформ) // Физика Земли. 2001. №8. С. 23-41.  
*в переводной версии журнала: Mukhamediev Sh.A., A.N. Galybin A direct approach to the determination of regional stress fields: A case study of the West European, North American, and Australian platforms // Izvestia, Physics of the Solid Earth. 2001. V. 37 (8). P. 23-41.*
16. **Galybin A.N.**, Dyskin A.V., Tarasov B.G., Jewell R. J. An approach to the large-scale field stress determination // *International Journal of Geotechnical and Geological Eng.* 1999. V. 17. 267-289. (doi:10.1023/A:1008986816658)
17. **Galybin A.N.**, Mukhamediev Sh.A. Plane elastic boundary value problem posed on orientation of principal stresses // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1999. V. 47 (11). P. 2381-2409. (doi:10.1016/S0022-5096(99)00032-0)
18. **Galybin A.N.**, Dyskin A.V., Jewell. R. J. A measuring scheme for determining in situ stresses and moduli at large scale // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*. 1997. V. 34 (1)/ P. 157-162.  
(doi:10.1016/S1365-1609(97)80043-3)

**Публикации в других научных изданиях**

19. **Galybin A.N.** On solvability of the BVP formulated in terms of displacement orientations on the interface between dissimilar elastic materials // *Int. J. Comp. Meth. and Exp. Meas.* 2017. Vol. **5** (3). P. 369–376 (doi: 10.2495/CMEM-V5-N3-369-376).
20. **Galybin A.N.** Numerical method for solving crack problems posed in terms of principal directions // *Proceedings of 19th European Conference on Fracture, Fracture Mechanics for Durability Reliability and Safety, Kazan, Russia, 26-31 August 2012*. Published on CD -ROM, Paper 277, 2012.
21. Irša J. and **Galybin A.N.** On STEM modelling of tectonic stress fields in tsunamigenic regions // *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 2011. V.**52**. P. 203-214 (doi: 10.2495/BE110181)
22. **Galybin A.N.** Boundary integral equations for plane elastic problems posed in terms of stress orientations // *Proceedings of the 8th UK Conference on Boundary Integral Methods, University of Leeds, UK, 4-5th July 2011*. 2011. P. 194-198.
23. **Galybin A.N.** On stress reconstruction in composite domains from discrete data on principal directions // *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 2009. V. **49**. P. 35-43.
24. Irša J. **Galybin A.N.** FEM type method for reconstruction of plane stress tensors from limited data on principal directions // *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 2009. V. **49**. P.57-67.
25. Haderka P., **Galybin A.N.**, Mukhamediev Sh.A. Stress Field in Antarctic Tectonic Plate: Elastic and Plastic Models // *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 2009. V.**49**. P. 257-267.
26. **Galybin A.N.** Boundary value problems posed in terms of stress orientations for plane crack systems // *Proceedings of 12th International Conference on Fracture*. Ottawa, on CD-ROM, paper T02.007 (fin 00560). 2009. 7 p.

27. Мухамедиев Ш.А., **Галыбин А.Н.**, Хадерка П. Поле тектонических напряжений первого порядка в Антарктической плите // *Материалы 42<sup>го</sup> Тектонического совещания*. М: ГЕОС, Т.1. 2009. 4 с.
28. **Galybin A.N.** Different problems associated with the stress trajectories element method // *Proceedings of ICIAM07, Zurich, Switzerland, PAMM*. 2007. V.7(1). P. 2020145 – 2020146. (doi: 10.1002/pamm.200701129)
29. **Galybin A.N.**, Mukhamediev Sh.A. Reconstruction of stress fields in adjacent regions separated by seismically-active faults - In: *Proceeding of International workshop "Seismicity and Seismological Observations of the Baltic Sea Region and Adjacent Territories", 10–12 September, 2007, Vilnius. Lithuania*. 2007. P. 19-21.
30. **Galybin A.N.** Introduction on STEM for stress analysis in statically determined bodies // *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 2007. V. 44. P. 79-88.
31. Мухамедиев Ш.А., **Галыбин А.Н.** Механизм возникновения Суматринских землетрясений 26.12.04 и 28.03.05 // *Материалы Международной Конференции «Научные и прикладные основы решения актуальных проблем сейсмологии»*, Ташкент, 10-12 октября 2006 г. Ташкент, 2006 г. С. 21-25.
32. **Galybin A.N.** Stress fields in joined elastic regions: modelling based on discrete stress orientations – In: *In-situ Rock Stress Measurement, Interpretation and Application* (Edited by M. Lu et al.). Taylor & Francis/Balkema, Leiden. 2006. P. 193-199.
33. **Galybin A.N.**, Sh.A. Mukhamediev. Integral equations for elastic problems posed in principal directions: application for adjacent domains // *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 2006. V. 42. P. 51-60.
34. Мухамедиев Ш.А., Белоусов Т.П., **Галыбин А.Н.** Реконструкция полей палеонапряжений по трещиноватости осадочных пород. – В кн.: *Области активного тектоногенеза в современной и древней истории Земли*. Т.2. *Материалы XXXIX Тектонического совещания*. М.: ГЕОС. 2006. С. 52-56.

35. Мухамедиев Ш.А., **Галыбин А.Н.** Напряженное состояние в районе желоба Сунда и механизм возникновения разрывов землетрясений 26.12.04 и 28.03.05 у о. Суматра. – В кн.: Области активного тектоногенеза в современной и древней истории Земли. Том 2. Материалы XXXIX Тектонического совещания. М.: ГЕОС. 2006. С. 56-59.
36. **Galybin A.N.** Approximation of complex potentials as a uniform approach for solving classical and non-classical boundary value problems of plane elasticity // *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 2005. Vol **39**. P. 255-264.
37. Мухамедиев Ш.А., Никитин Л.В., **Галыбин А.Н.** Ориентация напряжений как основа постановок новых типов задач механики сплошной среды. – В кн.: Модели механики сплошной среды. Обзорные доклады и лекции XVII сессии Международной школы по моделям сплошной среды (Казань, 4-10 июля 2004 года). Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. 2004. Т.22. С. 84-112
38. Мухамедиев Ш.А. , **Галыбин А.Н.** Реконструкция напряженного состояния упругой литосферы при известных траекториях главных напряжений. – В кн.: Напряженно-деформированное состояние и сейсмичность литосферы. Труды Всероссийского совещания "Напряженное состояние литосферы, ее деформация и сейсмичность" (Иркутск, ИЗК СО РАН, 26 - 29 августа 2003 г.). Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал "Гео". 2003. С. 117-121
39. Мухамедиев Ш.А., **Галыбин А.Н.** , Никитин Л.В. Нетрадиционные методы механики сплошной среды при определении полей тектонических напряжений. – В кн.: Очерки геофизических исследований. К 75-летию ОИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН. – М.: ОИФЗ РАН, 2003. – С. 413-421
40. **Galybin A.N.** Boundary integral equations for plane elastic problems posed on orientations of principal stresses and displacements // *Transactions on Modelling and Simulation*. 2001. V. **28**. P. 13-21.



41. Мухамедиев Ш.А., **Галыбин А.Н.** Прямой подход к определению полей тектонических напряжений. – В кн.: Тектоника неогена: общие и региональные аспекты. Материалы XXXIV-го Тектонического совещания (30 января – 3 февраля 2001г.). М.: ГЕОС. 2001. С. 57 – 61
42. **Galybin A.N.** Plane boundary value problem posed on orientation of principal stresses on the crack surface - In: *Proceedings of 13th European Conference on Fracture, Fracture Mechanics: Applications and Challenges, 6-9 September 2000.* Published on CD -ROM, Elsevier Science Ltd. 2000.