

На правах рукописи



ГАЛЫБИН Александр Николаевич

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ РЕКОНСТРУКЦИИ ПОЛЕЙ
НАПРЯЖЕНИЙ В ЗЕМНОЙ КОРЕ

25.00.10 – Геофизика, геофизические методы поисков полезных ископаемых

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена в лаборатории прикладной геомеханики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва

Научный консультант: **Мухамедиев Шамиль Ахмедович**, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории прикладной геомеханики, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук», г. Москва

Официальные оппоненты: **Лобковский Леопольд Исаевич**, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией геодинамики, георесурсов и геоэкологии, заместитель директора Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук», г. Москва

Ревуженко Александр Филиппович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт горного дела им. Н.А. Чинакала Сибирского отделения Российской академии наук», г. Новосибирск

Сетуха Алексей Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского вычислительного центра, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва

Ведущая организация: Федеральное государственное учреждение Федеральный исследовательский центр «Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

Защита состоится 18 мая 2017 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета Д.002.001.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук (ИФЗ РАН) по адресу: 123242, Москва, Большая Грузинская ул., д. 10, стр.1, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИФЗ РАН и на сайте www.ifz.ru. Автореферат размещен на официальном сайте Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки Российской Федерации vak.ed.gov.ru и на сайте института www.ifz.ru.

Отзывы на автореферат, заверенные печатью, в 2-х экземплярах направлять по адресу: 123242, Москва, Большая Грузинская ул., д. 10, стр.1, ИФЗ РАН, ученому секретарю диссертационного совета Владимиру Анатольевичу Камзолкину.

Автореферат разослан «___» _____ 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат геолого-минералогических наук



Камзолкин В.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Исследования напряженного состояния в земной коре представляют несомненный интерес для описания таких глобальных явлений, как движения тектонических плит или подвижек по геологическим нарушениям, приводящим к землетрясениям. С другой стороны, знание современных напряжений важно для инженеров, работающих в горном деле, нефтегазовой промышленности или занятых проектированием и эксплуатацией различных подземных сооружений. Именно задача определения полей напряжений в земной коре и дала главный импульс для написания данной диссертации, нацеленной на разработку математических методов реконструкции напряжений по экспериментальным данным. Однако геомеханика не является единственной областью, в которой могут быть использованы результаты этой работы. Они могут оказаться полезными в ситуациях, когда прямые измерения характеристик напряженно-деформированного состояния среды либо принципиально невозможны, либо осложнены влиянием измерительных инструментов, в то время как некоторые косвенные данные могут быть доступны для интерпретации. Также следует отметить и новые постановки плоской краевой задачи теории упругости, которые представляют самостоятельный интерес, как дополнение к исследованным ранее краевым задачам.

Степень разработанности темы

Вопросам, связанным с изучением напряжений в земной коре посвящено большое количество работ, которые отражают различные подходы к проблеме. Одним из применяемых подходов к анализу напряжений является статистический подход, который использует данные натурных наблюдений в дискретных точках для того чтобы путем интерполяции получить непрерывные поля напряжений. При этом упускается из виду, что интерполяционные методы не могут обеспечить выполнение основных уравнений механики твердого деформируемого тела, в частности дифференциальных уравнений равновесия, которые определяют статику геосреды. Помимо равновесия необходим выбор реологической модели среды, которая бы не противоречила наблюдениям. Во многих случаях модели напряжений в литосфере базируются на теории упругости, что проявляется как при обработке натурных экспериментов, так и при формулировке математических моделей. Основная трудность при построении моделей состоит в неопределенности граничных напряжений и смещений, что приводит к необходимости рассматривать обратные задачи, решение которых сталкивается с различными трудностями, главное из которых – это неединственность получаемых решений. Поэтому различные авторы определяют напряжения одних и тех же регионов земной коры по-разному, причем разница может быть существенна не только с количественной точки зрения, но и с качественной.

Цели и задачи исследования состоят в разработке комплекса теоретических инструментов и численных алгоритмов для определения полей напряжений в земной коре на основе решения новых задач теории упругости, в которых экспериментальные данные используются не в качестве условий для выбора одного из возможных решений обратной задачи, а в качестве входных данных для решения прямых задач.

Научная новизна работы заключается в исследовании разрешимости нового класса краевых задач теории упругости, ассоциированных с реконструкцией тензора упругих напряжений по неполным граничным условиям, что не предполагает задания величин напряжений, усилий или смещений на границе области. Также разработаны специальные методы для определения полей напряжений по дискретным данным, расположенным как на границе, так и внутри области, основанные на выполнении уравнений теории упругости, что обеспечивает равновесие одной области или совокупности подобластей, образующих область.

Теоретическая и практическая значимость работы. На основе разработанных методик проведен анализ полей напряжений в некоторых регионах Земли, в частности проведены реконструкции полей современных напряжений в сейсмоактивных регионах, изучена эволюция полей палеонапряжений, указан подход для идентификации цунамигенных областей. Практически важной является задача определения напряжений в пластах горных пород, содержащих полезные ископаемые, что требует привлечения единичных измерений величин напряжений. Для этого был предложен оптимизационный алгоритм, который позволяет выделять единственные решения из конечного числа возможных.

Методология и методы исследований. Работа основана на концепции теории упругости, при этом используются две основные методологии. Первая заключается в сведении краевых задач теории упругости к системе сингулярных интегральных уравнений с последующим анализом ее разрешимости путем сведения к соответствующей краевой задаче Римана. Вторая методология подразумевает оптимизацию невязки между расчетными и натурными данными по ориентациям главных напряжений с использованием метода, аналогичного методу Трефтца, для определения комплексных потенциалов в плоской теории упругости. Для анализа полей современных напряжений в земной коре используется концепция режима напряжений, которая подразумевает ранжирование вертикальных и горизонтальных главных напряжений по отношению к направлению сдвигов вдоль геологических нарушений, что позволяет районировать цунамигенные области земной коры.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Общая методика исследования задач теории плоской упругости с неклассическими граничными условиями, основанная на использовании комплексных потенциалов для получения системы сингулярных интегральных уравнений, общее решение которой строится в

виде общего решения однородного характеристического уравнения (путем сведения в краевой задаче Римана) и неоднородного полного уравнения (чье решение находится, в общем случае, численно).

2. Анализ разрешимости краевых задач плоской теории упругости для замкнутой области, сформулированных с использованием следующих граничных условий:

- главные направления тензора напряжений и кривизна траекторий главных напряжений (либо нормальная производная главных направлений);
- ориентации векторов усилий и смещений;
- ориентация вектора смещений и главные направления тензора напряжений.

3. Анализ разрешимости краевых задач плоской теории упругости для составной плоскости со следующими транзитными условиями на контуре, разделяющем плоскость на внутреннюю и внешнюю области, при условии непрерывности вектора напряжений при переходе через контур:

- различные ориентации векторов усилий и смещений по разные стороны контура;
- различные ориентации вектора смещений и различные главные направления тензора напряжений по разные стороны контура.

4. Методики реконструкции полей напряжений по заданным дискретным главным направлениям напряжений внутри области, основанные на задаче оптимизации невязки между расчетными и заданными ориентациями главных напряжений и на методе Трефтца для комплексных потенциалов теории упругости.

5. Методики реконструкции полей напряжений в составных упругих областях по дискретным главным направлениям напряжений при условии непрерывности вектора напряжений на внутренних границах.

6. Применение разработанных методик для анализа современных напряжений и эволюции палеонапряжений в земной коре, а также для оценки изменений напряженного состояния, вызванного крупными землетрясениями.

7. Методика определения цунамигенных областей на основе разработанного метода реконструкции напряжений и концепции режима напряжений.

Достоверность, публикации и апробация работы

Достоверность результатов данного исследования обусловлена использованием строгих математических методов, построением точных решений для простых областей, а также сравнением отдельных численных решений с контрольными решениями и с фотоупругими экспериментами.

Данная диссертация написана по результатам автора, опубликованным в 1997-2016 годах по проблеме определения напряженного состояния литосферы. Общее число статей по данной

тематике – 42, из них 18 входят в перечень рецензируемых научных журналов ВАК и прошли строгую экспертизу в отечественных и международных журналах с высоким индексом цитирования.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на 30 российских и международных профильных научных конференциях (включая Генеральные Ассамблеи Европейского Союза Геофизиков, в Ницце – 2004 год и в Вене в 2005-2009 годах и на Первом Съезде Азиатско-Океанского Союза Геофизиков в Сингапуре в 2004 году), на семинаре по механике прочности и разрушения материалов и конструкций ИПМех РАН (2011 г.), на ежегодных конференциях, проводимых под эгидой проекта ACcESS (Австралийский симулятор геомеханических процессов в Земле, 2003-2005 гг.), на семинарах в Университете Кардифа (2006 г.) и Университете Брюнел (2007 г.) (оба Великобритания) и Университета Карлсруэ (2007 г., Германия).

Личный вклад автора. Во всех этапах работ, выполненных по теме диссертации, соискатель выступал как организатор, руководитель и исполнитель исследований, включая постановки задач, разработку аналитических методов и численных алгоритмов, анализ и интерпретацию результатов, подготовку публикаций. Из 42 публикаций 13 выполнены без соавторов, в 7 соискатель является первым автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, восьми глав, заключения, списка литературы и одного приложения. Количество страниц в диссертации – 325, из них 318 страниц основного текста, в том числе иллюстраций – 72, таблиц - 3. Список литературы содержит 138 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследования, положения, выносимые на защиту, научная новизна и практическая значимость.

Первая глава отражает геомеханическую мотивацию данной диссертации, в ней, в основном, дается обзор экспериментальных методов и вычислительных подходов к изучению напряженного состояния земной коры, обсуждаются основные предположения.

Основной гипотезой настоящего исследования является предположение об упругом поведении земной коры. Поскольку круг работ, посвященных моделированию напряжений в Земле, достаточно велик, в обзоре почти не представлены модели, которые не имеют связи с упругостью, т.е. с основной темой диссертации. Однако упомянуты модели типа Динника (ее часто ассоциируют с именами Terzaghi, Richart) или Гейма (Heim's rule), которые не требуют задания реологии или каких-то соотношений между смещениями и напряжениями. Это сделано из-за того, что такие модели могут включать упругую модель как частный случай (но могут и противоречить ей), например, когда в результате различных методов осреднения, напряжения выражаются через гармонические функции. Вопросы, связанные с методами плоской теории упругости, приведены в следующей главе. Дополнительные сведения о результатах других авторов по моделированию напряжений в тех регионах земной коры, которые рассматриваются в виде примеров в диссертации, даны в соответствующих главах.

В рамках трехмерной теории упругости проведен подробный анализ часто принимаемого предположения о вертикальности одного из главных напряжений в земной коре. Показано, что такое предположение позволяет рассматривать трехмерную задачу в виде суперпозиции плоского напряженного состояния, одномерной задачи о весоном слое (стержне) и изгибных напряжений, порождаемых весом. При этом, если толщина слоя (коры) мала по сравнению с другими размерами, то можно ограничиться суперпозицией плоской задачи и одномерной задачи, вызванной весом вышележащих пород. Поскольку вес не влияет на девиатор напряжений, то он не должен учитываться в последующей постановке плоской задачи.

Приведены общепринятые подходы к анализу напряжений в земной коре, основанные на использовании обратных задач теории упругости, т.е. на подгонке расчетных ориентаций напряжений к данным внутри области, и обсуждены недостатки такого подхода. Приведен пример, который свидетельствует о том, что выбор различных граничных условий может привести, с одной стороны, к качественно различным полям траекторий главных напряжений, но, с другой стороны, эти поля траекторий полностью соответствуют заданным направлениям внутри области. Этим объясняется большое число возможных моделей в работах по определению напряжений в одном и том же регионе.

В конце данной главы приведены основные цели работы и направления исследований, которые сформулированы следующим образом.

1. Необходимо разработать методы решения краевых задач теории упругости, которые не подразумевают введение величин граничных напряжений, усилий или смещений, а используют только информацию о направлениях напряжений (усилий или смещений). Такой подход диктуется типом данных, которые доступны из различных индикаторов напряжений и смещений. С математической точки зрения такие формулировки краевых задач являются некорректными, поскольку очевидно, что без знания величин напряжений или смещений, однозначные реконструкции полей напряжений невозможны. Тем не менее, необходимо установить с каким произволом возможно провести реконструкцию напряжений и указать, сколько измерений величин напряжений необходимо, чтобы избавиться от этого произвола.

2. Поскольку прямые формулировки плоских задач теории упругости с указанными выше типами граничных условий ранее не исследовались, то необходимо разработать общую методику решения таких задач, включающую исследование разрешимости задачи для конкретных комбинаций граничных условий. Для этого целесообразно развить подход к решению комплексных сингулярных интегральных уравнений, разработанный Гаховым, что и будет основным направлением исследований в главах 3-5.

3. Необходимо разработать методы реконструкции напряжений по дискретным данным об ориентациях главных напряжений, собранных в мировой базе данных по напряжениям, которые распределены существенно неравномерно по всей литосфере и сосредоточены не только по границам тектонических плит, но и внутри их. Как уже отмечалось выше, методы, основанные на решении обратных задач, в данном случае не эффективны, поэтому предлагается использовать подход, основанный на методе Трефтца для комплексных потенциалов, что приводит к задаче (не краевой) оптимизации невязки между расчетными и экспериментальными ориентациями главных напряжений. Данная техника никогда ранее не применялась для анализа данных по главным направлениям тензора напряжений, поэтому необходима разработка соответствующих алгоритмов и полное исследование их эффективности, что и будет сделано в главах 6-8.

4. Разработанные методики и алгоритмы необходимо верифицировать и показать их применимость для работы с реальными данными, в частности:

- для реконструкций полей напряжений в различных районах Земли, где имеются как плотно распределенные данные по всей области (например, Западная Европа), так и в основном граничные данные (например, Антарктическая плита);
- для изучения эволюции полей палеонапряжений;
- для исследования полей напряжений в наиболее сейсмически активных регионах Земли,

особенно тех, где произошли крупные землетрясения, вызвавшие цунами, что является важнейшей практической проблемой для идентификации цунамигенных районов.

Во второй главе дано систематическое изложение теории упругости в случае плоской задачи с использованием комплексных переменных. Оно опирается на классические работы Векуа, Мухелишвили, Лехницкого, Работнова и других, но содержит дополнения, учитывающие объемные силы. В частности, показано, что для гармонических массовых сил функция Эйри по-прежнему остается бигармонической, а средние напряжения – гармонической функцией. Опираясь на эту технику, получены выражения для уравнений теории упругости для произвольных ортогональных координат, в частности вдоль траекторий главных напряжений (уравнения Ламе-Максвелла) и вдоль линий скольжения.

Для функций напряжений, образующих формулы Колосова-Мухелишвили при отсутствии массовых сил, введены следующие обозначения

$$P \equiv \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)}, \quad D \equiv \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} + i\sigma_{12} = \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z), \quad (1)$$

$$W \equiv 2Gu = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad \varphi'(z) = \Phi(z), \quad \psi'(z) = \Psi(z). \quad (2)$$

Здесь σ_{ij} – компоненты плоского тензора напряжений ($i, j=1,2$), G – модуль сдвига, $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ – для плоского напряженного состояния и $\kappa=3-4\nu$ – для плоской деформации, ν – коэффициент Пуассона, голоморфные функции $\varphi(z)$, $\Phi(z)$, $\psi(z)$, $\Psi(z)$ – называются комплексными потенциалами в плоской теории упругости. Вещественная функция напряжений P – есть шаровая часть тензора напряжений, она является гармонической, а комплекснозначная функция D – есть девиатор напряжений, эта функция является биголоморфной в том смысле, что ее вторая производная по сопряженной переменной обращается в нуль. Введены обозначения для главного направления плоского тензора напряжений – функции $\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$, и указана связь с аргументом функции $D = -\tau_{\max} \exp(-2i\theta)$, где $\arg(D) = -2\theta$ – аргумент, а $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \geq 0$ – максимальное касательное напряжение в плоскости. Также введена вторая вспомогательная голоморфная функция $T = \bar{z}\Phi(z) + \psi(z)$, производная которой по z равна комплексному девиатору, эта функция используется далее в выражении для усилий на контуре. Введенные здесь обозначения широко используются по всему тексту работы.

Следует подчеркнуть, что условие того, что средние напряжения P представляются гармонической функцией, допускает обобщение на случай, когда реология среды не является упругой. При выполнении этого условия, все постановки краевых задач, в которых не используется закон Гука, эквивалентны упругой постановке.

Проведено исследование полей траекторий главных напряжений, возникающих в упругой задаче, и определены необходимые условия, налагаемые на гладкую функцию двух

переменных, при которых она может рассматриваться в виде поля траекторий главных напряжений, допустимого в упругости. Показано, что не любая сетка, представленная системой двух семейств ортогональных кривых, может рассматриваться в виде траекторий главных напряжений в упругой постановке, а только такая, где главные направления представимы аргументом биголоморфной функции. Это существенно сужает число интерполяционных методов, способных реконструировать поля траекторий по дискретным данным.

В главе 3 приведены выражения для краевых значений голоморфных и биголоморфных функций, а также для комплекснозначных функций смещений, напряжений и усилий через вспомогательные плотности скачков комплексных потенциалов – функции g и h . Для потенциалов они следуют из формул Сохоцкого и имеют вид

$$\begin{aligned} 2\varphi^{\pm} &= \pm g + \mathbf{S}(g), & 2\Phi^{\pm} &= \pm g' + \mathbf{S}(g'), & 2\Psi^{\pm} &= \pm h \mp \bar{\zeta} g' + \mathbf{S}(h - \bar{t}g'), \\ 2\Psi^{\pm} &= \pm h' \mp \bar{\zeta} g'' \mp e^{2i\vartheta} g' + \mathbf{S}(h' - \bar{t}g'' - e^{2i\vartheta} g'). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь использовано компактное обозначение для сингулярного интеграла

$$\mathbf{S}(g) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{t - \zeta} dt, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (4)$$

указаны его свойства $\mathbf{S}[\mathbf{S}(g)] = g$, $\overline{\mathbf{S}(\bar{g})} = -\mathbf{S}(\bar{g}) + \mathbf{R}_2(\bar{g})$, $\mathbf{S}(fg) = f\mathbf{S}(g) + \mathbf{R}_3(f, g)$, где операторы $\mathbf{R}_2(\bar{g})$ и $\mathbf{R}_3(f, g)$, а также, используемый далее $\mathbf{R}_1(g) = -\mathbf{S}((\bar{t} - \bar{\zeta})g')$, являются регулярными.

Краевые значения биголоморфных функций и функций напряжений получают непосредственной подстановкой (3) в формулы (1)-(2). Для частного случая $h = -\bar{g}$, который выражает непрерывность вектора усилий (напряжений) при переходе через контур эти формулы упрощаются, в частности выражения для функций девиатора $D(\zeta)$, усилий $F(\zeta)$ и смещений $W(\zeta)$ на контуре приобретают вид

$$\begin{aligned} 2D^{\pm} &= \mp e^{-2i\vartheta} (g' + \bar{g}') - \mathbf{S}(e^{-2i\vartheta} (g' + \bar{g}')) + \mathbf{R}_1(g') \\ 2F^{\pm} &= 2\mathbf{S}(g) + \overline{\mathbf{R}_1(g)} - \mathbf{R}_2(g), & 2W^{\pm} &= \pm(\kappa + 1)g + (\kappa - 1)\mathbf{S}(g) - \overline{\mathbf{R}_1(g)} + \mathbf{R}_2(g) \end{aligned} \quad (5)$$

где ϑ – угол наклона касательной к контуру.

Выражения для граничных значений (5) будут далее использоваться для составления сингулярных интегральных уравнений (СИУ) для неклассических краевых задач. При обсуждении применимости указанных выше выражений для краевых значений функций напряжений, смещений и усилий приведены сопоставления с известными классическими постановками, приведенными в работах Мухелишвили, Галина, Михлина, Койтера (Koiter), Джонсона (Johnson), Каландия, Салганика, Линькова.

Указывается, что классические формулировки задач плоской теории упругости не исчерпывают всех возможных формулировок краевых задач в теории аналитических функций.

На основе подхода, развитого Гаховым, любую линейную краевую задачу можно свести к специальному СИУ, содержащему комплексно сопряженную неизвестную функцию g , которое имеет следующий вид

$$ag + b\bar{g} + cS(g) + d\overline{S(g)} + K(g) + \overline{L(g)} = f. \quad (6)$$

Здесь $K(g)$ и $L(g)$ – любые регулярные операторы, а комплекснозначные функции a, b, c, d, f непрерывны на контуре. Идея Гахова заключается в том, чтобы применить оператор вида левой части (6), но с другими коэффициентами, к СИУ (6) и подобрать коэффициенты этого оператора так, чтобы новое уравнение уже не имело бы комплексно сопряженной функции в своей характеристической части. После чего открывается возможность использовать анализ, применяемый к СИУ вида $ag + cS(g) = f$, которое сводится к краевой задаче Римана для аналитических функций. Разрешимость задачи Римана определяется индексом комплекснозначной функции $G=(a-c)/(a+c)$, который определяется через приращение аргумента функции G после полного обхода контура Γ против часовой стрелки. Гахов показал, что разрешимость СИУ (6) определяется индексом функции G , который вычисляется по формулам

$$2K = \frac{1}{2\pi i} [\ln(G)]_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} [\arg(G)]_{\Gamma}, \quad G = \frac{A-iB}{A+iB}, \quad A-iB = (\bar{a} + \bar{c})(a-c) + (b+d)(\bar{d} - \bar{b}) \quad (7)$$

Если $2K > 0$ (коэффициент 2 введен для удобства), то решение однородного ($f=0$) имеет $2K$ линейно независимых решений и зависит от $4K$ вещественных постоянных, в противном случае однородное СИУ не имеет решений.

Далее приводятся два близких друг к другу подхода, которые основаны на методе Гахова и позволяют строить численные решения.

Подход 1 – Сведение к уравнению Фредгольма. Здесь использована идея Гахова об исключении комплексно сопряженной искомой функции, но она реализована несколько по-другому, чем в оригинале. Кроме того, показано, что применение регуляризации Карлемана-Векуа к СИУ с комплексно сопряженными неизвестными функциями приводит к уравнению Фредгольма второго рода. Решение этого уравнения может включать в себя больше параметров, чем решение соответствующего характеристического СИУ лишь в исключительных случаях. Это расширяет результат Гахова в отношении числа решений характеристического и полного СИУ, не содержащего комплексно сопряженных неизвестных. Также указан подход к численной реализации, который состоит в следующем.

После исключения комплексно сопряженной неизвестной функции СИУ принимает вид

$$Ag + iBS(g) + \mathbf{regular}(g, \bar{g}) = 0, \quad A = a\bar{a} - b\bar{b} - c\bar{c} + d\bar{d}, \quad iB = \bar{a}c - a\bar{c} - b\bar{d} + \bar{b}d, \quad (8)$$

где $\mathbf{regular}(g, \bar{g})$ – регулярный оператор, линейный относительно неизвестной функции и ее комплексного сопряжения. Полное уравнение (8) является однородным. Оно, однако, имеет не меньше независимых решений, чем соответствующее ему характеристическое. Это показано

применением регуляризации Карлемана-Векуа, которое приводит (8) к уравнению Фредгольма

$$g + \mathbf{K}(g, \bar{g}) = iBZ P_{2K-1} \quad (9)$$

с регулярным ядром в операторе \mathbf{K} , выраженным через регулярный оператор в (8). Здесь P_{2K-1} является произвольным многочленом степени $(2K-1)$ с комплексными коэффициентами. СИУ (8) эквивалентно (9) при условии, что однородное уравнение (9) неразрешимо. Последнее может иметь место только в исключительных случаях, когда единица есть собственное число ядра интегрального уравнения (9); в противном случае (9) имеет единственное решение, которое зависит от $2K$ комплексных постоянных. Таким образом, решение СИУ (8) и, следовательно, исходного однородного уравнения, также зависит от $2K$ комплексных постоянных или от $4K$ вещественных постоянных. Все решения СИУ (9), можно построить путем линейной комбинации частных решений g_m уравнений $g_m + \mathbf{K}(g_m, \bar{g}_m) = iBZ \zeta^m$, $m=0, \dots, K-1$. Для неоднородного уравнения решение будет включать один дополнительный член, соответствующий его правой части.

Подход 2 – Суперпозиция решений однородного и неоднородного СИУ. Некоторым недостатком первого численного подхода является относительно высокий порядок вложенных интегралов в ядре уравнения Фредгольма. Далее предлагается модифицированный метод, который более экономичен с вычислительной точки зрения.

Следуя Гахову, применим оператор $\Theta(\cdot) = \bar{a}\mathbf{I}(\cdot) - b\overline{\mathbf{I}(\cdot)} - \bar{c}\mathbf{S}(\cdot) - d\overline{\mathbf{S}(\cdot)}$ (где $\mathbf{I}(g)=g$) к однородному СИУ общего вида (6), что позволяет исключить сопряжение в характеристической части нового уравнения. Тогда уравнение примет вид аналогичный (8) в котором регулярный оператор можно выразить в виде $\mathbf{regular}(g, \bar{g}) = \mathbf{U}g + \overline{\mathbf{V}g}$, где \mathbf{U} и \mathbf{V} некоторые регулярные операторы, которые возникают после применения оператора $\Theta(\cdot)$ и перестановок сингулярных и регулярных операторов. Далее общее решение однородного СИУ ищется в виде суммы двух неизвестных функций $g=g_0+g_1$, где g_0 представляет общее решение однородного характеристического уравнения $Ag_0+iBSg_0=0$, а g_1 – есть любое частное решение неоднородного СИУ вида $Ag_1+iBSg_1+\mathbf{U}g_1+\overline{\mathbf{V}g_1}=f_0$, правая часть которого выражается через решение g_0 и есть $f_0 = -\mathbf{U}g_0 - \overline{\mathbf{V}g_0}$. Таким образом, решение осуществляется в два шага. Сначала находится аналитическое решение характеристического уравнения для функции g_0 и попутно определяется число линейно независимых решений путем подсчета индекса соответствующей краевой задачи Римана – $2K$. Второй шаг заключается в нахождении частных решений полного неоднородного СИУ – g_1 , где правая часть является линейной комбинацией однородных решений с произвольными комплексными коэффициентами c_j . Сумма g_0 и g_1 дает общее решение полного СИУ.

Преимущество второго подхода над первым очевидно из того факта, что в расчетах необходимо выполнить численное интегрирование двух повторных интегралов, в отличие от первого, где требуется больше вычислительных усилий.

Результаты данной главы представляют методику исследования краевых задач теории упругости с однородной правой частью, которые рассматриваются далее. Эта методика состоит из следующих шагов.

1. Выбор таких соотношений между искомыми функциями в интегралах типа Коши для комплексных потенциалов, которые позволяют либо автоматически удовлетворить одно из граничных условий, либо упрощают вид получаемых далее интегральных уравнений.
2. Сборка комплексного СИУ общего вида (6), при условии, что нет возможности получить редуцированное СИУ или систему более простых СИУ.
3. Определение числа линейно независимых решений путем исследования характеристического уравнения или эквивалентной ему задачи Римана.
4. Переход к интегральным уравнениям, приспособленным для численных расчетов. Это достигается одним из указанных выше методов, основанных либо на сведении к уравнению Фредгольма, либо на суперпозиции общего решения однородного характеристического СИУ и частного решения неоднородного полного уравнения.

Достоверность результатов, получаемых по указанным выше методике, обеспечивается теоремами Нётера для характеристического уравнения, разработанным Векуа методом регуляризации полных уравнений с добавлением регулярных интегралов (способ Карлемана-Векуа по классификации Гахова) и результатами Гахова для СИУ вида (6). Также следует упомянуть, что метод суперпозиции решений в Подходе 2, упоминается в книге Джонсона по механике контактного взаимодействия (русский перевод 1989) для более простого СИУ, что указывает на корректность предложенной численной схемы в Подходе 2.

В главе 4 рассматриваются неклассические краевые задачи (КЗ) плоской теории упругости с «неполными граничными условиями». Этому понятию дается следующее объяснение.

Любая комплекснозначная функция N комплексно сопряженных переменных может быть выражена в комплексно-экспоненциальной форме через ее модуль и аргумент. В классических формулировках в качестве функции N выступает либо вектор смещений, либо вектора усилий или напряжений. В любом случае задается краевое значение этой функции на контуре, что приводит к корректной задаче по определению комплексных потенциалов (и соответственно компонент смещений, деформаций и напряжений). Такие задачи, в частности, обладают единственными решениями (если не считать перемещений тела как жесткого целого, которое не влияет на напряженно-деформированное состояние). Единственность также означает, что соответствующее СИУ имеет нулевой индекс. В этой главе анализируется разрешимость

краевых задач, в которых модуль функции H является неизвестным на контуре. В широком смысле такие задачи могут быть отнесены к неклассическим постановкам. Показано, что главным отличием от классических КЗ плоской упругости является неединственность. Потому предложено использовать термин «КЗ с неполными граничными условиями» для того чтобы подчеркнуть возможность существования конечного числа линейно независимых решений.

Вводятся следующие обозначения для краевых значений аргументов девиатора напряжений (D) смещений (W) и усилий (F)

$$\arg D = \alpha(\zeta), \quad \arg W = \beta(\zeta), \quad \arg F = \gamma(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (10)$$

где α , β и γ – заданные функции комплексной точки ζ на гладком контуре Γ (открытом или замкнутом). Из этих граничных условий можно сформировать три возможные комбинации: (α, β) , (α, γ) , (β, γ) что приводит к трем формулировкам КЗ в направлениях.

В качестве второй группы условий вводятся производные аргументов по нормали.

$$\frac{\partial \arg D}{\partial n} = \alpha'_n(\zeta), \quad \frac{\partial \arg W}{\partial n} = \beta'_n(\zeta), \quad \frac{\partial \arg F}{\partial n} = \gamma'_n(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (11)$$

где α'_n , β'_n и γ'_n – заданы на Γ с внешней нормалью n . Можно составить 3 комбинации условий (10) и (11), т.е. (α, α'_n) , (β, β'_n) , (γ, γ'_n) которые порождают еще три возможные формулировки.

Далее подробно изучены две формулировки из упомянутых выше шести, которые представляют практический интерес для реконструкции полей напряжений. Смешанные, например, (α, β'_n) , не рассматриваются, поскольку их практическая ценность не так очевидна.

Условия (10) также могут быть объединены с обычными граничными условиями, которые предполагают нулевые скачки векторов напряжений или смещения при переходе через контуры между соседними областями. Эти условия могут быть представлены в следующем виде

$$\langle \sigma \rangle = p(\zeta) = 0, \quad \langle W \rangle = w(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (12)$$

Можно формально рассмотреть шесть комбинаций граничных условий (10) и (12): (α, p) , (β, p) , (γ, p) , (α, w) , (β, w) , (γ, w) ; далее они подробно исследуются для гладкого замкнутого контура, разделяющего всю комплексную плоскость на внутреннюю и внешнюю.

Отмечено, что задачи типа (α, α'_n) были ранее введены Гаховым при формулировке одной из краевых задач для полианалитических функций. Заметим, что используемые здесь биголоморфные функции T и D по форме несколько отличается от гаховского вида, т.к. их производные $\partial_{\bar{z}} T$, $\partial_{\bar{z}} D$ в нуле могут быть отличны от нуля. Гахов предлагает общий подход к сведению таких задач к системе задач для аналитических функций, но отмечает, что в произвольном случае «Решение таких краевых задач представляет вопрос весьма сложный», и рассматривает подробно только формулировки для круга. Идея использовать граничные условия типа (α, α'_n) для плоских упругих задач была высказана Мухамедиевым в 1997 году.

Как видно, ни одно из упомянутых выше граничных условий (10)-(12) не содержит данные по величинам смещений, напряжений и усилий, что оправдывает использование термина «неполные граничные условия».

Анализ различных краевых задач проходит по схеме, приведенной в конце предыдущей главы, которая подразумевает, что, если определено решение для искомым плотностей комплексных потенциалов, то значит сами потенциалы, а, следовательно, и все компоненты напряжений и смещений могут быть найдены интегрированием. Если решение не единственно, то линейно независимые решения формируют общее решение, путем их линейной комбинации, т.е. общее решение зависит от некоторого числа произвольных постоянных. Основная цель - это определить эти числа, т.е. определить все возможные напряженные состояния, которые удовлетворяют выбранным парам граничных условий. В этом смысле формулировка “найти комплексные потенциалы” или “все возможные напряженные состояния” являются эквивалентными. Далее используются обе формулировки, и обе они означают, что требуется:

- Установить разрешимость задачи при выбранной паре граничных условий и определить число линейно-независимых решений (и число произвольных постоянных).
- Получить выражения для плотностей потенциалов, что фактически и решает задачу.

Окончательные выражения для потенциалов и компонент напряжений не приводятся.

В параграфе 4.2 рассмотрена краевая задача в ориентациях главных напряжений для односвязной конечной области, которая формулируется для внутренней односвязной конечной области Ω с гладкой границей Γ следующим образом: *Найти все возможные напряженные состояния в Ω по паре граничных условий (α, α'_n) на Γ .*

Краевая задача сведена к системе двух вещественных однородных СИУ для отыскания двух неизвестных вещественных функций $\mu = \text{Re}g$ и $v = \text{Im}g$. Поскольку система однородна, то в соответствии с теоремами Нётера, число ее независимых решений равно индексу задачи, который определяется из характеристического СИУ. В данном случае имеем систему СИУ

$$\begin{cases} e^{-i\eta}[\mu + S(\mu)] - e^{i\eta}[\mu - S(\mu)] = 0 \\ e^{-i\eta}[\lambda + S(\lambda)] - e^{i\eta}[\bar{\lambda} - S(\bar{\lambda})] + 2i\alpha'_n e^{-i\eta}[\mu + S(\mu)] = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $\eta = 2\vartheta + \alpha$ – известный угол и λ – вспомогательная функция, выраженная через неизвестные функции μ и v соотношением $\lambda = (2\mu\bar{\vartheta}' - \bar{v}') + 2i\bar{\mu}'$. Уравнения этой системы анализируются последовательно. Показано, что оба они имеют одинаковый индекс

$$K = \text{Index}(G) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} d\eta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} (2\vartheta'(t) + \alpha'(t)) dt. \quad (14)$$

Получено аналитическое решение системы СИУ в виде

$$\mu = -2ZP_{K-1} \cos \eta, \quad \lambda_1 = -2ZP_{K-1}^* \cos \psi - 2iS(\tilde{\mu}') - i(\alpha'_n S(\mu) + \mu S(\alpha'_n)), \quad Z = \zeta^{-\frac{K}{2}} e^{S(i\eta - \frac{K}{2} \ln \zeta)} \quad (15)$$

Здесь $\lambda_1 = \text{Re}(\lambda)$, $\text{Im}(\lambda) = 2\mu'$, а P_{K-1} и P_{K-1}^* - произвольные многочлены степени $(K-1)$.

Таким образом, установлено, что

- разрешимость системы (13) зависит только от индекса задачи, определяемого по формуле (14), для $K \leq 0$ ограниченного решения не существует;
- при $K > 0$ решение системы (13) содержит $2K$ комплексные константы.

Если каждая комплексная константа рассматривается как две вещественные независимые константы, то общее число независимых константы, не будет равно $4K$, так как должны быть выполнены некоторые дополнительные условия. Эти условия вытекают из того, что функции μ и λ_1 действительные, а также из того, что должны быть удовлетворены условия однозначности смещений (в главе 5 продемонстрировано как происходит уменьшение числа независимых констант для случая единичной окружности).

В параграфе 4.3 рассмотрена краевая задача (β, γ) , в которой требуется определить число решений по заданным граничным условиям на Γ : $\arg W = \beta$, $\arg F = \gamma$. Задача сведена к комплексному СИУ общего вида (6) с коэффициентами $a = c = (\kappa + 1)$, $b = -(\kappa + 1)e^{2i\beta}$, $d = -(\kappa - 1)e^{2i\beta} - 2e^{2i\gamma}$ и нулевой правой частью $f=0$. Определен индекс задачи Римана, соответствующей этому уравнению

$$2K = \frac{1}{\pi i} \left[\ln(\sin \delta) + \ln\left(\kappa + e^{-2i\delta}\right) + i\delta \right]_{\Gamma} = \frac{1}{\pi} [\delta]_{\Gamma}, \quad \delta = \beta - \gamma, \quad (16)$$

который зависит только от разности аргументов. Таким образом, установлено, что число независимых решений полного СИУ не меньше, чем $2K$. Если индекс отрицателен, то задача не имеет решения.

В параграфе 4.4 рассмотрены четыре краевые задачи с транзитными граничными условиями вида (β, γ) . Считается, что гладкий замкнутый контур Γ разделяет бесконечную изотропную однородную упругую плоскость на внутреннюю Ω^+ и внешнюю Ω^- области. Предполагается, что неизвестные нагрузки приложены на контуре Γ , а объемные силы и напряжения на бесконечности отсутствуют. Рассматриваемая далее краевая задача формулируется следующим образом: *Найти все возможные напряженные состояния в Ω^+ и (или) Ω^- по заданным граничным ориентациям усилий и (или) перемещений, не зная их величин на Γ .* Предполагается, что известные функции $\beta = \beta(\zeta)$ и $\gamma = \gamma(\zeta)$ непрерывны на Γ , они образуют первое семейство четырех возможных граничных условий, которые могут быть записаны в виде

$$e^{-i\beta^{\pm}} (\kappa \varphi^{\pm} - \bar{T}^{\pm}) = e^{i\beta^{\pm}} (\kappa \bar{\varphi}^{\pm} - T^{\pm}), \quad e^{-i\gamma^{\pm}} (\varphi^{\pm} + \bar{T}^{\pm}) = e^{i\gamma^{\pm}} (\bar{\varphi}^{\pm} + T^{\pm}) \quad (17)$$

Второе семейство условий отражает непрерывность либо усилий, либо перемещений

$$\langle W \rangle = 0 \Leftrightarrow \kappa \varphi^+ - \bar{T}^+ = \kappa \varphi^- - \bar{T}^-, \quad \langle F \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi^+ + \bar{T}^+ = \varphi^- + \bar{T}^-. \quad (18)$$

Четыре возможные комбинации граничных условий (17) и (18) рассмотрены ниже. Они обозначены далее КЗ-1 – КЗ-4. Показано, что все они сводятся к однородному СИУ общего вида (6) и могут иметь нетривиальные решения в зависимости от индекса задачи.

КЗ-1. Направления векторов смещения известны по обе стороны от контура, $\arg W^\pm = \beta^\pm$, в то время как усилия при переходе через контур непрерывны, $\langle F \rangle = 0$. Краевая задача состоит в нахождении комплексных потенциалов во внешней и внутренней областях по следующей паре комплекснозначных граничных условий

$$(\kappa+1)(\varphi^+ - \varphi^-) - e^{2i\beta^+} (\kappa\bar{\varphi}^+ - T^+) + e^{2i\beta^-} (\kappa\bar{\varphi}^- - T^-) = 0, \quad \varphi^+ - \varphi^- + \bar{T}^+ - \bar{T}^- = 0. \quad (19)$$

Здесь первое уравнение было получено путем исключения краевого значения биголоморфной функции \bar{T}^\pm из первых двух скалярных условий в (17) с учетом второго уравнения (18).

КЗ-2. Направления усилий известны по обе стороны контура, $\arg F^\pm = \gamma^\pm$, а смещения непрерывны при переходе через контур, $\langle W \rangle = 0$. После преобразований, аналогичных тем, что и в КЗ-1, краевые задачи для внешней и внутренней областей приводятся к виду

$$(\kappa+1)(\varphi^+ - \varphi^-) - e^{2i\gamma^+} (\bar{\varphi}^+ + T^+) + e^{2i\gamma^-} (\bar{\varphi}^- + T^-) = 0, \quad \kappa\varphi^+ - \kappa\varphi^- - \bar{T}^+ + \bar{T}^- = 0. \quad (20)$$

КЗ-3. Направления перемещений и усилий известны одновременно по обе стороны от контура, т. е. $\arg W^\pm = \beta^\pm$, $\arg F^\pm = \gamma^\pm$. Требуется найти решения во внешней и внутренней областях по следующей паре комплекснозначных граничных условий, полученных исключением сопряженных биголоморфных функций и объединением скалярных условий (17)

$$(\kappa+1)\varphi^\pm - (e^{2i\beta^\pm} \kappa + e^{2i\gamma^\pm})\bar{\varphi}^\pm + (e^{2i\beta^\pm} - e^{2i\gamma^\pm})T^\pm = 0. \quad (21)$$

КЗ-4. Ориентации смещений, $\arg W = \beta$, и усилий, $\arg F = \gamma$, известны на границе. Однако, в отличие от КЗ-3, решение ищется либо для внешней, либо для внутренней области, поэтому индексы опущены. Граничные условия аналогичны (21), но дополнены условиями непрерывности либо усилий, либо смещений при переходе через контур

$$(\kappa+1)\varphi - (\kappa e^{2i\beta} + e^{2i\gamma})\bar{\varphi} + (e^{2i\beta} - e^{2i\gamma})T = 0, \quad \langle \bar{\varphi} \rangle = -\langle T \rangle \quad \text{или} \quad \kappa \langle \bar{\varphi} \rangle = \langle T \rangle. \quad (22)$$

Случай с непрерывными усилиями уже был подробно исследован для внутренней области в предыдущем параграфе, здесь он представлен для полноты.

Путем сведения краевых задач к комплексному СИУ, а затем СИУ к краевой задаче Римана показано, что индексы задач КЗ-1 – КЗ-4 есть соответственно

$$K_k \equiv \text{Index}(G_k) = \frac{\delta_k}{\pi} \Big|_{\Gamma}, \quad k=1,2,3,4. \quad (23)$$

$$G_1 = -e^{-2i\delta_1} \frac{\kappa^2 - e^{-2i\delta_1}}{\kappa^2 - e^{2i\delta_1}}, \quad \delta_1 = \beta^+ - \beta^-; \quad G_2 = -e^{-2i\delta_2} \frac{\kappa^2 - e^{2i\delta_2}}{\kappa^2 - e^{-2i\delta_2}}, \quad \delta_2 = \gamma^+ - \gamma^-;$$

$$G_3 = -\frac{e^{i\delta_3^+} \sin \delta_3^+ \kappa + e^{2i\delta_3^-}}{e^{i\delta_3^-} \sin \delta_3^- \kappa + e^{2i\delta_3^+}}, \quad \delta_3^{\pm} = \beta^{\pm} - \gamma^{\pm}; \quad G_4^{\pm} = e^{\pm 2i\delta_4} \frac{\kappa + e^{\mp 2i\delta_4}}{\kappa + e^{\pm 2i\delta_4}}, \quad \delta_4 = \beta - \gamma.$$

Из этих соотношений вытекает связь $2K_3 = K_1 + K_2 = K_4^+ + K_4^-$, которая показывает, что число независимых решений КЗ-3 является средним между числом решений КЗ-1 и КЗ-2, а также средним между числом решений КЗ-4 для внешней и внутренней областей. Отмечено, что одна из задач КЗ-1 или КЗ-2 может быть неразрешимой (если $K_1 \leq 0$ или $K_2 \leq 0$), но при этом решение КЗ-3 может существовать при условии, что $K_3 > 0$. Аналогичным образом, КЗ-3 может быть разрешимой, в то время как одно из решений КЗ-4 не существует.

Определение числа линейно независимых решений СИУ для КЗ-1 – КЗ-4 представляет основной результат этого параграфа. Анализ ориентаций смещений и усилий на границе имеет большое значение при численной реализации для обеспечения полноты решения конкретных механических задач, которые будут рассмотрены далее для моделирования напряженных состояний некоторых тектонических регионов.

В параграфе 4.4 рассмотрены две краевые задачи с граничными условиями в направлениях напряжений для составной упругой плоскости типа (β, p) и (α, p) .

В задаче (β, p) рассматривается плоскость, состоящая из двух полуплоскостей из разномодульных материалов. Граничные значения смещений и напряжений имеют вид

$$2G^{\pm}W^{\pm} = 2G^{\pm}(w_1^{\pm} + iw_2^{\pm}) = \kappa^{\pm}\varphi^{\pm} - \bar{T}^{\pm}, \quad F^{\pm} = t_1^{\pm} + it_2^{\pm} = \varphi^{\pm} + \bar{T}^{\pm}, \quad (24)$$

где знаки “ \pm ” обозначают граничные значения, полученные при приближении к контуру Γ из областей Ω^{\pm} соответственно, а упругие константы κ^{\pm} определяются как $\kappa^{\pm} = 3 - 4\nu^{\pm}$ – для плоской деформации и $\kappa^{\pm} = (3 - \nu^{\pm})(1 + \nu^{\pm})^{-1}$ – для плоского напряженного состояния. Считается, что ориентации смещений известны по обе от стороны контура, а усилия непрерывны при переходе через контур. Тогда приходим к следующей краевой задаче для голоморфных функций: *Определить две кусочно-голоморфные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ по граничным условиям на Γ*

$$F^+ - F^- = 0, \quad \arg W^{\pm} = \beta^{\pm}, \quad (25)$$

при условии, что две вещественные функции $\beta^{\pm} = \beta^{\pm}(\zeta)$ удовлетворяют условию Гёльдера на контуре.

Получена система двух вещественных СИУ вида

$$e^{-i\beta^{\pm}}\left(\pm(\kappa^{\pm}+1)g+(\kappa^{\pm}-1)Sg\right)-e^{i\beta^{\pm}}\left(\pm(\kappa^{\pm}+1)\bar{g}+(\kappa^{\pm}-1)S\bar{g}\right)+\mathbf{reg}^{\pm}(g,\bar{g})=0 \quad (26)$$

Здесь операторы $\mathbf{reg}^{\pm}(.,.)$ являются регулярными, так как они выражаются через регулярные операторы \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 . Эта система путем линейной комбинации сводится к форме (6). Индекс этой задачи есть

$$2K \equiv \text{Index}(G) = \frac{1}{\pi} [\delta]_{\Gamma}, \text{ где } G = -e^{2i\delta} \frac{\kappa^+ \kappa^- - e^{-2i\delta}}{\kappa^+ \kappa^- - e^{2i\delta}}, \quad \delta = \beta^+ - \beta^- \quad (27)$$

Как видно, дробь в (27) не влияет на индекс, поскольку $\kappa > 1$ и действительная часть G всегда положительна. Видно, что индекс зависит только от разности ориентаций смещения (угла δ), приращение которого (после полного обхода Γ в положительном направлении) должно быть положительным для того, чтобы обеспечить разрешимость рассматриваемой КЗ. Если $2K \leq 0$, то не существует ограниченных (нетривиальных) решений. Для $2K > 0$ решение (6) включает в себя произвольный многочлен степени $2K-1$, что означает, что в решение линейно входит до $4K$ вещественных параметров. Следует отметить, что число произвольных постоянных может быть уменьшено, если ввести определенные ограничения.

Численное решение этой задачи определяется путем суперпозиции всех решений однородного характеристического СИУ и частного решения полного СИУ, как подробно описано в параграфе 3.3 главы 3. Важно отметить, что разномодульность не оказывает существенного влияния на разрешимость КЗ и, тем более, на численный подход.

Задача (α, p) для составной плоскости рассматривается для одномодульных полуплоскостей. Она формулируется следующим образом: *Определить все возможные напряженные состояния в Ω^+ и Ω^- по заданным граничным значениям главных направлений (т.е. по граничным значениям аргумента биголоморфной функции) по обе стороны контура Γ , $\arg D^{\pm} = \alpha^{\pm}$, при условии непрерывности вектора напряжений при переходе через контур, $\langle \sigma \rangle = 0$.* Как и раньше нагрузки (смещения, усилия) на контуре неизвестны, и предполагается, что объемные силы отсутствуют, а напряжения на бесконечности могут быть постоянными, но также неизвестными ($D^-(\infty) = D_{\infty}$), либо они исчезают. Второе граничное условие $\langle \sigma \rangle = 0$ будет автоматически удовлетворено, если для искомой функции воспользоваться представлениями (5) главы 3, что и сделано далее. Это приводит к граничным значениям биголоморфной функции девиатора напряжений вида (6), из которого следует неравенство, налагаемое на граничные значения функций $\arg D^{\pm}$. Оно имеет вид $\sin \eta^+ \sin \eta^- \geq 0$, где $\eta^{\pm} = \alpha^{\pm} + 2\theta$. Это неравенство должно выполняться на границах полуплоскостей, в противном случае нарушается условие неотрицательности и ограниченности максимальных касательных напряжений.

Подстановка выражения (5) в граничные условия $\arg D^{\pm} = \alpha^{\pm}$ приводит к системе двух вещественных СИУ, которые затем могут быть представлены одним комплексным СИУ вида

$$a\rho + c\left(\mathbf{S}(\rho) - \frac{1}{2}\mathbf{R}_1(\rho e^{2i\vartheta} + iv)\right) = 0, \quad a = 2 - e^{-2i\eta^+} - e^{-2i\eta^-}, \quad c = e^{-2i\eta^-} - e^{-2i\eta^+} \quad (28)$$

Следуя идее суперпозиции решений, решение СИУ (28) разыскивается в виде суммы $g' = \rho_0 + \lambda$, $\text{Im}(e^{2i\vartheta}\rho_0) = 0$, где ρ_0 - есть решение характеристического уравнения, которое получается из (28), если опустить регулярный оператор (тогда единственная искомая функция будет функция ρ), т.е. $a\rho_0 + c\mathbf{S}(\rho_0) = 0$. Второй член - есть частное решение полного

неоднородного СИУ
$$ae^{-2i\vartheta}(\lambda + \bar{\lambda}) + c\mathbf{S}\left(e^{-2i\vartheta}(\lambda + \bar{\lambda})\right) - c\mathbf{R}_1(\lambda) = c\mathbf{R}_1(\rho_0 e^{2i\vartheta}).$$

Характеристическое СИУ имеет индекс, который определяется только разностью $\alpha^+ - \alpha^-$

$$K = \text{Index}\left(e^{i(\alpha^+ - \alpha^-)}\right) = \frac{1}{2\pi}[\alpha^+ - \alpha^-]_{\Gamma}. \quad (29)$$

Таким образом, число линейно независимых решений характеристического уравнения, соответствующего полному (28), зависит от количества оборотов разности граничных значений главных направлений. Из условия разрешимости $K \geq 0$ следует, что число вращений оси максимального главного напряжения при обходе контура против часовой стрелки при предельном переходе к контуру снаружи должно превышать их число, полученное переходом изнутри. Обозначая частные численные решения неоднородного СИУ через λ_k и используя аналитическое решение характеристического СИУ, можно представить решение (28) в виде

$$g' = \sum_{k=0}^K C_k \left(\rho_k^0 e^{2i\vartheta} + \lambda_k \right), \quad (30)$$

где решения ρ_k^0 даются аналитическими формулами. Формально решение (30) зависит от $K+1$ произвольных комплексных коэффициентов многочлена P_K , но их число будет меньше, если принять во внимание, что произведение $\rho e^{2i\vartheta} = \mu$ есть вещественная функция (это подробно показано в следующей главе для задач (α, α'_n) и (α, p)). Таким образом, можно заключить, что решение задачи (α, p) в случае исчезающего решения на бесконечности также зависит от K линейных вещественных постоянных.

В данной главе проведен анализ разрешимости нескольких краевых задач теории упругости с «неполными граничными условиями». Во всех формулировках полностью отсутствовали данные по величинам векторов напряжений, усилий и смещений на границе внутренней области либо на контуре, делящим упругую плоскость на внутреннюю и внешнюю области (транзитные условия). Анализ выполнен по схеме, разработанной в предыдущей главе, т.е.

1. Формулировка через комплексные потенциалы с последующим переходом к краевым значениям функций напряжений и смещений.
2. Сведение к системе СИУ, а затем, если требуется, к комплексному СИУ.
3. Выделение характеристического СИУ и его исследование путем решения соответствующей задачи Римана.
4. Получение, когда возможно, замкнутых формул для искомым функций в СИУ.

Во всех рассмотренных задачах было обнаружено, что их решение зависит от поведения граничных значений аргументов функций напряжений, смещений или усилий. Именно они определяют индекс соответствующей краевой задачи Римана, а, следовательно, количество линейно независимых решений и число произвольных постоянных, входящих в решение. В зависимости от формулировки, индексы (целые числа) определяются как число вращений векторов главных напряжений, смещений либо усилий (либо определенных отношений этих векторов) при полном обходе контура против часовой стрелки. При этом имеет значение, в каком направлении происходят эти вращения, если по часовой стрелке, то индекс положителен, если против, то отрицателен. В последнем случае решение (имеется в виду нетривиальное и ограниченное) не существует. При положительных индексах число неопределенных постоянных пропорционально индексу. Неопределенные константы не могут быть определены без привлечения дополнительных данных, например, по точечным измерениям напряжений.

Проведенные исследования составляют теоретический базис для разработки численных методов реконструкций упругих напряжений по индикаторам напряжений и смещений, определяемых экспериментально. Все указанные краевые задачи относятся к классу некорректных, т.к. обладают неединственными решениями.

Несмотря на то, что имеются близкие формулировки для полианалитических функций, все полученные здесь решения являются новыми и оригинальными, поскольку ни одна из введенных ранее функций напряжений (смещений или усилий) не является полианалитической.

В главе 5 приведены аналитические решения задач, рассмотренных в главе 4 для простейших областей и для особых случаев граничных условий.

В случаях простой геометрии СИУ для всех рассмотренных задач из предыдущей главы может быть радикально упрощено. Так, в случае прямой границы регулярные операторы \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 есть тождественное нули, поэтому характеристические СИУ совпадают с полными СИУ во всех рассмотренных задачах. В случае круга, регулярные операторы принимают очень простые формы, и полное СИУ может быть сведено к анализу характеристического СИУ аналогично тому, как это было сделано ранее. Также строятся решения для некоторых специфических случаев граничных условий, которые остаются верными и для некруговых областей.

В параграфе 5.1 приведено решение задачи (α, α'_n) для единичного круга. В общем случае

граничных условий оно принимает вид, аналогичный (15). На примере этого решения показано, как происходит двукратное уменьшение числа произвольных постоянных при использовании условия $\mu - \bar{\mu} = 0$.

Далее рассматривается специальный случай граничных условий $\alpha = \alpha_0 + N\omega$, $\alpha'_n = 0$, $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где α_0 - постоянная. Целое число N здесь выражается через индекс задачи как $N = 0.5K - 2$. С учетом этого, решение (15) для функции $\mu(\xi)$ упрощается, а поскольку $\alpha'_n = 0$, то решение для λ_1 может быть выражено через производную от функции $\mu(\xi)$. Полное решение для искомой функции плотности скачка смещений приведено в аналитической форме. Комплексные потенциалы также определяются в аналитическом виде после подстановки плотности в формулы для интегралов типа Коши. Далее определяется комплексная функция девиатора напряжений. Показано, что, как и в общем случае, число произвольных постоянных, влияющих на поля напряжений, в рассматриваемом случае равно $(2K-3)$. Структура решений проиллюстрирована на частных случаях, показанных на Рисунке 1. Например, для $N=-2$ (Рис. 1а) находим $K=0$, таким образом, решение задачи не существует в классе функций, голоморфных внутри круга. Если $N=-1$ (Рис. 1б), то $K=2$ и функция напряжений принимает вид $D(z, \bar{z}) = -2e^{2i\alpha_0} C_1 \bar{z}$. Если $N=0$ (Рис. 1с), то $K=4$ и в функцию напряжений D входят четыре вещественные постоянные. Если $N=1$ (Рис. 1д), то $K=6$. Хотя геометрически этот случай похож на случай $N=-1$ (где решение дается линейной функцией координат), число независимых констант здесь 8, т.е. решение существенно нелинейно.

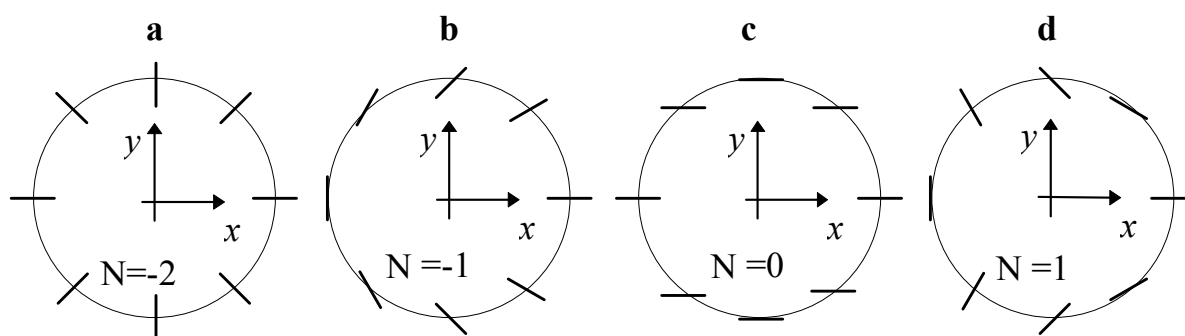


Рис. 1. Изменение ориентации главных напряжений θ вдоль контура единичной окружности для различных значений N при $\alpha_0=0$

Для верификации предложенного метода, рассмотрен такой же специальный случай граничных условий, но решение построено с помощью техники разложения в степенные ряды, которая использовалась Мусхелишвили для анализа первой и второй краевых задач плоской упругости. Показано, что оба подхода дают одинаковый результат.

В параграфе 5.2 приведено решение задачи (β, γ) для единичного круга с использованием техники разложения в степенные ряды. Рассмотрен частный случай ориентаций смещений и

усилий $e^{i\beta}=\zeta^N$, $e^{i\gamma}=\zeta^M$ (здесь и далее N и M являются целыми числами). Сводка результатов для круга с указанными граничными условиями приведена в Таблице 1.

Таблица 1

Сводка результатов решения задачи (β, γ) для круга

| | | | |
|----------------------------------|--|------------------------------|----------------------------------|
| $N \neq M$ | Нет (нетривиальных) решений | | |
| $N = M$ | Решения могут существовать и включают в себя определенное число произвольных вещественных постоянных | | |
| $N < 0$ | $N = 0$ | $N = 1$ | $N > 1$ |
| $(-2N-1)$ вещественные константы | нет (нетривиальных) решений | одна вещественная постоянная | $(2N-3)$ вещественные постоянные |

В параграфе 5.3 проанализирован особый случай соосных ориентаций задачи (β, γ) для единичного круга. В этом случае граничные условия принимают вид $\text{Im}(e^{-i\beta}\varphi)=0$, $\text{Im}(e^{-i\beta}T)=0$. Видно, что первое условие представляет однородную задачу Гильберта в ее стандартной форме, т.е. требуется определить голоморфную функцию $\varphi(z)$ по заданной линейной комбинации ее действительной и мнимой частей. Из решения первой задачи производная $\varphi(z)$ становится известной, следовательно, вторая задача может быть сведена к неоднородной задаче Гильберта для нахождения голоморфной функции $\psi(z)$. Решения этих задач может быть получены методом регуляризующего множителя.

Индекс обеих задач определяется числом оборотов нормированного вектора перемещений $\{\cos\beta(\zeta), \sin\beta(\zeta)\}$ при обходе контура в положительном направлении (когда область остается слева). Для первой задачи он может быть посчитан как разница между числом оборотов по и против часовой стрелки. В рассматриваемом случае индекс не является отрицательным. Это следует из того, что $\beta=\beta(\zeta)$ является аргументом голоморфной функции $\varphi(\zeta)$. Однородное решение зависит от $2K+1$ вещественных постоянных (каждая комплексная постоянная считается как две вещественные). Следовательно, задача определения функции $\varphi(z)$ имеет $2K+1$ линейно независимых решений. Неоднородная задача, вытекающая из второго граничного условия, имеет отрицательным индекс $-K$. Следовательно, ее решение должно удовлетворять $(2K-1)$ скалярным условиям разрешимости. Показано, что в общем решении для $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ остаются только две действительные постоянные, которые находятся, если положить, что в некоторой точке внутри области, смещения равны нулю. Таким образом, задача, может иметь единственное нетривиальное решение.

В параграфе 5.4 дано решение задачи (α, α'_n) для однородных граничных условий, т.е. условий типа $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$, $\alpha'_n = 0$ везде на контуре Γ . Показано, что данные граничные условия эквивалентны условию первой основной задачи плоской теории упругости при условии отсутствия нагрузок на границе. В силу единственности такой задачи оно имеет только

тривиальное решение, соответствующее отсутствию напряжений везде в области. Последнее означает, что искомые голоморфные функции можно записать в виде $\Phi'(z) = e^{i\alpha_0}(c_2z + c_1)$ и $\Psi'(z) = e^{i\alpha_0}(\bar{c}_1z + c_0)$. Тогда комплексный девиатор напряжений, приобретает вид

$$D(z, \bar{z}) = e^{i\alpha_0}(c_2z\bar{z} + c_1\bar{z} + \bar{c}_1z + c_0). \quad (31)$$

Полученный результат справедлив, если задача ставится на производные α . Необходимо положить $\text{Im}c_0=0$ для того, чтобы удовлетворить первому условию $\alpha=\alpha_0$, тогда функция в скобках в выражении (31) становится вещественной. Это уменьшает число произвольных вещественных постоянных в решении на одну. Таким образом, функция напряжений D содержит только 4 вещественные константы $c_2, \text{Re}c_1, \text{Im}c_1, c_0$, поскольку $\text{Im}c_2 = \text{Im}c_0=0$. Для полного решения задачи, т. е. для того, чтобы найти полное напряженное состояние, требуется определить функцию P . Она может быть найдена путем интегрирования уравнений равновесия и выделением вещественной части, это приводит к возникновению вещественной постоянной $\text{Re}(c_3 \exp(i\alpha_0))$. Как видно, решение задачи с однородными граничными условиями не является единственным. Оно содержит пять произвольных вещественных постоянных, которые априори неизвестны. Можно отметить, однако, что поле траекторий главных напряжений единственно, оно формируется двумя семействами прямых линий, образующих прямоугольную сетку. Одно семейство линий наклонена под углом $\varphi=-\alpha_0/2$ к положительному направлению оси Ox .

В параграфе 5.5 приведены решения задач (α, p) и (α, β) для полуплоскости и комбинированной задачи (α, p) и (β, p) для двух полуплоскостей.

В случае задачи (α, p) напряжения непрерывны при переходе через ось Ox и известны главные направления с двух сторон, а значит и аргументы функции девиатора $\arg D^\pm = \alpha^\pm$. В этом случае регулярные операторы \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 обнуляются и СИУ приобретает вид характеристического $(2 - e^{4i\theta^+} - e^{4i\theta^-})\mu + (e^{4i\theta^-} - e^{4i\theta^+})\mathbf{S}(\mu) = 0$. При этом предполагается, что выполнены условия неотрицательности и ограниченности максимальных касательных напряжений, что выражается в виде неравенства $\sin\theta^+ \sin\theta^- \geq 0$. Соответственно, краевая задача Римана также существенно упрощается, ее индекс есть $K = \frac{1}{\pi}[\theta^+ - \theta^-]_{\Gamma}$, а решение зависит от $K+1$ линейных вещественных постоянных. Решение СИУ имеет вид

$$\mu = -2i \sin(\theta^+ - \theta^- - \chi) P_K(z) (x^2 + 1)^{-\frac{K}{2}} \left(\sin 2\theta^- \right)^{\mp \frac{1}{2}} \left(\sin 2\theta^+ \right)^{\mp \frac{1}{2}} e^{\left[-\frac{K}{2} \ln \left(\frac{t-i}{t+i} \right) - i(\theta^+ - \theta^-) \right]}, \quad (32)$$

где показатель экспоненты действительный. Соответственно, коэффициенты многочлена должны быть чисто мнимыми постоянными, для того чтобы решение было вещественным. В

частном случае $\alpha^\pm = -2\theta_0^\pm$ на оси Ox краевая задача Римана имеет нулевой индекс, и решение для граничных значений имеет вид $D^\pm = C \exp(i\alpha^\pm)$, $\text{Im}(C)=0$, что совпадает с решением из предыдущего параграфа, полученного при использовании однородных граничных условий.

Комбинированная задача (α, p) и (β, p) для двух полуплоскостей рассмотрена для одномодульных полуплоскостей. Она приводится к СИУ вида (6), чье решение СИУ ищется в виде $\bar{g} = 2M - g$, $M' = \mu$, где действительная часть искомой функции M известна из решения предыдущей задачи. Тогда СИУ примет окончательный вид

$$\left(2 + e^{-2i\beta^+} + e^{-2i\beta^-} \right) g + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left(e^{-2i\beta^+} - e^{-2i\beta^-} \right) \mathbf{S}(g) = 4M. \quad (33)$$

Это уравнение отличается от вида СИУ в задаче (α, p) другими углами, наличием коэффициента при сингулярном интеграле и правой части, которая получается интегрированием решения (32), что порождает дополнительную постоянную, которая должна быть вещественной, поскольку функция M вещественная. Таким образом, правая часть зависит от $\kappa+2$ действительных произвольных постоянных. Коэффициент соответствующей задачи Римана имеет вид индекс равный нулю. Следовательно, неоднородное СИУ (33) имеет единственное решение. Общее решение получается путем отделения мнимой части решения для функции g и суммирования ее с функцией M . При этом число произвольных постоянных не увеличится. Для вычисления напряжений нужна производная искомой функции. Это означает, что решение зависит от $\kappa+1$ постоянных, входящих в решение для функции $\mu(t)$.

Задача (α, β) для полуплоскости приводится к системе двух СИУ относительно функций g и \bar{g} . Путем введения новых искомым функций $g = M + i\Lambda$, $M' = \mu$, эта система приобретает вид

$$\sin(\alpha)M' + i \cos(\alpha)\mathbf{S}(M') = 0, \quad (\kappa+1)\cos(\beta)\Lambda - i(\kappa-1)\sin(\beta)\mathbf{S}(\Lambda) = f. \quad (34)$$

Здесь правая часть второго уравнения зависит только от решения первого уравнения системы, $f = (\kappa+1)\sin(\beta)M + i(\kappa-1)\cos(\beta)\mathbf{S}(M)$. Оба уравнения системы сводятся к задачам Римана на действительной оси, их индексы есть, соответственно

$$2K = \text{Index}(e^{2i\alpha}) = \text{Index}(e^{-4i\theta}) = -\frac{2}{\pi}[\theta]_{-\infty}^{\infty}, \quad 2N = \text{Index}(e^{2i\beta}) = \frac{1}{\pi}[\beta]_{-\infty}^{\infty}. \quad (35)$$

Для первого уравнения системы решение строится аналогично задаче (α, p) . Исчезающее на бесконечности решение второго уравнения системы (34) также находится аналитически. Оба решения содержат произвольные многочлены, показано, что их коэффициенты действительные. Общее число произвольных вещественных постоянных в решении равно $2K+2N+1$. Это максимально возможное число произвольных постоянных, полученное при условии, что оба индекса являются положительными. Если один из них отрицателен, например, $2N$, то для

существования решения должно выполняться $-2N-1$ интегральных условий на правую часть второго уравнения, которых всегда можно выполнить при условии, что $2K > -2N-1$. Таким образом, для разрешимости задачи необходимо, чтобы суммарный индекс $2K+2N+1 > 0$.

Отмечается, что при рассмотрении разомкнутого контура (или систему разомкнутых непересекающихся контуров), необходимо было бы сделать поправку на вычисление индекса. Однако показано, что числа неопределенных постоянных в решениях краевых задач (α, α'_n) и (α, β) для полуплоскости или комбинированных типа (α, p) , (β, p) для двух полуплоскостей не изменяются, поскольку каждый разомкнутый контур формально добавляет единицу в индекс, но условия однозначности смещений требуют выполнения одного дополнительного комплексного условия, что оставляет общее число произвольных постоянных неизменным.

В данной главе получены замкнутые решения краевых задач, исследованных в главе 4, для важных частных случаев контуров или граничных условий. Кроме того, некоторые частные решения были построены другим методом, для того чтобы обеспечить непосредственную проверку предложенного метода исследования. Как было показано, классический метод отыскания голоморфных функций в виде степенных рядов дает такой же результат, что и предложенный подход при решении краевых задач типа (α, α'_n) и (β, γ) для единичного круга.

Получены общие решения задач (α, α'_n) и (β, γ) для произвольного гладкого контура с простейшими граничными условиями. Отметим, что решение задачи (α, α'_n) с однородными граничными условиями дает однородные траектории главных напряжений всюду в рассматриваемой области. Таким образом, в однородном поле траекторий невозможно появление каких-либо искривлений в некоторой подобласти, и поле напряжений всегда определяется вещественной функцией девиатора напряжений, зависящей, в общем случае, от четырех вещественных постоянных. Полное напряженное состояние зависит от пяти произвольных постоянных, что вызвано интегрированием уравнений равновесия.

При рассмотрении задач для полуплоскостей был использован итерационный метод решения задач для систем скалярных уравнений. Этот случай является вырожденным при использовании граничных условий в главных направлениях напряжений. Действительно, граничное значение функции девиатора напряжений не зависит от скачка нормальных смещений, который не может быть определен в результате решения. Соответственно, требуется использование дополнительного условия, которое может быть наложено либо на кривизну траекторий главных напряжений, что приводит к задаче (α, α'_n) , либо с привлечением ориентаций вектора смещений, что приводит к комбинированным задачам типа (α, p) , (β, p) для двух полуплоскостей или к задаче для (α, β) одной области. Последняя задача была решена для случая полуплоскости, но фактически весь анализ остается в силе и для произвольной области

из-за того факта, что полученная система СИУ для полуплоскости полностью совпадает с характеристическими СИУ для произвольной области.

Отметим, что результаты, полученные для составной плоскости, имеет особый интерес, т.к. описывают ситуацию с контактирующими областями. Это важно для разработки численных методов решения задач по реконструкции напряжений в составных областях, которые рассматриваются в главе 8.

В главе 6 рассматриваются задачи реконструкции полей плоских напряжений в упругой области по дискретным данным о главных направлениях тензора напряжений. Предлагается подход, основанный на метод Трефтца для комплексных потенциалов.

Задача реконструкции напряжений формулируется следующим образом. Пусть Ω - односвязная упругая область (конечная или бесконечная), ограниченная несамопересекающимся замкнутым контуром Γ . Эта область может быть подобластью большей области, которая не обязательно односвязная или ограничена. Пусть данные о главных направлениях θ_j тензора напряжений известны в точках z_j ($j=1 \dots N$), которые расположены как внутри области, так и, быть может, на ее границе. Никаких формальных ограничений на распределение данных по области не накладывается. Требуется определить двумерное поле напряжений в Ω , которое:

- (1) *обеспечивает наилучшее согласие данных θ_j и расчетных главных направлений в заданных точках z_j ;*
- (2) *удовлетворяет всем уравнениям плоской теории упругости, сформулированным в напряжениях.*

Поскольку главные направления определяются только аргументом комплекснозначной биголоморфной функции девиатора напряжений $D(z, \bar{z}) = \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)$, то задача может быть рассмотрена как задача определения биголоморфной функции с последующим нахождением гармонической функции $P(z, \bar{z}) = 2 \operatorname{Re}(\Phi(z))$ из уравнений равновесия. Таким образом, исходная задача эквивалентна нахождению комплексных потенциалов, которые обеспечивают минимизацию суммы квадратов отклонений аргумента комплекснозначной функции девиатора напряжений от углов $\alpha_j = \pi - 2\theta_j$, т.е.

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \operatorname{Im} \left[\exp(-i\alpha_j) (\bar{z}_j \Phi'(z_j) + \Psi(z_j)) \right] \right\}^2 \Rightarrow \min. \quad (36)$$

Отмечается, что сформулированная задача реконструкции напряжений не имеет единственного решения не только в общем случае, но и в том случае, когда решение ищется в определенном классе функций (в расчетах предложено использовать либо многочлены, либо

кусочно-голоморфные функции), где девиатор напряжения определяется в нормализованном виде. Это есть следствие того, что максимальное касательное напряжение (τ_{\max}) является вещественной функцией, что выражается уравнением $\text{Im}[D \cdot \exp(-i\alpha)] = 0$, которое инвариантно относительно умножения на любую вещественную положительную постоянную. Поэтому, поле траекторий напряжений (определяемое по главным направлениям) является единственным (в выбранном классе функций), но τ_{\max} и, следовательно, девиатор напряжений определяются с точностью до свободного вещественного мультипликативного параметра. Следовательно, среднее давление (которое получается интегрированием уравнений равновесия) зависит от двух параметров, которые не влияют на траектории поля напряжений. В общем случае полный тензор напряжений может включать до пяти свободных параметров в случае, когда поле главных направлений является гармонической функцией. Однако случай гармонического аргумента является исключительным, поэтому нет необходимости рассматривать этот случай отдельно при построении численных решений. Далее общее решение $\tilde{D}(z, \bar{z}), \tilde{P}(z, \bar{z})$ представляется в виде $\tilde{D}(z, \bar{z}) = b D(z, \bar{z}), \tilde{P}(z, \bar{z}) = a + b P(z, \bar{z})$ где $D(z, \bar{z}), P(z, \bar{z})$ являются частными решениями, a и $b > 0$ - вещественные константы.

Предложены две модификации численного подхода, основанного на методе Трефтца.

Вариант 1 подразумевает использование линейно независимых функций – $R_k(z)$, голоморфных везде в Ω , в качестве базисных функций для представления потенциалов в виде линейных комбинаций функций $R_k(z)$ с неизвестными коэффициентами, которые должны определяться из решения задачи. После этого аргумент биголоморфной функции становится известным, как и сама эта функция. При этом полная система уравнений задачи включает N однородных уравнений, выражающих условие $\text{Im}[D \cdot \exp(-i\alpha)] = 0$, дополненных одним неоднородным уравнением нормировки (средний модуль D по области равен единице), что гарантирует существования нетривиального решения системы, но не обеспечивает единственности реконструкции полного тензора напряжений. Система является переопределенной, она решается методом наименьших квадратов, для ее разрешимости необходимо, чтобы $N \geq 4n + 2$.

Вариант 2 предполагает использование кусочно-полиномиальных функций, голоморфных внутри конечных элементов, на которые можно разбить всю область Ω . При этом потенциалы для каждого элемента разыскиваются в виде многочленов с неизвестными комплексными коэффициентами в m -ом элементе. Каждый элемент порождает $2(p+1)$ комплексных неизвестных. Непрерывность решения во всей области достигается приближенно путем введения точек коллокаций на границах между соседними элементами, в которых потенциалы предполагаются непрерывными. Число точек коллокаций (N_{CP}) не зависит от числа коэффициентов. Таким образом, в дополнение к уравнениям системы в Варианте 1 добавляется

еще одна группа однородных уравнений, ответственных за непрерывность потенциалов. Как и в Варианте 1, система переопределена, ее приближенное решение может также быть найдено методом наименьших квадратов при условии, что число обусловленностей (CN) линейной системы уравнений не высоко. При высоком CN используется либо регуляризация, основанная на разложения по сингулярным числам (SVD регуляризация), либо (для больших разреженных матриц) итерационный LSQR алгоритм.

Оба предложенных варианта метода реконструкции полей напряжений способны идентифицировать особые точки в полях траекторий главных напряжений. Для верификации разработанных алгоритмов использовались как синтетические примеры, так и данные, взятые из фотоупругих экспериментов. На Рисунках 2 и 3 показаны примеры реконструкции траекторий главных напряжений и изолиний максимальных касательных напряжений из фотоупругого эксперимента по изгибу балки. Реконструкция проводилась по Варианту 1.

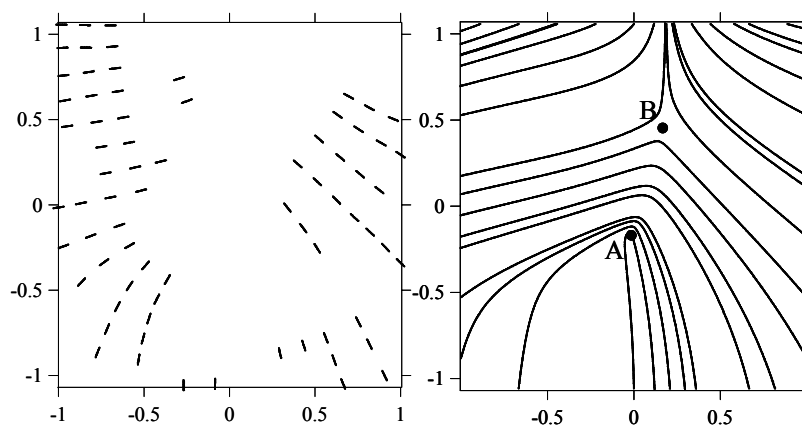


Рис. 2. Реконструкция траектории напряжений и изотропных точек в фотоупругом примере: слева – входные данные, 73 точки без указания на особые точки, справа – реконструированные траектории и особые точки А и В

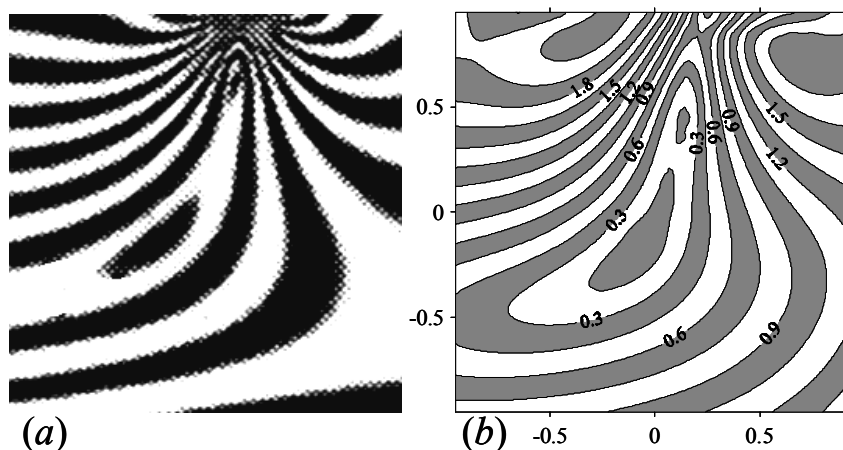


Рис. 3. Реконструкция максимальных касательных напряжений: (a) – фрагмент картины полос из фотоупругого эксперимента; (b) – изолинии реконструированного τ_{\max}

В работе также приведен ряд примеров реконструкций по конечно-элементному варианту, который способен рассчитывать более сложные конфигурации, чем представленные на

рисунках ниже. Проведен анализ зависимости результатов от размера элементов, показано, что сгущении сетки улучшает точность, так как ошибка (невязка, отнесенная к числу уравнений) уменьшается с ростом числа элементов, однако, следует отметить, что при этом происходит рост числа обусловленностей разрешающей системы

Примеры, представленные в данной главе, показывают, что поля упругих напряжений могут быть восстановлены по дискретным данным о главных направлениях с удовлетворительной точностью. Предлагаемый подход основан на подходе Трефтца и требует минимизации определенного функционала, который строится на отклонениях экспериментальных ориентаций главных напряжений от предполагаемых, рассчитанных из общего решения теории плоскости упругости, представленного комплексными потенциалами Колосова-Мусхелишвили. Этот подход позволяет провести пересмотр методов, используемых в фотоупругости при нахождении главных напряжений по их траекториям. Показано, что эта операция может быть выполнена без интегрирования уравнений равновесия.

Конечно-элементный вариант метода предполагает разбиение области на элементы и использует кусочно-полиномиальные аппроксимации комплексных потенциалов, что позволяет отнести его к гибриднему методу МКЭ-Трефтца. Представляется, что гибридный вариант имеет некоторые преимущества по сравнению с использованием глобальных аппроксимаций, в частности, он дает лучшие результаты при обработке данных по четырехточечному изгибу фотоупругой балки, даже без введения весовой функции для лучшего учета сосредоточенной нагрузки, действующей на границе. Кроме того, он более устойчив при работе с зашумленными данными, что особенно важно для исследования напряжений в тектонических плитах, и имеет слабую чувствительность к изменениям расчетной сетки.

В главе 7 приведены примеры реконструкций полей напряжений в некоторых районах Земли по данным об ориентациях главных напряжений, хранящихся в мировой базе данных по напряжениям – The World Stress Map Project (везде далее база WSM), и примеры реконструкций палеонапряжений. Используются различные подходы, как основанные на краевой задаче, так и на задаче оптимизации по дискретным данным. В последнем случае используются полиномиальные и конечно-элементные аппроксимации. В качестве входных данных использовались только азимуты наклона осей максимального сжатия в горизонтальном направлении S_{H_max} . Реконструкции проведены для следующих случаев.

1. Реконструкция траекторий главных напряжений (ТГН) в Западной Европе. Показано, что поле ТГН весьма однородно, со средним азимутом наклона траекторий около -60° , что согласуется с результатами других авторов, полученными другими методами.
2. Моделирование полей упругих палеонапряжений по данным натуральных индикаторов в регионах, примыкающих к зоне конвергенции Аравийской и Евразийской плит. Были

проведены реконструкции в четырех регионах для различных геологических эпох. Были реконструированы поля ТГН и изолинии τ_{\max} и средних напряжений P , что позволило проследить эволюцию полей палеонапряжений.

3. Поле напряжений в Австралии. Реконструкция полей современных упругих напряжений на австралийском континенте проводилась как путем оптимизации по полиномиальному и конечно-элементному подходу, так и аналитически, путем подбора параметров в решении для функции комплексного девиатора напряжений. Во всех случаях было установлено наличие особой точки в поле ТГН, как показано на Рисунке 4, где реконструкция проводилась по полиномиальному подходу.

В главе суммированы результаты реконструкций упругих напряжений (палеонапряжений), которые используют экспериментально установленные азимуты $S_{H,\max}$ в качестве исходных данных при реконструкции плоских напряжений. Этот факт существенно отличает настоящий подход от традиционного моделирования упругих полей, основанного на использовании специально подобранных (или «фиктивных») граничных условиях в терминах напряжений, усилий или смещений. Основное достоинство предложенного метода состоит в том, что результаты реконструкций полного тензора напряжений зависят от вполне определенного (и небольшого) числа параметров. Показано, что в случае, когда главные направления не есть гармоническая функция, реконструкции полей ТНГ могут быть выполнены

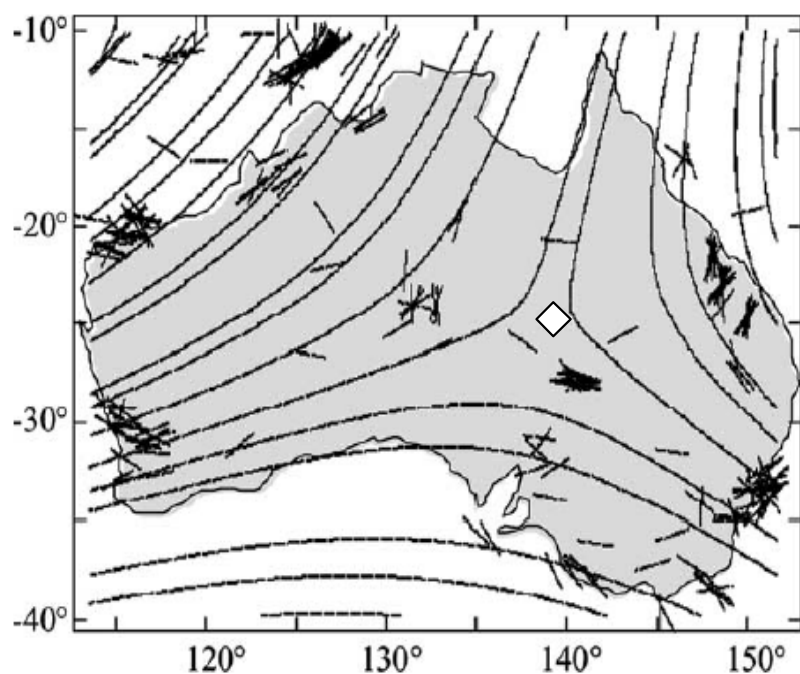


Рис. 4. Реконструированные траектории (показаны темными кривыми линиями) и особая точка (ромб) в Австралии, данные по ориентациям показаны отрезками

единственным образом, а поля максимальных касательных напряжений находятся с точностью до нормировочной константы. Неопределенные константы могут быть найдены по известным величинам компонент напряжений в некоторых точках. Для этого достаточно рассмотреть дополнительную задачу оптимизации, которая формулируется следующим образом.

Пусть известны нормальные, σ_n^l , и (или) касательные, σ_t^l , напряжения на L площадках (с нормальными n_l , $l=1 \dots L$). Отталкиваясь от общего решения в главе 2 можно записать выражение

для вектора напряжений, $\sigma_n + i\sigma_t$, на l -ой площадке. Если принять, что известны только нормальные компоненты в разных точках (которые, например, могут быть определены в широкомасштабном эксперименте по давлению закрытия трещины гидроразрыва в тех местах где были ранее проведены гидроразрывы), то для определения неизвестных констант a и b возникает задача регрессии, которая может быть записана в виде минимизации невязки

$$\sum_{j=1}^L \left\{ \sigma_n^l - b - a \left[P(z_l, \bar{z}_l) + \operatorname{Re} \left(e^{-2i\vartheta_l} D(z_l, \bar{z}_l) \right) \right] \right\}^2 \Rightarrow \min. \quad (37)$$

где z_l, ϑ_l - соответственно положение и угол наклона l -ой площадки к положительному направлению действительной оси. Очевидно, что для определения обоих параметров необходимо не менее двух измерений величин напряжений в разных точках, например, с использованием данных по давлениям закрытия трещин гидроразрыва.

Другим важным вопросом, рассмотренным в данной главе, является вопрос о соответствии числа измерений числу базисных функций в полиномиальной аппроксимации или количеству элементов в конечно-элементном подходе. Касательно последнего следует отметить, что если в некоторых элементах нет никаких данных, то оптимизация функционала выполняется по непрерывности из соседних, где данные присутствуют. Очевидно, что если данных мало (как, например, с рассмотренными выше случаями реконструкции палеонапряжений), то конечно-элементный подход теряет целесообразность, поскольку в области, где нет данных, будет построено линейное решение по непрерывности, что, в принципе, означает глобальную аппроксимацию линейными многочленами.

Следует отметить, что экспериментальные данные по ориентациям главных напряжений известны с большим разбросом, как уже отмечалось, в лучшем случае в $\pm 15^\circ$, поэтому стандартный подход, в котором достаточно добиться минимальной невязки, не может быть непосредственно перенесен на задачи реконструкции напряжений в земной коре. Здесь предложены два основных подхода. Первый - проводить кластерный анализ, что позволяет (как в случае реконструкции австралийского поля напряжений) установить оптимальную степень базисных многочленов. Второй – контролировать, помимо невязки, число обусловленностей (для обеспечения устойчивости результатов) и выбирать минимальные степени многочленов, которые обеспечивают отклонения реконструированных главных направлений от экспериментальных данных в пределах разброса данных разного качества, оценочно $\pm(20^\circ-25^\circ)$.

В главе 8 приводится постановка задач для реконструкции напряжений в многосвязных областях, развиваются численные методы, основанные на полиномиальных и конечно-элементных аппроксимациях. Приведены примеры реконструкций полей напряжений для регионов, разграниченных одной границей, а также для областей, состоящих из нескольких

тектонических плит. Эти примеры нацелены, в основном, на исследование цунамигенных регионов Земли по данным об ориентациях главных напряжений в мировой базе данных WSM.

В отличие от односвязных областей, при рассмотрении многосвязных, систему уравнений необходимо дополнить условиями непрерывности решений (в данном случае вектора напряжений) при переходе из области в соседнюю, так называемыми, транзитными условиями, которые уже использовались ранее при исследовании числа независимых решений для неклассических краевых задач плоской упругости.

Рассматривается конечная упругая плоская область Ω , состоящая из подобластей Ω_i ($i=1 \dots N_{domain}$), имеющих, в общем случае, различные модули упругости. Считается, что главные направления тензора плоских напряжений заданы в некоторых точках, принадлежащих некоторым подобластям (необязательно все они содержат эти данные); предполагается, что набор дискретных данных содержат N_{data} точек. Считаем, что вектор напряжений непрерывен при переходе через внутренние границы (интерфейсы) Γ_k между всеми соседними подобластями ($j=1 \dots N_{int}$). Общая задача формулируется следующим образом:

Определить двумерное поле напряжений в Ω , которое

- *удовлетворяет всем уравнениям плоской теории упругости, сформулированным в напряжениях;*
- *обеспечивает наилучшее согласие данных θ_j и расчетных главных направлений в заданных точках $z_m, m=1 \dots N_{data}$;*
- *удовлетворяет условию непрерывности вектора напряжений на всех внутренних границах Γ_j между соседними подобластями, $j=1 \dots N_{int}$.*

Следует отметить, что задача, сформулированная выше, является обобщением задач, рассмотренных в главах 6 и 7. Соответственно, используются такие же подходы и численные методы, с добавлением в общую систему уравнений новой группы уравнений, выражающих непрерывность вектора напряжений на границах между соседними областями. При численной реализации они выполняются в точках коллокаций, расположенных на Γ_j , число таких точек выбирается в зависимости от числа данных N_{data} . Система обеспечивает оптимизацию целевой функции типа (36) при условии, что среднее значение максимальных касательных напряжений равно единице.

В главе приведены различные варианты численных алгоритмов, использующих полиномиальные аппроксимации комплексных потенциалов в отдельных подобластях и основанных на конечно-элементном подходе, и даны примеры реконструкций полей напряжений в земной коре. Последние разработаны и подробно расписаны для случая области, состоящей из двух подобластей, а также для многосвязных областей при линейной аппроксимации комплексных потенциалов.

Для областей, состоящих из двух подобластей, реконструкции полей напряжений выполнены в двух регионах. Они включают область вблизи Суматры, где расположены эпицентры последних сильных землетрясений, и Антарктическую плиту. В обоих случаях в качестве базисных функций использованы многочлены.

Модель поля напряжений Антарктиды. Для определения границы Антарктической плиты используется цифровая модель границ плит и, в качестве вспомогательного шага, было выполнено сглаживание границы плиты по алгоритму быстрого преобразования Фурье, на основе неравноотстоящих данных, что позволило провести дальнейшую параметризацию контура и аппроксимировать его замкнутой ломаной с постоянным размером сегмента, который может контролироваться при необходимости. Дальнейшим шагом стало разделение данных на внутренние (внутри Антарктической плиты, подобласть Ω^+) и внешние (область вне антарктической плиты до широты 40°S , подобласть Ω^-). Для этой цели был разработан специальный алгоритм сепарации данных, который позволяет разделять данные для произвольного замкнутого контура, представленного ломаной.

Результаты расчетов для внутренней области (Антарктической плиты) приведены на Рисунках 5 и 6, где соответственно показаны поля ТНГ, изолинии $\tau_{\max}=F_1$ (Рис. 6, слева) и P , в виде безразмерной функции F_2 (Рис. 6, справа). Результаты показывают, что поле напряжений в антарктической плите весьма неравномерно. Особые точки в полях траекторий не обнаруживаются.

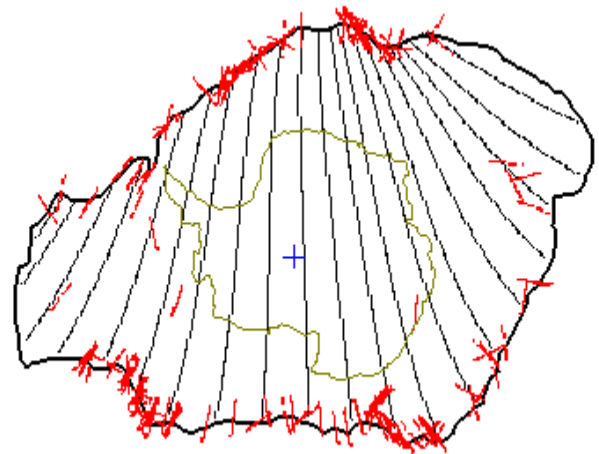


Рис. 5. Расчетные траектории главных напряжений для Антарктической плиты (показаны кривыми) и данные, расположенные внутри плиты (отрезки)

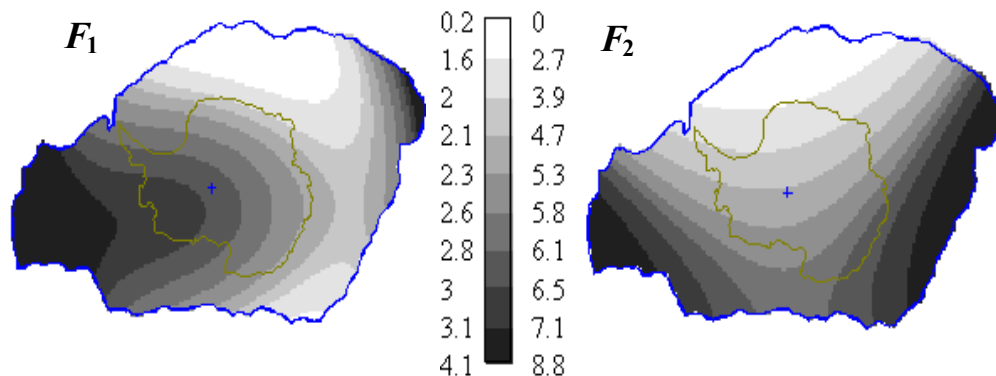


Рис. 6. Изолинии реконструированного поля напряжений в Антарктической плите: функция F_1 представляет нормированные максимальные касательные напряжения, $\tau_{\max}=aF_1$; функция F_2 представляет среднее напряжение $P= aF_2+b$ ($a, b - \text{const}, a>0$)

По данным реконструкции полей напряжений были получены распределения нормализованных напряжений по разные стороны вдоль границы Антарктической плиты. Нормальные и касательные напряжения, рассчитанные для внутренней и внешней областей, хорошо совпадают, что свидетельствует о том, что условия непрерывности вектора напряжений при переходе через контур удовлетворены с хорошей точностью, несмотря на приближенный характер решения из-за переопределенности системы. Полученные зависимости могут быть использованы в качестве граничных условий для проведения численных расчетов стандартными методами для более подробного анализа напряжений в Антарктиде, например, учитывающего крупные разломы и рельеф. Расчет скачков тангенциальных напряжений показал, что их величины незначительны по сравнению с величинами граничных напряжений.

Поле напряжений вблизи Суматры. Рассматривался прямоугольный (в географических координатах) регион, ограниченный долготами 80°W и 110°W и широтами 20°S и 10°N . В нем по базе WSM 2004 было обнаружено $N=167$ данных А-С качества. Количество точек коллокаций выбрано таким же $N^{\text{F}}=N$. Разлом Сунда представляет границу между Индо-Австралийской плитой (IAP), представленной индийской (IN) и австралийской (AU) плитами и Евразийской плитой (EAP), представленной микроплитами Сунда (SU) и Бурма (BU). Другие границы были исключены из рассмотрения, поскольку данные не показывают разницы в ориентациях главных напряжений на границах между индийской и австралийской плитами и между Сундой и Бурмой. Путем применения алгоритма сепарации было обнаружено, что из 167 точек 47 находятся в пределах IAP (подобласть Ω^+) и 120 в EAP (подобласть Ω^-).

Результаты расчетов проиллюстрированы на Рисунке 7, где толстая черная линия – граница между плитами, а звездочками обозначены эпицентры крупных землетрясений 2004 и 2005 годов. Расчетное поле ТГН на Рисунке 7 (слева) подтверждает резкое изменение ориентаций напряжений по разные стороны разлома Сунды. В EAP траектории подходят к разлому почти перпендикулярно в IAP они, как правило, субпараллельны разлому. Это указывает на низкое сопротивление сдвигу вдоль границы между плитами. Максимальные касательные напряжения представлены на Рисунке 7 (справа) вместе с эпицентрами последних крупных землетрясений.

Анализ показал, что главные напряжения близки друг к другу в районе, прилегающем к разлому Сунда (светлая зона на рисунке), поскольку в этом районе максимальные касательные напряжения невелики. Эти вычисления находятся в соответствии с режимом напряжений, наблюдаемым в этой области из экспериментов (землетрясения 26.12.04 и 28.03.05 вызвали вертикальные движения и, как следствие, цунами).

Были проведены расчеты τ_{max} вдоль широты 3.3°N , на которой находился эпицентр землетрясения 2004 года, которые указывают на то, что точка минимума τ_{max} расположена по долготе в непосредственной близости от эпицентра землетрясения 26.12.04. Это обстоятельство

позволило выдвинуть гипотезу о том, что возникновение цунамигенных землетрясений наиболее вероятно в точках минимума максимальных касательных напряжений.

Проведенный анализ позволил оценить напряжения, действующие вдоль границы между IAP и EAP, при этом было обнаружено, что величины разрыва тангенциальных (вдоль разлома) напряжений существенно больше, чем случае Антарктиды, где скачки были невелики.

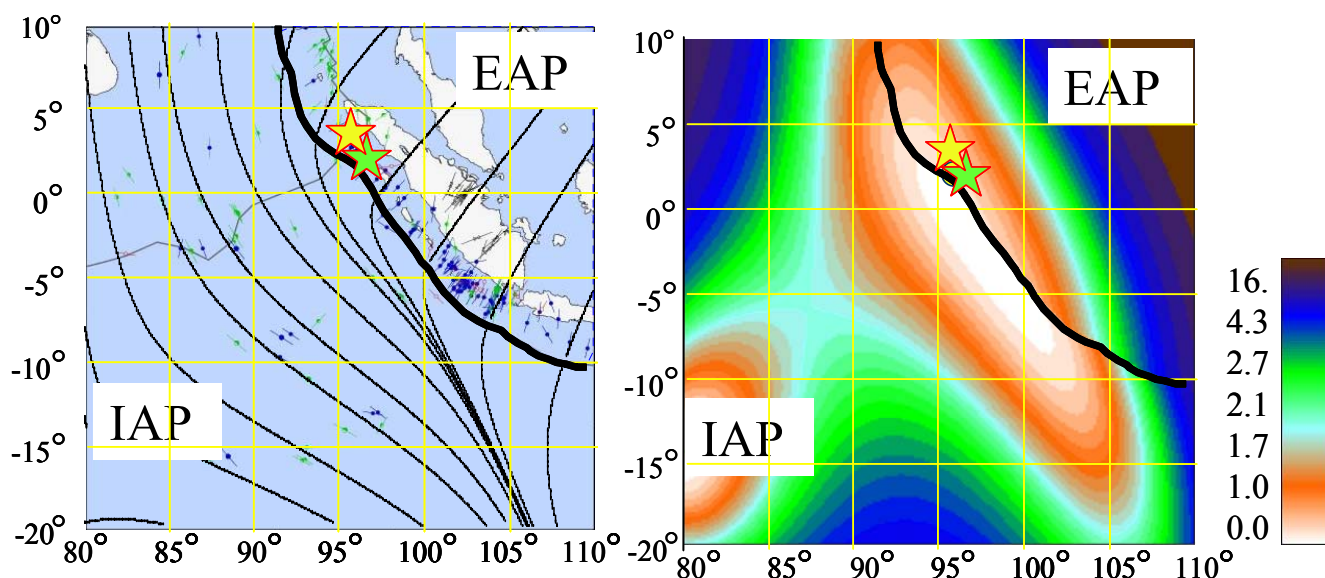


Рис. 7. Поле напряжений вблизи Суматры, толстая черная линия – граница между плитами, звездочками обозначены эпицентры крупных землетрясений 2004 г. (желтая) и 2005 г. (зеленая). Слева – поле траекторий главных напряжений (шаблон с данными из базы WSM). Справа – изолинии безразмерных τ_{\max} (светлые области соответствуют низкому уровню τ_{\max} , как показано на шкале)

Многосвязные области. Также использовались данные об ориентациях главных сжимающих напряжений из базы данных WSM и оцифрованные границы плит.

В качестве первого примера рассматривалась область, заключенная между долготами 90° до 140° и широтами с -20° до 30° с 55 данными А-качества по ориентациям напряжений. Область состоит из 16 подобластей; короткие сегменты показывают 53 ориентации наибольших сжимающих главных напряжений. Все данные являются весьма нерегулярными и не все подобласти содержат данные. На этом примере происходила отладка алгоритма, основанного на линейной интерполяции комплексных потенциалов, и специальных вспомогательных алгоритмов для обработки граничных данных с целью идентификации интерфейсов между подобластями и для размещения равноотстоящих точек коллокаций на интерфейсах. В качестве второго примера было проанализировано поле напряжений в районе островов Самоа (от 180°W до 168°W и от 25°S до 13°S), где 29.09.2009 произошло крупное землетрясение с эпицентром с координатами (15.6°S , 172°W). По базе WSM в районе находятся 494 данных качества А-С. Были проанализированы три модели.

Модель 1. Границами плит пренебрегается и рассматривается только одна квадратная область, где решение строится по модели глобальной аппроксимации комплексных потенциалов с использованием многочленов 4-го порядка. Изолинии максимальных касательных напряжений показаны на Рисунке 8а. Эпицентр события 29.09.2009 помечен звездочкой, он попадает в площадь, где безразмерные максимальные касательные напряжения менее 0.25. Ближайшая изотропная точка, где $\tau_{\max}=0$ имеет следующие координаты (15.2°S, 171.3°W), которые не сильно отличаются от координат эпицентра землетрясения 29.09.2009.

Модель 2. Данная модель предполагает конечно-элементное деление всей области на прямоугольные элементы, при этом предполагается что внутри элементов комплексные потенциалы аппроксимируются линейно, а на интерфейсах они непрерывны. Последнее достигается путем приравнивания соответствующих потенциалов в точках коллокаций, расположенным на всех интерфейсах равномерно. В данном случае было введено 39 элементов трех различных размеров в зависимости от числа точек данных попадающих в элемент. На каждом интерфейсе находилось 15 точек коллокаций. Результаты показаны на Рисунке 8б, из которого видно, что эпицентр землетрясения 29.09.2009 попадает в зону, где $0.25 < \tau_{\max} < 0.5$ и близок к изотропной точке.

Модель 3. Границы между тектоническими плитами учитываются кусочно-линейной аппроксимацией, т.е. конечные элементы совпадают с плитами. Изотропная точка не определяется, но как видно из Рисунка 8в, определяется узкая вытянутая зона пониженных максимальных касательных напряжений, значение которых в эпицентре есть, $\tau_{\max}=0.55$.

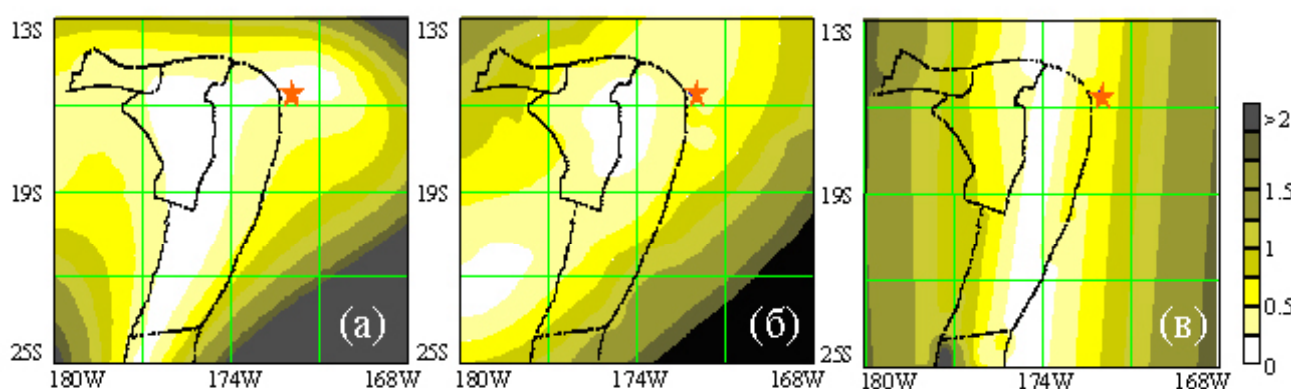


Рис. 8. Изолинии нормализованных τ_{\max} , рассчитанных по трем моделям в районе о. Самоа (звездочка - эпицентр события 29.09.2009): (а)- Модель 1, (б) – Модель 2, (в) - Модель 3

Изменения напряжений в цунамигенных областях после землетрясения 26.12.2004. Одно из важных приложений разработанных методик реконструкций полей напряжений заключается в том, что по мере накопления наблюдений, можно исследовать эволюцию полей современных тектонических напряжений. На практике это может оказаться весьма важным для определения потенциальных цунамигенных областей. В данном подпункте проведено исследование полей

напряжений в трех таких областях – районе Сунды, где произошло крупнейшее землетрясение 2004 года, вызвавшее смертоносное цунами, районе Соломоновых островов и в районе островов Тонга-Самоа, где также фиксировались землетрясения, породившие цунами. Их географическое положение задается следующими координатами

- Район Сунда (долгота 80°E - 110°E , широта 20°S – 10°N),
- Район Тонга-Самоа (долгота 180°E - 170°W , широта 21°S – 11°S),
- Район Соломоновых островов (долгота 142°E – 162°E , широта 14°S – 6°N).

Поскольку за время, прошедшее с события 26.12.2004, были получены новые данные по ориентациям напряжений, которые были включены в текущую версию базы данных WSM 2008 года, то это позволяет проанализировать изменения полей напряжений, произошедшие в результате данного события. Задача данного исследования состоит в расчете полей напряжений до и после события 26.12.2004 в трех упомянутых областях. При этом все наборы данных, которые относятся к трем указанным областям, разделяются на два временных набора – до события 26.12.2004 и после него. Расчеты проводились по конечно-элементному алгоритму, описанному выше, при этом учитываются все границы плит, попадающие в рассматриваемый район. Они показали, что после суматранского землетрясения 2004 года произошли существенные изменения в полях напряжений в исследованных цунамигенных областях. При этом различия более существенны для региона Сунда, расположенного ближе к эпицентру события 2004 года и менее заметны в удаленных регионах.

В главе предложен и реализован численный подход для реконструкции плоских тензоров напряжений в составной области с несколькими внутренними границами. В этом методе в качестве входных данных используются только данные по ориентациям главных напряжений и условия непрерывности вектора напряжений на границах между соседними плитами. При этом, на основе анализа данных базы WSM, показано, что для рассмотренных районов

- решение для компонент напряжений содержит 2 произвольные вещественные постоянные;
- максимальное касательное напряжение (действующее в плоскости) содержит одну неизвестную мультипликативной постоянной;
- траектории напряжений единственны.

Анализ для двух соседних областей был выполнен для Антарктической плиты и для области вблизи Суматры, где произошло разрушительное землетрясение 2004, вызвавшее цунами. Проанализированы поля траектории напряжений и максимальных касательных напряжений. В частности, результаты для региона Суматра показывают, что эпицентры последних крупнейших землетрясений расположены в областях где максимальное касательное напряжения (действующее в плоскости) имеет низкий уровень, что объясняет возникновение разрушительных цунами в этом регионе исходя из анализа режима напряжений.

Для областей, состоящих из нескольких плит со сложными границами, были проведены расчеты в цунамигенных регионах. Анализ полей напряжений подтверждает, что эпицентры крупных землетрясений, которые вызывают цунами, располагаются в областях с низкими значениями максимальных касательных напряжений. Это обстоятельство дает возможность провести районирование сейсмоактивных областей по режимам напряжений и установить области, где возникновение цунами наиболее вероятно.

Разработанные алгоритмы также позволили провести анализ изменения полей упругих напряжений, которые вызываются крупнейшими землетрясениями. Так на примере суматранского землетрясения 2004 года было установлено, что в районах близких к его эпицентру произошло существенное перераспределение напряжений, что вероятно, связано с развитием крупного разлома. При удалении от эпицентра влияние разлома убывает (район Соломоновых островов) и становится незначительным на далеком расстоянии (район острова Тонга-Самоа). Представляется, что указанная методика может быть использована для мониторинга накопления упругих напряжений в сейсмических районах земной коры, что будет способствовать прогнозам возникновения крупных землетрясений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе предложены новые подходы к реконструкции полей напряжений в упругих областях геосреды на основе решений некорректных задач теории упругости. Последние включают в себя:

- краевые задачи с неполными граничными условиями, что выражается в неединственности решения, при этом доказана возможность существования конечного числа решений, зависящих линейно от конечного числа параметров, число которых определяется из анализа граничных условий;

- оптимизационные задачи по реконструкции напряжений по данным о главных ориентациях плоского тензора напряжений в дискретных точках, расположенных как внутри рассматриваемых областей, так и на границах.

На основе анализа современных литературных источников было установлено, что используемые до настоящего времени методы реконструкции упругих напряжений в земной коре, не являются совершенными. Интерполяционные и статистические методы не позволяют обеспечить выполнение основных уравнений механики сплошной среды, в то же время простейшие модели равновесия геосреды не учитывают тектонических напряжений и не находятся в согласии с натурными измерениями. Поэтому было указано на необходимость разработки соответствующих моделей, свободных от этих недостатков. В данной работе принята упругая статическая модель, которая удовлетворяет как условиям равновесия объемов

геосреды, так и согласуется с наблюдаемыми индикаторами напряжений. В главе 1 было показано, что общая трехмерная задача распадается на суперпозицию одномерной и плоской задач при условии, что вертикальное напряжение в каждой точке является одним из главных. При этом для плоской задачи необходимо разработка методов решения, учитывающих данные по ориентациям главных горизонтальных напряжений, что и послужило основной целью данной работы. Однако использование традиционных постановок краевых задач теории упругости, основанных на решении обратных краевых задач теории упругости, приводит к тому, что при использовании одних и тех же данных различные модели обнаруживают существенные различия в реконструированных полях напряжений, причем как количественные, так и качественные, на что и было указано в главе 1. Более того на простом примере показано, что подход, основанный на решении обратной задачи теории упругости, использующей оптимизацию отклонения расчетных напряжений от экспериментальных данных, вносит сильный произвол в определение величин тензора напряжений. Эти обстоятельства позволили определить основные направления исследований, которые подробно сформулированы в конце главы 1. Главным образом они касаются исследование разрешимости некорректных задач теории упругости с граничными условиями, не содержащими сведений о величинах граничных напряжений, усилий или смещений, а используют только информацию о направлениях напряжений (усилий или смещений), разработку численных подходов для решения таких задач, а также не краевых задач для реконструкции упругих полей по дискретным данным о направлениях главных напряжений. Основным теоретическим инструментом анализа является подход, разработанный Гаховым, который устанавливает разрешимость сингулярных интегральных уравнений по исследованию разрешимости соответствующей краевой задачи Римана. Для разработки численных алгоритмов основой послужил метод Трефтца для комплексных потенциалов.

В главе 2 дано систематическое изложение теории упругости в случае плоской задачи с использованием комплексных переменных с учетом объемных сил. В частности, показано, что для гармонических массовых сил функция Эйри по-прежнему остается бигармонической функцией, а средние напряжения – гармонической функцией. Последнее обстоятельство важно, т.к. оно допускает обобщение на случай, когда реология среды не является упругой. Действительно, если при статистической обработке результатов измерений удастся установить, что шаровая часть тензора напряжений может быть аппроксимирована гармонической функцией, то все постановки краевых задач, в которых не используется закон Гука, являются эквивалентными упругим постановкам. В той же главе определены необходимые условия, налагаемые на гладкую функцию двух переменных, при которых она может рассматриваться в виде поля траекторий главных напряжений, допустимого в упругости. Это подчеркивает факт,

что не любая сетка, представленная системой двух семейств ортогональных кривых, может рассматриваться в виде траекторий главных напряжений в упругой постановке, что сужает число интерполяционных методов, способных реконструировать траектории по дискретным данным.

Основные результаты работы

1. В главе 3 на основе подхода Гахова для интегрального уравнения, содержащего комплексно сопряженную неизвестную функцию, разработана общая методика исследования краевых задач теории упругости с однородной правой частью, которая состоит с следующим.

- Комплексные потенциалы представляются в виде интегралов типа Коши с двумя неизвестными плотностями, при этом выбираются некоторые соотношения между искомыми функциями, которые позволяют либо автоматически удовлетворить одно из граничных условий, либо упрощают вид получаемых далее интегральных уравнений.

- Путем подстановки комплексных потенциалов в краевые условия получается система двух скалярных сингулярных интегральных уравнений, которые при необходимости собираются в одно комплексное общего вида.

- Число линейно независимых решений полученного уравнения определяется путем исследования характеристического уравнения или эквивалентной ему задачи Римана.

- Переход к интегральным уравнениям, приспособленным для численных расчетов, что достигается либо путем его сведения к уравнению Фредгольма способом Карлемана-Векуа, либо путем суперпозиции общего решения однородного характеристического уравнения и частного решения полного неоднородного уравнения.

Эти результаты обосновывают защищаемое положение 1.

2. В главах 4 и 5 проведен анализ разрешимости нескольких краевых задач теории упругости с «неполными граничными условиями». Во всех формулировках полностью отсутствовали данные по величинам векторов напряжений, усилий и смещений на границе внутренней области либо на контуре, делящим упругую плоскость на внутреннюю и внешнюю области. Анализ выполнен по схеме, указанной в предыдущем пункте. Во всех исследованных задачах было определено, что их решение зависит от поведения граничных значений аргументов комплекснозначных функций напряжений, смещений или усилий, которые определяют индекс соответствующей краевой задачи Римана, а, следовательно, и число линейно независимых решений и число произвольных постоянных, входящих в решение.

Были сделаны следующие выводы.

- В задаче с граничными условиями, заданными через главные направления тензора напряжений и кривизну траекторий главных напряжений, индекс краевой задачи Римана определяется только числом оборотов оси главных напряжений при обходе всего замкнутого

контура в положительном направлении (против часовой стрелки). При этом индекс положителен, если ось вращается по часовой стрелке и отрицателен, если против часовой стрелки. В последнем случае задача не разрешима в классе голоморфных функций. При положительном индексе число независимых решений задачи пропорционально числу оборотов.

- Аналогичные результаты для указанной выше задачи были получены для случая круговой области. При этом приведено альтернативное решение на основе метода Мухелишвили, которое использует разложение комплексных потенциалов в степенные ряды. Оно полностью совпало с решением, полученным методом интегральных уравнений, что свидетельствует о достоверности результатов проведенного исследования.

- Для задачи с однородными граничными условиями получено однородное поле траекторий главных напряжений, что является важным прикладным результатом, в соответствии с которым, если однородные поля упругих траекторий определяются каким-то иным методом, то они не должны допускать каких-либо локальных искажений. При этом поле полных напряжений может зависеть от пяти произвольных вещественных постоянных.

- В задаче с граничными условиями, заданными через ориентации векторов усилий и смещений было показано, что индекс определяется приращением разности аргументов векторов смещений и усилий при обходе контура, что также есть целое число. Для разрешимости задачи необходимо, чтобы индекс был неотрицателен, в противном случае задача не имеет решения.

- Приведены решения указанной выше задачи для двух частных случаев, а именно, для случая кругового контура (оно получено методом разложений в ряды при частном виде граничных условий) и задачи для произвольного контура в случае соосных ориентаций векторов смещений и усилий, которая сведена к двум краевым задачам Гильберта. В обоих частных случаях результаты, полученные другими методами, согласуются с результатами, полученными на основе общего подхода.

- Для случая полуплоскости в аналитическом виде решена краевая задача с граничными условиями, заданными через ориентацию вектора смещений и главные направления тензора напряжений. Показано, что число линейно независимых решений этой задачи определяется суммой числа оборотов осей главных напряжений и вектора смещений. Поскольку задача для полуплоскости соответствует характеристическому сингулярному интегральному уравнению задачи для произвольного контура, то вывод о разрешимости данной задачи остается верным и для произвольного гладкого контура. Следует отметить, что это решение представляет практический интерес, поскольку на практике доступны не только данные по ориентациям главных напряжений, но и данные по направлениям смещений.

Указанные результаты обосновывают защищаемое положение 2.

3. В главах 4 и 5 также проведен анализ разрешимости краевых задач теории упругости

для составной плоскости с транзитными условиями на контуре (который делит плоскость на внутреннюю и внешнюю области), при условии непрерывности вектора напряжений при переходе через контур. Анализ включает в себя следующие случаи.

- По разные стороны контура заданы различные ориентации векторов усилий и смещений. В этом случае возникает четыре возможные формулировки, исследованные в параграфе 4.4. Показано, что во всех случаях, аналогично случаю внутренней области, число линейно независимых решений зависит от индекса, который определяется по разности числа оборотов векторов смещений и усилий после полного обхода контура. При этом для разрешимости задачи необходимо, чтобы индекс для внутренней области был не менее индекса для внешней области.

- Заданы различные главные направления тензора напряжений по разные стороны контура. В данном случае показано, что разрешимость задачи определяется разностью индексов для внутренней и внешней задач, а именно, числом оборотов оси максимального главного напряжения при обходе контура против часовой стрелки при предельном переходе к контуру снаружи должно превышать их число, полученное переходом изнутри. Показано, что краевые условия не могут быть заданы произвольно, а должны удовлетворять ограничениям, налагаемым на геометрию траекторий главных напряжений, которая следует из рассмотрения условий равновесия на границе между областями.

- По разные стороны контура, разделяющего области, состоящие из разномодульных материалов, заданы направления векторов смещения. Показано, что, несмотря на то, что коэффициенты задачи Римана зависят от упругих свойств обеих областей, число решений остается таким же, как и в случае одномодульных областей. Этот вывод имеет практическое значение при рассмотрении контактирующих тектонических плит разной жесткости, поскольку указывает на то, что такой случай, по существу, не отличается от случая плит, имеющих одинаковые упругие модули, что важно для разработки численных методов решения задач по реконструкции напряжений в составных областях.

Указанные выше результаты обосновывают защищаемое положение 3.

4. В главе 6 предложена методика реконструкции полей напряжений по заданным дискретным главным направлениям напряжений внутри упругой области. Она основана на методе Треффта для комплексных потенциалов теории упругости и на задаче оптимизации невязки между расчетными и заданными ориентациями главных напряжений. Разработаны два основных варианта методики.

- В первом варианте комплексные потенциалы теории упругости аппроксимируются по всей области глобально линейными комбинациями голоморфных функций с комплексными коэффициентами, подлежащими определению. Последние находятся из системы линейных

алгебраических уравнений, которая следует из задачи минимизации расчетных и экспериментальных данных по ориентациям главных напряжений. Поскольку такая система является однородной, то вводится дополнительное уравнение, которое выражает нормировку максимальных касательных напряжений.

- Второй, конечно-элементный вариант метода, предполагает разбиение области на элементы и использует кусочно-полиномиальные аппроксимации комплексных потенциалов внутри элементов, что позволяет отнести его к гибриднему методу МКЭ-Трефтца. Он также требует введения условия нормировки, поскольку в противном случае система остается однородной.

- В обоих случаях система линейных алгебраических уравнений является переопределенной, поэтому ее приближенное решение строится методом наименьших квадратов. При высоком значении числа обусловленностей системы, для обеспечения устойчивости реконструкции полей напряжений, используется либо SVD регуляризация, либо, при больших размерностях матрицы системы, итерационный LSQR алгоритм. Оба численных метода показали высокую эффективность при решении тестовых примеров.

- Для определения эффективности метода были рассмотрен ряд синтетических примеров (с целью оптимального выбора системы базовых голоморфных функций) и примеров из фотоупругих экспериментов, которые позволяют визуализировать сравнение реконструированных полей изолиний максимальных касательных напряжений и интерференционной картины полос, наблюдаемых в опыте. Проведенные расчеты указывают на эффективность метода и способность идентифицировать, так называемые, изотропные точки в полях траекторий главных напряжений (в которых не существует главных направлений) по дискретным наборам данных без предварительного определения позиций таких точек. Также даны рекомендации для практических расчетов по выбору числа базисных функций в зависимости от числа и качества данных.

Эти результаты обосновывают защищаемое положение 4.

5. В главе 7 предложенная методика реконструкции упругих напряжений была применена для анализа современных напряжений и эволюции палеонапряжений в земной коре в некоторых регионах Земли, которые рассматривались как односвязные области. Во всех случаях в качестве входной информации использовались данные по азимуту оси главных сжимающих напряжений. Были установлены следующие результаты.

- Реконструкции полей современных напряжений в Западной Европе по большому числу наблюдений, взятых из мировой базы данных WSM, демонстрируют однородность поля траекторий главных напряжений со средним азимутом наклона траекторий около -60° , что согласуется с результатами предыдущих исследований, выполненных другими методами.

- На основе базы данных Института физики Земли (РАН) по трещиноватости осадочных пород приведены реконструкции полей палеонапряжений в четырех регионах Земли в различные геологические эпохи, что позволяет обсуждать эволюцию палеонапряжений с привлечением геомеханического подхода.

- Исследовано поле напряжений в австралийском континенте с привлечением трех подходов, а именно, полиномиальная и конечно-элементная реконструкции по методу главы 6, а также приближенное аналитическое решение, основанное на решении краевой задачи, с граничными условиями в виде ориентаций главных напряжений, приведенной в главе 5. Во всех случаях было установлено существование изотропной точки внутри континента, что объясняет (наблюдаемое экспериментально) резкое вращение оси главных напряжений, ориентированной З-В на юге континента на, примерно, С-Ю в его центре.

- На основе расчетов для австралийского континента был проанализирован вопрос о соответствии числа измерений числу базисных функций в полиномиальной аппроксимации или количеству элементов в конечно-элементном подходе. Было установлено, что из-за существенного разброса данных (в лучшем случае в $\pm 15^\circ$), стандартный подход, в котором достаточно добиться минимальной невязки, не может быть непосредственно перенесен на задачи реконструкции напряжений в земной коре. Предложены два основных подхода. Первый - проводить кластерный анализ, что позволяет установить оптимальную степень базисных многочленов. Второй – контролировать, помимо невязки, число обусловленностей (для обеспечения стабильных результатов реконструкции) и использовать минимальные степени многочленов, которые обеспечивают отклонения реконструированных главных направлений от экспериментальных данных в пределах диапазона разброса совокупных данных разного качества, оценочно $\pm 20^\circ$ - 25° .

- Предложенный подход существенно отличается от традиционного моделирования упругих полей, основанного на использовании специально подобранных (или «фиктивных») граничных условий в терминах напряжений, усилий или смещений. Основное достоинство предложенного метода состоит в том, что результаты реконструкций полного тензора напряжений зависят от вполне определенного (и небольшого) числа параметров. Более того в большинстве случаев реконструкции полей траекторий выполняется единственным образом, а поля максимальных касательных напряжений находятся с точностью до нормировочной константы. Полное поле линейно зависит от двух констант, которые могут быть определены из решения задачи регрессии, если известны величины компонент напряжений в некоторых точках, на что указано в конце главы 7.

Данные результаты обосновывают защищаемые положения 4 и 6.

6. В главе 8 реализован численный подход для реконструкции плоских тензоров

напряжений в составной области с одним или несколькими внутренними границами. В качестве входных данных используются только данные по ориентациям главных напряжений и приняты условия непрерывности вектора напряжений на границах между соседними плитами. Были проведены реконструкции полей напряжений для следующих случаев.

- Для Антарктической плиты, которая рассматривается как внутренняя область, а все прилегающие плиты как единая внешняя. Поскольку данные по направлениям известны в основном по границам Антарктической плиты, то фактически показана эффективность метода реконструкции напряжений по методу Трефтца для случая краевой задачи с транзитными граничными условиями для составной плоскости.

- Для области вблизи Суматры, где произошло разрушительное землетрясение 26.12.2004, вызвавшее цунами, проанализированы поля траектории напряжений и максимальных касательных напряжений. Показано, что эпицентры последних крупнейших землетрясений расположены в области, где максимальное касательное напряжение (действующее в плоскости коры) имеет наиболее низкий уровень, что объясняет возникновение разрушительных цунами в этом регионе, исходя из анализа режима напряжений.

- Для областей, состоящих из нескольких плит со сложными границами, были разработаны алгоритмы расчета напряжений на основе кусочно-линейных аппроксимаций в подобластях и проведены реконструкции полей напряжений в цунамигенных регионах. Анализ полей напряжений подтверждает, что эпицентры крупных землетрясений, которые вызывают цунами, тяготеют к областям с низкими значениями максимальных касательных напряжений.

- Для трех регионов (Суматры, Соломоновых островов и островов Тонга-Самоа) проанализированы изменения полей упругих напряжений, вызванные суматранским землетрясением 2004, путем разбиения всего массива данных на два временных промежутка, собранных до 26.12.2004 и после (по базе данных WSM 2008 года). Было установлено, что в районах близких к его эпицентру произошло существенное перераспределение напряжений, что вероятно, связано с развитием крупного разлома. При удалении от эпицентра механическое влияние разлома убывает (район Соломоновых островов) и становится незначительным на далеком расстоянии (район острова Тонга-Самоа).

Результаты главы 8, обосновывают защищаемые положения 5 и 7.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук:

1. Мухамедиев Ш.А., А.Н. Галыбин. Прямой подход к определению региональных полей напряжений (на примере Западно-Европейской, Северо-Американской и Австралийской платформ) // *Физика Земли*. 2001. №8. С. 23-41.
2. Мухамедиев Ш.А., Галыбин А.Н. Решение плоской задачи теории упругости при заданных траекториях главных напряжений // *Доклады Академии Наук*. 2004. Т. 396. № 1. С. 56-59.
3. Мухамедиев Ш.А, Галыбин А.Н., Белоусов Т.П. От дискретных ориентаций главных осей палеонапряжений к реконструкции полей палеонапряжений в упругой литосфере // *Доклады Академии Наук*. 2005. Т. 403. № 1. С. 101-105.
4. Мухамедиев Ш.А., Белоусов Т.П., Галыбин А.Н. Теоретическое моделирование полей упругих палеонапряжений по данным натуральных индикаторов // *Физика Земли*. 2005. № 11. С. 47-61.
5. Мухамедиев Ш.А., Галыбин, А.Н. Где и как зародились разрывы землетрясений 26.12.04 и 28.03.05 у о. Суматра // *Доклады Академии Наук*. 2006. Т. 406. № 1. С. 95-98.
6. Galybin A.N., Dyskin A.V., Jewell. R. J. A measuring scheme for determining in situ stresses and moduli at large scale // *Int J Rock Mechanics and Mining Science*. 1997. V. 34 (1)/ P. 157-162.
7. Galybin A.N., Dyskin A.V., Tarasov B.G., Jewell R. J. An approach to the large-scale field stress determination // *Int J Geotechnical and Geological Eng.* 1999. V. 17. 267-289.
8. Galybin A.N., Mukhamediev Sh.A. Plane elastic boundary value problem posed on orientation of principal stresses // *J Mechanics and Physics of Solids*. 1999. V. 47 (11). P. 2381-2409.
9. Galybin A.N. Plane boundary value problem posed by displacement and force orientations on a closed contour // *Journal of Elasticity*. 2002. V. 65. P. 169-184.
10. Galybin A.N., Mukhamediev Sh.A. On the problem of stress reconstruction from discrete orientations of principal stresses // *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata. An Int J Earth Sciences*. 2004. V. 45 (1) supplement: P. 338-342.
11. Galybin A.N., Mukhamediev Sh.A. Determination of elastic stresses from discrete data on stress orientations // *Int l Journal of Solids and Structures*. 2004. V. 41 (18-19): P. 5125-5142.
12. Mukhamediev Sh.A., Galybin A.N., Brady B.H.G. Determination of stress fields in elastic lithosphere by methods based on stress orientations // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2006. V. 43(1). P. 66-88.
13. Mukhamediev Sh.A., Galybin A.N. Determination of Stresses from the Stress Trajectory Pattern

- in a Plane Elastic Domain // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2007. V. 12. P. 75-106.
14. Galybin A.N. , Irša J. On reconstruction of 3D harmonic functions from discrete data // *Proceedings of Royal Society A*. 2010. V. 466 (2119). P. 1935-1955.
 15. Irša J., Galybin A.N. Stress Trajectories Element Method for stress determination from discrete data on principal directions // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2010. V. 34(5). P. 423-432.
 16. Haderka, P and A.N. Galybin. The stress trajectories method for plane plastic problems // *Int Journal of Solids and Structures*. 2010. V. 48. P. 450-462.
 17. Galybin A.N. Boundary value problems of plane elasticity involving orientations of displacements and tractions // *Journal of Elasticity*. 2011. V. 102. P. 15-30.
 18. Haderka P., Galybin A.N. Plastic stress field reconstruction based on stress orientations data // *The Russian Journal of Earth Sciences*. 2012. V. 12. ES4001.

Подписано в печать 17 февраля 2017г.
Формат 60x90/16. Усл. печ. л. 2. Тираж 150 экз.
Отпечатано в ИАЦ ИФЗ РАН