С.А. Тихоцкий

**Оптимальная, по Колмогорову-Винеру, интерполяция и фильтрация аномальных полей, измеренных на произвольном множестве точек: теоретические аспекты.**

(Методическое пособие для студентов V курса специальности грави- и магнитометрия по курсу “ Корреляционно-статистические методы обработки и интерпретации геофизических данных ”)

Рассмотрим случайное поле $u(p)$, измеренное в точках $\{p_i\}, \quad i=1,...,N$ произвольного $n$-мерного метрического пространства. То есть, каждая точка $x_i$ характеризуется совокупностью $n$ координат (не обязательно Декартовых): $p_i=\left(p_i^1,...,p_i^n\right)$. На точках пространства определена метрика, т.е. расстояние между точками $d\left(p_1,p_2\right)\geq 0$. Кроме того, каждую пару точек $\left(x_1,x_2\right)$ можно охарактеризовать разностным вектором: $r_{12}=p_2-p_1$, компоненты которого могут определяться по-разному, в зависимости от вида пространства, в котором производятся измерения. Будем полагать $d\left(p_1,p_2\right)=\left|r_{12}\right|=\left|p_2-p_1\right|$.

**Примеры:**

1. Измерения производятся на плоскости. В этом случае естественно ввести декартову систему координат, причём плоскость наблюдений можно считать совпадающей с плоскостью *z=0*. Тогда каждая точка характеризуется заданием двух координат *x* и *y*: $p_i=\left(x_i,y_i\right)$; $r_{12}=p_2-p_1=\left(x_2-x_1,y_2-y_1\right)$ и $d_{12}=d\left(p_1,p_2\right)=\left|r_{12}\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$. Заметим, что разностный вектор может быть представлен и в полярной системе координат, через модуль расстояния между точками и азимут направления от первой точки на вторую: $\overline{r}_{12}=\left(d_{12},\alpha_{12}\right)$, где $\alpha_{12}=arctg\left[y_2-y_1/x_2-x_1\right]$. В геофизике (как и в геодезии) принято ось *x* направлять на Север, ось *y* – на Восток, ось *z* – вниз. Тогда азимут отсчитывается от направления на Север, по часовой стрелке.

2. Поле задано на поверхности сферической Земли. Естественной системой координат при этом является географическая. Если все точки расположены на нулевой высоте (например, измерения производятся на поверхности океана) или разновысотность точек не существенна для решаемой задачи (например исследуются аномалии с длинами волн в 100 и более километров, а превышения не превосходят первых километров), то каждая точка характеризуется заданием географических широты $\varphi$ и долготы $\lambda$: $p_i=\left(\varphi_i,\lambda_i\right)$. Естественной (для исследователя, изучающего поля, заданные на земной поверхности) мерой расстояния

между точками в этом случае является кратчайшее расстояние вдоль поверхности Земли (расстояние вдоль дуги большого круга): $d_{12} = d(p_1, p_2) = R_{\oplus}\gamma_{12}$, где $R_{\oplus}$ - радиус Земли, а $\gamma_{12}$ - выраженное в радианах угловое расстояние между точками, которое связано с их координатами соотношением[1]: $\cos\gamma_{12} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$. Ясно, что определение компонент разностного вектора через разности соответствующих координат, в данном случае, лишено смысла. Будем понимать под разностным вектором на сфере отрезок дуги большого круга, соединяющий точки $p_1$ и $p_2$. Он однозначно характеризуется своей длиной $d_{12}$ и азимутом направления на вторую точку, измеренным в локальной системе координат восток-север первой точки.

Предыдущие примеры легко могут быть на случай, когда альтитуда точек задания поля имеет существенное значение, введением трёхмерного пространства.

Пусть наблюдаемые значения являются аддитивной смесью “полезного” сигнала $f(p_i)$ и “шума” $\eta(p_i)$: $u(p_i) = f(p_i) + \eta(p_i)$ (как всегда, понятия полезного сигнала и шума условны и зависят от характера решаемой геофизической задачи). Случайные поля $f(p)$ и $\eta(p)$ охарактеризованы своими корреляционными функциями $B_f(p_1, p_2)$ и $B_\eta(p_1, p_2)$.

В практике разведочной гравиметрии и магнитометрии мы лишены возможности наблюдать ансамбль реализаций случайного поля: дана лишь одна реализация, полученная в результате эксперимента. Поэтому, в основу всего дальнейшего положено представление об эргодичности случайных полей $f$ и $\eta$, откуда сразу следует их стационарность[2], следовательно $B_f(p_1, p_2) = B_f(p_2 - p_1) = B_f(r_{12})$, $B_\eta(p_1, p_2) = B_\eta(p_2 - p_1) = B_\eta(r_{12})$. Дополнительно предположим, что поля $f$ и $\eta$ стационарно связаны и некогерентны, т.е. их взаимная корреляционная функция $B_{f\eta}$ тождественно равна нулю, следовательно $B_u(r) = B_f(r) + B_\eta(r)$.

Цель оптимальной интерполяции – найти, при сформулированных выше предположениях относительно свойств случайных компонент, оценку значений полезного сигнала $\hat{f}(q_j)$ на некотором множестве точек $\{q_j\}, \quad j = 1, \ldots, M$ обеспечивающую минимум математического ожидания квадрата погрешности этой оценки относительно истинного сигнала, то есть минимум величины:

---

[1] Доказательство этого соотношения может быть легко получено через выражение для скалярного произведения радиус – векторов точек. Оставляем его в качестве упражнения.

[2] В общем случае оптимальная фильтрация возможна и для нестационарных полей (см. например [Левин, 1968]).

$$\varepsilon^2 = \mathbf{E}\left\{\left(\hat{f}\left(q_j\right) - f\left(q_j\right)\right)^2\right\}, \qquad (1.1)$$

среди всех возможных линейных оценок, то есть оценок, получаемых линейным преобразованием значений $u\left(p_i\right)$:

$$\hat{f}\left(q_j\right) = \sum_{i=1}^{N} h_{ji} u\left(p_i\right). \qquad (1.2)$$

Задача поиска оптимальной оценки $\hat{f}\left(q_j\right)$, таким образом, сводится к поиску значений весовых коэффициентов $h_{ji}$.

В случае, если $N$=$M$ и множества точек $\left\{p_i\right\}$ и $\left\{q_j\right\}$ совпадают, имеем дело с оптимальной фильтрацией (разделением полей на компоненты), в противном случае оценка (1.2) представляет собой оптимальную интерполяцию полезного сигнала, которая, в частности, может быть использована для перенесения результатов измерений в нерегулярно расположенных пунктах наблюдений в узлы регулярной сетки.

Подставим (1.2) в (1.1), выполним алгебраические преобразования, и внесём оператор математического ожидания под знак суммы. Получим:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 = \mathbf{E}\left\{f^2\left(q_j\right)\right\} - 2\sum_{i=1}^{N} h_{ji}\mathbf{E}\left\{u\left(p_i\right) f\left(q_j\right)\right\} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} h_{ji}h_{jk}\mathbf{E}\left\{u\left(p_i\right)u\left(p_k\right)\right\} = \\ \sigma_f^2 + \overline{f}^2 - 2\sum_{i=1}^{N} h_{ji}B_{uf}\left(q_j - p_i\right) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} h_{ji}h_{jk}B_u\left(p_k - p_i\right)\end{aligned}, \qquad (1.3)$$

где $\sigma_f^2$ - дисперсия и $\overline{f}^2$ - математическое ожидание полезного сигнала. Отметим, что:

$$B_{uf}\left(r\right) = \mathbf{E}\left\{\left(f\left(s\right) + \eta\left(s\right)\right)\cdot f\left(s+r\right)\right\} = B_f\left(r\right) + B_{f\eta}\left(r\right) = B_f\left(r\right). \qquad (1.4)$$

Для каждого фиксированного узла $q_j$, для которого строится оценка $\hat{f}\left(q_j\right)$, можно представить значения АКФ $B_f\left(q_j - p_i\right), i = 1,...,N$ полезного сигнала $f$ в виде линейной комбинации значений АКФ $B_u\left(p_k - p_i\right), k = 1,...,N$ полного поля $u = f + \eta$:

$$B_f\left(q_j - p_i\right) = \sum_{k=1}^{N} h_{jk}^{*} B_u\left(p_k - p_i\right), \qquad (1.5)$$

где $h_{jk}^{*}$, $j = 1,...,M; i = 1,...,N$ - набор коэффициентов, который (для каждого $j$ отдельно) может быть определен из решения системы уравнений (1.5). Подставляя (1.5) в (1.3) и учитывая (1.4), получим:

$$\varepsilon^2 = \sigma_f^2 + \overline{f}^2 - 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} h_{ji}h_{jk}^{*}B_f\left(p_k - p_i\right) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} h_{ji}h_{jk}B_u\left(p_k - p_i\right). \qquad (1.6)$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(h_{ji}-h_{ji}^{*}\right)\left(h_{jk}-h_{jk}^{*}\right)B_u\left(p_k-p_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}h_{ji}h_{jk}B_u\left(p_k-p_i\right)+\\+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}h_{ji}^{*}h_{jk}^{*}B_u\left(p_k-p_i\right)-2\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}h_{ji}h_{jk}^{*}B_u\left(p_k-p_i\right)\end{gathered}. \tag{1.7}$$

Сопоставляя (1.6) и (1.7) видим, что:

$$\varepsilon^2=\sigma_f^2+\overline{f}^{\,2}-\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}h_{ji}^{*}h_{ki}^{*}B\left(p_k-p_i\right)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(h_{ji}-h_{ji}^{*}\right)\left(h_{jk}-h_{jk}^{*}\right)B_u\left(p_k-p_i\right) \tag{1.8}$$

Сформулируем и докажем следующую <u>*лемму*</u>: корреляционная функция произвольного случайного поля $\xi(s)$ является ядром неотрицательно определённой квадратичной формы, т.е. для любого *m>0* и любых комплексных постоянных $c_1,\ldots,c_m$,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_i c_j B\left(s_i,s_j\right)\geq 0. \tag{1.9}$$

Доказательство:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_i c_j B\left(s_i,s_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_i c_j \mathbf{E}\left\{\xi\left(s_i\right)\xi\left(s_j\right)\right\}=\mathbf{E}\left\{\left[\sum_{i=1}^{m}c_i\xi\left(s_i\right)\right]^2\right\}\geq 0.$$

В силу леммы последнее слагаемое в правой части (1.8) неотрицательно, а два первых слагаемых не зависят от выбора искомых значений весовых коэффициентов $h_{ji}$. Следовательно, минимум $\varepsilon^2$ будет соответствовать такому выбору коэффициентов $h_{ji}$, который обращает последнее слагаемое (1.8) в ноль, то есть $h_{ji}\equiv h_{ji}^{*}$, где $h_{ji}^{*}$ определяются (для каждого узла $q_j$) из решения системы уравнений (1.5). Эта система уравнений является конечномерным аналогом интегрального уравнения Винера-Хопфа.

Предположим теперь дополнительно, что математические ожидания стационарных случайных полей $f$ и $\eta$ равны нулю. Введём нормированные АКФ полей:

$$R_f(r)=\left(\sigma_f^2\right)^{-1}B_f(r);\; R_\eta(r)=\left(\sigma_\eta^2\right)^{-1}B_\eta(r). \tag{1.10}$$

С использованием этих обозначений система (1.5) может быть переписана в виде:

$$R_f\left(r_{ji}\right)=\sum_{k=1}^{N}h_{jk}\left[R_f\left(r_{ki}\right)+\rho^{-1}R_f\left(r_{ki}\right)\right], \tag{1.11}$$

где $\rho = \sigma_f^2 / \sigma_\eta^2$ - отношение сигнал-шум; фиксированный индекс *j*, как и раньше определяет узел $q_j$ для которого ищется оценка (1.2).

Перейдём к векторно-матричной форме записи. Для каждого узла $q_j$ определение весовых коэффициентов $h_{ji}$ сводится к решению системы линейных уравнений:

$$\mathbf{Ch}^j = \mathbf{b}^j, \quad j = 1, ..., M , \tag{1.12}$$

где элементы матрицы $\mathbf{C} = \{c_{ki}\} = \{R_f(p_k - p_i) + \rho^{-1} R_\eta(p_k - p_i)\}$ не зависят от $j$, элементы вектора правой части $\mathbf{b}^j = \{b_i^j\} = \{R_f(q_j - p_i)\}$, вектор неизвестных $\mathbf{h}^j = \{h_k^j\}$. Матрица $\mathbf{C}$, очевидно, квадратная, размерности *N* x *N*, векторы **b** и **h** также состоят из *N* элементов. В этих обозначениях оценка (1.2) записывается в виде:

$$\hat{f}(q_j) = \mathbf{h}^j \cdot \mathbf{u} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{b}^j \cdot \mathbf{u}, \quad j = 1, ..., M , \tag{1.13}$$

где $\mathbf{u} = \{u_k\} = \{u(q_k)\}, \quad k = 1, ..., N$ .