

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ЗЕМЛИ ИМ. О. Ю. ШМИДТА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



УДК 550.831.015

*СПИРИДОНОВ ЕВГЕНИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ*

**НОВЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗЕМНЫХ ПРИЛИВОВ**

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание степени доктора физико-математических наук

по специальности: 25.00.10

(геофизика, геофизические методы поисков полезных ископаемых)

**МОСКВА - 2018 г.**

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр
<b>Введение</b> .....	4
<b>ГЛАВА 1. Методы вычисления параметров земных приливов</b> .....	23
1.1 Уравнения, описывающие деформированное состояние неупругой самогравитирующей сжимаемой вращающейся сферы .....	24
1.2 Метод интегрирования краевой задачи .....	45
1.3 Вычисление чисел Лява, дельта-факторов и океанического эффекта. Поправки за относительные и кориолисовы ускорения.....	48
1.4 Учет диссипации .....	53
1.5 Разложение котидальных карт по сферическим функциям, поправка за сохранение масс.....	54
1.6 Подход, основанный на применении функций Грина.....	58
1.7 Модели внутреннего строения Земли и океанических приливов...	61
1.7.1 Сравнительный анализ моделей строения Земли <i>PREM</i> и <i>IASP91</i> . Влияние диссипации на значения упругих параметров Ламе.....	61
1.7.2 Океанические приливные модели.....	66
<b>ГЛАВА 2. Основные результаты численного моделирования земных приливов</b> .....	71
2.1. Числа Лява и амплитудные дельта-факторы для Земли без океана и их зависимость от широты.....	72
2.2 Общая характеристика распределения океанического гравиметрического эффекта по земному шару .....	103
2.3 Нагрузочные числа Лява и функции Грина.....	112
2.4 Сравнение расчета океанического эффекта с результатами программы <i>LOAD89</i> из пакета <i>ETERNA3.3</i> .....	132

2.5 Влияние на величину гравиметрического нагрузочного эффекта региональных особенностей строения коры и верхней мантии....	137
2.6 Вклад диссипации в величину океанического эффекта.....	140
2.7 Неприливной океанический эффект.....	143
2.8 Результаты комплексного моделирования океанического гравиметрического эффекта.....	147
2.9 Амплитудные дельта-факторы для Земли с океаном	151
2.10 Краткое описание программы прогноза параметров земных приливов <i>ATLANTIDA3.1_2014</i> .....	154
<b>ГЛАВА 3. Результаты сравнения модельных значений параметров земных приливов с данными наблюдений.....</b>	<b>162</b>
3.1 Исходные данные и методы их анализа .....	165
3.2 Сравнение результатов прогноза программ <i>ATLANTIDA3.1_2014</i> и <i>PREDICT</i> .....	177
3.3 Сравнение эффективности различных моделей расчета амплитудных дельта-факторов для Земли без океана.....	184
3.4 Влияние диссипации при расчете океанического эффекта на результаты сравнения прогнозных и наблюдаемых значений.....	189
3.5 Выбор модели строения Земли.....	193
3.6 Учет массовой коррекции при расчете океанического эффекта ....	196
3.7 Зависимость океанического нагрузочного эффекта от широты.....	199
3.8 Комплексный учет факторов, влияющих на величину океанического гравиметрического эффекта .....	200
Заключение и основные выводы Главы 3.....	205
<b>Заключение и основные выводы работы .....</b>	<b>209</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>215</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы.** Необходимость создания современной теории земных приливов, позволяющей, в частности, определять гравиметрические амплитудные факторы с точностью не хуже четвертого-пятого знака после запятой, назрела в нашей стране уже давно. В первую очередь, это связано со все возрастающей точностью гравиметрических наблюдений, особенно после появления за границей сверхпроводящих гравиметров, а у нас – абсолютных и относительных инструментов последних модификаций. С другой стороны, происходит постоянное уточнение моделей строения Земли и приливных океанических моделей (в т.ч. региональных). Не последнюю роль здесь играют возросшие в последние десятилетия возможности вычислительной техники. В связи с этим, обеспечение отечественной гравиметрии соответствующими теоретическими разработками, реализованными на практике в том числе в виде готового программного продукта, с возможностью его постоянного обновления, является безусловно актуальной и нужной задачей.

**Целью** настоящей работы является разработка новых методов моделирования земных приливов, соответствующих точности современных гравиметрических наблюдений.

Для достижения поставленной цели автором решен ряд теоретических и прикладных задач, направленных на уточнение значений чисел Лява и амплитудных дельта-факторов приливных волн для неупругой вращающейся самогравитирующей эллипсоидальной Земли с океаном. Усовершенствована методика расчета океанического гравиметрического эффекта. По результатам проведенных исследований разработана первая отечественная программа прогноза параметров земных приливов *ATLANTIDA3.1\_2014*.

В соответствии с поставленной целью в работе решены следующие **задачи**:

- 1) Получено обобщение задачи Михаила Молоденского, описывающей состояние упругой самогравитирующей сжимаемой сферы, на случай двухосной гидростатически равновесной вращающейся эллипсоидальной неупругой оболочки. В систему уравнений шестого порядка включены поправки за относительные и кориолисовы ускорения. В отличие от работ других авторов, задача решена методом Лява.
- 2) Разработан простой и эффективный алгоритм интегрирования краевой задачи, основанный на применении метода ломанных Эйлера.

- 3) В результате интегрирования краевой задачи получены обычные (2, 3 и 4 порядка) и нагрузочные (до порядка 50000) числа Лява, а также амплитудные дельта-факторы для вращающейся эллипсоидальной неупругой Земли с учетом относительных и кориолисовых ускорений. Расчеты проведены для 12 вариантов моделей, отличающихся друг от друга включением или выключением отдельных факторов, а также применением двух моделей строения Земли: *PREM* и *IASP91*. Для учета диссипации профили продольных и поперечных сейсмических волн пересчитывались на периоды суточных и полусуточных приливных волн при помощи логарифмической функции крипа.
- 4) Выявлены зависимости амплитудных дельта-факторов и чисел Лява приливных волн от широты. Эти зависимости в основном обусловлены эллиптичностью мантии Земли, а также влиянием кориолисовых ускорений.
- 5) Произведен расчет океанического гравиметрического эффекта. Для этого котидальные карты основных приливных волн, после соответствующей интерполяции данных, были разложены по сферическим функциям до порядка  $n = 720$ , а для океанической приливной модели *FES2012* до  $n = 1120$ . При этом была применена полученная в настоящей работе система рекуррентных формул для интегралов от полиномов и присоединенных полиномов Лежандра. Показано, что подход, основанный на применении сферических функций, на практике приводит к более точным результатам, чем основанный на вычислении океанического нагрузочного эффекта при помощи функций Грина с учетом ближней зоны. Помимо этого обоснован отказ от применения поправки за сохранение океанических масс. Суммарный (нагрузочный плюс прямое ньютоновское притяжение) океанический гравиметрический эффект вычислен для 6 различных океанических приливных моделей и двух моделей строения Земли.
- 6) Проведен подробный сравнительный анализ результатов вычисления океанического эффекта с работами других авторов и данными наблюдений. Сделаны выводы о степени влияния на величину эффекта диссипации, внутреннего строения верхних слоев Земли, эллиптичности, вращения, относительных и кориолисовых ускорений.
- 7) По значениям амплитудных дельта-факторов для Земли без океана, а также амплитудам и фазам океанического эффекта, рассчитаны прогнозные значения амплитудных факторов и сдвигов фаз для неупругой самогравитирующей вращающейся Земли с океаном. Получены прогнозные временные ряды прилива.

- 8) Разработана и апробирована прикладная программа прогноза параметров земных приливов *ATLANTIDA3.1\_2014*. Проведен сравнительный анализ получаемых результатов с данными наблюдений на сверхпроводящих гравиметрах сети *GGP*.
- 9) По результатам сравнений сделан вывод о том, что рассчитанные в настоящей работе прогнозные дельта-факторы и сдвиги фаз суточных и полусуточных приливных волн для Земли с океаном лучше соответствуют данным наблюдений, нежели полученные по известной программе *PREDICT* из пакета Венцеля *ETERNA3.3*. Также лучшее согласие с наблюдениями дают полученные в настоящей работе амплитудные факторы для Земли без океана в сравнении с вычисленными согласно модели *DDW/NH* [Dehant V. et al., 1999].

**Научная новизна работы** определяется в первую очередь созданием новой модели, позволяющей рассчитывать значения чисел Лява и амплитудных дельта-факторов приливных волн для неупругой вращающейся эллипсоидальной Земли без океана с учетом их широтной зависимости.

В настоящее время известно достаточно большое число работ, посвященных решению этой задачи. Широко распространенным методом ее решения для ассиметричной Земли является подход, основанный на разложении смещений в бесконечный ряд по сфероидальным и тороидальным функциям. Этот метод был в основном разработан в работах [Smith, 1974, 1976, 1977] и впервые реализован John Wahr [John M. Wahr, 1979, 1981a,b; Wahr, J. M., and Z. Bergen, 1986]. Хорошо известны также работы V. Dehant [Dehant V., 1987a,b; Dehant V. et al, 1999] и P. Mathews [Mathews, P.M. et al, 1995a,b; Mathews, P.M., 2001].

Необходимо отметить, что существенным недостатком полученных при помощи указанного метода [Smith, 1974, 1976, 1977] решений является то, что используемая в них цепочка обыкновенных дифференциальных уравнений не содержит малого параметра. Поэтому вопрос о сходимости ряда и о величине ошибок, возникающих вследствие замены бесконечной системы конечной, остается открытым.

Например, в работе [Wahr, J. M., 1981a] рассмотрен прилив в эллипсоидальной вращающейся упругой Земле без океана. При расчете амплитудных факторов полусуточных волн удержаны две сфероидальные гармоники порядков 2 и 4 степени 2. Для суточных волн разложение включает опять же два сфероидальных (порядков 2 и 4 степени 1) и два тороидальных (порядков 1 и 3 степени 1) скаляра. Скаляры более высоких порядков были отсечены. Это, видимо, вполне допустимо при расчете обычных амплитудных факторов и чисел Лява, но вряд ли приемлемо при вычислении нагрузочных чисел, а также при учете латеральных неоднородностей.

Основной отличительной чертой настоящей работы является то, что задача определения чисел Лява для асимметричной Земли решена собственно методом Лява. Процедура отсечения не применяется, и решение, таким образом, не зависит от применяемого набора скаляров.

Решение задачи методом Лява столкнулось с некоторыми трудностями. В частности, пришлось поменять сам вид искомого решения. Второй проблемой являются полученные различия значений чисел Лява в широтном и долготном направлениях. Эти различия плавно нарастают от полюса к экватору. Однако они достаточно малы, т.е. составляют тысячные доли процента. Таким образом, с точностью почти до второго порядка по сжатию вполне можно обойтись набором из трех, а не из шести чисел Лява. Наконец, третья проблема связана с введением в уравнения кориолисовых ускорений. Как отмечал С.М. Молоденский, введение этих ускорений снимает в уравнениях вырождение по угловым переменным, и они уже не сводятся к обыкновенным. Здесь следует отметить, что, во-первых, указанное вырождение в полученной нами системе уже во многом снято вследствие зависимости искомого функций от широты, а во-вторых, было показано, что эффективную работу, приводящую к смещениям, производит только та часть силы Кориолиса, которая определяется дополнительными смещениями, вызываемыми самой этой силой. В совокупности это позволило включить кориолисовы ускорения в систему уравнений непротиворечивым образом.

Второй отличительной особенностью настоящей работы является учет при расчете океанического гравиметрического эффекта диссипации, особенностей строения коры и верхней мантии (замена *PREM* на *IASP91*), а также применение разложения высоты прилива по сферическим функциям.

Разработанная на основании проведенных в настоящей работе исследований программа прогноза параметров земных приливов *ATLANTIDA3.1\_2014* не имеет аналогов в мировой практике, как с точки зрения заложенных в ее разработку теоретических идей, так и с точки зрения точности производимых вычислений.

**Практическая значимость.** Полученные в работе результаты имеют широкий спектр применения. Так, современные значения приливных дельта-факторов для Земли с океаном позволяют точнее определять теоретические значения амплитуд и сдвигов фаз приливных волн, что, в конечном итоге, способствует уточнению приливного анализа гравиметрических наблюдений. В свою очередь, сами эти наблюдения позволяют решать широкий круг геодезических и геофизических задач, начиная от поиска полезных ископаемых и заканчивая уточнением особенностей внутреннего строения Земли.

Помимо этого, знание теоретических значений приливных чисел  $h$  и  $l$  с относительной погрешностью не хуже  $10^{-4}$ , в частности, необходимо для высокоточной

обработки современных *GNSS* (*GLONASS*, *GPS*) наблюдений спутникового позиционирования. Это позволяет на современном уровне прогнозировать вертикальные и горизонтальные смещения земной поверхности, т.е. способствовать повышению точности координатно-временного обеспечения.

В целях повышения прикладной значимости настоящей работы некоторые из полученных в ней теоретических результатов были применены автором к разработке прикладной программы прогноза параметров земных приливов *ATLANTIDA3.1\_2014*. Выдаваемые этой программой результаты имеют важное значение при обработке данных относительных и абсолютных гравиметрических наблюдений, применяемых в дальнейшем для самых различных целей. *ATLANTIDA3.1\_2014* уже успешно используется рядом специалистов в области гравиметрии и поиска полезных ископаемых как в нашей стране, так и за рубежом. Помимо этого, данная программа как идеологически, так и методически является чисто отечественной разработкой и в связи с этим входит в пакет программ, прилагающихся к выпускаемым в России абсолютным гравиметрам *GABL*. См. также [Spiridonov E., 2013].

**На защиту выносятся следующие основные положения:**

1. Решение новой теоретической задачи расчета чисел Лява и амплитудных дельта-факторов приливных волн для вращающейся эллипсоидальной неупругой Земли без океана с учетом их широтной зависимости.
2. Новая методика расчета океанического гравиметрического эффекта. Показано, что, с учетом точности современных гравиметрических наблюдений, при расчете океанического гравиметрического эффекта необходимо принимать во внимание более 10 дополнительных факторов. К ним относятся: выбор модели строения Земли и океанической приливной модели, учет диссипации, относительных и кориолисовых ускорений, эллиптичности Земли, сил инерции, а также сил, определяемых членами разложения геопотенциала до первого порядка по сжатию, необходимость отказа от массовой коррекции и методики, основанной на применении ближней зоны и функций Грина, и, наконец, адекватный выбор шага интегрирования при вычислении нагрузочных чисел Лява высоких порядков.
3. Новые результаты моделирования земных приливов для вращающейся эллипсоидальной неупругой Земли, в смысле близости теории к наблюдениям, получены для модели строения Земли *IASP91* и одной из наиболее современных океанических приливных моделей *FES2012*. Амплитуды разностных (прогноз минус наблюдения) векторов на европейских *SG*-станциях сети *GGP* для волн *M2* и *O1* не превышают 0.05% от наблюдаемых амплитуд этих волн.



**Методы исследований.** В работе применены методы численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями (методы решения краевых задач). Помимо этого, применялось разложение высоты прилива по сферическим функциям до 1440 порядка. При этом использовались полученные в настоящей работе рекуррентные формулы для интегралов от полиномов и присоединенных полиномов Лежандра.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Симпозиуме Международной ассоциации геодезии (*IAG*) «Системы отсчета и их применение в геодезии», прошедшей в 2010 в Марн-Ла-Валле, Франция (*IAG Commission 1 Symposium 2010, Reference Frames for Applications in Geosciences (REFAG 2010)*, 04.10 – 08.10, Marne-La-Vallee, France);
- Сагитовских чтениях «Солнечная система и Земля: происхождение строение и динамика», 23 апреля 2013 г., а также 15 февраля 2016 г., ГАИШ МГУ;
- Симпозиумах Международной ассоциации геодезии (*IAG*) «Наземная, морская и аэрогравиметрия: измерения на неподвижных и подвижных основаниях», 17 – 20 сентября 2013 г., а также 12 – 15 апреля 2016 г., г. Санкт-Петербург;
- Конференции и выставке *SPE* (Society of Petroleum Engineers) по разработке месторождений в осложненных условиях и Арктике 2013, 15 – 17 октября 2013 г., Москва, ВДНХ;
- Сессиях Европейского геофизического союза (*EGU*) (Вена, Австрия) в 2011, 2012, 2014 и 2015 годах.
- Всероссийской астрометрической конференции «Пулково – 2015», 21 – 25 сентября 2015 г., г. Санкт-Петербург.
- Седьмой Всероссийской конференции «Фундаментальное и прикладное координатно-временное и навигационное обеспечение», 17 – 21 апреля 2017 г., Институт прикладной астрономии РАН, г. Санкт-Петербург.

Помимо этого, разработанная автором настоящей работы программа прогноза параметров земных приливов *ATLANTIDA3.1\_2014* получила достаточно широкое распространение как в нашей стране, так и за рубежом.

**Материалы диссертации опубликованы** в **24** печатных работах, в т.ч. одной монографии, из них **14** статей в рецензируемых журналах, рекомендуемых ВАК РФ для публикации материалов докторских и кандидатских диссертаций. Также автору настоящей работы принадлежит патент на программу прогноза параметров земных приливов *ATLANTIDA3.1\_2014*.

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Автором лично предложены и разработаны все представленные в диссертации методы, алгоритмы и реализующее их программное обеспечение. Отдельные фрагменты программного кода разрабатывались под непосредственным руководством автора. Автором лично получены все представленные в диссертации математические методы, выкладки и доказательства, исключая лишь некоторые необходимые формулы, приводимые со ссылкой на соответствующие работы. Все представленные в диссертации результаты расчётов получены автором лично.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 231 страница, из них 214 страниц текста, включая 85 рисунков и 30 таблиц. Список литературы содержит 116 наименований на 17 страницах.

#### **Краткий обзор исследований в данной области**

Большое внимание в настоящей работе уделено расчету океанического гравиметрического эффекта. Начало исследований, посвященных расчету влияния океана на данные гравиметрических наблюдений, в настоящее время в основном принято относить к первым работам Уильяма Эллистона Фаррелла [Farrell W.E., 1970, 1972]. Однако первые удобные для расчета нагрузочных чисел Лява уравнения были получены Михаилом Сергеевичем Молоденским еще в 1961 году [Молоденский М.С., Крамер М.В., 1961a] на основе его работы 1953 года [Молоденский М.С., 1953]. В 1966 году Б.П. Перцев [Перцев Б.П., 1966], применив нагрузочные числа Лява, вычисленные Лонгманом [Longman I.A., 1963] до  $n = 40$ , определил нагрузочную и ньютоновскую составляющие океанического гравиметрического эффекта для ряда станций. Нагрузочная часть вычислялась путем разложения высоты прилива по сферическим функциям. Позднее, основываясь на уравнениях Молоденского, он рассчитал нагрузочные числа Лява вплоть до порядка  $n = 70000$  [Перцев, 1976]. В отличие от работ Фаррелла, использующих для вычисления эффекта функции Грина, в этой более поздней работе Перцев также применил разложение высоты прилива по сферическим функциям, поставив пункт, для которого вычисляется эффект, в полюс сферы и избегая тем самым разложений по присоединенным полиномам.

В 1970 году, в своей диссертации, Фаррелл [Farrell, 1970] рассчитал океанический эффект через функции Грина, вычисленные по числам Лява до порядка  $n = 47$ , и

подверг критике точность расчетов Перцева, т.е. самого метода разложения высоты прилива по сферическим функциям. Несколько позже он [Farrell W.E., 1972] рассчитал функции Грина для порядка  $n = 10000$ .

К 1987 году Оливье Фрэнсис и Вероника Дехант [Francis, O., Dehant, V., 1987] уточнили работу Фаррелла, пересчитав функции Грина. После этого Оливье Фрэнсис написал программу расчета нагрузочного океанического эффекта *LOAD89* (позже *LOAD97*), вошедшую в общеизвестный пакет Венцеля [Wenzel, 1996] *ETERNA3.30*. Этой программой и ее модификациями в основном до сих пор и пользуются во всем мире.

Что касается многочисленных работ на эту тему Б.П. Перцева [Перцев Б.П., 1966, 1967, 1976, 1980, 1981, 1994, 2007; Pertsev B.P., 1970, 1971, 1977], то в настоящее время ссылки на них встречаются достаточно редко. Также практически не применяется метод, основанный на разложении высоты прилива по сферическим функциям. Этот пробел восполнен в настоящей и предшествующей ей работах [Виноградова О.Ю., Спиридонов Е.А., 2012, 2013]. В отличие от работ Б.П. Перцева, разложение проводится, в том числе, и по присоединенным полиномам Лежандра с использованием рекуррентных формул для интегралов от полиномов и присоединенных полиномов. Таким образом, за знак интеграла по площадкам выносятся только значение раскладываемой функции, а интегралы от полиномов вычисляются точно. В частности, показано, что нагрузочный эффект, полученный путем разложения котидальных карт, пересчитанных в узлы частой сетки, по сферическим функциям, лучше соответствует данным наблюдений, нежели рассчитанный по функциям Грина с ближней зоной.

Работ, содержащих оценку влияния на нагрузочный океанический эффект диссипации и латеральных неоднородностей коры и мантии, достаточно мало, что, видимо, связано со сложностью вычисления нагрузочных чисел Лява.

Spiros D. Pagiatakis [1990] разработал модель приливной океанической нагрузки для гравитирующей сжимаемой слоистой анизотропно вязко-упругой и вращающейся Земли с твердым внутренним и жидким внешним ядром. Он принял во внимание термодинамическое состояние Земли, включая ее абсолютную температуру, свободную энергию активации Гиббса, вязкость и профиль  $Q$ . Комплексные нагрузочные числа  $h'_n, k'_n, u'_n$  рассчитывались вплоть до порядка 10000. В работе показано, что вращение Земли, а также анизотропия верхней мантии способны изменить значение нагрузочных чисел на несколько процентов. Для нагрузочных чисел

с  $n \leq 4$  также выявлена слабая широтная зависимость. На двухнедельных периодах вязкоупругие нагрузочные числа оказались на 1 – 2 процента больше, чем их упругие значения.

Zschau [1977, 1978] вычислил фазовые сдвиги океанических приливных нагрузочных эффектов, вызванные слоями малой вязкости в недрах Земли. Он нашел, что нагрузочным эффектам на вязкоупругой Земле по сравнению с упругой Землей свойственны фазовые сдвиги порядка нескольких градусов.

Wahr и Bergen [1986] показали, что дисперсия чисел Лява, происходящая вследствие неупругости Земли, может повышать полусуточные и суточные нагрузочные факторы по крайней мере на 0,36%, а Vos M. S. et al. [2002] пришли к выводу о том, что влияние неупругости для полусуточных волн составляет не более 0,007 мкГал.

В настоящей работе оценке вклада диссипации посвящен раздел 2.6. Влияние затухания на океанический гравиметрический эффект вблизи берега оценивается величиной 2 – 3% от его амплитуды.

Среди работ, посвященных влиянию латеральных неоднородностей, кроме уже упомянутой работы [Pagiatakis, 1990], автору настоящей работы не удалось найти ни одной, касающейся напрямую нагрузочного гравиметрического эффекта. В то же время, поскольку нагрузочные и обычные числа Лява связаны друг с другом практически линейными зависимостями, порядок их относительных изменений должен совпадать.

По данным, приведенным в настоящей работе (разд. 2.5), а также выполненной под руководством ее автора работе [Виноградова О.Ю., 2012], при приближении к береговой линии влияние особенностей строения коры и верхней мантии может достигать 1 – 2% от амплитуды нагрузочного эффекта волны  $M2$ , что в 2 – 5 раз больше приведенных выше значений.

На протяжении 1980-х – 2000-х годов существенно возросли возможности спутниковой альтиметрии, а также улучшились гидродинамические методы построения глобальных океанических приливных моделей. В настоящее время их насчитывается более двух десятков, и ведется интенсивная работа по их дальнейшему уточнению. Большое внимание уделяется построению региональных моделей, уточняющих местные данные по наблюдениям приливометров.

Процедура вычисления чисел Лява и амплитудных дельта-факторов для Земли без океана отличается от таковой при определении их нагрузочных аналогов только

занулением в граничных условиях той же краевой задачи вертикальной составляющей напряжения на верхней границе мантии.

Первый формализм в этой области для сферической Земли был разработан Лявом [1926], который показал, что приливные эффекты могут быть представлены при помощи набора безразмерных чисел, которые с тех пор известны как числа Лява.

Дальнейшее развитие работ в данном направлении связано с уже упомянутыми выше трудами М. С. Молоденского [Молоденский М.С., 1953]; [Молоденский М.С., Крамер М.В., 1961a]. В первой из этих работ сформулирована краевая задача для упругой самогравитирующей сжимаемой сферы, а во второй – приведена соответствующая этой задаче система линейных дифференциальных уравнений шестого порядка. В настоящей диссертации прежде всего показано обобщение задачи Михаила Молоденского, описывающей состояние упругой самогравитирующей сжимаемой сферы, для случая двухосной гидростатически равновесной вращающейся эллиптической неупругой оболочки.

Как уже было отмечено выше, основной отличительной особенностью настоящей работы от работ других авторов является то, что решение поставленной задачи для асимметричной Земли осуществлено методом Лява. Поскольку данная особенность для случая эллипсоидальной вращающейся Земли во многом противоречит устоявшейся за последние 40 лет научной парадигме, обсудим ее более подробно, а также проведем краткий сравнительный анализ метода решения задачи, примененного в настоящей работе и работах других авторов.

Поскольку принято считать, что в нашей стране теория приливов в асимметричной Земле разрабатывалась в основном в трудах Сергея Михайловича Молоденского путем применения методов теории возмущений, то мы уделим этим работам особое внимание. Также будут рассмотрены работы зарубежных авторов, опирающихся в основном на метод разложения смещений по сферическим и тороидальным гармоникам.

На невозможность решения задачи для сферически асимметричной Земли методом Лява С.М. Молоденский указывал, в частности, в своей работе [Молоденский С.М., 1984]. На с. 58 он пишет: “... основные трудности теории нутации реальной Земли связаны с тем, что подстановкой Лява уравнения динамического прилива ... не сводятся к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.”

Действительно, метод Лява наталкивается на определенные трудности, но, как показано в настоящей работе, они вполне преодолимы.

Первая трудность состоит в том, что как только мы вводим зависимость искомым функций  $H$  и  $T$  (фактически, чисел Лява  $h$  и  $l$ ) от широты, объемное расширение начинает зависеть от производной по широте от внешнего потенциала, а в выражении для давления (1.1.27) появляются слагаемые, для которых не совсем ясно, как писать граничные условия. Чтобы избежать этого, необходимо поменять вид решения задачи.

Это сделано в равенствах (1.1.9) путем добавления слагаемого  $-\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right)$  в выражение для  $u_\theta$ . После учета производных от всех трех искомым функций по широте в задаче снимается вырождение по угловым переменным. При этом, каждой производной от внешнего потенциала, входящей в выражение для гравитационных сил, “зеркально” соответствует производная для упругих. Приравнивая слагаемые при одинаковых производных от внешнего потенциала, имеем уравнения (1.1.16) – (1.1.21), которые в дальнейшем преобразуются в интегрируемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом, в выводе сохраняются все производные по угловым переменным первого порядка малости по сжатию. Члены второго порядка, содержащие произведения членов первого порядка малости, были отброшены, хотя, при желании, их можно было и сохранить.

Однако, здесь возникает вторая проблема. Дело в том, что вследствие анизотропии, т.е. различии свойств в широтном и долготном направлениях, значения функции  $T$ , величины которых на поверхности Земли определяют числа Шида, в выражениях для  $u_\theta$  и  $u_\phi$  (1.1.9), строго говоря, должны различаться. Этому также соответствуют два уравнения (вместо одного для случая сферической симметрии) (1.1.17) и (1.1.18), выражающие действие упруго-гравитационных сил по широте и долготе по отдельности. Таким образом, при включении в итоговую систему уравнения (1.1.17) мы получаем один набор чисел Лява, а по уравнению (1.1.18) – другой. Итого чисел Лява должно быть 6. Тем не менее, числа  $k$  и  $h$  определены в настоящей работе однозначно. Действительно, при расчете вызванных деформациями возмущений потенциала и вертикальных смещений нас интересует не каждая из составляющих упруго-гравитационных сил по отдельности, а суммарный вектор. Этому вектору с точностью до членов второго порядка по сжатию соответствует полусумма уравнений (1.1.17) и (1.1.18). Обоснование этого положения приведено сразу после формулы (1.1.22). Что касается отличий значений чисел Шида от этого “среднего решения”, то они максимальны на экваторе и равны  $7,21 \cdot 10^{-6}$ . На полюсе указанная разность равна

нулю, а на широте  $45^\circ$  не превышает  $3,62 \cdot 10^{-6}$  (см. там же). Величина этих разностей сохраняется и после включения в систему уравнений относительных и кориолисовых ускорений. Подобные отличия не могут быть обнаружены средствами современных наблюдений, и поэтому необходимость рассмотрения уравнений (1.1.17) и (1.1.18) по отдельности пока отсутствует, а для решения задачи вполне достаточно трех чисел Лява, во всяком случае до введения тороидальных колебаний.

Наконец, существует еще одно соображение против метода Лява. Оно возникает в связи с действием силы Кориолиса. По этому поводу С.М. Молоденский пишет следующее: “Подстановкой Лява .... уравнения .... не сводятся к системе обыкновенных уравнений. Это связано с наличием ... члена  $2[\vec{\omega} \dot{\vec{u}}]$ , снимающего вырождение по угловым переменным” [Молоденский С.М, 1984, стр. 55].

Здесь необходимо отметить следующее. Вырождение по угловым переменным в представленных в настоящей работе уравнениях в значительной степени уже снято, однако, это, действительно, не позволяет включить в рассмотрение силу Кориолиса тривиальным образом. В разделе 1.3 показано, что работу на перемещениях нулевого (сферического) решения производит (т.е. приводит к ненулевым смещениям) только та часть силы Кориолиса (1.3.10), которая определяется дополнительными смещениями, вызываемыми самой этой силой. В то же время, согласно теореме Э. Бэтти о взаимности работ, указанная работа равна работе упругих и гравитационных сил нулевого решения на добавочных смещениях, вызываемых силой Кориолиса. Степень же вырождения полученных в настоящей работе уравнений соответствует возможности включения выражения (1.3.10) в итоговую систему.

За рубежом формализм, предназначенный для расчета чисел Лява, был развит Смитом [Smith, 1974] и, несколько позже, Джоном Вором [Wahr, 1979; 1981a, b] для случая эллиптической вращающейся Земли. Модель Вора включает в себя эллипсоидальное упругое деформируемое внутреннее ядро, эллипсоидальное жидкое внешнее ядро и эллипсоидальную деформируемую упругую мантию без океана и атмосферы. Земля в этой модели предполагается предварительно гидростатически напряженной и равномерно вращающейся. Позже в работах [Wahr and Bergen, 1986], а также [Dehant V., 1986b; 1987a, b] сюда были включены эффекты неупругости мантии для вращающейся Земли. Фактически, Wahr [1979, 1981a, b, 1982] оценил поле поверхностных смещений эллиптической равномерно вращающейся Земли по уравнениям Smith [1974]. В этих исследованиях эффекты сжатия Земли

моделировались при помощи предположения о том, что поверхностями постоянных реологических свойств (эквипотенциальными поверхностями в равновесном состоянии и поверхностями равной плотности) являются эллипсоиды со сжатием, получаемым из решения уравнения Клеро для случая гидростатического равновесия. Такое же предположение сделано и в настоящей работе. Все переменные в уравнениях движения выражались Вормом через функции генерализованных сферических гармоник (GSH)  $D_{mn}^l$  [Phinney and Burridge, 1973]. При помощи этих разложений уравнения в частных производных, выражающие деформированное состояние Земли, были сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно  $d/dr$ .

В определенном смысле результаты перечисленных работ были резюмированы и углублены в работе [Dehant V. et al., 1999]. В этой работе приведены значения амплитудных факторов и чисел Лява, вычисленные с учетом смещения земной поверхности и изменения потенциала, вызванных перемещением масс под воздействием прилива, для двух моделей вращающейся несферической Земли. В первой модели Земля целиком находится в состоянии гидродинамического равновесия, ее внутреннее ядро и мантия являются упругими. Согласно второй модели, Земля имеет неупругую мантию и негидростатическое начальное состояние, для которого обсуждаются эффекты конвекции в мантии и связанные с этим деформации границ. Эта последняя модель построена с целью получения величины периода свободной нутации ядра и глобального динамического сжатия Земли, что, в свою очередь, позволяет уточнить резонансные кривые при вычислении амплитуд суточных приливных волн.

Вероника Дехант отмечает, что сравнение теории и наблюдений в суточной приливной полосе частот демонстрирует недостаточность гидростатических моделей для точного предсказания частоты  $FCN$ -резонанса. Период  $FCN$  (свободной нутации ядра) в предположении гидростатического равновесия соответствует в инерциальной системе координат 460 суткам, в то время как его наблюдаемое значение равно 432 суткам. Это, как указывает Дехант, вынуждает заменять теоретические прогнозы приливных параметров в суточной полосе частот наблюдаемыми значениями, в особенности для приливных волн  $\psi_1$  и  $K_1$ , частоты которых близки к собственной частоте  $FCN$ .



Здесь необходимо отметить, что одной из первых работ, посвященных расчету резонансной кривой для суточных волн, является работа [Молоденский М.С. и Крамер М.В., 1961b].

Из параметров *PREM* и их радиальных производных Дехант вычисляла сжатия границ и их профили. При этом сжатия поверхностей в гидростатической и гидростатически не скомпенсированной Земле не совпадали. Полученные разностные сжатия добавлялись к гидростатическим сжатиям, и их сумма применялась совместно со средними сферическими значениями *PREM* для получения нового начального состояния модели Земли.

В настоящей работе задача определения резонансной кривой не ставилась, эта кривая была взята непосредственно из работы [Dehant V. et al., 1999] (глава 1).

Интересно, что полученные автором настоящей работы значения чисел Лява и амплитудных факторов для тестовых моделей Земли без океана оказались очень близки к значениям гидростатической модели (*DDW/H*), а полученные итоговые значения указанных величин лежат между гидростатической (*DDW/H*) и негидростатической (*DDW/NH*) моделями Дехант (раздел 2.1).

Для обеспечения сопоставимости результатов модели *DDW/NH* с наблюдениями авторы работы [Dehant V. et al., 1999] построили модель таким образом, чтобы сжатие ее ядра соответствовало наблюдаемой частоте *FCN*-резонанса (т.е. было на 5% выше, чем гидростатически равновесное значение). Также они потребовали, чтобы модель имела правильное динамическое сжатие, соответствующее наблюдаемой постоянной прецессии.

Поскольку в отличие от *1066A PREM* содержит океанический слой, а приливные вычисления подразумевают Землю без океана, реологические свойства океанического слоя *PREM* должны быть заменены таковыми для твердого упругого материала. Dehant [1986a, b; 1987 a, b, c] заменяла этот слой поверхностным слоем *1066A*, в то время как Wang [1991, 1994] изменял плотность двух поверхностных слоев таким образом, чтобы удерживать неизменной общую массу модели. Поскольку плотность поверхностного слоя у Ванга не соответствует сохранению масс, Дехант выбрала в качестве исходной модели для расчета приливов *PREM*, у которой плотность двух приповерхностных слоев была назначена таким образом, чтобы сделать общую массу модели равной массе Земли, принятой в соглашениях *IERS* (Международной службы вращения Земли). В настоящей работе в тестовых моделях океанический слой был заменен

заменен слоями модели 1066, а в рабочих моделях верхним слоем *PREM* с плотностью, соответствующей плотности океанической воды.

Влияние неупругости мантии на приливы и нутации учитывалось различными авторами по-разному: при помощи метода возмущений [Wahr and Bergen, 1986]; за счет введения комплексного вида уравнений для сферической Земли [Wang, 1994; Mathews et al., 1997], а также путем введения комплексной формы уравнений для эллипсоидальной модели Земли [Dehant, 1986b, 1987a; Dehant and Zschau, 1989]. В настоящей работе это влияние учтено путем предварительного пересчета скоростей сейсмических волн и упругих параметров с референц-периода модели строения Земли на периоды приливных волн при помощи логарифмической функции крипа. Достаточность подобного подхода обсуждается в разд. 1.4 настоящей работы.

В то же время, моделей, учитывающих частотную зависимость реологических параметров, существует достаточно много. Эти параметры и их факторы добротности описывались логарифмическими функциями частоты [Liu et al., 1976] (см. также [Kanamori and Anderson, 1977]) или степенной функцией крипа [Anderson and Minster, 1979], а также более сложными функциями частоты (см., например, [Zschau, 1983; Zschau and Wang, 1987]). В частности, Zschau [1983] предложил усеченное гауссово распределение времени релаксации напряжений. Его модель учитывает зависимость модулей сдвига от глубины и частоты. Значения модулей сдвига на приливных частотах получаются в этой модели из широкого спектра данных. Среди них можно найти амплитудные факторы и факторы добротности скоростей  $P$  и  $S$  сейсмических волн и нормальных мод, фактор добротности чандлеровского движения полюса и данные о постледниковых поднятиях.

В работах Dehant [1987c] и Dehant and Zschau [1989] даны численные оценки эффектов для неупругих моделей из работы Zschau [1983]. Приведенные в этих статьях таблицы показывают, что эффекты неупругости приводят к увеличению численных результатов определения  $\delta$  на 0.1% в суточной и полусуточной полосе и более чем на 0.2% для долгопериодных приливов. Получаемые вследствие неупругости сдвиги фаз очень малы (см. полное обсуждение в Dehant and Zschau [1989]). Более важен этот эффект для чисел Лява  $h$ ,  $l$  и  $k$ . Для 18.6-летнего зонального прилива он может достигать 7%.

Различные модели частотной зависимости  $Q$  приводят к различным приливным оценкам. Dehant [1987b] применила модель Zschau, поскольку она была построена для широкого диапазона частот. Однако затем Widmer et al. [1991] получили более свежие

ряды сейсмических значений  $Q$  для 300 с, и в работе [Dehant V. et al., 1999] уже были применены эти новые значения для показательной функции крипа с  $\alpha = 0.15$  (см. также полное обсуждение в Dehant and Defraigne [1997]).

### **Содержание работы по главам.**

Первая глава настоящей работы посвящена изложению теоретических основ моделирования земных приливов, а также описанию используемых при этом исходных данных.

Прежде всего выписана (разд. 1.1) система обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка, описывающая деформированное состояние неупругой сжимаемой гравитирующей оболочки с зависящими от широты геопотенциалом и плотностью. Плотность меняется с широтой на сферических поверхностях подобно соответствующему изменению средних радиусов пересекающих данную поверхность эллипсоидов, на которых указанные величины постоянны (см. [Spiridonov E.A., 2014] и [Спиридонов Е.А., 2016b]).

В разделе 1.2 приведен метод численного интегрирования полученной краевой задачи, а в разделе 1.3 показаны формулы для расчета нагрузочной и ньютоновской составляющих океанического гравиметрического эффекта. В разделе 1.3 также обсуждается учет резонансных эффектов, относительных и кориолисовых ускорений. Показан метод расчета прогнозных амплитудных факторов и сдвигов фаз для Земли с океаном.

Диссипация приливной энергии в мантии учтена согласно логарифмической функции крипа (разд.1.4) путем пересчета скоростей продольных и поперечных сейсмических волн с референц-периода 1 с на периоды суточных и полусуточных приливных волн. Кратко рассмотрены особенности учета диссипации для волн больших периодов.

В разделе 1.5 выписаны рекуррентные формулы для интегралов от полиномов и присоединенных полиномов Лежандра, предназначенные для разложения высот океанического прилива по сферическим функциям, рассмотрены вопросы введения в расчет океанического эффекта массовой коррекции и поправки за высоту станции. Альтернативному методу расчета этого эффекта при помощи функций Грина посвящен раздел 1.6.

В разделе 1.7 приведена краткая характеристика используемых в настоящей работе исходных данных, а именно двух моделей строения Земли (*PREM* и *IASP91*) и применяемых океанических приливных моделей.

Глава 2 содержит основные численные результаты работы. Здесь, прежде всего, обсуждаются полученные в работе значения чисел Лява  $h$ ,  $k$  и  $l$ , а также дельта-фактора  $\delta$ , определенные для 12 различных моделей, отличающихся друг от друга включением или исключением отдельных параметров. Проводится сравнение с работами других авторов. Следующие разделы посвящены в основном расчету океанического гравиметрического эффекта. В разделе 2.2 приводится общая характеристика полученного распределения океанического нагрузочного эффекта по земному шару, а затем (разд. 2.3) проводится сравнительный анализ полученных значений нагрузочных чисел Лява и рассчитанных по ним функций Грина как для разных вариантов моделей, так и для данных работ других авторов. Особо стоит выделить обсуждение значений этих чисел для эллипсоидальной вращающейся Земли. Раздел 2.4 посвящен сравнению результатов расчета нагрузочного эффекта, полученных при помощи программ *ATLANTIDA3.1\_2014* и *LOAD89* из пакета *ETERNA3.3*. Далее (разд. 2.5 и 2.6) получена оценка влияния на величину океанического гравиметрического эффекта особенностей строения коры и верхней мантии, а также диссипации. В разделе 2.7 оценивается величина неприливногo океанического нагрузочного эффекта. Раздел 2.8 посвящен результатам комплексного моделирования океанического гравиметрического эффекта. Проведена оценка совместного влияния на величину океанического гравиметрического эффекта широкой группы факторов, таких как диссипация, массовая коррекция, выбор океанической приливной модели и модели строения Земли, отказ от применения ближней зоны, учет эллиптичности Земли, относительных, кориолисовых и инерциальных ускорений. И, наконец, в разделе 2.9 показаны значения амплитудных дельта-факторов для Земли с океаном. В заключение этого раздела приведены карты прогнозных амплитудных дельта-факторов и сдвигов фаз для упругой Земли с океаном, вычисленные для территории Европы. В разделе 2.10 кратко обсуждаются возможности и отличительные особенности программы прогноза параметров земных приливов *ATLANTIDA3.1\_2014*, при помощи которой производилась большая часть вычислений. В этой программе реализована большая часть представленных в настоящей работе теоретические разработок.

Основной целью Главы 3 является подробное сравнение результатов моделирования земных приливов, получаемых, в частности, при помощи разработанной автором настоящей работы программы *ATLANTIDA3.1\_2014*, с данными наблюдений, произведенных на самых высокоточных гравиметрических инструментах, принадлежащих сети сверхпроводящих гравиметров Глобального геодинамического проекта (*GGP*). Таким образом, речь идет о качестве вычислений (прогноза), которое, в свою очередь, в основном определяется двумя факторами: успешностью моделирования нагрузочных и обычных дельта-факторов для Земли без океана, а также точностью океанической приливной модели. Последние разработки в этих двух направлениях собственно и лежат в основе программы *ATLANTIDA3.1\_2014* [Spiridonov et al., 2015].

В разделе 3.1 дано краткое описание исходных данных и показаны методы сравнительного анализа. Раздел 3.2 посвящен сравнению степени близости прогнозных значений, получаемых при помощи программ *ATLANTIDA3.1\_2014* и *PREDICT*, к данным наблюдений. Наконец, в разделе 3.3 показана большая эффективность значений амплитудных дельта-факторов для упругой Земли без океана, полученных в настоящей работе, по сравнению с их значениями, принятыми в модели *DDW/NH* [Dehant et al., 1999], при использовании одной и той же, наиболее современной, приливной океанической модели *FES2012*.

Далее проведена оценка влияния диссипации и массовой коррекции при расчете океанического гравиметрического эффекта, а также выбора модели строения Земли на степень близости прогнозных значений параметров земных приливов к наблюдениям. Данные наблюдений сравниваются здесь с результатами прогноза, получаемыми при применении океанической приливной модели *FES2012* без учета диссипации (раздел 3.4) и с массовой коррекцией (раздел 3.6). Также проведен сравнительный анализ результатов применения модели строения Земли *PREM* вместо *IASP91* (раздел 3.5). Как показали расчеты, проведенные при помощи программы *ATLANTIDA3.1\_2014*, зависимость нагрузочных чисел Лява от широты достаточно слабо сказывается на результатах вычисления океанического нагрузочного эффекта. Этому вопросу посвящен раздел 3.7. Значимый вклад широтной зависимости был выявлен только для островов в открытом океане и зон с высокими градиентами амплитуд океанического эффекта.

И наконец, раздел 3.8 диссертации посвящен комплексному учету факторов, влияющих на величину океанического гравиметрического эффекта, в связи со сравнением прогноза с данными наблюдений.

Наконец, в разделе 3.9 кратко рассмотрен вопрос о том, в какой мере в суточном диапазоне периодов выбор конкретного вида резонансной кривой способен влиять на близость прогнозных и наблюдаемых значений параметров земных приливов.

В Заключении обсуждаются основные результаты работы и приводятся ее общие выводы.

### **Благодарности:**

Автор искренне признателен и благодарен член.-корр. РАН Ю.Н. Авсюку за многолетнюю помощь и поддержку; член.-корр. РАН С.М. Молоденскому за ряд ценных замечаний, существенно улучшивших содержание настоящей работы; профессорам Бернару Дюкарму (Международный центр земных приливов (ICET), Лувенский католический университет, Бельгия) и Дункану Агнью (Калифорнийский университет, США), а также докторам Леониду Петрову (Астрогеоцентр НАСА, США) и Михаилу Эфроимскому (Военно-морская обсерватория США) за детальное обсуждение отдельных частей работы и сделанные ими конструктивные замечания. Отдельную благодарность автор выражает н.с. Виноградовой О.Ю. (ИФЗ РАН) за реализацию интерфейса программы и большую техническую помощь.

Работа посвящается светлой памяти моего близкого друга и коллеги Эрнста Ароновича Боярского, замечательного человека и ученого, создавшего многие прикладные программы в области гравиметрии, которыми пользуются до сих пор, и инициировавшего в том числе настоящую работу.

## ГЛАВА 1. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЗЕМНЫХ ПРИЛИВОВ

Настоящая глава посвящена изложению теоретических основ расчета параметров земных приливов, а также описанию используемых при этом исходных данных.

Прежде всего выписана (разд. 1.1) система обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка, описывающая деформированное состояние упругой сжимаемой гравитирующей сферической оболочки с зависящими от широты геопотенциалом и плотностью. Плотность меняется с широтой на сферических поверхностях подобно соответствующему изменению средних радиусов пересекающих данные поверхности эллипсоидов [Спиридонов Е.А., 2016b].

В разделе 1.2 приведен метод численного интегрирования полученной краевой задачи, а в разделе 1.3 приведены формулы для расчета нагрузочной и ньютоновской составляющих океанического гравиметрического эффекта. В разделе 1.3 также обсуждается учет при вычислении амплитудных дельта-факторов и чисел Лява для упругой Земли без океана резонансных эффектов, относительных и кориолисовых ускорений. Здесь же приведены формулы для расчета прогнозных амплитудных факторов и сдвигов фаз для Земли с океаном.

Диссипация приливной энергии в мантии учтена согласно логарифмической функции крипа (разд. 1.4) путем пересчета скоростей продольных и поперечных сейсмических волн с референц-периода 1 с на периоды суточных и полусуточных приливных волн. Кратко рассмотрены особенности учета диссипации для волн больших периодов.

В разделе 1.5 выписаны рекуррентные формулы для интегралов от полиномов и присоединенных полиномов Лежандра, предназначенные для разложения высоты океанического прилива по сферическим функциям, рассмотрены вопросы введения в расчет океанического эффекта массовой коррекции. Альтернативному методу расчета этого эффекта при помощи функций Грина посвящен раздел 1.6.

В разделе 1.7 приведена краткая характеристика используемых в данной работе исходных данных, а именно, двух моделей строения Земли (*PREM* и *IASP91*) и применяемых океанических приливных моделей.

## 1.1. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕУПРУГОЙ САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ СЖИМАЕМОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРЫ

В данном разделе получена система уравнений шестого порядка, описывающая состояние неупругой сжимаемой самогравитирующей эллипсоидальной вращающейся оболочки, и выписаны граничные условия. В этой части настоящая работа является прямым продолжением работ [Молоденский М.С., 1953; 1961].

Все приводимые далее выводы выполнены в сферической системе координат. Двухосная эллиптическая оболочка Земли представлена в виде сферических слоев с зависящим от широты потенциалом. Плотность  $\rho$  на сферических поверхностях зависит от ее среднего значения на эллипсоидах  $\rho_0$ , радиуса  $r$ , а также кошироты  $\theta$  и сжатия  $\varepsilon$  следующим образом:

$$\rho = \rho_0(1 - \varepsilon p_2). \quad (1.1.1)$$

Здесь  $p_2 = 1/3 - \cos^2 \theta$ . Легко показать, что распределение плотности по сферическим поверхностям вида (1.1.1) соответствует реальному потенциалу эллиптической оболочки с точностью до первого порядка по сжатию. Потенциал на сферических поверхностях (1.1.38) зависит от широты известным образом. Зависящими от широты полагаются также и три искомые функции  $H$ ,  $T$ ,  $R$ , через которые определяются обычные и нагрузочные числа Лява.

Внешний (или нагружающий) потенциал  $\omega$  является однородным гармоническим многочленом порядка  $n$ :

$$\Delta \omega = 0, \quad (1.1.2)$$

$$r \frac{\partial \omega}{\partial r} = n \omega. \quad (1.1.3)$$

Этот потенциал, в частности, вызывает появление добавочного потенциала  $V_i$ , возникающего вследствие смещения масс из-за деформации. Из (1.1.3) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\omega}{r^n} \right) = 0.$$

Координаты вектора смещения  $\vec{u}$  обозначим как  $u_r$ ,  $u_\theta$ ;  $u_\phi$ . Тогда составляющие тензора деформаций примут вид:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad u_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r};$$



$$2u_{\theta\phi} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi}; \quad 2u_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta};$$

$$2u_{\phi r} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}. \quad (1.1.4)$$

Объемное расширение равно:

$$\delta = \operatorname{div} \vec{u} = u_{rr} + u_{\theta\theta} + u_{\phi\phi}. \quad (1.1.5)$$

В приведенных обозначениях, уравнение, описывающее напряженное состояние упругой оболочки без учета относительных и кориолисовых ускорений, имеет вид:

$$\rho \left[ \operatorname{grad} \left( (\vec{u} \cdot \operatorname{grad} V) + \omega + V_i \right) - \delta \cdot \operatorname{grad} V \right] + \operatorname{grad} (\lambda \delta) + \nabla \hat{T} = 0. \quad (1.1.6)$$

Это уравнение аналогично уравнениям (1.15) из работы [Молоденский М.С., 1953]. В дальнейшем в правой части уравнения (1.1.6) также будут учтены относительные и кориолисовы ускорения. Здесь  $\hat{T}$  - тензор напряжений, а  $\lambda$  и  $\mu$  - параметры Ламе.

$$\hat{T}_{rr} = 2\mu \cdot u_{rr}; \quad \hat{T}_{\theta\theta} = 2\mu \cdot u_{\theta\theta}; \quad \hat{T}_{\phi\phi} = 2\mu \cdot u_{\phi\phi};$$

$$\hat{T}_{\theta\phi} = \mu 2u_{\theta\phi}; \quad \hat{T}_{r\theta} = \mu 2u_{r\theta}; \quad \hat{T}_{\phi r} = \mu 2u_{\phi r}. \quad (1.1.7)$$

Дивергенция тензора  $\nabla \hat{T}$  (1.1.7) в сферических координатах равна:

$$\nabla \hat{T} = \nabla_r \cdot \hat{T} \cdot \hat{e}_r + \nabla_\theta \cdot \hat{T} \cdot \hat{e}_\theta + \nabla_\phi \cdot \hat{T} \cdot \hat{e}_\phi =$$

$$= \left( \frac{\partial \hat{T}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \hat{T}_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \hat{T}_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{2\hat{T}_{rr}}{r} + \frac{\hat{T}_{\theta r}}{r} \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{r} (\hat{T}_{\theta\theta} + \hat{T}_{\phi\phi}) \right) \cdot \hat{e}_r +$$

$$+ \left( \frac{\partial \hat{T}_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \hat{T}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \hat{T}_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{3\hat{T}_{r\theta}}{r} + \frac{\hat{T}_{\theta\theta}}{r} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\hat{T}_{\phi\theta}}{r} \operatorname{ctg} \theta \right) \cdot \hat{e}_\theta +$$

$$+ \left( \frac{\partial \hat{T}_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \hat{T}_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \hat{T}_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{3\hat{T}_{r\phi}}{r} + \frac{2\hat{T}_{\theta\phi}}{r} \operatorname{ctg} \theta \right) \cdot \hat{e}_\phi. \quad (1.1.8)$$

Решение уравнений (1.1.6) будем искать в виде:

$$u_r = H \cdot \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right),$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{T}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \quad (1.1.9)$$

$$u_\phi = T \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right).$$

Помимо этого, введем следующие обозначения:

$$V_i + \omega = R \frac{\bar{\omega}}{r^n}; \quad \bar{\omega} = \frac{\omega \cdot a^{n-1}}{g_0}.$$

В (1.1.9) входят три вспомогательных функции глубины и широты: функция  $H$ , характеризующая радиальное смещение,  $T$  – тангенциальное смещение и  $R$  – изменение потенциала в результате деформации. Значения этих функций на поверхности Земли, как было сказано выше, фактически представляют собой искомые числа Лява.

Первый член в выражении для  $u_\theta$  необходим для того, чтобы объемное расширение не зависело от производных внешнего потенциала по координатам.

С учетом (1.1.9) и (1.1.4) объемное расширение (1.1.5) равно:

$$\delta = (f - \varphi) \cdot \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \quad (1.1.10)$$

где  $f = H' + \frac{2}{r} \cdot H - \frac{n(n+1)}{r^2} \cdot T$ , а  $\varphi = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)$ . При выводе (1.1.10) также

было применено следующее равенство:

$$\Delta \left( \frac{\omega}{r^n} \right) = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \right] = -\frac{n(n+1)}{r^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \quad (1.1.11)$$

Оно следует из (1.1.2) и (1.1.3) и понадобится при проведении дальнейших расчетов. Штрихом здесь и далее обозначена частная производная по радиусу. Подробный вывод (1.1.10) можно найти в Приложении А, следующем в конце данного раздела.

Введем вектор  $\vec{U}$ , равный

$$\vec{U} = \rho \left[ \text{grad} \left( [\vec{u} \cdot \text{grad} V] + \omega + V_i \right) - \delta \cdot \text{grad} V \right] + \text{grad} (\lambda \delta).$$

Тогда уравнение (1.1.6) будет иметь вид:

$$\vec{U} + \nabla \hat{T} = 0. \quad (1.1.12)$$

Поскольку невозмущенный потенциал  $V$  в настоящей работе полагается зависящим только от  $r$  и  $\theta$ , то

$$\vec{u} \cdot \text{grad} V = u_r \cdot V' + u_\theta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Теперь, с учетом (1.1.9) и (1.1.10), можно легко получить координаты вектора  $\vec{U}$ :

$$U_r = \left[ \rho \cdot (HV' + R)' - \rho \cdot (f - \varphi) \cdot V' + (\lambda(f - \varphi))' \right] \cdot \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \rho \cdot \left( \frac{T}{r^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)' \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right);$$

$$U_\theta = \left[ \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (HV' + R) - \frac{\rho}{r} f \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [(f - \varphi)] \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) +$$

$$+ \left[ \rho \left( HV' + R + \frac{T}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right) + \lambda \cdot (f - \varphi) \right] \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{\rho \cdot T}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \cdot \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \quad (1.1.13)$$

$$U_\varphi = \left[ \rho (HV' + R) + \lambda (f - \varphi) \right] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{\rho T}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right).$$

Здесь отброшены произведения производных от искомым функций и потенциала по кошироте, т.е. члены второго порядка по сжатию.

Составляющие тензора напряжений  $\hat{T}$  (1.1.7) после подстановки в (1.1.4) выражений (1.1.9) равны:

$$\hat{T}_{rr} = 2\mu \cdot H' \cdot \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right);$$

$$\hat{T}_{\theta\theta} = \left[ \frac{2\mu}{r} H - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu}{r^2} T \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right);$$

$$\hat{T}_{\varphi\varphi} = \left[ \frac{2\mu H}{r} - \frac{2\mu}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu T}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu T}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right);$$

$$\hat{T}_{r\theta} = \left[ \frac{\mu}{r} \tau \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \mu T' - \frac{2\mu}{r} T + \mu H \right] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right);$$

$$\hat{T}_{r\varphi} = \left[ \mu T' - \frac{2\mu}{r} T + \mu H \right] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right);$$

$$\hat{T}_{\theta\varphi} = - \frac{2\mu T}{r^2 \sin \theta} \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu T}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \quad (1.1.14)$$

$$\text{Здесь } \tau = - \frac{\partial T'}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial H}{\partial \theta}.$$

Первое слагаемое  $\left[ \frac{\mu}{r} \tau \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right)$  в выражении для  $\hat{T}_{r\theta}$  является следствием зависимости искомым функций на сферических поверхностях от широты. Сдвиговое по своей природе, это напряжение действует по нормали к сферическим поверхностям (см. также выражение (1.1.27)), не приводя в то же время к изменению объемного расширения (1.1.10). Анализ показывает, что данное напряжение зависит от первой производной геопотенциала по широте и производных от плотности и модуля сдвига по радиусу. (Вывод функции  $\tau$  содержится в приложении D.) Строго говоря, это

напряжение полностью независимо от вводимых ниже напряжений  $N$  (1.1.28) и  $M$  (1.1.29). Мы воспользуемся этим в дальнейшем при введении переменной (1.1.28).

Необходимые производные от составляющих тензора (1.1.14) будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{T}_{rr}}{\partial r} &= [2\mu H'' + 2\mu' H'] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\ \frac{\partial \hat{T}_{r\theta}}{\partial \theta} &= \left[ \frac{\mu}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2\mu}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \mu \Gamma' - \frac{2\mu}{r} T + \mu H \right] \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\ \frac{\partial \hat{T}_{r\varphi}}{\partial \varphi} &= \left[ \mu \Gamma' - \frac{2\mu}{r} T + \mu H \right] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\ \frac{\partial \hat{T}_{r\theta}}{\partial r} &= \left[ \mu \tau' + \left( \mu' - \frac{\mu}{r} \right) \cdot \tau \right] \frac{1}{r} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \mu' \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) + \mu \left( T'' - \frac{3}{r} T' + \frac{4}{r^2} T + H' - \frac{1}{r} H \right) \right] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\ \frac{\partial \hat{T}_{\theta\theta}}{\partial \theta} &= \left[ 2\mu \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial^3 T}{\partial \theta^3} \right] \frac{1}{r} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ 2\mu H - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ &+ \left[ 2\mu \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu}{r^2} T \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\ \frac{\partial \hat{T}_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} &= - \frac{2\mu \Gamma}{r^2 \sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu \Gamma}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\ \frac{\partial \hat{T}_{\theta\varphi}}{\partial \theta} &= \left[ \frac{2\mu \Gamma}{r^2 \sin \theta} \operatorname{ctg}^2 \theta - \frac{2\mu}{r^2 \sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{2\mu \Gamma}{r^2 \sin^3 \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ &+ \left[ - \frac{4\mu \Gamma}{r^2 \sin \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{2\mu}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu \Gamma}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\ \frac{\partial \hat{T}_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} &= \frac{2\mu \Gamma}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ - \frac{2\mu}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{2\mu H}{r} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu \Gamma}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\ \frac{\partial \hat{T}_{r\varphi}}{\partial r} &= \left[ \mu \Gamma'' - \frac{3\mu}{r} T' + \frac{4\mu}{r^2} T + \mu H' - \frac{\mu}{r} H + \mu' \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) \right] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \end{aligned}$$

Здесь также отброшены произведения производных по  $\theta$ , представляющие собой величины второго порядка малости по сжатию.

Составляющие дивергенции тензора напряжений примут вид (см. Приложение В):

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_r &= \left[ 2\mu' H' + \frac{\mu(T' - H) \cdot n(n+1)}{r^2} + 2\mu f' + \frac{2\mu}{r} \varphi + \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cdot \tau \right) \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \\ &+ \left[ 2\mu \frac{\partial H}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\theta} \hat{T} &= \left[ \mu T'' + 2\mu f - \mu H' + \mu' \left( T' - \frac{2T}{r} + H \right) - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\
&+ \left[ \frac{2}{r^2} \left( \mu \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{(\mu\tau)'}{r} + \frac{2\mu\tau}{r^2} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2\mu}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\
\nabla_{\varphi} \hat{T} &= \left[ \mu T'' + 2\mu \cdot f - \mu H' + \mu' \cdot \left( T' + H - \frac{2T}{r} \right) - \frac{4\mu}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\
&+ \left[ \frac{2\mu}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right).
\end{aligned}$$

(1.1.15)

Подставляя (1.1.13) и (1.1.15) в (1.1.12) и приравнивая члены, стоящие при одинаковых производных от  $\left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right)$  (можно легко показать, что эта процедура корректна

хотя бы вследствие того, что функция  $\left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right)$  и ее производная по кошироте не выражаются друг через друга линейно), после перегруппировки слагаемых имеем следующую систему:

$$\begin{aligned}
2\mu' H' + \frac{\mu(T' - H) \cdot n(n+1)}{r^2} + 2\mu f' + \frac{2\mu}{r} \varphi + \rho(HV' + R)' - \rho(f - \varphi)V' + (\lambda(f - \varphi))' + \\
+ \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cdot \tau \right) = 0,
\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

$$\rho(HV' + R) + \lambda(f - \varphi) + \mu T'' + 2\mu f - \mu H' + \mu' \left( T' - \frac{2T}{r} + H \right) + \rho \frac{T}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0, \tag{1.1.17}$$

$$\rho(HV' + R) + \lambda(f - \varphi) + \mu T'' + 2\mu f - \mu H' + \mu' \left( T' - \frac{2T}{r} + H \right) - \frac{4\mu}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \tag{1.1.18}$$

$$\frac{\rho T}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \tag{1.1.19}$$

$$2\mu \frac{\partial H}{\partial \theta} + \rho r^2 \left( \frac{T}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)' = 0,$$

(1.1.20)

$$\frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (HV' + R) - \frac{\rho}{r} (f - \varphi) \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (f - \varphi) + \frac{2\mu}{r^2} \left( \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{(\mu\tau)'}{r} + \frac{2\mu\tau}{r^2} = 0. \quad (1.1.21)$$

Уравнение (1.1.19) позволяет исключить из остальных уравнений производную  $\partial T / \partial \theta$ :

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = - \left( \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \cdot T. \quad (1.1.22)$$

Численный анализ показал, что уравнения (1.1.17) и (1.1.18) приводят к одинаковым результатам вычисления дельта-факторов с точностью почти до членов второго порядка по сжатию, несмотря на то, что сами эти уравнения отличаются на величины первого порядка по сжатию. В дальнейшем мы будем рассматривать полусумму этих уравнений (1.1.24), которая приводит в дальнейшем к уравнению (1.1.36). Применение полусуммы уравнений (1.1.17) и (1.1.18) можно обосновать следующим образом. Левые части этих уравнений представляют собой ортогональные (в направлении кошироты и долготы) составляющие одной и той же тангенциальной силы. При вычислении чисел Лява мы, строго говоря, работаем с модулем этой силы (тангенциального напряжения), а не с ее проекциями на оси. В то же время, если учесть, что функции  $\rho \frac{T}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \delta_1$  и  $-\frac{4\mu}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = \delta_2$  являются членами первого порядка по сжатию, то, отбрасывая члены второго порядка по сжатию, для модуля вектора с координатами  $(A + \delta_1; A + \delta_2)$ , где

$$A = \rho(HV' + R) + \lambda(f - \varphi) + \mu T'' + 2\mu f - \mu H' + \mu' \left( T' - \frac{2T}{r} + H \right),$$

имеем:

$$\sqrt{(A + \delta_1)^2 + (A + \delta_2)^2} \approx \sqrt{2} \left( A + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \right).$$

Другой вопрос, что при вычислении составляющих тангенциальных напряжений функции  $\delta_1$  и  $\delta_2$  должны учитываться в уравнении (1.1.36) отдельно. Однако, как мы увидим из приведенных ниже оценок, получаемые при этом изменения настолько малы, что ими вполне можно пренебречь при обработке результатов самых высокоточных современных измерений.

Обсудим величины разностей значений амплитудных дельта-факторов и чисел Лява второго порядка, рассчитанных по указанной полусумме и отдельно по уравнениям (1.1.17) и (1.1.18) на примере полусуточных волн. Эти разности определяются анизотропией свойств оболочки, т.е. различиями в изменениях плотности и потенциала в широтном и долготном направлениях (эллиптичность), а также действию силы инерции и Кориолиса.

Для проведения раздельного расчета по уравнениям (1.1.17) и (1.1.18) необходимо в уравнении (1.1.36) заменить слагаемое  $-\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\psi$  (в скобках при  $T/n$ ) на

$$-\frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}\psi - K \cos 2\theta \text{ и } -\frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}\psi - K \cos^2 \theta \text{ соответственно. Здесь}$$

$$K = 4\rho \left[ \frac{4\pi G}{5} \left( \frac{I_2}{r^3} + r^2 I_3 + \frac{r^2 \Omega^2}{2} \right) \right],$$

$G$  – гравитационная постоянная,  $\Omega$  – угловая скорость вращения Земли, а значения интегралов  $I_2$ ,  $I_3$  приведены в формулах (1.1.39). Помимо этого, необходимо также учесть различия в указанных двух направлениях (по кошироте и долготе) сумм относительных и кориолисовых ускорений (раздел 1.3). Если этого не сделать, то разности на экваторе возрастут почти на порядок. При расчете по уравнению (1.1.17) слагаемое  $-2\rho r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$  (в скобках при  $T/n$ ) в уравнении (1.1.36) необходимо заменить на  $-4\rho r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$ , а при расчете по (1.1.18) его следует занулить (полная компенсация относительных и кориолисовых ускорений).

Полученные в результате указанных действий отклонения значений амплитудного дельта-фактора от среднего варианта (полусуммы уравнений (1.1.17) и (1.1.18), от результатов, полученных по (1.1.17) и (1.1.18) в отдельности) плавно нарастают от полюса к экватору, принимая значения от нуля до  $1,25 \cdot 10^{-5}$  соответственно ( $6,21 \cdot 10^{-6}$  – на широте  $45^\circ$ ). Причем, широтные зависимости амплитудных факторов и чисел Лява, полученные по (1.1.17) и (1.1.18), полностью симметричны относительно зависимости, рассчитанной по (1.1.14). Для чисел Лява  $k$ ,  $h$ , и  $l$  указанные отклонения на экваторе равны:  $2,78 \cdot 10^{-5}$ ,  $5,42 \cdot 10^{-5}$  и  $7,21 \cdot 10^{-6}$ , что составляет  $9,3 \cdot 10^{-3} \%$ ,  $8,9 \cdot 10^{-3} \%$  и  $8,4 \cdot 10^{-3} \%$  от величины этих чисел. На широте  $45^\circ$  те же отклонения по абсолютной величине составляют:  $1,39 \cdot 10^{-5}$ ,  $2,71 \cdot 10^{-5}$  и  $3,62 \cdot 10^{-6}$ . Приведенные здесь различия почти на полтора порядка величины меньше исследуемых в настоящей работе широтных

изменений. Таким образом, изменением амплитудных факторов и чисел Лява, связанных с анизотропией свойств оболочки, можно полностью пренебречь.

Из (1.1.16) – (1.1.19) имеем первые два необходимых уравнения:

$$-(\lambda(f - \varphi) + 2\mu H')' = \rho(HV' + R)' - \rho V'f + \\ + \frac{4\mu}{r} \left( H' - \frac{H}{r} \right) - \frac{n \cdot (n+1)}{r^2} \mu \cdot \left( T' + H - \frac{4T}{r} \right) + \left( \rho V' + \frac{2\mu}{r} \right) \cdot \varphi + \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta \cdot \tau \right); \quad (1.1.23)$$

$$-\left[ \mu \cdot \left( T' + H - \frac{2}{r} T \right) \right]' = \rho(HV' + R) + \lambda f + \frac{2\mu}{r} \left( 2H + T' - \frac{n^2 + n + 1}{r} T \right) - (2\mu + \lambda) \varphi. \quad (1.1.24)$$

Здесь

$$\varphi = \left[ -\frac{\rho}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right] \frac{T}{r^2} = -\psi \frac{T}{r^2}, \quad (1.1.25)$$

$$\text{где } \psi = \frac{\rho}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right).$$

Выражение (1.1.25) получено путем подстановки равенства (1.1.22) в выражение для  $\varphi$ , следующее после равенства (1.1.10).

Третье уравнение получается из уравнения Пуассона:

$$\Delta V_i = 4\pi G \cdot \text{div}(\rho u).$$

При этом

$$\Delta V_i = \Delta \left( R \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) = \left( R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{n(n+1)}{r^2} R + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial R}{\partial \theta} \right) \right) \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right),$$

а

$$\text{div}(\rho u) = \rho' u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} u_\theta + \rho \delta.$$

Приравнявая члены при одинаковых производных от внешнего потенциала и учитывая (1.1.19) и (1.1.1), получим:

$$R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 4\pi G \left[ \rho(f - \varphi) + \rho' H - 3\varepsilon \rho p_2 \frac{T}{r^2} \right]. \quad (1.1.26)$$

Система уравнений (1.1.23) – (1.1.26) очень похожа на аналогичную систему из работы [М.С. Молоденский, 1953] и отличается от нее только пятью членами, содержащими  $\varphi$ ,  $\tau$  и  $\varepsilon$ . Появление этих членов связано с зависимостью от широты на сферических поверхностях потенциала и плотности и, как следствие, искомым функций  $H$ ,  $T$ , и  $R$ .



Давление на рассматриваемых сферических поверхностях, с учетом (1.1.14), будет равно:

$$P = P_0 + (\lambda\delta + \hat{T}_{rr}) + \hat{T}_{r\theta} + \hat{T}_{r\phi} = P_0 + (2\mu H' + \lambda(f - \varphi)) \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left( \frac{\mu}{r} \tau \right) \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \mu T' - \frac{2\mu}{r} T + \mu H \right] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \mu T' - \frac{2\mu}{r} T + \mu H \right] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \quad (1.1.27)$$

Из уравнений (1.1.23) – (1.1.26) можно получить 6 уравнений первого порядка путем введения следующих переменных:

$$N = (\lambda + 2\mu)H' + \frac{2\lambda}{r} H - \lambda \left( \varphi + \frac{n(n+1)}{r^2} T \right), \quad (1.1.28)$$

$$M = r^2 \mu \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right), \quad (1.1.29)$$

$$L = r^2 (R' - 4\pi G \rho H). \quad (1.1.30)$$

Эти переменные имеют тот же смысл, что и в работе [Молоденский М.С., 1961]. а именно:  $M$  и  $N$  – тангенциальная и нормальная (к поверхности сферы) компоненты напряжения,  $L$  – функция, связанная с изменением потенциала в результате деформации сферы,  $G$  – гравитационная постоянная. Напряжение  $N$  (1.1.28) в силу сказанного при обсуждении равенств (1.1.14) ведет себя независимо от входящего в (1.1.27) напряжения, содержащего функцию  $\tau$ , и независимо входит в граничное условие (1.1.43).

При решении системы (1.1.23) – (1.1.26) были приняты следующие нормировки: за единицу длины принят средний радиус Земли, за единицу плотности – ее средняя плотность, а за единицу ускорения – ускорение силы тяжести на поверхности. В эти же единицы были пересчитаны постоянные Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$  и гравитационная постоянная. Кроме того, в связи с быстрым ростом искомых функций по мере увеличения порядка  $n$  и в связи с необходимостью дальнейшего расчета не только обычных, но и нагрузочных чисел Лява, было предпринято следующее нормирование относительно порядка искомых функций [Перцев Б.П., 1976]:

$$\begin{aligned} H &= (2n+1) \bar{H} / r^n, & T &= \bar{T} / r^n, & R &= \bar{R} / r^n, \\ L &= (n+1) \bar{L} / r^n, & M &= n \bar{M} / r^n, & N &= n(2n+1) \bar{N} / r^n. \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

В результате, интегрируемая система 6 порядка принимает вид:

$$\bar{H}' = \left( n - 2 \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{1}{r} \bar{H} + \left[ n(n+1) - \psi \right] \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{r^2} \bar{T} + \frac{n}{\lambda + 2\mu} \bar{N};$$

(1.1.32)

$$\bar{T}' = -(2n+1) \bar{H} + \frac{1}{r} (n+2) \bar{T} + \frac{n}{r^2 \mu} \bar{M}; \quad (1.1.33)$$

$$\bar{R}' = 4\pi G \rho (2n+1) \bar{H} + \frac{n}{r} \bar{R} + \frac{1}{r^2} (n+1) \bar{L}; \quad (1.1.34)$$

$$\bar{L}' = 4\pi G \rho \left( \frac{\psi - 3\varepsilon p_2}{n+1} - n \right) \bar{T} + n \bar{R} + \frac{n}{r} \bar{L}; \quad (1.1.35)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}' = & - \left[ 2\mu r \frac{2\mu + 3\lambda}{\lambda + 2\mu} + \rho r^2 V' \right] \frac{2n+1}{n} \bar{H} + \\ & + \left[ n(n+1) \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} + 2\mu(n^2 + n - 1) - \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \psi - 2\rho r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta \right] \frac{1}{n} \bar{T} \\ & - \frac{\rho r^2}{n} \bar{R} + \frac{n}{r} \bar{M} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} r^2 (2n+1) \bar{N}; \end{aligned} \quad (1.1.36)$$

$$\begin{aligned} N' = & \left[ \frac{4}{r^2} \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} + \frac{4}{r} \rho V' + \frac{2\mu\psi}{r^2} - 2\rho\Omega^2 - 4\rho\Omega^2 \cos^2 \theta \right] \frac{1}{n} \bar{H} - \\ & - \left[ \left( \rho V' + \frac{2}{r} \mu + \frac{4}{r} \frac{\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) \left[ (n+1) - \frac{\psi}{n} \right] + \left( \frac{\rho}{2\mu} \right)' \cdot \left( \frac{2\mu}{\rho} \right) \frac{\mu\psi}{n} \right] \frac{1}{r^2} \frac{1}{2n+1} \bar{T} - \frac{\rho}{r^2} \frac{n+1}{n(2n+1)} \bar{L} + \\ & + \frac{1}{r^4} \frac{n(n+1)}{2n+1} \bar{M} + \frac{1}{r} \left[ n - 4 \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right] \bar{N} \end{aligned} \quad (1.1.37)$$

Уравнения (1.1.32), (1.1.33) и (1.1.34) получаются непосредственно из (1.1.28), (1.1.29) и (1.1.30) путем выражения производных искомых функций. Для получения уравнения (1.1.35) необходимо из (1.1.30) выразить  $R'$  и  $R''$  и подставить в (1.1.26). Для вывода уравнения (1.1.36) прежде всего осуществляется подстановка (1.1.29) в (1.1.24), затем раскрываются выражения для функций  $f$  и  $\varphi$  (1.1.25), а после этого применяются ненормированные варианты уравнений (1.1.32) и (1.1.33) для исключения производных по радиусу от функций  $H$  и  $T$ . Наконец, чтобы получить (1.1.37), необходимо подставить в левую часть (1.1.23) ее выражение, полученное из (1.1.28), затем, заменить  $H'$  ненормированным уравнением (1.1.32). После группировки слагаемых,

нормировки и применения (1.1.41) придем к (1.1.37). Более подробно вывод этих уравнений дан в Приложении С, в конце данного раздела.

Входящие в уравнения (1.1.36) и (1.1.37) слагаемые  $-2\rho r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$ , в скобках при  $\frac{1}{n} \bar{T}$ , и  $-4\rho \Omega^2 \cos^2 \theta$ , в скобках при  $\frac{1}{n} \bar{H}$ , выражают поправки за относительные и кориолисовы ускорения для полусуточных волн, вычисленные в работе [Spiridonov E.A., 2016]. Также их вывод показан в разд. 1.3. Для суточных волн эти поправки соответственно будут иметь вид:  $-\rho r^2 \Omega^2 (1 - 4 \cos^2 \theta)$  и  $-\rho \Omega^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$ . Здесь  $\Omega$  – средняя угловая скорость вращения Земли. Из приведенных выражений видно, что обсуждаемые поправки для суточных и полусуточных волн отличаются лишь на функцию радиуса, а на поверхности Земли – на константу. Таким образом, форма кривых, выражающих широтные зависимости амплитудных дельта-факторов на поверхности Земли, вызванных добавлением относительных и кориолисовых ускорений, должна полностью совпадать, а сами кривые отличаться лишь на константу.

Входящий в (1.1.25) и систему (1.1.32)–(1.1.37) невозмущенный геопотенциал  $V$  на сферических поверхностях равен [Буллен К.Е., 1975]:

$$V = 4\pi G \left[ \frac{1}{r} I_1 + \int_{r_x}^a \rho q dq + \frac{p_2}{5} \left( \frac{1}{r^3} I_2 + r^2 I_3 \right) \right] + \frac{r^2 \Omega^2 (2 + 3p_2)}{6}, \quad (1.1.38)$$

где, как и в (1.1.1),  $p_2 = \frac{1}{3} - \cos^2 \theta$ , и

$$I_1 = \int_0^{r_x} \rho q^2 dq; \quad I_2 = \int_0^{r_x} \rho \frac{d(\varepsilon q^5)}{dq} dq; \quad I_3 = \int_{r_x}^a \rho \frac{d\varepsilon}{dr} dr. \quad (1.1.39)$$

$$V' = 4\pi G \left[ -\frac{I_1}{r^2} + \frac{p_2}{5} \left( -\frac{3}{r^4} I_2 + 2r I_3 \right) \right] + \frac{r \Omega^2 (2 + 3p_2)}{3};$$

(1.1.40)

$$\rho V'' - \frac{2}{r} \rho V' = -\frac{2\mu\psi}{r^2} + 2\rho \Omega^2 - 4\pi G \rho^2 - \frac{4}{r} \rho V'; \quad (1.1.41)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} = -4\pi G \cdot \frac{6p_2}{5} \left( \frac{1}{r^3} I_2 + r^2 I_3 \right) - 3r^2 \Omega^2 p_2.$$

(1.1.42)

Изменение сжатия и его производной с глубиной рассчитывалось при помощи уравнения Клеро в приближении Радо. Это приближение справедливо с точностью до второго порядка по сжатию.

Если порядок  $n \geq 2$ , граничные условия на поверхности сферы радиуса  $a$  при расчете чисел Лява для упругой Земли без океана будут следующими [Перцев Б.П., 1976] (приводятся без нормировки):

$$N = 0, \quad (1.1.43)$$

$$M = 0, \quad (1.1.44)$$

$$L = (2n+1)a^2 g_0 - \frac{n+1}{a} R, \quad (1.1.45)$$

где  $g_0 = -V'(a)$  – ускорение силы тяжести на поверхности Земли. При расчете нагрузочных чисел Лява условие (1.1.43) заменяется условием:

$$N = -\frac{g_0^2}{3n} r_m^{n+1}.$$

Еще три условия определены на границе ядро-мантия:

$$L - r(n + rv)R + 4\pi G \rho_i r^2 H = 0, \quad (1.1.46)$$

$$M = 0, \quad (1.1.47)$$

$$N + \rho_i (R + V'H) = 0. \quad (1.1.48)$$

Здесь  $\rho_i$  – плотность ядра на границе с мантией,  $G$  – гравитационная постоянная,  $r_m$  – радиус мантии. Функция  $V$  вычисляется согласно уравнению [Молоденский М.С., 1953]:

$$v' + v^2 + \frac{2(n+1)}{r} v + 4\pi G \frac{\rho'}{V'} = 0.$$

Интегрирование этого уравнения ведется от центра Земли до границы ядро-мантия.

Значения плотности, ускорения свободного падения и потенциала в условиях (1.1.43) – (1.1.48) также полагаются зависящими от широты согласно (1.1.1) и (1.1.40). Предварительно условия (1.1.43) – (1.1.48) также нормировались согласно (1.1.31).

В случае  $n = 0$ , при расчете нагрузочных чисел Лява, от исходной системы уравнений (1.1.32) – (1.1.37) остается только два уравнения (1.1.32) и (1.1.37).

Интегрирование ведется от поверхности оболочки, на которой  $N = -\frac{1}{3}(\bar{g}_0^m)^2 \bar{r}_m$ , до поверхности внутреннего несжимаемого ядра, где выполняется второе граничное условие  $H = 0$ .

В случае  $n=1$  решается задача (1.1.32) – (1.1.37). При этом, условия на каждой из границ не являются независимыми. В связи с этим, одно из условий (1.1.43) – (1.1.45) (мы выбрали условие (1.1.45)) заменялось независимым условием  $\bar{R}_0 = \bar{g}_0^m \bar{r}_m$ . Подробнее особенности вычисления нагрузочных чисел Лява порядка 0 и 1 обсуждаются в работе [Vinogradova O. Yu, Spiridonov E. A., 2013].

В отличие от работ [Молоденский С.М., 1977, 1984] и [Dehant V. et al., 1999], получаемые в ходе интегрирования приведенной здесь системы (1.1.32) – (1.1.37) искомые функции  $H$ ,  $T$  и  $R$  не зависят от внешнего потенциала, как и в работах [Молоденский М.С., 1953, 1962].

### Приложение А: Вывод выражения для объемного расширения

По определению объемное расширение равно (1.1.5):

$$\delta = \text{div} \vec{u} = u_{rr} + u_{\theta\theta} + u_{\phi\phi}. \quad (\text{A1})$$

Подставляя (1.1.9) в (1.1.4), имеем

$$u_{rr} = H' \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \quad (\text{A2})$$

$$u_{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{T}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{H}{r} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \quad (\text{A3})$$

$$u_{\phi\phi} = \frac{T}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \text{ctg} \theta \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{T}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{H}{r} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \quad (\text{A4})$$

Первое слагаемое в выражении для  $u_\theta$  (1.1.9) обеспечивает независимость  $u_{\theta\theta}$  и  $\delta$  от слагаемого, содержащего производную от потенциала по кошироте  $\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right)$ .

Подставляя (A2) – (A4) в (A1), после группировки слагаемых получим

$$\delta = \left[ H' + \frac{2H}{r} - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{T}{r^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \right] \quad (\text{A5})$$

Учитывая, что

$$\Delta \left( \frac{\omega}{r^n} \right) = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \right] = -\frac{n(n+1)}{r^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right)$$

(выражение (1.1.11)), окончательно имеем:

$$\delta = \left[ H' + \frac{2H}{r} - \frac{n(n+1)}{r^2} T - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) = (f - \varphi) \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \quad (\text{A6})$$

$$\text{где } f = H' + \frac{2}{r} \cdot H - \frac{n(n+1)}{r^2} \cdot T, \text{ а } \varphi = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right).$$

**Приложение В:** Расчет составляющих тензора напряжений  $\nabla \hat{T}_r$ ,  $\nabla \hat{T}_\theta$ ,  $\nabla \hat{T}_\varphi$

1. Вычисление вертикальной составляющей  $\nabla \hat{T}_r$ .

Согласно (1.1.8)

$$\nabla \hat{T}_r = \frac{\partial \hat{T}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{T}_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \hat{T}_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\hat{T}_{rr}}{r} + \frac{\hat{T}_{r\theta}}{r} \text{ctg} \theta - \frac{1}{r} (\hat{T}_{\theta\theta} + \hat{T}_{\varphi\varphi}). \quad (\text{B.1})$$

После подстановки в (B.1) составляющих тензора напряжений  $\hat{T}$  (1.1.14) и их производных (следующие за (1.1.14) формулы), имеем:

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_r &= [2\mu H'' + 2\mu' H'] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ &+ \left[ \frac{\mu T'}{r^2} - \frac{2\mu}{r^3} T + \frac{\mu H}{r^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \mu T' - \frac{2\mu}{r} T + \mu H \right] \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{4\mu}{r} H' \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ &+ \left[ \frac{\mu}{r^2} \tau \cdot \text{ctg} \theta \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{\mu T'}{r^2} \text{ctg} \theta - \frac{2\mu}{r^3} \text{ctg} \theta \cdot T + \frac{\mu H}{r^2} \text{ctg} \theta \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ &+ \left[ -\frac{2\mu}{r^2} H + \frac{2\mu}{r^3} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{2\mu}{r^3} T \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ &+ \left[ -\frac{2\mu H}{r^2} + \frac{2\mu}{r^3} \text{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{2\mu T}{r^3} \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{2\mu T}{r^3 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \end{aligned}$$

Перегруппировка слагаемых приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_r &= \left[ 2\mu H'' + 2\mu' H' + \frac{4\mu}{r} H' - \frac{4\mu}{r^2} H + \frac{2\mu}{r^3} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \tau \cdot \text{ctg} \theta \right) \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ &+ \left[ \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ &+ \left[ \mu T' - \frac{4\mu}{r} T + \mu H \right] \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{1}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \right]. \quad (\text{B2}) \end{aligned}$$

Учитывая в последнем слагаемом (A2.2) выражение (1.1.11), а также вводя обозначения  $f = H' + \frac{2}{r}H - \frac{n(n+1)}{r^2}T$  и  $\varphi = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)$ , для  $\nabla \hat{T}_r$  окончательно

имеем:

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_r = & \left[ 2\mu H' + \frac{\mu(T' - H) \cdot n(n+1)}{r^2} + 2\mu f' + \frac{2\mu}{r} \varphi + \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \tau \cdot \text{ctg} \theta \right) \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

2. Вычисление широтной составляющей  $\nabla \hat{T}_\theta$ .

$$\nabla \hat{T}_\theta = \frac{\partial \hat{T}_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{T}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \hat{T}_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3\hat{T}_{r\theta}}{r} + \frac{\hat{T}_{\theta\theta}}{r} \text{ctg} \theta - \frac{\hat{T}_{\varphi\varphi}}{r} \text{ctg} \theta. \quad (\text{B4})$$

Опять же, подставляя в (B1) выражения для составляющих тензора напряжений  $\hat{T}$  (1.1.14) и их производных (следующие за (1.1.14) формулы), приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_\theta = & \left[ \frac{\mu \tau'}{r} + \left( \mu' - \frac{\mu}{r} \right) \cdot \frac{\tau}{r} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{\mu'}{r} \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) + \frac{\mu}{r} \left( T'' - \frac{3}{r} T' + \frac{4}{r^2} T + H' - \frac{1}{r} H \right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} H + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{2\mu}{r^3} \frac{\partial^3 T}{\partial \theta^3} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2\mu H}{r^2} - \frac{2\mu}{r^3} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2\mu}{r^3} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} T \right] \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \frac{2\mu}{r^2} T \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{2\mu T}{r^3 \sin^2 \theta} \text{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu T}{r^3 \sin^2 \theta} \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{3\mu}{r^2} \tau \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{3\mu T'}{r^2} - \frac{6\mu}{r^3} T + \frac{3\mu H}{r^2} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2\mu}{r^2} \text{ctg} \theta \cdot H - \frac{2\mu}{r^3} \text{ctg} \theta \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \frac{2\mu}{r^3} T \text{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ -\frac{2\mu H}{r^2} \text{ctg} \theta + \frac{2\mu}{r^3} \text{ctg}^2 \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{2\mu T}{r^3} \text{ctg}^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \\ & - \frac{2\mu T}{r^3 \sin^2 \theta} \text{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \end{aligned}$$

После перегруппировки слагаемых имеем:

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_\theta = & \left[ \frac{\mu \tau'}{r} + \left( \mu' + \frac{2\mu}{r} \right) \cdot \frac{\tau}{r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} H + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{2\mu}{r^3} \frac{\partial^3 T}{\partial \theta^3} - \frac{2\mu}{r^3} \text{ctg} \theta \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{2\mu}{r^3} \text{ctg}^2 \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{\mu'}{r} \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) + \frac{\mu}{r} \left( T'' - \frac{2}{r^2} T + H' + \frac{4}{r} H \right) - \frac{2\mu}{r^3} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{2\mu T}{r^3} \text{ctg}^2 \theta \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{2\mu}{r^3} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} T \right] \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{4\mu T}{r^3 \sin^2 \theta} \text{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \frac{2\mu T}{r^3} \left[ \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \text{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

Учитывая в первом слагаемом (B5) тождество

$$-\frac{2\mu}{r^3} \frac{\partial^3 T}{\partial \theta^3} - \frac{2\mu}{r^3} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{2\mu}{r^3} \operatorname{ctg}^2 \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{2\mu}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \frac{2\mu}{r^3} \frac{\partial T}{\partial \theta},$$

а в последнем слагаемом равенство

$$\begin{aligned} & + \frac{2\mu T}{r^3} \left[ \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \phi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \right] - \frac{4\mu T}{r^3 \sin^2 \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) = \\ & = \left[ -\frac{n(n+1)}{r^3} \cdot 2\mu T + \frac{2\mu T}{r^3 \sin^2 \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \end{aligned}$$

которое можно получить, применяя формулу (1.1.11), для  $\nabla \hat{T}_\theta$  окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \nabla_\theta \hat{T} & = \left[ \mu T'' + 2\mu f - \mu H' + \mu' \left( T' - \frac{2T}{r} + H \right) - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial(\mu H)}{\partial \theta} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{(\mu \tau)'}{r} + \frac{2\mu \tau}{r^2} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial(\mu T)}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

3. Вычисление долготной составляющей  $\nabla \hat{T}_\phi$ .

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_\phi & = \frac{\partial \hat{T}_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{T}_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \hat{T}_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{3\hat{T}_{r\phi}}{r} + \frac{2\hat{T}_{\theta\phi}}{r} \operatorname{ctg} \theta = \\ & = \left[ \mu T'' - \frac{3\mu}{r} T' + \frac{4\mu}{r^2} T + \mu H' - \frac{\mu}{r} H + \mu' \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) \right] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{2\mu T}{r^2} \operatorname{ctg}^2 \theta - \frac{2}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\mu T) + \frac{2\mu T}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ -\frac{4\mu T}{r^2} \operatorname{ctg} \theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mu T) \right] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu T}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \frac{2\mu T}{r^3 \sin^3 \theta} \frac{\partial^3}{\partial \phi^3} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ -\frac{2\mu}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{2\mu H}{r} \right] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu T}{r^3} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{3\mu T'}{r} - \frac{6\mu}{r^2} T + \frac{3\mu H}{r} \right] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{4\mu T}{r^3 \sin \theta} \operatorname{ctg}^2 \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{4\mu T}{r^3 \sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \end{aligned}$$

После ряда несложных преобразований имеем:

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_\phi & = \left[ \mu T'' - \frac{2\mu T}{r^2} - \frac{2\mu T}{r^2} \operatorname{ctg}^2 \theta + \frac{2\mu T}{r^2 \sin^2 \theta} + \mu H' + \frac{4\mu H}{r} - \frac{2}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial(\mu T)}{\partial \theta} - \right. \\ & - \frac{2\mu}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + \mu' \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) \left. \right] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2}{r^2} \frac{\partial(\mu T)}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \frac{2\mu T}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

Применяя в последнем слагаемом равенство (1.1.11), после несложных преобразований для  $\nabla \hat{T}_\phi$  окончательно получаем:



$$\nabla_{\phi} \hat{T} = \left[ \mu \cdot T'' + 2\mu \cdot f - \mu \cdot H' + \mu' \cdot \left( T' + H - \frac{2T}{r} \right) - \frac{2\mu}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} - \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial(\mu T)}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial(\mu T)}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right).$$

### Приложение С: Вывод уравнений (1.1.32) – (1.1.37)

1. Вывод уравнения (1.1.32) для  $H'$ .

Уравнение (1.1.32) получается из уравнения (1.1.28)

$$N = (\lambda + 2\mu)H' + \frac{2\lambda}{r}H - \lambda \left( \varphi + \frac{n(n+1)}{r^2}T \right). \quad (C1)$$

Подставляя в (C1) выражение для функций  $\varphi$  (1.1.25), имеем:

$$N = (\lambda + 2\mu)H' + \frac{2\lambda}{r}H + \lambda\psi \frac{T}{r^2} - \lambda \frac{n(n+1)}{r^2}T. \quad (C2)$$

Теперь выразим из (C2)  $H'$  приведем подобные в скобках при функции  $T$ :

$$H' = \left( -\frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{1}{r}H + \left[ n(n+1) - \psi \right] \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r^2}T + \frac{1}{\lambda + 2\mu}N. \quad (C3)$$

Подставляя в (C3) нормировки из (1.1.31) ( $H = (2n+1)\bar{H}/r^n$ ,  $T = \bar{T}/r^n$ ,  $M = n\bar{M}/r^n$ ,

$N = n(2n+1)\bar{N}/r^n$ ) и учитывая, что  $H' = \frac{2n+1}{r^n}\bar{H}' - \frac{n(2n+1)}{r^{n+1}}\bar{H}$ , после умножения

полученного выражения на  $\frac{r^n}{2n+1}$  получаем (1.1.32).

2. Вывод уравнения (1.1.33) для  $T'$ .

Вывод этого и следующего уравнения наиболее прост. Из (1.1.29) непосредственно следует, что

$$T' = -H + \frac{2}{r}T + \frac{M}{r^2\mu}. \quad (C4)$$

Подставляя в это уравнение соответствующие нормировки из (1.1.31), получаем (1.1.33).

3. Вывод уравнения (1.1.34) для  $R'$ .

Из (1.1.30)

$$R' = 4\pi G\rho H + \frac{L}{r^2}. \quad (C5)$$

После применения нормировок (1.1.31), получаем (1.1.34).

4. Вывод уравнения (35) для  $L'$ .

Дифференцируя (A5.5) по радиусу, имеем

$$R'' = 4\pi G\rho'H + 4\pi G\rho H' + \frac{L'}{r^2} - \frac{2L}{r^3}. \quad (C6)$$

Подставляя (С5) и (С6) в (1.1.26) и учитывая выражения для функций  $f = H' + \frac{2}{r} \cdot H - \frac{n(n+1)}{r^2} \cdot T$ , и  $\varphi$  (1.1.25), после сокращения ряда слагаемых, имеем

$$L' = 4\pi G\rho [\psi + 3\varepsilon p_2 - n(n+1)]T + n(n+1)R, \quad (C7)$$

откуда, после применения нормировок (1.1.31), получаем (1.1.35).

5. Вывод уравнения (1.1.36) для  $M'$ .

Из (1.1.29) следует, что

$$\left( \mu \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) \right)' = \frac{M'}{r^2} - \frac{2M}{r^3}.$$

Подставляя это выражение в (1.1.24) и раскрывая функции  $f$  и  $\varphi$  согласно формулам, данной сразу после (1.1.10), а также выражению (1.1.25), после умножения на -1, из (1.1.24) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{M'}{r^2} - \frac{2M}{r^3} = & -\rho V' H - \rho R - \lambda H' - \frac{2\lambda}{r} H + \frac{n(n+1)}{r^2} \lambda T - \frac{4\mu}{r} H - \frac{2\mu}{r} T' + \frac{n^2 + n + 1}{r^2} 2\mu T - \\ & - (2\mu + \lambda) \psi \frac{T}{r^2}. \end{aligned}$$

Далее заменим  $T'$  согласно (С4). После сокращения на  $-\frac{2M}{r^3}$  и группировки слагаемых по искомым функциям, имеем

$$\frac{M'}{r^2} = \left[ -\rho V' - \frac{2(\lambda + \mu)}{r} \right] H + \left[ \frac{n(n+1)}{r^2} \lambda - \frac{4\mu}{r^2} + \frac{n^2 + n + 1}{r^2} 2\mu - \frac{(2\mu + \lambda)}{r^2} \psi \right] T - \rho R - \lambda H'.$$

Теперь заменим  $H'$  согласно (С3). Тогда, после группировки слагаемых получим:

$$\begin{aligned} M' = & - \left[ \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot r + \rho r^2 V' \right] H + \left[ \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} n(n+1) + (n^2 + n - 1) \cdot 2\mu - \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot \psi \right] T \\ & - \rho r^2 R - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} r^2 N. \end{aligned}$$

После нормировки, из этого выражения получим (1.1.36) без входящей в это уравнение поправки за относительные и кориолисовы ускорения (слагаемое  $-4\rho r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$  при  $\frac{1}{n} T$ ).

6. Вывод уравнения (1.1.37) для  $N'$ .

Вывод этого уравнения наиболее сложен. Применяя выражение для функции  $f$  (см. формулы после (1.1.10)), из (1.1.28) легко получить, что

$$(\lambda(f - \varphi) + 2\mu H')' = N'.$$

Подставляя это выражение в (1.1.23), после применения (С4) и (С5) для  $T'$  и  $R'$ , а также раскрытия функций  $f$  (1.1.10) и  $\varphi$  (1.1.25) и группировки относительно искомым функций, имеем:

$$N' + \left[ \rho V'' - \frac{2\rho V'}{r} + 4\pi G\rho^2 - \frac{4\mu}{r^2} \right] H + \left[ n(n+1)\rho V' + \frac{n(n+1)}{r} 2\mu - \left( \rho V' + \frac{2\mu}{r} \right) \psi \right] \frac{T}{r^2} + \\ + \frac{\rho}{r^2} L - \frac{n(n+1)}{r^4} M + \frac{4\mu}{r} H' + \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta \cdot \tau \right) = 0.$$

Теперь подставим в полученное выражение уравнение (С3) для  $H'$ , а также (1.1.41). В результате получим:

$$N' = \left[ \frac{4\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r^2} + \frac{4}{r} \rho V' + \frac{2\mu\psi}{r^2} - 2\rho\Omega^2 \right] H - \\ - \left[ [n(n+1) - \psi] \cdot \left( \frac{4\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r} + \rho V' + \frac{2\mu}{r} \right) \right] \frac{T}{r^2} - \frac{\rho}{r^2} L + \left[ \frac{n(n+1)}{r^4} \right] M - \frac{4\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r} N - \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta \cdot \tau \right).$$

Применяя выражение (D5) (см. Приложение D), легко получить, что

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta \cdot \tau = \left[ \left( \frac{\rho}{2\mu} \right)' \left( \frac{2\mu}{\rho} \right) \cdot \psi \right] \cdot T.$$

Подставим это выражение в предыдущее. В результате, после перегруппировки слагаемых имеем:

$$N' = \left[ \frac{4}{r^2} \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} + \frac{4}{r} \rho V' + \frac{2\mu\psi}{r^2} - 2\rho\Omega^2 \right] H - \\ - \left[ \left( \rho V' + \frac{2}{r} \mu + \frac{4}{r} \frac{\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) (n(n+1) - \psi) + \left( \frac{\rho}{2\mu} \right)' \cdot \left( \frac{2\mu}{\rho} \right) \mu\psi \right] \frac{1}{r^2} T - \frac{\rho}{r^2} L + \\ + \frac{1}{r^4} [n(n+1)] M + \frac{1}{r} \left( -4 \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) N.$$

После нормировки этого выражения, получаем (1.1.37) без добавочного слагаемого  $-4\rho\Omega^2 \cos^2 \theta$  при  $H$ , которое дает поправку за относительные и кориолисовы ускорения.

**Приложение D:** Вывод функции  $\tau$ .

Функция  $\tau$  введена в выражении (1.1.14) и равна

$$\tau = -\frac{\partial T'}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial H}{\partial \theta}. \quad (D1)$$

Из (1.1.22) имеем:

$$\frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \left( -\frac{\rho}{\mu r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \cdot T. \quad (D2)$$

Дифференцируя (1.1.22) и приводя подобные при искомым функциях, а также учитывая (1.1.29), легко получить выражение для первого входящего в (D1) слагаемого:

$$-\frac{\partial T'}{\partial \theta} = \left( -\frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \cdot H + \left( \left( \frac{\rho}{2\mu} \right)' \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial V'}{\partial \theta} + \frac{\rho}{\mu r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \cdot T + \left( \frac{\rho}{2\mu^2 r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \cdot M. \quad (D3)$$

Последнее слагаемое в (D1) получается из уравнения (1.1.20). Заменяя в (1.1.20)  $T'$  согласно (1.1.29), после частичного сокращения слагаемых в среднем члене уравнения и раскрытия производной по радиусу в последнем слагаемом, имеем:

$$2\mu \frac{\partial H}{\partial \theta} + \rho r^2 \left( \frac{T}{r^2} \frac{\partial V'}{\partial \theta} + \frac{T'}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{2T}{r^3} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Снова выражая  $T'$  из (1.1.20), после перегруппировки слагаемых, получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial V}{\partial \theta} H - \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial V'}{\partial \theta} T + -\frac{\rho}{2\mu^2 r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} M. \quad (D4)$$

Складывая (D2), (D3) и (D4), после сокращения десяти членов, для функции  $\tau$  окончательно имеем:

$$\tau = \left[ \left( \frac{\rho}{2\mu} \right)' \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] \cdot T. \quad (D5)$$

## 1.2. МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Интегрирование краевой задачи проводилось для двух моделей строения Земли: *PREM* и *IASP91*. Данные модели *PREM* были взяты из работы [Dziewonski A.M., Anderson D.L., 1981], а модели *IASP91* – из [Kennett B.L.N., Engdahl E.R., 1991]. Поскольку модель *IASP91* не имеет собственной кривой плотности, то оценки плотности для этой модели до глубины 760 км были взяты из работы [Geissler W.H., Kind R., Yuan X., 2008]. Ниже указанной границы как плотность, так и упругие параметры Ламе были приняты для *PREM*. Таким образом, основное внимание было уделено влиянию на величину обычных и нагрузочных чисел Лява особенностей строения коры и верхней мантии Земли двух различных референц-моделей. Верхний трехкилометровый слой океана в *PREM* заменялся корой с той же плотностью.

Значения добротности для обеих моделей брались согласно *PREM*. С целью учета диссипации упругие параметры предварительно пересчитывались с референц-периода модели строения Земли на периоды приливных волн при помощи логарифмической функции крипа. Функции плотности, модуля всестороннего сжатия, модуля сдвига и ускорения свободного падения, а также сжатия рассчитывались с шагом  $t = 33,3$  метра. Затем их значения, а также значения радиуса и шага нормировались и производилось вычисление переменных коэффициентов, входящих в правые части уравнений (1.1.32) – (1.1.37). Принятая величина шага интегрирования обеспечивает точность вычисления амплитудных дельта-факторов 2 порядка до нескольких единиц в шестом знаке после запятой, а также дает возможность вычисления нагрузочных дельта-факторов до  $n = 50000$  с относительной погрешностью не хуже 0.05%.

В основу интегрирования уравнений был положен метод ломаных Эйлера, однако разобранный ниже алгоритм решения задачи можно легко переформулировать и для метода Рунге-Кутты, что, с учетом выбранного шага, точности значений исходных данных и возможностей современной вычислительной техники, вряд ли имеет смысл.

Интегрирование краевой задачи (1.1.32) – (1.1.37) фактически было сведено к решению задачи Коши. Для этого векторы-столбцы значений шести искомых функций на верхней ( $\bar{Y}_0$ ) и нижней ( $\bar{Y}_N$ ) границах были связаны между собой уравнением:

$$\bar{Y}_N = C \cdot \bar{Y}_0, \quad (1.2.1)$$

где  $\bar{Y}_N = (\bar{H}_N, \bar{T}_N, \bar{R}_N, \bar{L}_N, \bar{M}_N, \bar{N}_N)^T$ ,  $\bar{Y}_0 = (\bar{H}_0, \bar{T}_0, \bar{R}_0, \bar{L}_0, \bar{M}_0, \bar{N}_0)^T$ , а матрица  $C$  представляет собой произведение матриц  $P$ , элементы которых последовательно

выражают переменные коэффициенты уравнений (1.1.32) – (1.1.37) на конкретной глубине, умноженные на шаг интегрирования  $t$ . К диагональным членам матриц  $P$  прибавлено 1. Таким образом,

$$C_{N+1} = \prod_{i=0}^N P_i, \quad (1.2.2)$$

где  $i$  – номер шага,  $N$  – количество шагов (в нашем случае количество рассматриваемых уровней от поверхности до подошвы мантии). Буквой  $n$ , как и ранее, будем обозначать порядок искомых функций. Из (1.1.32) – (1.1.37) легко можно выписать элементы матриц  $P$ :

$$p_{11} = \frac{1}{r} \left( n - 2 \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) \cdot t + 1; \quad p_{12} = \frac{n(n+1) - \psi}{2n+1} \frac{1}{r^2} \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot t; \quad p_{13} = 0;$$

$$p_{14} = 0; \quad p_{15} = 0; \quad p_{16} = \frac{n}{\lambda + 2\mu} \cdot t;$$

.....  
 .....

$$p_{61} = \left[ \frac{4}{r^2} \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} + \frac{4}{r} \rho V' + \frac{2\mu\psi}{r^2} - 2\rho\Omega^2 - 4\rho\Omega^2 \cos^2 \theta \right] \frac{1}{n} \cdot t;$$

$$p_{62} = - \left[ \left( \rho V' + \frac{2}{r} \mu + \frac{4}{r} \frac{\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) \left[ (n+1) - \frac{\psi}{n} \right] + \left( \frac{\rho}{2\mu} \right)' \cdot \left( \frac{2\mu}{\rho} \right) \frac{\mu\psi}{n} \right] \frac{1}{r^2} \frac{1}{2n+1} \cdot t;$$

$$p_{63} = 0; \quad p_{65} = \frac{1}{r^4} \frac{n(n+1)}{2n+1} \cdot t; \quad p_{66} = \frac{1}{r} \left[ n - 4 \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right] \cdot t + 1.$$

После вычисления матрицы  $C$  и подстановки нормированного варианта граничных условий (1.1.43) – (1.1.48) непосредственно в (1.2.1), три значения искомых функций на поверхности мантии  $H_0$ ,  $T_0$ ,  $R_0$  для случая  $n \geq 2$  можно найти из системы уравнений:

$$A \cdot \tilde{Y}_0 = \bar{B}, \quad (1.2.3)$$

где  $\tilde{Y}_0 = (\bar{H}_0, \bar{T}_0, \bar{R}_0)^T$ , а элементы матрицы  $A$  и вектора  $\bar{B}$  выражаются через элементы матрицы  $C$  и входящие в граничные условия (1.1.43) – (1.1.48) константы (1.2.4):

$$A_{11} = F \cdot C_{31} - K \cdot C_{11} - C_{41}; \quad A_{12} = F \cdot C_{32} - K \cdot C_{12} - C_{42};$$

$$A_{13} = F \cdot (C_{33} - C_{34} \cdot B) - K \cdot (C_{13} - C_{14} \cdot B) + C_{44} \cdot B - C_{43};$$

$$B_1 = A \cdot (C_{44} + K \cdot C_{14} - F \cdot C_{34}) + D \cdot (C_{46} + K \cdot C_{16} - F \cdot C_{36});$$

$$\begin{aligned}
A_{21} &= C_{51}; & A_{22} &= C_{52}; & A_{23} &= C_{53} - C_{54} \cdot B; & B_2 &= -C_{54} \cdot A - C_{56} \cdot D; \\
A_{31} &= -(G \cdot C_{31} + S \cdot C_{11} + C_{61}); & A_{32} &= -(G \cdot C_{32} + S \cdot C_{12} + C_{62}); \\
A_{33} &= -[G \cdot (C_{33} - C_{34} \cdot B) + S \cdot (C_{13} - C_{14} \cdot B) + C_{63} - C_{64} \cdot B]; \\
B_3 &= A \cdot (C_{64} + S \cdot C_{14} + G \cdot C_{34}) + D \cdot (C_{66} + S \cdot C_{16} + G \cdot C_{36}).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
D &= -\frac{1}{3n} (\bar{g}_0^m)^2 \bar{r}_m^{-n+1}, & A &= \frac{2n+1}{n+1} \bar{r}_m^{-n+2} \bar{g}_0^m, \\
F &= \frac{r_c (n + r_c \nu)}{n+1}, & K &= 4\pi \bar{G} \rho_i r_c^2 \frac{2n+1}{n+1}, \\
W &= \frac{\rho_c}{n(2n+1)}, & S &= \frac{\rho_i V'}{n}.
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

В последних выражениях  $\bar{g}_0^m$ ,  $\bar{r}_m$  и  $\bar{G}$  – нормированные значения ускорения свободного падения на поверхности мантии, ее радиуса и гравитационной постоянной.

При вычислении обычных (ненагруженных) чисел Лява для упругой Земли без океана  $D = 0$ .

Таким образом, процесс нахождения чисел Лява

$$k' = R_0 - 1; \quad h' = H_0; \quad l' = T_0 \tag{1.2.5}$$

фактически сводится к перемножению соответствующих матриц.

В случае  $n=0$  матрицы  $P$  и  $C$  имеют второй порядок и находятся по приведенной выше схеме.

При  $n=1$  мы решаем уравнения (1.1.32) – (1.1.37). Матрицы  $P$  и  $C$  рассчитываются аналогично предыдущему по коэффициентам этих уравнений. Поскольку значение функции  $R$  на поверхности известно (равно 1), уравнение вида (1.2.3) решается относительно неизвестных  $H_0$ ,  $T_0$  и  $L_0$ .

### 1.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСЕЛ ЛЯВА, ДЕЛЬТА-ФАКТОРОВ И ОКЕАНИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА. ПОПРАВКИ ЗА ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ И КОРИОЛИСОВЫ УСКОРЕНИЯ

После вычисления для двух моделей Земли (*PREM*, *IASP91*) нагрузочных чисел Лява  $h'_n$  и  $k'_n$  (1.2.5) с их помощью вычислялись нагрузочные дельта-факторы и нагрузочная составляющая океанического эффекта  $\Delta g_{LOAD}$ . Данная составляющая связана с изменениями высоты станции и потенциала, вызванными деформацией мантии под действием приливной нагрузки. Согласно [Pertsev В.Р., 1971] она равна:

$$\Delta g_{LOAD} = 8\pi G \rho_0 \sum_n \frac{h'_n - \frac{n+1}{2} k'_n}{2n+1} \sum_m H_n^m. \quad (1.3.1)$$

Здесь  $\delta'_m = \frac{h'_n - \frac{n+1}{2} k'_n}{2n+1}$  – нагрузочные дельта-факторы,  $\rho_0$  – плотность морской воды,

$G$  – гравитационная постоянная,  $\sum_m H_n^m = Y_n$  – “игреки Лапласа” разложения высоты океанического прилива по полиномам Лежандра (см. раздел 1.5).

Вторая составляющая океанического гравиметрического эффекта – это прямое ньютоновское притяжение водных масс. Оно вычислялось по формуле:

$$\Delta g_{ATTR} = 2\pi G \rho_0 \sum_n \frac{1}{2n+1} Y_n. \quad (1.3.2)$$

Вычисления по формулам (1.3.1) и (1.3.2) производились по разложениям высоты прилива (разд. 1.5) каждой из рассматриваемых океанических моделей (разд. 1.7.2) отдельно для синфазной и аутфазной составляющих (т.е. значений высоты в каждой точке, умноженной на косинус и синус фазы соответственно). В дальнейшем по этим двум составляющим определялись суммарная амплитуда  $A_{oc}$  и локальная фаза  $\varphi_{oc}$  океанического эффекта.

В разработанной по результатам теоретических исследований, предпринятых в настоящей работе, программе прогноза параметров земных приливов *ATLANTIDA3.1\_2014* (см. разд. 2.1) возможен расчет океанического гравиметрического эффекта с учетом диссипации и зависимости нагрузочных дельта-факторов от широты (т.е. с учетом вращения, эллиптичности, относительных и кориолисовых ускорений) по шести океаническим моделям и двум моделям строения Земли. Основные результаты расчета нагрузочных чисел Лява и нагрузочных дельта-факторов, а также



океанического гравиметрического эффекта обсуждаются в разд. 2.2 – 2.8 настоящей работы

Вычисление чисел Лява объемного прилива для Земли без океана (по моделям *PREM* и *IASP91*) также производилось согласно (1.2.5) по результатам интегрирования системы (1.1.32) – (1.1.37) при занулении в (1.2.4) параметра  $D$ . Прежде всего осуществлялось вычисление чисел Лява полусуточных волн. После этого определялся дельта-фактор волны  $M2$ , который в нашей программе соответствовал всем полусуточным волнам. В полученные числа Лява полусуточных волн вводились поправки за относительные и кориолисовы ускорения, полученные в работе [Спиридонов Е.А., 2016а]. Обсудим здесь кратко основные шаги, предпринятые для вычисления этих поправок.

В результате действия относительных и кориолисовых ускорений правая часть уравнений (1.1.6) становится отличной от нуля и принимает вид:

$$\vec{L} = \rho \left( \ddot{\vec{u}} + 2 \left[ \vec{\omega} \dot{\vec{u}} \right] \right). \quad (1.3.3)$$

Здесь  $\vec{L}$  – вектор, представляющий собой сумму упругих и гравитационных сил. Этот вектор равен левой части уравнения (1.1.6). Два слагаемых в правой части  $\ddot{\vec{u}}$  и  $2 \left[ \vec{\omega} \dot{\vec{u}} \right]$  – относительные и кориолисовы ускорения,  $\vec{u}$  – вектор смещения,  $\rho$  – плотность.

В сферической системе координат правую часть (1.3.3) можно представить в виде:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{u}} + 2 \left[ \vec{\omega} \dot{\vec{u}} \right] = \begin{bmatrix} \ddot{u}_\theta - 2\omega_r \dot{u}_\varphi \\ \ddot{u}_\varphi + 2\omega_r \dot{u}_\theta - 2\omega_\theta \dot{u}_r \\ \ddot{u}_r + 2\omega_\theta \dot{u}_\varphi \end{bmatrix}. \quad (1.3.4)$$

Компоненты вектора  $\vec{a}$  в формуле (1.3.4) перечислены сверху вниз в порядке  $\theta, \varphi, r$ . Здесь  $\omega_\theta$  и  $\omega_r$  – составляющие вектора угловой скорости вращения Земли  $\Omega$  ( $\omega_\varphi = 0$ ).

Учитывая, что

$$\ddot{\vec{u}} = -\sigma^2 \vec{u}; \quad \ddot{\vec{u}} = \sigma \dot{\vec{u}}; \quad \dot{\vec{u}} = -\sigma \vec{u};$$

а

$$\omega_\theta = -\Omega \sin \theta \quad \text{и} \quad \omega_r = \Omega \cos \theta,$$

выражение (1.3.4) можно переписать в виде:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -\sigma^2 u_\theta + 2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\varphi \\ -\sigma^2 u_\varphi - 2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\theta - 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_r \\ -\sigma^2 u_r + 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_\varphi \end{bmatrix}. \quad (1.3.5)$$

Рассмотрим отдельно кориолисовы ускорения. Представим вектор смещения в виде суммы вектора смещения нулевого решения  $\vec{u}^0$ , возникающего вследствие действия на сферическую оболочку только упругих и гравитационных сил, и дополнительного вектора смещения  $\delta\vec{u}$ , возникающего вследствие действия кориолисовых сил:

$$\vec{u} = \vec{u}^0 + \delta\vec{u}.$$

Подставляя это выражение в последние слагаемые (1.3.5) для кориолисова ускорения  $\vec{a}_{COR}$ , имеем:

$$\vec{a}_{COR} = \begin{bmatrix} 2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\varphi^0 \\ -2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\theta^0 - 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_r^0 \\ 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_\varphi^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sigma\Omega \cos \theta \cdot \delta u_\varphi \\ -2\sigma\Omega \cos \theta \cdot \delta u_\theta - 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot \delta u_r \\ 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot \delta u_\varphi \end{bmatrix}. \quad (1.3.6)$$

В то же время, составляющие вектора  $\delta\vec{u}$  равны

$$\delta\vec{u} = \begin{bmatrix} -2\frac{\Omega}{\sigma} \cos \theta \cdot u_\varphi \\ 2\frac{\Omega}{\sigma} \cos \theta \cdot u_\theta + 2\frac{\Omega}{\sigma} \sin \theta \cdot u_r \\ -2\frac{\Omega}{\sigma} \sin \theta \cdot u_\varphi \end{bmatrix}. \quad (1.3.7)$$

Подставляя (1.3.7) во второе слагаемое (1.3.6), имеем

$$\vec{a}_{COR} = \begin{bmatrix} 2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\varphi^0 \\ -2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\theta^0 - 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_r^0 \\ 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_\varphi^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\Omega^2 \cos^2 \theta \cdot u_\theta + 4\Omega^2 \cos \theta \sin \theta \cdot u_r \\ 4\Omega^2 \cdot u_\varphi \\ 4\Omega^2 \cos \theta \sin \theta \cdot u_\theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta \cdot u_r \end{bmatrix} \quad (1.3.8)$$

Работа  $A$  силы (1.3.8) на перемещениях нулевого решения равна:

$$A = \begin{bmatrix} 2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\varphi^0 u_\theta^0 \\ -2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\theta^0 u_\varphi^0 - 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_r^0 u_\varphi^0 \\ 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_\varphi^0 u_r^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\Omega^2 \cos^2 \theta \cdot u_\theta u_\theta^0 + 4\Omega^2 \cos \theta \sin \theta \cdot u_r u_\theta^0 \\ 4\Omega^2 \cdot u_\varphi u_\varphi^0 \\ 4\Omega^2 \cos \theta \sin \theta \cdot u_\theta u_r^0 + 4\Omega^2 \sin^2 \theta \cdot u_r u_r^0 \end{bmatrix} \quad (1.3.9)$$

Она же, следуя теореме Э. Бэтти о взаимности работ, равна работе упругих и гравитационных сил на добавочных смещениях  $\delta\vec{u}$ , вызываемых силой Кориолиса.

После интегрирования (1.3.9) по угловым переменным, интегралы, содержащие смешанные произведения нулевого решения  $u_\varphi^0 u_\theta^0$  и  $u_r^0 u_\varphi^0$ , обратятся в ноль, вследствие их зависимости от внешнего потенциала вида (1.1.9) (без первого слагаемого при  $u_\theta^0$ ). Обращение интегралов в ноль дает интегрирование по долготе. Для зональных приливов  $u_\varphi^0 = 0$ . Что касается произведений  $u_r u_\theta^0$  и  $u_\theta u_r^0$ , то соответствующие этим последним произведениям составляющие силы Кориолиса (1.3.8) имеют смысл только в предположении зависимости чисел Лява от широты и попадают в этом случае в два дополнительных уравнения (1.1.20) и (1.1.21). Таким образом, очевидно отличными от нуля и входящими в интегрируемые в дальнейшем уравнения (1.1.16), (1.1.17) и (1.1.18) являются только составляющие силы Кориолиса, соответствующие в (1.3.9.) произведениям  $u_\theta u_\theta^0$ ,  $u_\varphi u_\varphi^0$  и  $u_r u_r^0$ , работа которых очевидно отлична от нуля. С учетом вышесказанного, выражение для кориолисового ускорения имеет вид

$$\vec{a}_{COR} = \begin{bmatrix} 4\Omega^2 \cos^2 \theta \cdot u_\theta \\ 4\Omega^2 \cdot u_\varphi \\ 4\Omega^2 \sin^2 \theta \cdot u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\Omega^2 \cos^2 \theta \cdot \frac{T}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \\ 4\Omega^2 \cdot \frac{T}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \\ 4\Omega^2 \sin^2 \theta \cdot H \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \end{bmatrix}. \quad (1.3.10)$$

В таком виде это ускорение не снимает вырождения в уравнениях по угловым переменным в методе Лява. В то же время, в уравнения (1.1.17) и (1.1.18) войдут различные составляющие этого ускорения, а именно, члены, содержащие  $4\Omega^2 \cos^2 \theta$  и  $4\Omega^2$ . Следуя той же логике, которую мы применяли при обсуждении этих уравнений, вместо указанных отдельных горизонтальных составляющих в дальнейшем будем рассматривать их полусумму, которая равна:  $4\Omega^2 \cos^2 \theta + 2\Omega^2 \sin^2 \theta$ . (Для зональных волн второе слагаемое отсутствует). Тогда, с учетом относительных ускорений, суммарная сила в тангенциальном и радиальном направлениях будет:

$$\begin{cases} F_\tau = \rho \left( -\sigma^2 + 4\Omega^2 \cos^2 \theta + 2\Omega^2 \sin^2 \theta \right) \frac{T}{r}, \\ F_r = \rho \left( -\sigma^2 + 4\Omega^2 \sin^2 \theta \right) \cdot H. \end{cases} \quad (1.3.11)$$

Для полусуточных волн  $\sigma = -2\Omega$ , и

$$\begin{cases} F_\tau = \rho \left( -4\Omega^2 \sin^2 \theta + 2\Omega^2 \sin^2 \theta \right) \frac{T}{r}, \\ F_r = \rho \left( -4\Omega^2 \cos^2 \theta \right) \cdot H, \end{cases} \quad (1.3.12)$$

а для суточных  $\sigma = -\Omega$ :

$$\begin{cases} F_r = \rho(-\Omega^2(1-4\cos^2\theta) + 2\Omega^2\sin^2\theta)\frac{T}{r}, \\ F_r = \rho(-\Omega^2(1-4\sin^2\theta)) \cdot H. \end{cases} \quad (1.3.13)$$

Силы (1.3.12) и (1.3.13) входят в приведенные выше уравнения (1.1.36) и (1.1.37). Выражения (1.3.12) для полусуточных волн отличаются от выражений (9), полученных в работе [Спиридонов Е.А., 2016], слагаемым  $+2\Omega^2\sin^2\theta$ , дополняющим тангенциальную составляющую силы Кориолиса до полного вектора этой силы. Помимо этого, вывод силы Кориолиса в указанной работе отличается меньшей общностью. Фактически, он выполнен только для волн 2 порядка нулевой степени. Тем не менее, результаты обеих работ совпадают, а указанное выше дополнительное слагаемое  $+2\Omega^2\sin^2\theta$  могло быть введено также и в [Спиридонов Е.А., 2016], но, к сожалению, эта возможность была там упущена. Также интересно отметить, что полученные выражения для составляющих силы Кориолиса (1.3.10) фактически не зависят от частоты волны. От частоты зависят только относительные ускорения. Этот, на первый взгляд, парадоксальный результат связан с тем обстоятельством, что та часть силы Кориолиса, которая совершает ненулевую часть работы (1.3.9), реализуется на смещениях (1.3.7), обратно пропорциональных частоте приливного потенциала.

В результате применения поправок за относительные и кориолисовы ускорения, значения чисел Лява и амплитудных дельта-факторов полусуточных волн заметно меняются с широтой (разд. 2.1).

Для учета динамических резонансных эффектов для суточных волн была применена резонансная кривая (24) из работы [Dehant V. et al., 1999]. Мы построили данную кривую для амплитудных дельта-факторов волн суточного диапазона моделей *DDW/H* и *DDW/NH*. После этого для тех же моделей были вычислены отношения полученных дельта-факторов суточных волн к дельта-фактору волны *M2*, а также средние значения этих отношений по двум моделям. По этим отношениям и определялись дельта-факторы суточных волн. Среднее по двум моделям (*DDW/H* и *DDW/NH*) рассчитывалось вследствие того, что полученное нами по модели *PREM* среднее по широте значение амплитудного фактора волны *M2* лежит достаточно близко к среднему для этих двух моделей. В то же время, средние для *IASP91* лежат ближе к значениям модели *DDW/NH* (см. разд. 2.8). Безусловно, в дальнейшем автор работы планирует получить резонансные кривые самостоятельно.

Дельта-факторы для волн третьего порядка рассчитывались непосредственно, т.е. без применения резонансной кривой.

Основные результаты расчетов значений чисел Лява и амплитудных факторов для Земли без океана приведены в разд. 2.1. В разд. 3.2, 3.3, а также в работе [Спиридонов Е.А., 2015а], показано что их значения лучше соответствуют данным наблюдений, нежели полученные по программе Венцеля *PREDICT* (пакет *ETERNA3.3*) или приведенные в работе [Dehant V. et al, 1999].

В качестве амплитудных факторов долгопериодных волн в настоящей работе приняты их средние значения модели *DDW/NH* [Dehant V. et al., 1999]. Широтная зависимость здесь не учитывалась. Это связано с тем, что пока не существует рядов наблюдений достаточной длины, из анализа которых можно было бы сделать более или менее уверенный вывод о приоритете той или иной теоретической модели расчета. Впрочем, автор надеется вернуться к этому вопросу в своих следующих работах.

Амплитудные дельта-факторы и сдвиги фаз (в градусах) для упругой земли с океаном вычислялись по формулам:

$$\delta_p = \sqrt{(A \cdot \delta_E + A_{oc} \cos \varphi_{oc})^2 + (A_{oc} \sin \varphi_{oc})^2} / A; \quad (1.3.14)$$

$$\Delta \varphi_p = \arctg(A_{oc} \sin \varphi_{oc} / (A \cdot \delta_E + A_{oc} \cos \varphi_{oc})) \cdot 180 / \pi. \quad (1.3.15)$$

Здесь,  $\delta_p$  и  $\Delta \varphi_p$  – вычисляемые прогнозные амплитудные факторы и сдвиги фаз;  $\delta_E$  – амплитудный дельта-фактор для неупругой Земли без океана;  $A_{oc}$  и  $\varphi_{oc}$  – амплитуда и локальная фаза океанического гравиметрического эффекта;  $A$  – амплитуда рассматриваемой приливной волны для твердой эллипсоидальной Земли без океана.

#### 1.4. УЧЕТ ДИССИПАЦИИ

Учет диссипации энергии полусуточных и суточных приливных волн производился путем пересчета опубликованных в [Dziewonski, A.M., Anderson, D.L., 1981] для *PREM* и [Kennett B.L.N., Engdahl E.R., 1991] для *IASP91* профилей скоростей продольных  $V_p$  и поперечных  $V_s$  сейсмических волн с референц-периода 1 с на периоды  $T$  приливных волн 12 и 24 ч. Пересчет осуществлялся согласно логарифмической функции крипа Ломница:

$$V_{p,s}(1s) = V_{p,s}(T) \cdot \left[ 1 - \frac{1}{\pi Q_{p,s}} \ln T \right].$$

Значение фактора добротности здесь не зависит от частоты. Достаточность подобного подхода для указанных периодов обоснована в работе [Жарков В.Н., Молоденский С.М., 1977]. В частности, авторы этой работы отмечают, что нелогарифмические функции крипа с более сильной зависимостью упругих модулей от частоты приводили бы к заметному рассогласованию теоретических и экспериментальных данных. Профили фактора добротности брались непосредственно из таблиц *PREM* [Dziewonski, A.M., Anderson, D.L., 1981]. Также для нагрузочных чисел Лява была осуществлена попытка их расчета по значениям  $Q$  из модели SL8 [Anderson, Hart, 1978], однако это не привело к значимым изменениям рассчитываемого эффекта (см. также разд. 2.3). По полученным таким образом профилям скоростей рассчитывались зависимости от глубины упругих параметров Ламе для периодов суточных и полусуточных волн.

Что касается долгопериодных волн, то полученное автором настоящей работы ([Спиридонов Е.А., Акименко Я.В., 2003], [Спиридонов Е.А., Цуркис И.Я., 2006; 2008]) при моделировании чандлеровского движения полюса оптимальное значение фактора добротности  $Q$  от 36 до 50 при возбуждении этого движения океаном и атмосферой показывает, что зависимость  $Q$  мантии от частоты в области низких частот определяется не логарифмической функцией крипа Ломница, а степенной функцией крипа с показателем степени около 0.15. Именно эту функцию автор планирует применить в дальнейшем для волн большого периода.

При рассмотрении приливных эффектов на геологических масштабах времени в силу вступают особенности приливной эволюции системы Земля-Луна. Этому вопросу посвящена работа [Авсюк Ю.Н., Спиридонов Е.А., 2001].

## **1.5. РАЗЛОЖЕНИЕ КОТИДАЛЬНЫХ КАРТ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ, ПОПРАВКА ЗА СОХРАНЕНИЕ МАСС**

В процесс разложения высоты прилива по сферическим гармоникам автором настоящей работы были внесены некоторые усовершенствования. Они сводятся к применению рекуррентных формул не для полиномов Лежандра, а сразу для интегралов от них, взятых по элементарным сферическим площадкам. После умножения на косинус и синус фазы полученные действительная и мнимая части высоты прилива котидальных карт шести океанических моделей *CSR3.0*, *FES95.2*,

SCW80, NAO99b, CSR4.0 и FES2012 раскладывались в ряд по нормированным на  $\frac{2n+1}{4\pi}$

и  $\frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-k)!}{(n+k)!}$  полиномам и присоединенным полиномам Лежандра:

$$H_n^k = (\bar{A}_n^k \cos k\lambda + \bar{B}_n^k \sin k\lambda) \cdot \bar{P}_n^k,$$

При вычислении известных нормированных коэффициентов

$$\bar{A}_{nk} = \int f(\theta', \phi') \bar{P}_n^k(\theta') \cos k\phi d\sigma', \quad \bar{A}_{n0} = \int f(\theta', \phi') \bar{P}_n(\theta') d\sigma' \quad \text{и} \quad \bar{B}_{nk} = \int f(\theta', \phi') \bar{P}_n^k(\theta') \sin k\phi d\sigma'$$

была применена следующая система рекуррентных формул:

I. Формулы для  $\bar{P}_n^1$  и  $\bar{P}_n^2$ :

$$\int \bar{P}_n^1 dt = \frac{2n+1}{(n+1)^2} \left( \frac{(n-2)^2}{2n-3} \cdot \int \bar{P}_{n-2}^1 dt - \bar{P}_{n-1}^1 \cdot \sin^2 \theta \right);$$

для  $n \geq 2; k = 1$ ;

$$\int \bar{P}_n^2 dt = \frac{1}{(n+2) \cdot (n-1)} \left[ \bar{P}_n^1 \cdot \sin \theta + \frac{4}{n \cdot (n+1)^2} \left( n \cdot t \cdot \bar{P}_n + \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \bar{P}_{n-1} \right) \right];$$

для  $n \geq 2; k = 2$ .

II. Формулы для  $\bar{P}_n^n$  и  $\bar{P}_n^{n-1}$ :

$$\int \bar{P}_n^n dt = \frac{1}{(n+1)} \cdot \left( \bar{P}_n^n \cdot t + \frac{2n+1}{2 \cdot (2n-2) \cdot (2n-3)} \cdot \int \bar{P}_{n-2}^{n-2} dt \right);$$

для  $n \geq 3; k = n$ ;

$$\int \bar{P}_n^{n-1} dt = -\frac{2n}{n+1} \cdot \sin \theta \cdot \bar{P}_n^n;$$

для  $n \geq 4; k = n-1$ .

III. Формула для  $\bar{P}_n^k$ :

$$\int \bar{P}_n^k dt = \frac{1}{(n+k) \cdot (n+k-1)} \times \\ \times \left[ \frac{2n+1}{2n-3} \cdot \left( (n-k) \cdot (n-k-1) \int \bar{P}_{n-2}^k dt + \int \bar{P}_{n-2}^{k-2} dt \right) - \int \bar{P}_n^{k-2} dt \right];$$

для  $2 \leq k \leq n-2; n \geq 5$ .

IV. Вспомогательные формулы:

$$\int \bar{P}_n \sin \theta d\theta = \frac{1}{n+1} \cdot \left( \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \bar{P}_{n-1} - t \cdot \bar{P}_n \right);$$

$$\bar{P}_n = \frac{2n+1}{n} \cdot \left[ t \cdot \bar{P}_{n-1} - \frac{(n-1)}{2n-3} \cdot \bar{P}_{n-2} \right];$$

$$\bar{P}_n^1 = \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot \left[ \sin \theta \cdot 2\bar{P}_{n-1} + \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2n-3} \cdot \bar{P}_{n-2}^1 \right];$$

$$\bar{P}_n^n = \frac{2n+1}{2n \cdot (2n-1)} \cdot \sin \theta \cdot \bar{P}_{n-1}^{n-1}.$$

Первые шесть соотношений представляют собой рекуррентные формулы для интегралов от полиномов и присоединенных полиномов Лежандра по косинусу кошироты ( $t = \cos\theta$ ). Последние три являются общеизвестными и дополняют первые шесть формул. Приведенные соотношения позволяют вычислить точные значения интегралов от полиномов по площадкам, в центре которых находятся точки со значениями раскладываемой функции высоты прилива. Полученные разложения применялись для расчета океанического гравиметрического эффекта согласно формулам (1.3.1) и (1.3.2).

**Поправка за сохранение масс.** Необходимость введения поправки за сохранение приливных масс фактически связана с неизбежными неточностями приливных океанических моделей, которые приводят к отличию от нуля соответствующих интегралов, взятых по площади всей земной поверхности. На языке сферических функций это означает отличие от нуля коэффициентов разложения прилива нулевой степени, нулевого порядка  $A_{00}$ . В связи с этим, при введении данной поправки в вычисления, проводимые в настоящей работе при помощи программы *ATLANTIDA3.1*, указанные коэффициенты просто зануляются. Это соответствует вычитанию из данных океанографических наблюдений однородного океанического слоя. Аналогичной методики придерживался в своей работе Фарелл [Farell W.E., 1972].

В программе *LOAD89(97)* из пакета *ETERNA3.3* Ольвье Фрэнсиса [Francis O., Mazzega, P., 1990] поправки за массовую коррекцию водятся пропорционально амплитуде. Сначала вычисляются поправочные коэффициенты *CMC* и *CMS* для действительной (косинусной) и мнимой (синусной) составляющих высоты прилива. К сожалению, при подготовке настоящей работы автору не удалось найти содержащий эти формулы литературный источник, поэтому они были получены заново:

$$CMC(CMS) = \frac{\sqrt{2} \cdot \int CS(SS) d\sigma}{\sqrt{\int (CS^2 + SS^2) d\sigma}}.$$

В приведенной формуле интегрирование распространяется на всю поверхность земного шара. Здесь *CS* и *SS* – действительная и мнимая части высоты прилива для каждой волны. Коэффициенты, вычисленные по приведенной формуле, отличаются от введенных в программу *LOAD89(97)* всего на несколько процентов, что, с учетом



малой величины обсуждаемых поправок, практически не меняет конечных результатов.

Далее, вычисленные коэффициенты вычитаются из значений действительной и мнимой части амплитуд волн согласно выражениям:

$$AC = AM \cdot (\cos\varphi - CMC) \text{ и } AS = AM \cdot (\sin\varphi - CMS),$$

где  $AM$  – амплитуда волны в данной точке, а  $\varphi$  – ее фаза.

Для оценки величины массовой поправки она была вычислена для волны  $M2$  на оконечности мыса Лэндс-Энд полуострова Корнуолл. В этом месте наблюдается самая большая амплитуда нагрузочного океанического эффекта в Европе. Для волны  $M2$  ее величина составляет порядка 13 мкГал, что всего в два с половиной раза меньше максимальной амплитуды океанического эффекта на всем земном шаре, наблюдаемой у южных берегов Аляски. Введение массовой поправки в программе *LOAD89(97)* привело при расчете по моделям *PREM 1 c* и *CSR3.0* к увеличению амплитуды на 0.01 мкГал (0.08% от амплитуды океанического эффекта) и сдвигу фазы на  $0.06^\circ$ . При расчетах по программе *ATLANTIDA3.1* величина поправки оказалась в два раза меньше – 0.005 мкГал и  $0.03^\circ$ . Таким образом, в ряде работ роль массовой коррекции неоправданно завышается. Так, авторы работы [Baker T.F et al., 1991] утверждают, что “В Центральной Европе эффект сохранения масс для модели Швидерского для теоретической нагрузки волны  $M2$  составляет около 15%, и наблюдения явно демонстрируют важность эффекта сохранения массы в океанических приливных моделях”. Однако согласно расчетам по программе *LOAD89(97)*, на мысе Лэндс-Энд эта поправка для модели *SCW80* не превышает все те же 0.08% от амплитуды и не должна принципиально меняться в пространстве, поскольку вводится пропорционально величине рассчитываемой амплитуды. И действительно, например, в Вене ее величина доходит лишь до 0.6% (0.006 мкГал) от рассчитываемой амплитуды. Другой вопрос, что при введении этой поправки в программе *ATLANTIDA3.1* для модели Швидерского величина амплитуды в Вене изменяется уже значительно – на 21% (0,2 мкГал), а фаза почти на  $14^\circ$ , что, видимо, обусловлено недокомпенсацией гармоник порядка выше нулевого. В то же время, в модели *CSR3.0* коэффициенты  $A_{00}$  разложения высоты прилива по сферическим функциям на один порядок величины меньше, чем в модели *SCW80*, для действительной части и на два порядка – для мнимой. В результате величина амплитуды в Вене, рассчитанная *ATLANTIDA3.1* для *CSR3.0*, меняется всего на 0.8% (0.008 мкГал) и фаза на 0.2 градуса, а величина

массовой поправки, выданная *LOAD89(97)* по той же океанической модели, не отличается от приведенной выше для модели *SCW80*. Таким образом, учет массовой поправки, производимый пропорционально амплитудам, выравнивает ее величину, рассчитанную по разным океаническим моделям, сохраняя ее малость, но, в то же время, уводя сумму приливных масс по земному шару от нуля. Вычитание однородного слоя приводит к разным результатам по разным океаническим моделям и полностью зануляет соответствующие интегралы по массе. Вопрос о приоритете любого из этих двух способов, как и о самой необходимости введения массовой поправки, на наш взгляд, является достаточно спорным.

В приводимых ниже результатах вычислений океанического гравиметрического эффекта (глава 2) поправка за массовую коррекцию не вводилась вследствие того, что ее учет фактически является искажением исходных данных океанических моделей. Особенно убедительно отсутствие необходимости введения этой поправки продемонстрировано в разд. 3.6 настоящей работы. В этом разделе показано, что введение массовой коррекции однозначно удаляет данные прогноза от самых современных наблюдений.

## 1.6. ПОДХОД, ОСНОВАННЫЙ НА ПРИМЕНЕНИИ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Несмотря на то, что в данной работе при расчете океанического нагрузочного эффекта применен метод, основанный на разложении высоты прилива по сферическим функциям, для проведения некоторых сравнений, в том числе касающихся различий в полученных нами и другими авторами нагрузочных числах Лява (разд.2.3), также проводились расчеты, основанные на применении этого альтернативного подхода.

При помощи функции Грина гравиметрический нагрузочный океанический эффект рассчитывается по следующим хорошо известным формулам:

$$\Delta g_{LOAD} = \rho_0 \cdot a^2 \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f(\theta', \lambda') G(\psi) \cdot \sin \theta' d\theta' d\lambda', \quad (1.6.1)$$

где

$$G = \frac{g}{M} \sum_{n=0}^{\infty} (2k'_n - (n+1) \cdot k'_n) \cdot P_n(\cos \psi) \quad (1.6.2)$$

– функции Грина.

В (1.6.1) и (1.6.2) приняты следующие обозначения:  $\rho_0$  - плотность морской воды;  $a$ ,  $M$  – средний радиус и масса Земли;  $\theta', \lambda'$  - коширота и долгота;  $h'_n$  и  $k'_n$  - нагрузочные числа Лява;  $P_n(\cos \psi)$  - полиномы Лежандра порядка  $n$ ;  $\psi$  – угловое расстояние между точкой наблюдения и произвольной точкой на сфере.

Строго говоря, результаты вычислений  $\Delta g_{LOAD}$  при помощи функций Грина (т.е. по формуле (1.6.1)) и при помощи применяемой в данной работе формулы (1.3.1), основанной на разложении высоты прилива по полиномам Лежандра, должны в идеале совпадать. Это связано с тем, что с математической точки зрения оба метода полностью идентичны. Действительно, подставляя в формулу (1.6.1) выражение (1.6.2), имеем:

$$\begin{aligned}\Delta g_{LOAD} &= \rho_0 a^2 \int f(\theta', \lambda') G(\psi) d\sigma' \\ &= \rho_0 a^2 \int f(\theta', \lambda') \\ &\quad \cdot \frac{g}{M} \sum_{n=0}^{\infty} (2h'_n - (n+1) \cdot k'_n) \cdot P_n(\cos \psi) d\sigma' = \\ &= \frac{\rho_0 a^2 g}{M} \sum_{n=0}^{\infty} (2h'_n - (n+1) \cdot k'_n) \cdot \int f(\theta', \lambda') P_n(\cos \psi) d\sigma'\end{aligned}$$

Принимая во внимание хорошо известное соотношение

$$Y_n(\theta', \lambda') = \frac{2n+1}{4\pi} \int f(\theta', \lambda') P_n(\cos \psi) d\sigma'$$

[Идельсон, 1936, стр. 230], получаем:

$$\begin{aligned}\Delta g_{LOAD} &= \frac{\rho_0 a^2 g}{M} \sum_{n=0}^{\infty} (2h'_n - (n+1) \cdot k'_n) \cdot \frac{4\pi}{2n+1} \cdot Y_n(\theta', \lambda') \\ &= \frac{8\pi \rho_0 a^2 g}{M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h'_n - \frac{(n+1)}{2} \cdot k'_n}{2n+1} \cdot Y_n(\theta', \lambda') = \\ &= \frac{8\pi \rho_0 a^2 GM}{a^2 M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h'_n - \frac{(n+1)}{2} \cdot k'_n}{2n+1} \cdot Y_n(\theta', \lambda') = 8\pi G \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h'_n - \frac{(n+1)}{2} \cdot k'_n}{2n+1} \cdot Y_n(\theta', \lambda')\end{aligned}$$

Таким образом, мы пришли к формуле (1.3.1).

Во всех известных к настоящему времени программах расчета океанического нагрузочного эффекта, за исключением разработанной автором настоящей работы программы *ATLANTIDA3.1\_2014*, вычисления производятся при помощи функций Грина с введением так называемой ближней зоны. Не является исключением и программа *LOAD89(97)* из пакета *ETERNA3.3*. Несмотря на показанную идентичность выражений (1.3.1) и (1.6.1), эти две программы приводят к значимо различающимся результатам. Величину и причину этих различий мы обсудим в разделе 2.3, а в Главе 3 будет указано на то, что результаты расчета океанического эффекта, полученные

*ATLANTIDA3.1\_2014*, в 75% случаев лежат ближе к наблюдениям, нежели полученные при помощи *LOAD89(97)*. Здесь же отметим тот факт, что применение метода, основанного на функциях Грина, в программах, предназначенных для проведения вычислений в реальном масштабе времени по самым последним океаническим моделям высокого пространственного разрешения (*FES2012*, *TPX08*), практически невозможно. Это связано с тем, что при достаточно большом числе точек данных океанической модели время счета по функциям Грина уходит на бесконечность даже на достаточно современной вычислительной технике. При вычислении же океанического эффекта заранее (например, на суперкомпьютере) в узлах сетки, впоследствии для вычисления эффекта в конкретной точке возникает необходимость интерполяции полученных результатов. В то же время, метод, основанный на разложении по сферическим функциям, лишен указанного недостатка хотя бы потому, что все разложения можно также, но без существенных затрат, произвести заранее и проводить дальнейшие расчеты эффекта в реальном масштабе времени в любой точке земного шара.

## **1.7. МОДЕЛИ ВНУТРЕННЕГО СТРОЕНИЯ ЗЕМЛИ И ОКЕАНИЧЕСКИХ ПРИЛИВОВ**

В настоящем разделе дано краткое описание применяемых в работе моделей внутреннего строения Земли и океанических приливов. Проведен сравнительный анализ распределения с глубиной упругих модулей для моделей *PREM* и *IASP91*. Показана степень изменения этих модулей после пересчета скоростей продольных и поперечных сейсмических волн с периода 1 с на периоды приливных волн при помощи логарифмической функции крипа. Дан краткий обзор существующих океанических приливных моделей и их основных характеристик.

### **1.7.1. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ СТРОЕНИЯ ЗЕМЛИ PREM И IASP91. ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ НА ЗНАЧЕНИЯ УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ ЛАМЕ**

Данные модели *PREM* были взяты из оригинальной работы Дзиевонского и Андерсона [Dziewonski, A.M., Anderson, D.L., 1981]. Эта модель достаточно хорошо описана в литературе, поэтому подробно на ее особенностях мы здесь останавливаться не будем.

Применяемая в данной работе модель *IASP91* была разработана *IASPEI* – International Association of Seismology and the Physics of the Earth's Interior (Международной ассоциацией сейсмологии и физики внутреннего строения Земли). Значения скоростей продольных и поперечных сейсмических волн содержатся в работе [Kennett B.L.N., Engdahl E.R., 1991].

В связи с историей разработки этой новой модели Kennett отмечает, что существенное улучшение определения времен пробега *P*-волн произошло лишь в 1968 году на основе наблюдений, помимо землетрясений, за ядерными взрывами. В Международном сейсмологическом центре (*ISC*) была создана объемная база данных отсчетов по станциям, использующим установленные места землетрясений и взрывов. Эти ряды данных постоянно расширялись. За период порядка 20 лет (1964 – 1988) в базе появилось более 6 миллионов отсчетов времен прихода на почти 3000 сейсмических станций. Эти ряды были переведены в цифровую форму, а за последний период (1964 – 1987) – на CD-ROM. Хотя распределение станций не является однородным, и большинство событий происходит в ограниченном числе сейсмических зон, суммарные ряды данных обеспечивают хорошее покрытие внутренних областей Земли. Данные *ISC* сыграли важную роль в разработке последних моделей Земли,

таких как *PREM*, и исследованиях латеральных неоднородностей Земли [Inoue et al. 1990].

Вид модели *IASP91* основан на модели *PREM-C* [Dziewonski et al., 1975]. Кора состоит из двух однородных слоев с неоднородностями на глубине 20 и 30 км. В зоне верхней мантии, ниже 760 км, скорости каждого слоя представлены линейной зависимостью от радиуса. Наибольшие неоднородности мантии установлены на глубинах 410 и 660 км, что в основном соответствует данным работы [Revenaugh & Jordan, 1989] по реверберации S-волн в мантии. Другие неоднородности находятся на глубине 120 и 210 км, а неоднородность градиента на глубине 760 км приводит к плавному переходу в нижнюю мантию.

Распределения скоростей в нижней мантии представляются кубической зависимостью от радиуса между глубинами 760 и 2740 км. В остальных слоях мантии они выражаются линейной зависимостью от радиуса. Вид распределения скоростей в верхней мантии является компромиссом между моделями *IASP89* и *MD89PS*. Последующая модель *MD-1989* образована из двух предварительных моделей Земли: *IASP89* (составлена Кеннетом из модели, использующей скорости в нижней мантии из [Toy, 1989a], и скорости в ядре из *PREM-C*) и *MD89PS* [Morelli & Dziewonski, 1989]. Она позволила проверить методы вычислений, а также сравнить времена пробега с наблюдаемыми для доступных тестовых событий. Модели *MD89PS* и [Toy, 1989b] очень близки в нижней мантии и принципиально различны в верхней. Toy применил предварительную модель верхней мантии, разработанную Кеннетом и характеризующую большими скачками на глубинах 410 и 660 км. Morelli & Dziewonski [1989] предпочли для верхней мантии меньшие скачки, но большие градиенты. Модель верхней мантии *IASP91* рассчитана по стартовой модели *PREM-A* и изотропной версии *PREM* [Dziewonski & Anderson, 1981] в сочетании с континентальной корой *PREM-C*. *IASP91* построена для континентальной коры.

Различия моделей *PREM* и *IASP91* ощутимо сказываются на распределениях с глубиной упругих параметров Ламе.

На рис. 1.7.1 и 1.7.2 показаны зависимости от глубины упругих параметров Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  соответственно. Кривые построены для моделей *PREM*, *IASP91* и локальной модели массива Bohemia [Geissler W.H. et al., 2008]. Из рисунков видно, что значения параметра  $\lambda$  для моделей *PREM* и *IASP91* в большей степени отличаются друг от друга, чем значения параметра  $\mu$ . В то же время, значения обоих параметров для массива Bohemia лежат существенно ближе к кривым *IASP91*, нежели к *PREM*. То же верно и

для некоторых других локальных европейских моделей. В связи с этим, можно предварительно утверждать, что модель *IASP91* лучше характеризует строение коры и верхней мантии Европы, чем *PREM*. В дальнейшем (Глава 3) мы непосредственно убедимся в этом в ходе проведения сравнительного анализа рассчитанных и наблюдаемых значений параметров приливов на ряде европейских гравиметрических станций.

К основным видимым на рис. 1.7.1, 1.7.2 отличиям хода кривых  $\lambda$  и  $\mu$ , построенных по моделям *PREM* и *IASP91*, следует отнести следующие: Скачки кривых  $\lambda$  и  $\mu$ , соответствующие границе Мохо и подошве слоя *B* по классификации Буллена (глубина порядка 400 км), смещены у модели *IASP91* приблизительно на 10 км дальше от поверхности, чем у *PREM*. В результате в двух соответствующих 10-километровых слоях разность значений  $\lambda$  достигает 51% и 8% от значений *PREM*, а значения  $\mu$  разнятся на 38% и 8.5%. На кривых  $\lambda$  и  $\mu$  модели *IASP91* отсутствует видимый на кривых модели *PREM* скачок на глубине 223 км. В результате, разности между значениями  $\lambda$  и  $\mu$  на этой границе достигают 7 – 15% и 5 – 7% соответственно, постепенно убывая по мере приближения к границе Мохо и подошве слоя *B*. Еще одной особенностью является смещение у *IASP91* границы, находящейся у *PREM* на глубине 660 км, на глубину 670 км. Разности значений  $\lambda$  и  $\mu$  в этом 10-километровом слое составляют 15 и 25% соответственно. По разные стороны от этой границы (на большей и меньшей глубинах) они достигают 4 – 15% для  $\lambda$  и 25 – 26% для  $\mu$ . Для  $\lambda$  указанные разности достаточно плавно убывают до глубины 870 км и к основанию слоя *B*. Однако для  $\mu$  они практически не выходят за границы рассматриваемого 10-километрового промежутка. На глубинах, больших 670 км, значения параметров Ламе для обеих земных моделей слабо отличаются друг от друга. В среднем, в верхней мантии различия между значениями  $\lambda$  составляют несколько процентов, а между значениями  $\mu$  находятся в пределах 1 – 1.5%.

Различия в значениях упругих констант, вызванные диссипацией, в среднем в 2 – 3 раза больше, чем между моделями строения Земли. Так, для модели *PREM*, после пересчета упругих модулей с периода 1 с на период 12 ч, различия между ними в диапазоне глубин от нуля до 80 км достигают 0.6 и 1.1% для  $\lambda$  и  $\mu$  соответственно (рис.1.7.3). При этом, значения  $\lambda$  увеличиваются, а значения  $\mu$  уменьшаются. (На рис. 1.7.3 изображен результат вычитания в процентах значений  $\lambda$  для *PREM* 1с из значений для *PREM* 12 ч. Для  $\mu$  вычитание произведено в обратном порядке).

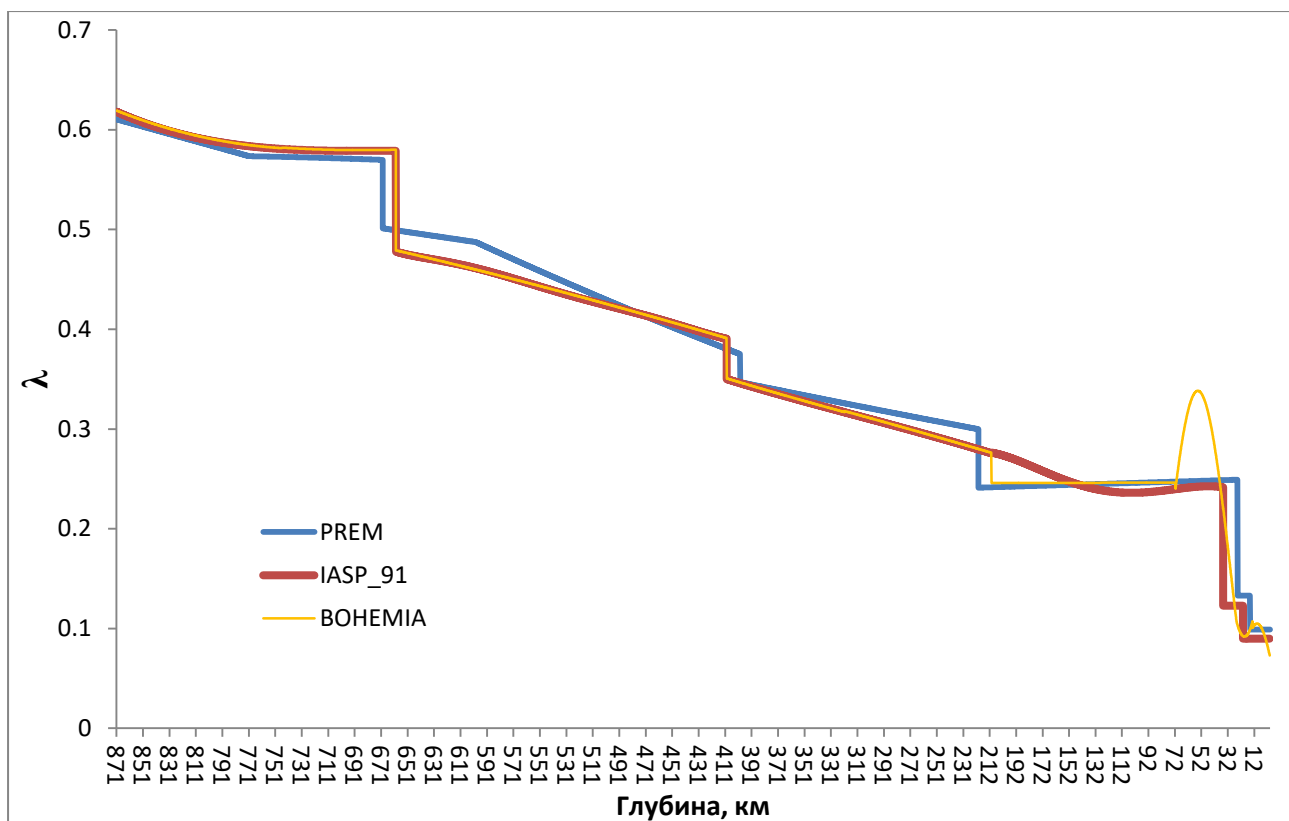


Рис. 1.7.1. Изменение с глубиной нормированных значений параметра Ламе  $\lambda$  для моделей *PREM*, *IASP91* и массива Bohemia.

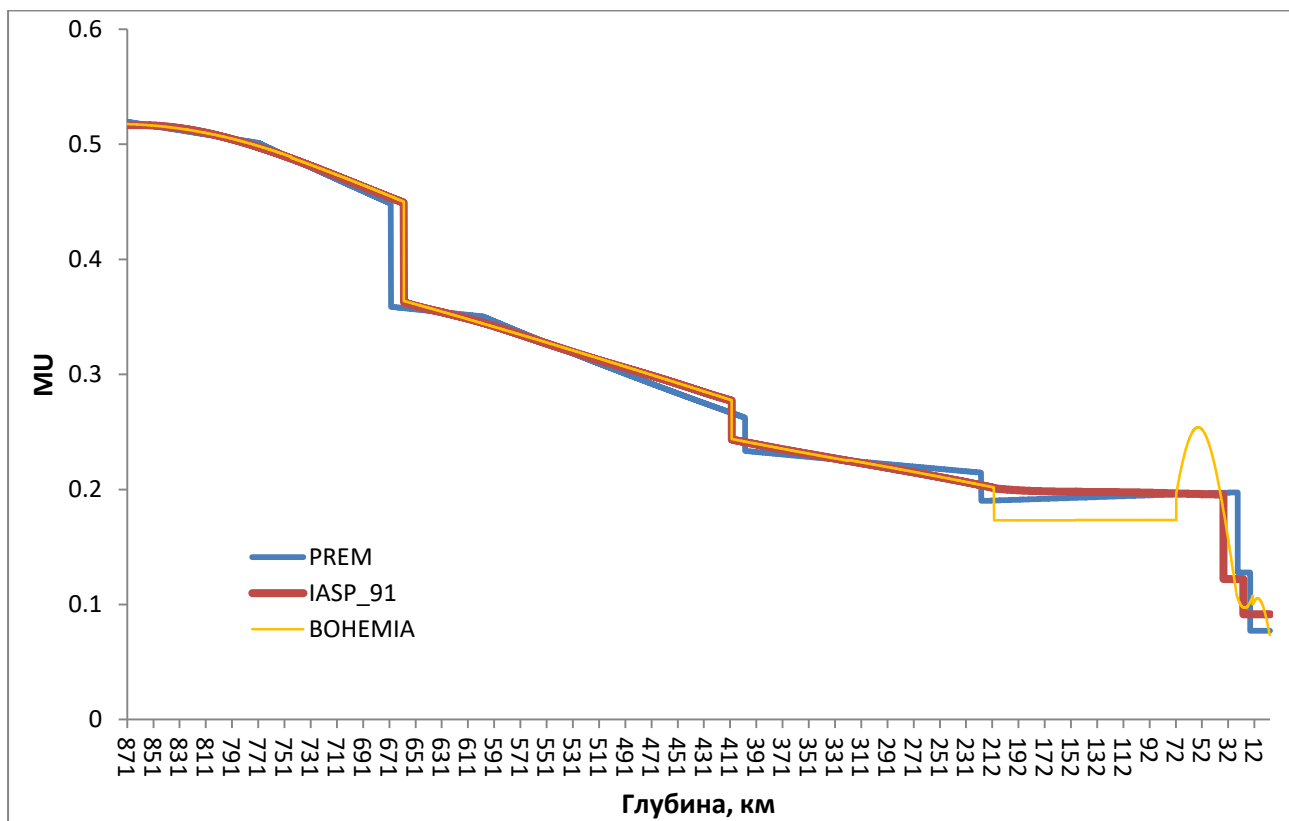


Рис. 1.7.2 Изменение с глубиной нормированных значений модуля сдвига  $\mu$  для моделей *PREM*, *IASP91* и массива Bohemia.



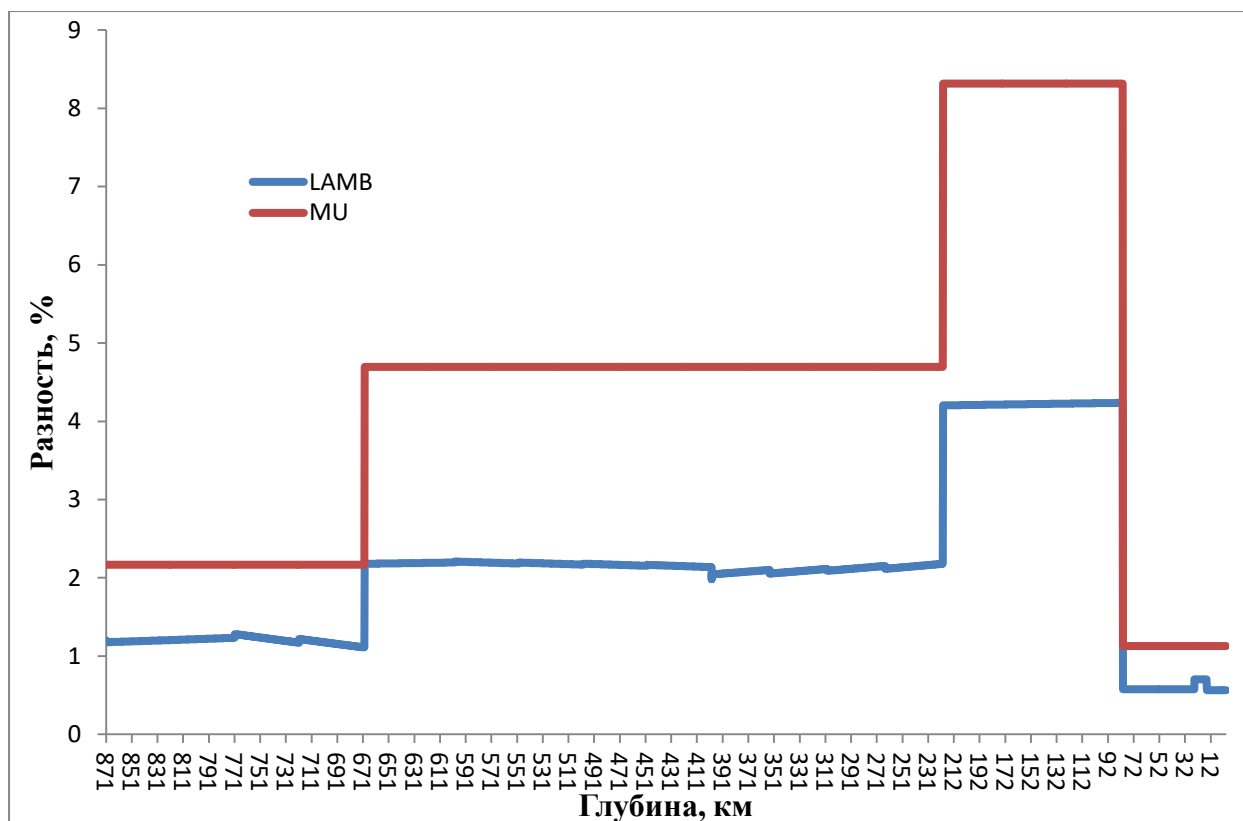


Рис. 1.7.3. Влияние диссипации. Относительное изменение с глубиной нормированных значений параметров Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  при переходе от модели *PREM 1* к *PREM 12* ч.

В средней части слоя *B* (глубины 80 – 220 км) рассматриваемые разности составляют 4% и 8%, а в диапазоне глубин от 220 км до 670 км – 6.2% и 4.7% для  $\lambda$  и  $\mu$  соответственно. В слое от 670 до 870 км указанные разности достаточно резко уменьшаются, составляя чуть больше 1% и 2%, и далее с глубиной практически не меняются вплоть до подошвы мантии.

Проведенный анализ изменений упругих параметров Ламе в зависимости от выбранной модели строения коры и верхней мантии, а также учета диссипации, позволяет ожидать связанных с ними вариаций значений нагрузочных чисел Лява, начиная уже с 20 – 30 порядка. Справедливость этого утверждения будет показана в разделе 2.3.

### 1.7.2. ОКЕАНИЧЕСКИЕ ПРИЛИВНЫЕ МОДЕЛИ

Для расчетов, проводимых в настоящей работе, мы применяем в основном одну из наиболее современных океанических приливных моделей FES2012. Однако на ранних этапах исследования применялись следующие три океанических модели: *CSR3.0*, *FES95.2* и модель Швидерского *SCW80*. Это вызвано желанием сравнить результаты вычислений с уже устоявшимися данными и, в первую очередь, с результатами, получаемыми при помощи программы *LOAD89* Фрэнсиса Оливье из пакета *ETERNA* Венцеля (разд. 2.4). Тем не менее, в проводимое в Главе 3 сопоставление результатов наших расчетов с данными наблюдений, а также в кратко обсуждаемые там же выводы работы [Спиридонов Е.А., Виноградова О.Ю., 2014], включены данные по 17 океаническим приливным моделям. Основные характеристики этих моделей сведены в табл. 1.7.1. Здесь же мы дадим краткий обзор некоторых из них.

Численные модели океанических приливов на основе приливных уравнений Лапласа, учитывающие эффекты трения, самопритяжения океанических масс и нагрузочную деформацию океанического дна, активно разрабатывались с конца 60-х по 80-е годы. Однако эти модели в основном лишь качественно совпадали с данными океанических приливных наблюдений и были недостаточно точны для применения в геодезической практике. Это было вызвано относительно плохим пространственным разрешением ( $1^\circ \times 1^\circ$ ) и, следовательно, неадекватным моделированием зон с приливной диссипацией в мелких морях. Для улучшения океанических моделей понадобились сравнения с наблюдениями прибрежных приливометров (мареографов).

В первой такой приливной модели Швидерского *SCW80* был применен метод так называемой гидродинамической интерполяции, учитывающий большое количество прибрежных и островных мареографических наблюдений, а также данных с придонных приливометров. Решения модели Швидерского являлись стандартом в геофизической практике в течение многих лет. Baker T.F. & Vos M.S. [2003] отмечают, что хотя эта модель дает замечательные результаты в целом ряде регионов, существует большое число мест, где расчеты по ней приводят к аномальным значениям. Для волны *M2* это гравиметрические станции в Центральной и Северной Европе, Китай, Япония, Куритиба (Бразилия) и Кэнтли (восточная Канада). Для *O1* модель Швидерского дает аномалии в Японии, Канберре, Куритибе и Боулдере.

Проблема, связанная с повышением разрешения численных океанических приливных моделей, привела к разработке гидродинамических моделей, основанных на методе

конечных элементов. Le Provost et al. [1994] разработали *FES94.1*, использующую ячейки размером 200 км на глубине и ячейки до 10 км в прибрежных зонах. *FES94.1* построена только по наблюдениям на границах океанов, однако она дала лучшие совпадения с приливометрическими наблюдениями в большем числе регионов, чем модель Швидерского. Данные альтиметрии *TOPEX/POSEIDON* выявили ошибки *FES94.1* в глубинных зонах океана. Опять же, это привело к разработке океанических моделей, основанных как на альтиметрических, так и приливометрических данных. В течение последующих нескольких лет большая часть новых океанических приливных моделей разрабатывалась по наблюдениям *TOPEX/POSEIDON* [Le Provost, 2001].

В модели Техасского университета *CSR3.0* [Eanes & Bettadpur, 1996] были применены данные альтиметрии *T/P* за 2.4 года для поиска поправок для длинных волн и исправления гидродинамической модели *FES94.1*. Модель имеет сетку  $0,5^\circ \times 0,5^\circ$  и сохраняет лучшие черты *FES94.1*, в то же время более точно обрабатывая длинные волны. *CSR4.0* является более поздним усовершенствованием *CSR3.0* по более длинным рядам *T/P*. За пределами широтной зоны  $\pm 66^\circ$ , т.е. зоны, покрываемой альтиметрией *T/P*, эта модель совпадает с *FES94.1*. Более поздняя *FES95.2* [Le Provost et al., 1998] объединяет в себя более раннюю версию *CSR2.0*, распространенную до глубин, больших 1000 м, и модель *FES94.1*. Проверка точности показала, что приливные модели, основанные на альтиметрии *T/P*, хорошо совпадают с наблюдениями *in situ* в глубоком океане (с точностью до нескольких сантиметров) [Le Provost, 2001]. Однако в мелководных зонах разница между моделями может достигать 50 см. Альтиметрия приводила здесь к менее точным результатам, чем в глубоководных зонах. Lefevre et al. [2000] разработали улучшенную модель *FES98*, основанную на методе конечных элементов. Эта модель объединила данные с приблизительно 700 прибрежных, островных и глубоководных мареографов. Эта модель полностью независима от данных альтиметрии и более точна на континентальных шельфах, нежели предыдущие модели *FES* (СКО – 11 см для *M2* против 22 см у модели *FES95.2*). В новой модели *FES99* [Lefevre, 2002] рассчитаны пять полусуточных и три суточные гармоники. При этом объединены данные с почти 700 мареографов и 678 измерений *T/P* для глубокого океана. Модель *FES99* считается более точной, чем предыдущие модели *FES*, как в глубоководных океанических зонах, так и почти повсеместно вдоль береговой линии.

Таблица 1.7.1. Основные характеристики приливных океанических моделей

Модель	Разрешение	Покрытие	Метод	Данные	Ссылки
SCW80	1°×1°	90°N-78°S	Гидродинамическая	Приливометры	Schwiderski (1980)
FES94.1	0.5°×0.5°	90°N-90°S	Гидродинамическая	Приливометры и T/P	Eanes&Bettadpur, 1996
FES95.2	0.5°×0.5°	90°N-85°S	Гидродинамическая	TOPEX/POSEIDON	Le Provost et al. (1998)
FES99	0.25°×0.25°	90°N-90°S`	Гидродинамическая	Приливометры и T/P	Lefevre, 2002
FES2004	0.125°×0.125°	90°N-90°S	Метод конечных элементов	T/P + ERS + TG	Letellier et al. (2004)
FES2012	0.0625°×0.0625°	90°N-90°S	Метод конечных элементов	T/P, Jason-1, Jason-2, ERS-1, ERS-2 end Envisat	Carrère L., et al. 2012
TPXO.2	0.5°×0.5°	70°N-78°S	Эмпирическая	TOPEX/POSEIDON	Egbert et al. (1994)
TPXO.6	0.25°×0.25°	90.125°N-90.125°S	Эмпирическая	TOPEX/POSEIDON	Egbert and Erofeeva (2002)
CSR3.0	0.5°×0.5°	90°N-78°S	Эмпирическая	TOPEX/POSEIDON	Eanes and Bettadpur (1995)
CSR4.0	0.5°×0.5°	90°N-90°S	Эмпирическая	TOPEX/POSEIDON	Eanes and Bettadpur (1995)
NA0.99b	0.5°×0.5°	89.75°N-89.75°S	Гидродинамическая	Приливометры и T/P	Matsumoto et al. (2000)
GOT00.2	0.5°×0.5°	90°N-90°S	Эмпирическая	T/P-ERS1-ERS2	Ray (1999)
GOT99.b	0.5°×0.5°	90°N-90°S	Гармонический метод/метод конечных элементов	T/P + TGb	Ray (1999)
TPXO7.1	0.25°×0.25°	90°N-90°S	Обратная задача, Jason-1	T/P, TG	Egbert and Erofeeva (2002)
TPXO7.2	0.25°×0.25°	90°N-90°S	Обратная задача, Jason-2	T/P, TG + GRACE	Egbert and Erofeeva (2002)
GNS		локальная	Гидродинамическая	Приливометры	Gjevik&Straume 1989; Gjeviketal., 1994
KP		локальная	Гидродинамическая	Приливометры	Kowalik&Proshutinsky,1993, 1994

Еще большей точностью отличаются полученные позднее модели *FES2004* и *FES2012* [Carrère L. et al., 2012]. Последняя модель является основной в программе *ATLANTIDA3.1\_2014* и имеет разрешение в 1/12 градуса.

Модель *TPXO.5* является более поздней версией океанической приливной модели Egbert et al. [1994]. В этой модели применены линеаризованные гидродинамические уравнения совместно с данными *T/P*. Последней версией этой модели является *TPXO8*. Эта модель имеет разрешение в 1/32 градуса. Помимо этого, в нее включены данные региональных приливных моделей.

Океаническая приливная модель *GOT99.2b* [Ray, 1999] использует гармонический анализ 6-летних данных *T/P* для исправления первичной модели разрешением  $0,5^\circ \times 0,5^\circ$ .

Модель *NAO99b* [Matsumoto et al., 2000] основана на пятилетних наблюдениях *T/P*, наложенных на  $0,5^\circ \times 0,5^\circ$  глобальную гидродинамическую модель. Особое внимание при ее создании было уделено повышению точности в мелководных зонах. Проверка этой модели при помощи мелководных мареографов и разностей альтиметрических данных показала, что *NAO99b* более точна в мелких морях, нежели *CSR4.0* или *GOT99.2b*.

Согласно Baker T.F. & Bos M.S. [2003], в Европе модели *TPXO.5*, *NAO99b* и *FES94.1* приводят для *M2* к существенным разностям, особенно на станциях, подверженных влиянию Северного моря. В итоге ими был сделан вывод о том, что более поздние океанические приливные модели приводят к лучшему совпадению с приливными гравиметрическими измерениями, чем более ранние модели, такие как модель Швидерского и *FES94.1*. Однако в настоящее время нет ни одной модели, которая бы давала полностью удовлетворительные результаты для всех регионов мира. Так, например, *FES94.1*, *95.2*, *98* и *99* дают для *M2* аномальные результаты в Китае и Японии, а также в Канберре (за исключением *FES98*). *FES94.1*, *FES98* и *FES99* приводят для *O1* к большим разностям в Китае и Японии, а *FES94.1* еще и в Канберре. *FES94.1* и *FES95.2* для *M2* дают аномалии в Куритибе и Кэнтли [Baker T.F. & Bos M.S., 2003].

## Выводы Главы 1

1. Учет в уравнениях Михаила Молоденского [1953, 1961] эллиптичности оболочки и вращения приводит к совсем незначительному усложнению системы 6 порядка. Так, в полученные уравнения (1.1.25) – (1.1.30) добавлены восемь достаточно простых слагаемых, отвечающих за эллиптичность, и еще два слагаемых, описывающих разность относительных и кориолисовых ускорений.

2. Показано, что задача расчета чисел Лява и амплитудных дельта-факторов приливных волн для вращающейся эллипсоидальной неупругой Земли без океана с учетом их широтной зависимости может быть решена методом Лява.

## **ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ОКЕАНИЧЕСКОГО ГРАВИМЕТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА И МОДЕЛИРОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЗЕМНЫХ ПРИЛИВОВ**

Данная глава содержит основные численные результаты работы. Здесь, прежде всего, обсуждаются рассчитанные значения чисел Лява и амплитудных дельта-факторов для Земли без океана (раздел 2.1). Далее рассмотрены различные аспекты вычисления океанического гравиметрического эффекта. В разделе 2.2 приводится общая характеристика полученного распределения океанического нагрузочного эффекта по земному шару, а затем (разд. 2.3) проводится сравнение полученных значений нагрузочных чисел Лява и рассчитанных по ним функций Грина с работами других авторов. Также в этом разделе отдельно обсуждается влияние на нагрузочные числа Лява и дельта-факторы эллиптичности, вращения, а также относительных и кориолисовых ускорений. Раздел 2.4 посвящен сравнению результатов расчета нагрузочного океанического эффекта при помощи программ *ATLANTIDA3.1\_2014* и *LOAD89* из пакета *ETERNA3.3*. Далее (разд. 2.5 и 2.6) получена оценка влияния на величину океанического гравиметрического эффекта особенностей строения коры и верхней мантии, а также диссипации. В разделе 2.7 оценивается величина неприливного океанического нагрузочного эффекта, а в разделе 2.8 обсуждаются результаты комплексного моделирования океанического гравиметрического эффекта для неупругой эллипсоидальной вращающейся Земли. В разделе 2.9 приведены значения амплитудных дельта-факторов для Земли с океаном. Наконец, в разделе 2.10 обсуждаются отличительные особенности и функциональные возможности разработанной автором настоящей работы прикладной программы прогноза параметров земных приливов *ATLANTIDA3.1\_2014*, при помощи которой производилась большая часть вычислений. В этой программе практически полностью реализованы все теоретические разработки, приведенные в Главе 1.

## 2.1. ЧИСЛА ЛЯВА И АМПЛИТУДНЫЕ ДЕЛЬТА-ФАКТОРЫ ДЛЯ ЗЕМЛИ БЕЗ ОКЕАНА И ИХ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ШИРОТЫ

### 2.1.1. Нормировки чисел Лява. Вид широтной зависимости

Для получения представленных в этом разделе значений чисел Лява дополнительно была реализована следующая последовательность вычислений.

В результате интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка (1.1.32) – (1.1.37) были получены три необходимые для расчета чисел Лява нормированные функции широты и радиуса порядка  $n$ :  $\bar{H}$ ,  $\bar{T}$  и  $\bar{R}$ .

Согласно нормировкам (1.1.31) на сфере единичного радиуса ( $r = a = 1$ ) для чисел Лява имеем:

$$h_{sphere} = (2n + 1)\bar{H}, \quad l_{sphere} = \bar{T}, \quad k_{sphere} = \bar{R} - 1, \quad (2.1.1)$$

Можно показать, что вычисленные по числам  $h_{sphere}$  и  $k_{sphere}$  из (2.1.1) значения приливных амплитудных факторов, предназначенных моделирования гравиметрических приливов, удовлетворяют определению Международной службы земных приливов (ICET). В то же время, числа (2.1.1) не соответствуют их определению, данному в Соглашениях Международной службы вращения Земли (IERS) [MacCarthy, 1996 (Note 21); Gerard Petit and Brian Luzum, 2010 (Note 36)] в части расчета вертикальных и горизонтальных смещений. Действительно, числа Лява, входящие в выражения (8) и (9) работы [MacCarthy, 1996, стр.61] и предназначенные для расчета смещений земной поверхности, нормированы на величину экваториального радиуса. Таким образом, для применения наших чисел в указанных формулах необходима их перенормировка, продемонстрированная ниже на примере смещений второго порядка ( $n=2$ ).

Производя перенормировку первого из выражений (1.1.9) для  $n=2$ , с учетом (1.1.31) и (2.1.1), для смещений второго порядка имеем:

$$u_r = \frac{a^2}{r^2} H \frac{\omega(a)}{g_0} = \frac{1}{\bar{r}^4} h_{sphere} \frac{\omega(a)}{g_0} = \frac{1}{\bar{r}^8} h_{sphere} \frac{\omega(r)}{g(r)}$$

или при  $r = R_e$

$$u_r = \frac{1}{R_e^8} h_{sphere} \frac{\omega(R_e)}{g(R_e)} = h \frac{\omega(R_e)}{g(R_e)}. \quad (2.1.2)$$

Здесь  $h = \frac{h_{sphere}}{R_e^8}$ ,  $g(R_e) = \frac{GM}{R_e^2} = 9.79828685 \text{ м/с}^2$  [MacCarthy, 1996 (Note 21), стр. 49].

Выражение для вертикального смещения (2.1.2) полностью удовлетворяет Соглашениям IERS, т.е. выражению (8) из [MacCarthy, 1996, стр.61]. Аналогичные действия для



горизонтальных смещений приводят для чисел  $l$  к понижающему множителю  $\frac{1}{\bar{R}_e^9}$ .

Отличие нормировки числа  $l$  от числа  $h$  вызвано присутствием множителей  $1/r$  во втором и третьем равенствах (1.1.9). Для чисел  $k$  обсуждаемая перенормировка сводится к

выражению:  $k = \frac{k_{sphere}}{R_e^2}$ . Она определяется только нормировкой (1.1.31). Здесь

$\bar{R}_e = \frac{R_e}{a} = 1.001120$ , где  $R_e = 6378136.55$  м – принятое *IERS* значение экваториального радиуса [MacCarthy, 1996 (Note 21), стр. 49],  $a = 6371000$  – средний радиус эквивалентной сферы, для которой мы производили интегрирование.

Таким образом, пересчет значений чисел Лява (2.1.1) на значения, применяемые в формулах (8) [MacCarthy, 1996], приводит при  $n=2$  к следующим множителям:

$$h = \frac{h_{sphere}}{R_e^8} \approx 0.991084 \cdot h_{sphere}, \quad (2.1.3)$$

$$l = \frac{l_{sphere}}{R_e^9} \approx 0.989975 \cdot l_{sphere}, \quad (2.1.4)$$

$$k = \frac{k_{sphere}}{R_e^2} \approx 0.997700 \cdot k_{sphere}. \quad (2.1.5)$$

В соответствии с формулой (9) из [MacCarthy, 1996], перенормировка чисел  $h$  и  $l$  третьего порядка требует дополнительного деления выражений (2.1.3) и (2.1.4) на  $\bar{R}_e$ . Это приводит к понижающим коэффициентам в правых частях этих формул, равным 0.989975 и 0.988867 соответственно. Выражение (2.1.5) остается при этом неизменным.

После указанной выше перенормировки полученные широтные зависимости чисел Лява для сфероидальных колебаний были представлены в следующем виде:

$$A(\phi) = A + A^+ \left( \frac{3}{2} \sin^2 \phi - \frac{1}{2} \right), \quad (2.1.6)$$

где  $A$  – средние значения дельта-факторов или чисел Лява  $h$ ,  $k$  и  $l$ ,  $A^+$  – амплитуды их широтных зависимостей,  $\phi$  – геоцентрическая широта станции. Именно этот вид зависимости входит в формулы для расчета смещений в Соглашениях *IERS*. Зависимость (2.1.6) хорошо описывает изменение с широтой всех трех чисел Лява как второго, так и третьего порядка. В этом удалось убедиться непосредственно при помощи метода наименьших квадратов. Отклонение зависимости (2.1.6) для всех чисел Лява и значений дельта-фактора лежит в пределах единиц в седьмом знаке после запятой. Обсуждению полученных автором настоящей работы численных значений коэффициентов выражения

(2.1.6) для чисел  $h$ ,  $k$  и  $l$  и амплитудных факторов второго и третьего порядка собственно и посвящены следующие два подраздела.

### 2.1.2 Числа Лява второго порядка

Полученные в работе численные результаты представлены в табл. 1–7 и рис. 1–21.

#### Числа Лява (2;2) для полусуточных волн

Значения чисел Лява  $h$ ,  $k$  и  $l$  были определены для 12 различных моделей, отличающихся друг от друга включением или выключением отдельных параметров. Для облегчения восприятия различий между этими моделями их основные отличительные особенности сведены в первые 8 столбцов табл. 2.1.1, в которой представлены значения чисел Лява и амплитудных дельта-факторов второго порядка для полусуточных волн (см. также табл. 2.1.5 – 2.1.7). Первый столбец (Model) содержит номер модели. Для сравнения сюда также включены гидростатическая (DDW/H) и негидростатическая (DDW/NH) модели из работы [Dehant V., Defraigne P., Wahr J.M., 1999], а также результаты из работы [Mathews, P. M., 2001]. Вторым столбцом (Earth model) содержит краткое указание на применяемый вариант модели строения Земли. Практически все результаты получены для эллипсоидальной Земли, за исключением Модели 1. Эту позицию фиксирует третий столбец таблицы (Shape).

В последующих двух столбцах отмечено присутствие или отсутствие (+ или -) центробежной силы (столбец Centrifugal), а также относительных и кориолисовых ускорений (столбец Coriolis).

Шестой столбец ( $\tau$ ) показывает включение или выключение (+ или -) обсуждаемого в разделе 1.1 напряжения, содержащего функцию  $\tau$  (см., например, обсуждение после формулы (1.1.14), формулу (1.1.27) и Приложение D). Это напряжение выделено отдельно, поскольку не содержится явно в цитируемых здесь работах других авторов. В седьмом столбце (H/NH) показан тип модели с точки зрения ее гидростатичности. Для негидростатических моделей сжатие земной поверхности принято согласно [McCarthy, D.D., 1996]. Это значение применяется при расчете изменения сжатия с глубиной. Наконец, в последних двух столбцах указаны: применяемая при расчетах функция крипа (столбец Creep  $f$ ), а также период ( $T$ ), на который пересчитаны упругие модули модели. Символы  $\log$  и  $\alpha$  обозначают логарифмическую и степенную (frequency-to-the-power- $\alpha$  model) функции крипа соответственно. В последующих 8 столбцах приведены значения коэффициентов, входящих в формулу (2.1.6), предназначенную для описания широтных зависимостей чисел Лява и амплитудных дельта-факторов.

Обсудим прежде всего результаты, полученные для полусуточных волн (табл. 2.1.1).

Таблица 2.1.1. Числа Лява для полусуточных волн второго порядка (2;2)

Модель	Earth model	Shape	Centrifugal	Coriolis	tay	H/NH	Creep f	T	h	h+	k	k+	l	l+	$\delta$	$\delta+$
Модель 1	PREM+1066A	sphere	-	-	-	H	-	1s	0.59799	0.00000	0.29736	0.00000	0.08303	0.00000	1.15632	0.00000
Модель 2	PREM+1066A	ellips	-	-	-	H	-	1s	0.59799	-0.00203	0.29736	-0.00362	0.08303	0.00023	1.15632	0.00339
Модель 3	PREM+1066A	ellips	+	-	-	H	-	1s	0.59740	-0.00142	0.29479	-0.00104	0.08297	0.00042	1.15959	0.00013
Модель 4	PREM+1066A	ellips	+	-	-	H	log	200s	0.60096	-0.00145	0.29685	-0.00105	0.08389	0.00043	1.16009	0.00012
Модель 5	PREM+1066A	ellips	+	+	-	H	log	200s	0.60171	-0.00053	0.29721	-0.00066	0.08396	0.00037	1.16031	0.00046
DDW/H	PREM+1066A	ellips	+	+	-	H	log	300s	0.60175	-0.00048	0.29751	-0.00057	0.08392	0.00004	1.16038	0.00028
Модель 5a	PREM+1066A	ellips	+	+	-	H	log	300s	0.60198	-0.00053	0.29737	-0.00066	0.08403	0.00037	1.16035	0.00046
Модель 6	PREM+1066A	ellips	+	+	+	H	log	200s	0.60171	-0.00025	0.29721	-0.00054	0.08396	0.00037	1.16031	0.00055
Модель 7	PREM+1066A	ellips	+	+	+	NH	log	200s	0.60171	-0.00026	0.29721	-0.00056	0.08396	0.00037	1.16031	0.00057
Модель 8	PREM+1066A	ellips	+	+	+	NH	log	12h	0.60538	-0.00027	0.29934	-0.00056	0.08493	0.00038	1.16081	0.00056
Модель 9	PREM+IASP91	ellips	+	+	+	NH	log	12h	0.60627	-0.00022	0.29949	-0.00052	0.08482	0.00037	1.16147	0.00056
Mathews	PREM	ellips	+	+	-	NH	alfa	12h	0.60671	-0.00062	0.29954	-0.00080	0.08496	0.00032	-	-
Модель 10	PREM+1066A	ellips	+	+	-	NH	alfa	12h	0.60804	-0.00056	0.30049	-0.00069	0.08516	0.00038	1.16176	0.00046
Модель 11	PREM+1066A	ellips	+	+	+	NH	alfa	12h	0.60805	-0.00028	0.30052	-0.00056	0.08516	0.00038	1.16173	0.00056
Модель 12	PREM+IASP91	ellips	+	+	+	NH	alfa	12h	0.60869	-0.00024	0.30057	-0.00054	0.08507	0.00038	1.16230	0.00057
DDW/NH	PREM+1066A	ellips	+	+	-	NH	alfa	12H	0.61042	-0.00048	0.30235	-0.00058	0.08609	0.00000	1.16184	0.00040

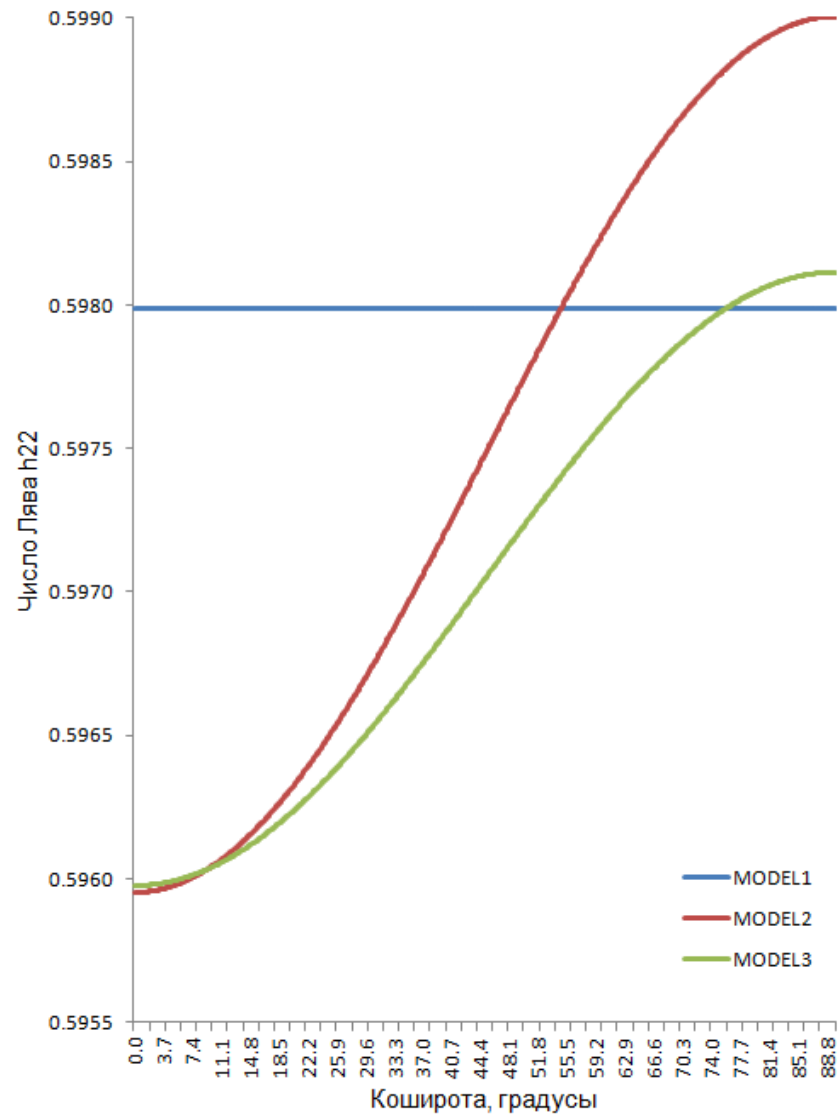


Рис. 2.1.1 Число Лява  $h(2;2)$  для полусуточных волн. Модели 1-3.

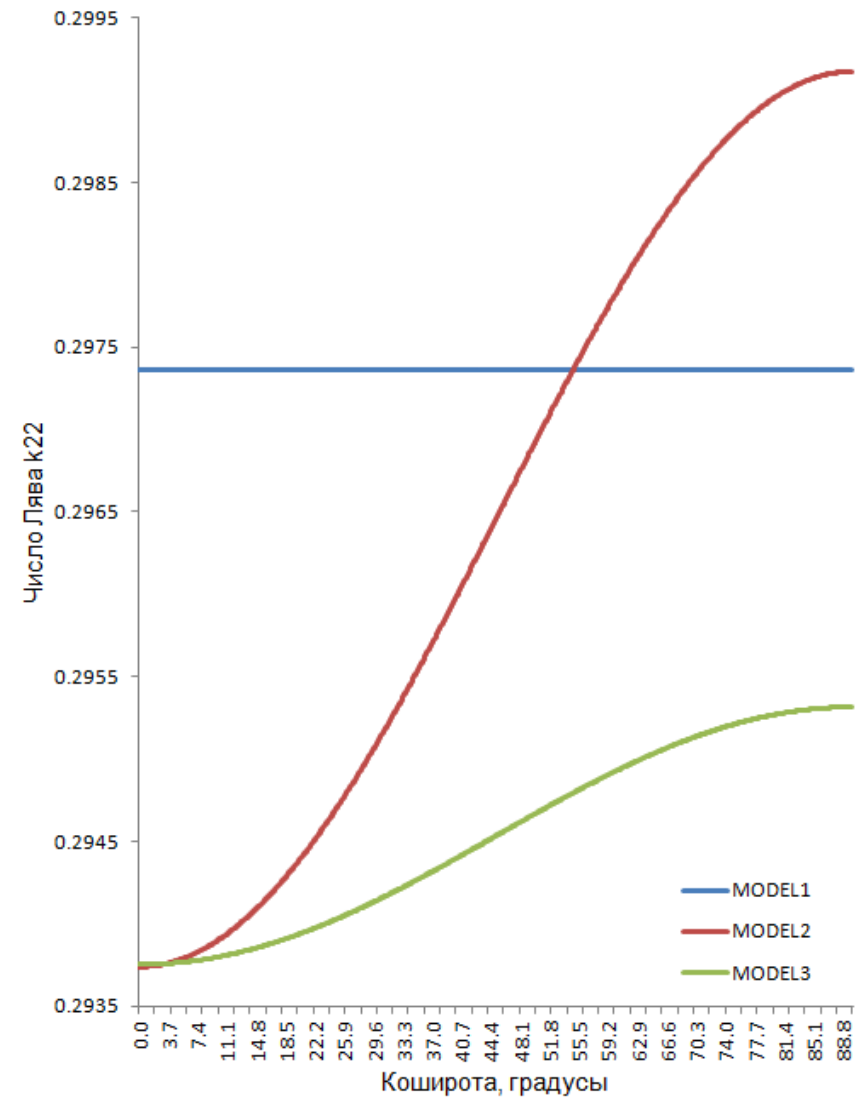


Рис. 2.1.2 Число Лява  $k(2;2)$  для полусуточных волн. Модели 1-3.

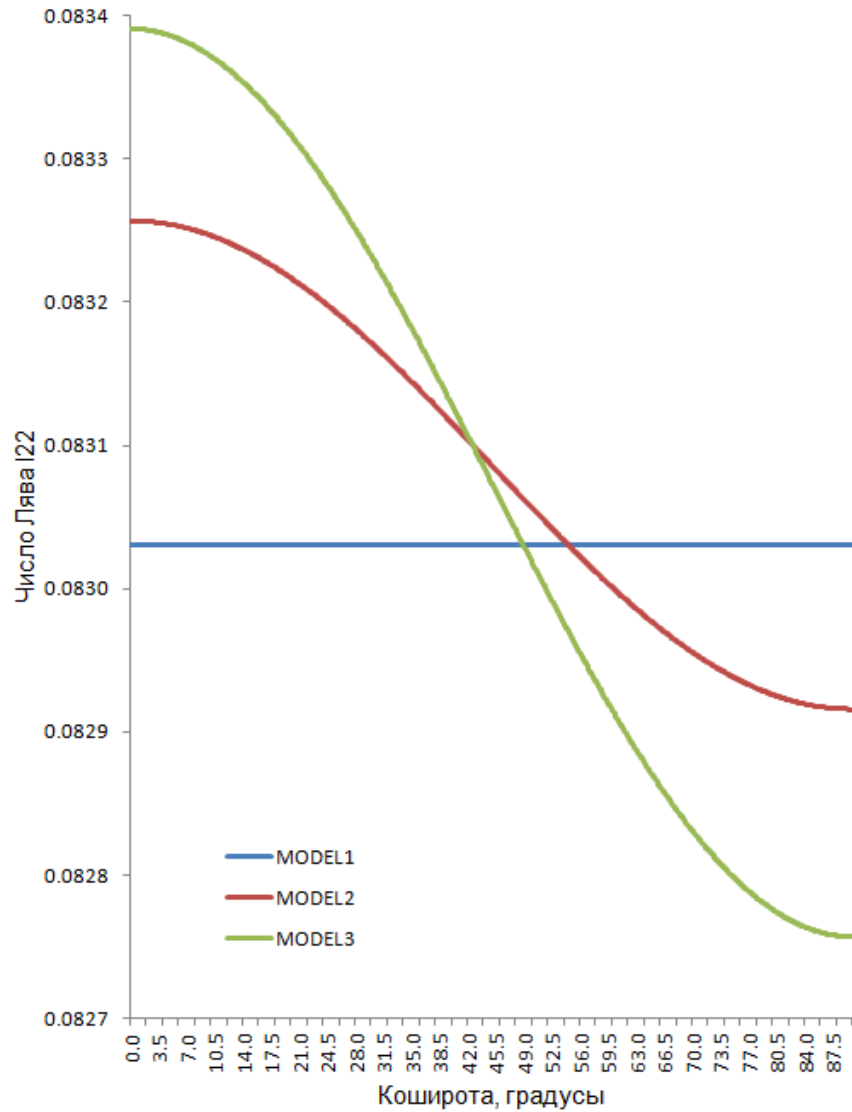


Рис. 2.1.3 Число Лява  $l(2,2)$  для полусуточных волн. Модели 1-3.

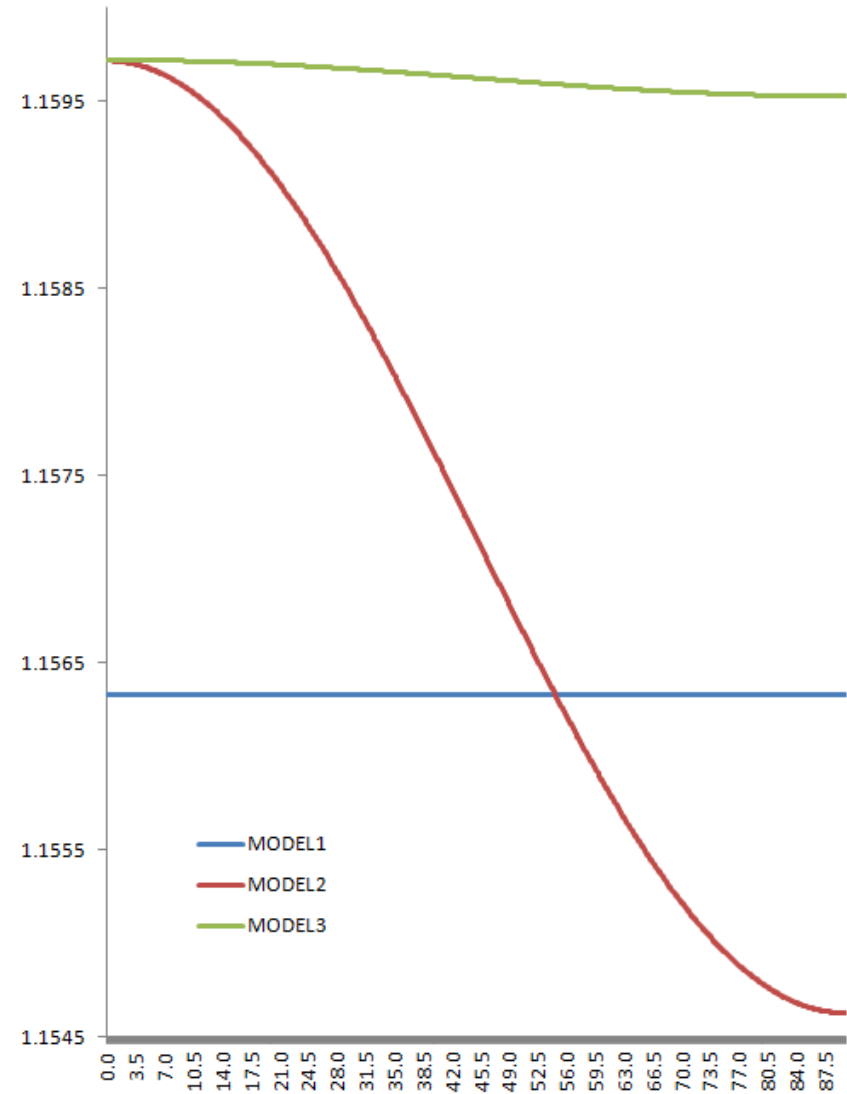


Рис. 2.1.4 Амплитудный фактор  $\delta(2,2)$  для полусуточных волн. Модели 1-3.

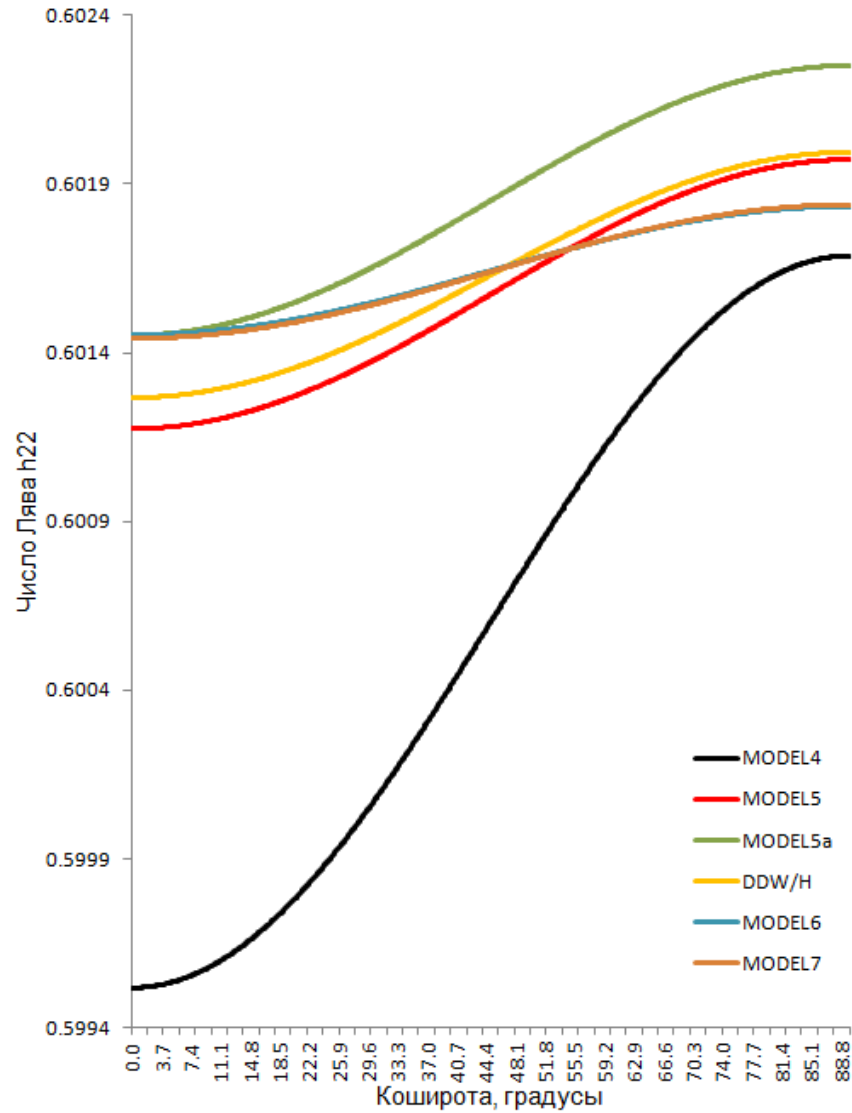


Рис. 2.1.5 Число Лява  $h(2;2)$  для полусуточных волн. Модели 4-7.

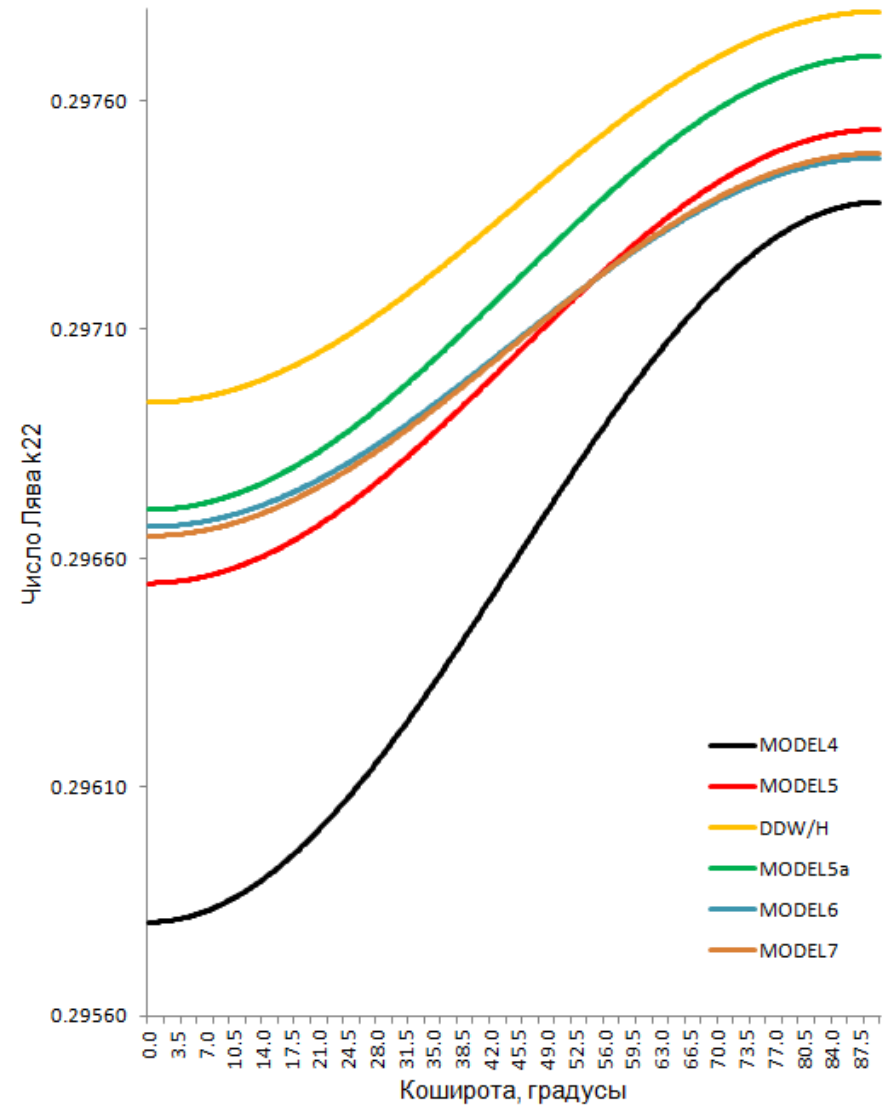


Рис. 2.1.6 Число Лява  $k(2;2)$  для полусуточных волн. Модели 4-7.

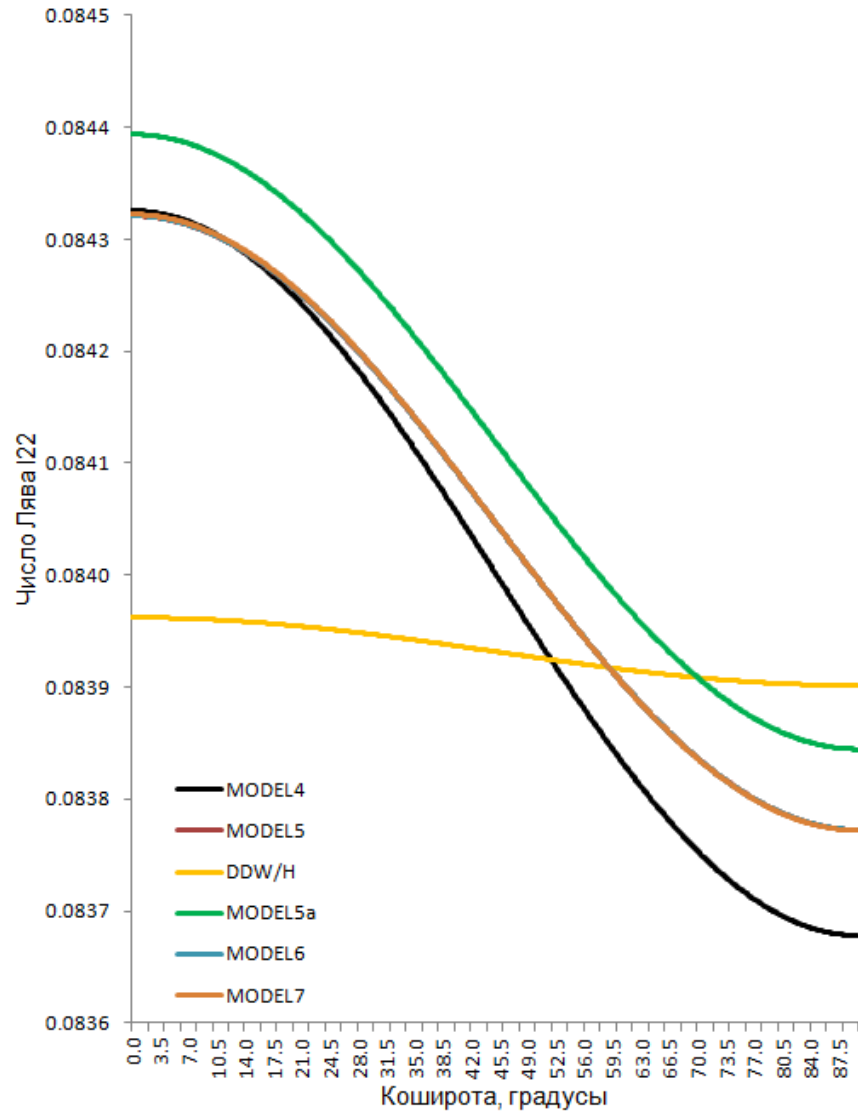


Рис. 2.1.7 Число Лява  $\lambda(2;2)$  для полусуточных волн. Модели 4-7.

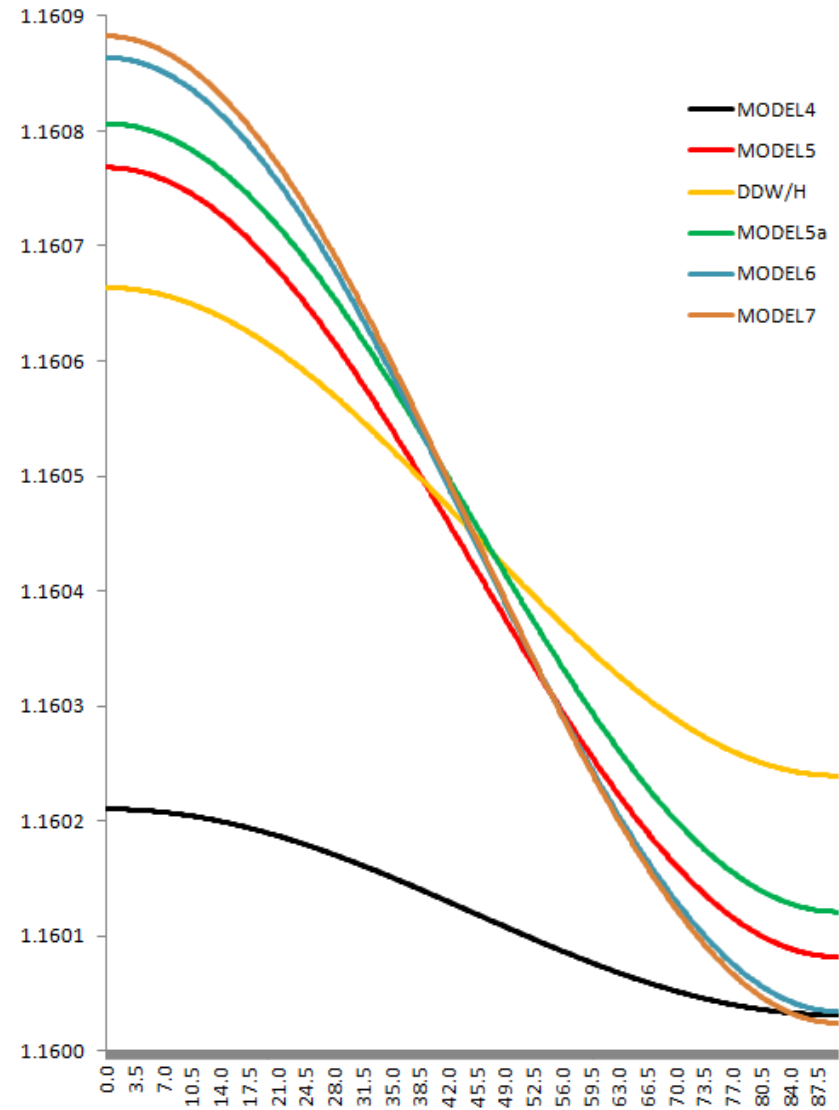


Рис. 2.1.8 Амплитудный фактор  $\delta(2;2)$  для полусуточных волн. Модели 4-7.

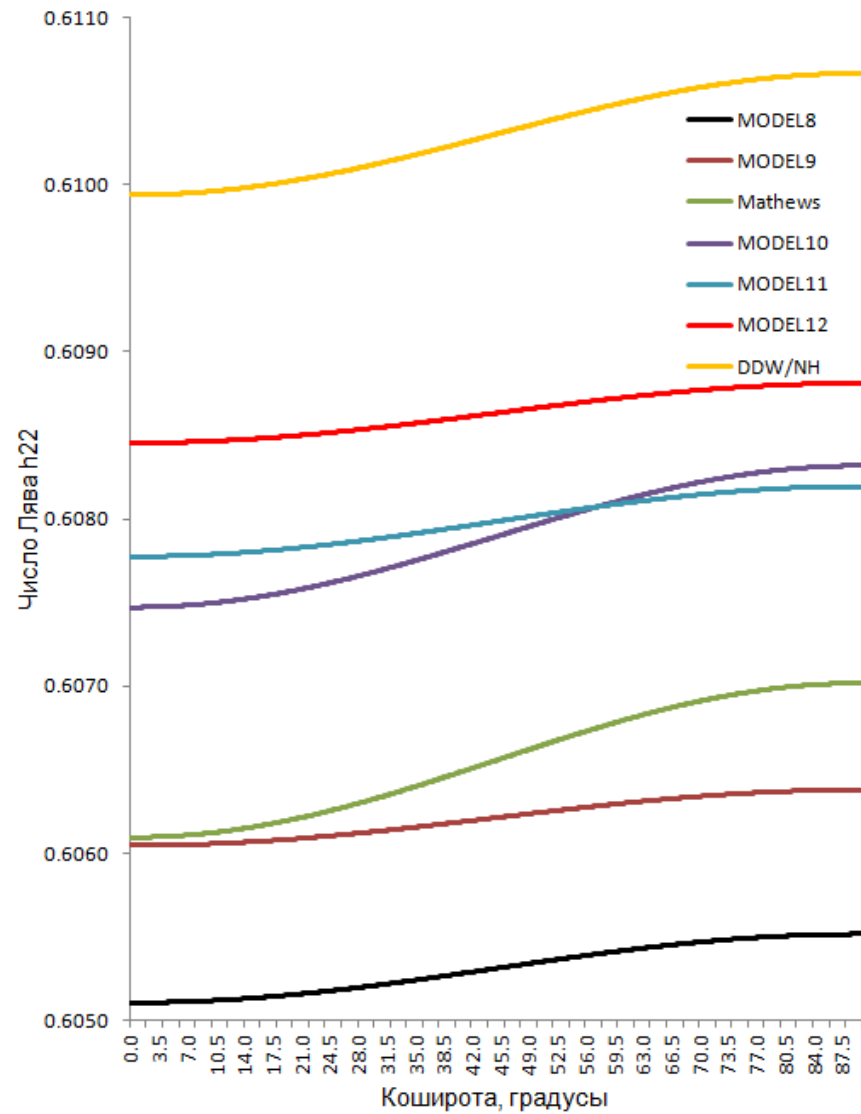


Рис. 2.1.9 Число Лява  $h(2;2)$  для полусуточных волн. Модели 8-12.

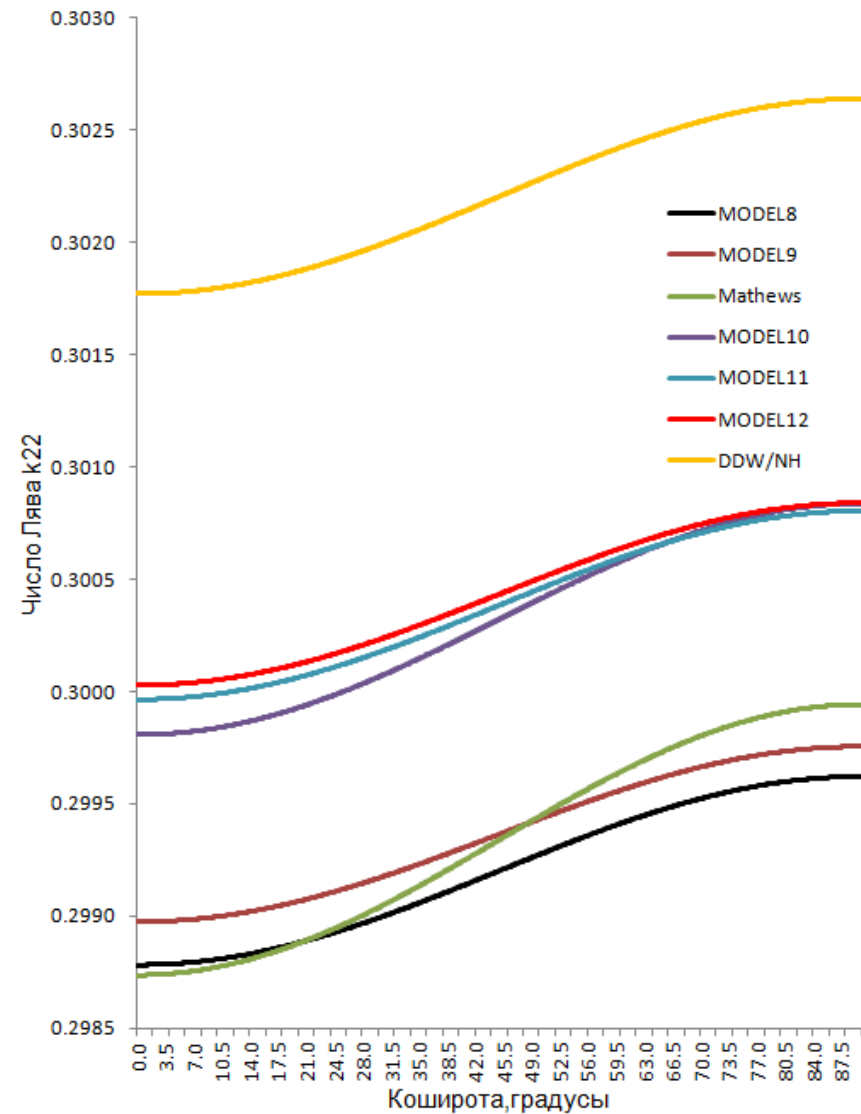


Рис. 2.1.10 Число Лява  $k(2;2)$  для полусуточных волн. Модели 8-12.



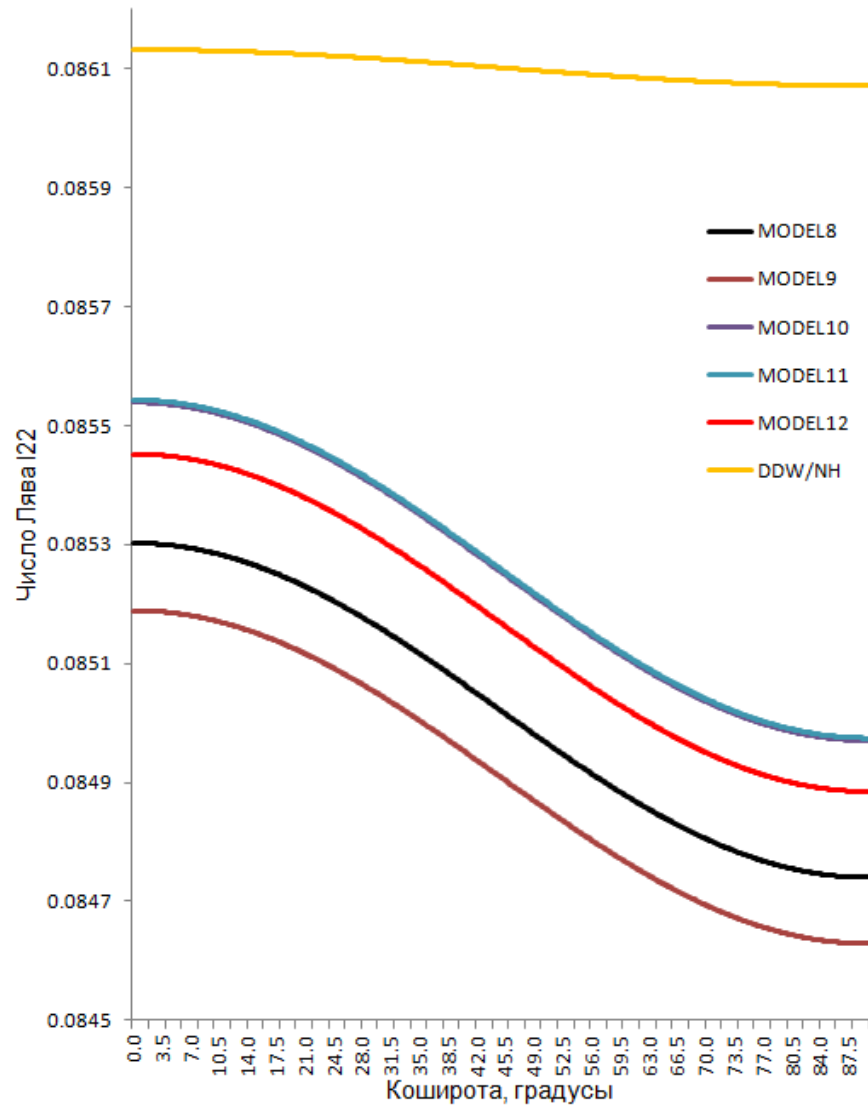


Рис. 2.1.11 Число Лява  $I(2;2)$  для полусуточных волн. Модели 8-12.

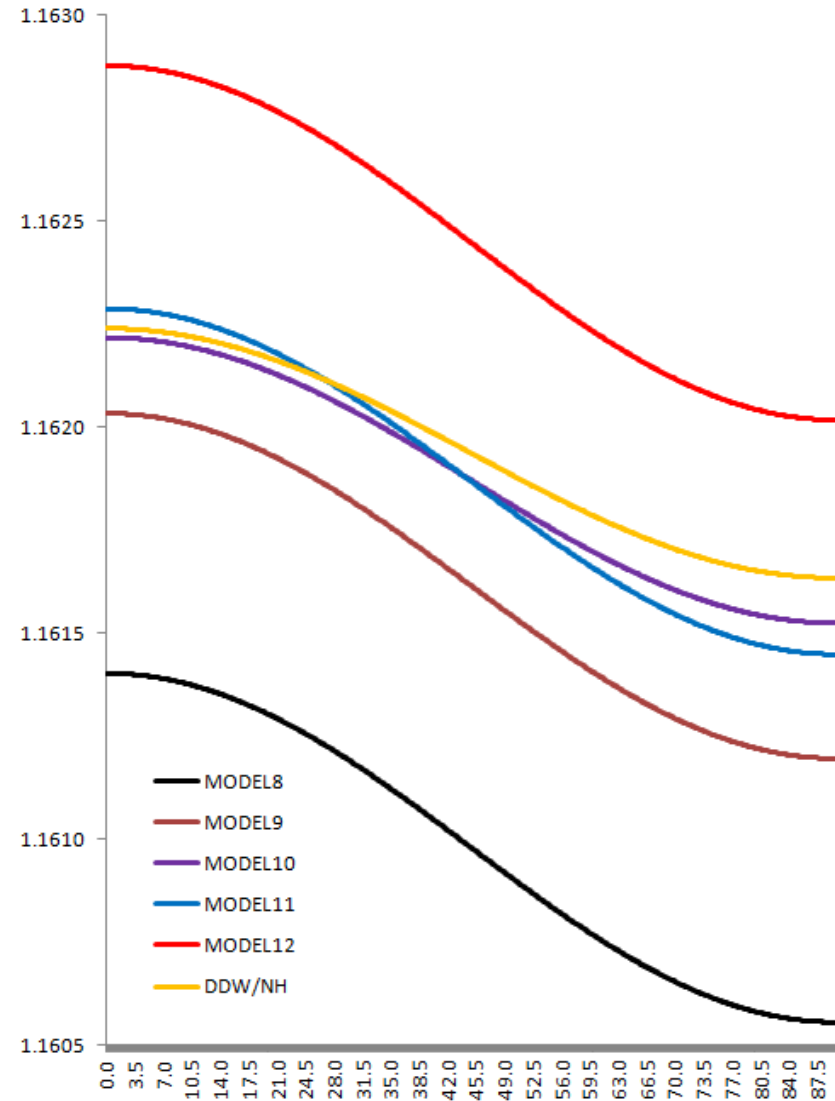


Рис. 2.1.12 Амплитудный фактор  $\delta(2;2)$  для полусуточных волн. Модели 8-12.

Эти результаты также представлены на рис. 2.1.1 – 2.1.12.

Модель 1 построена для сферической упругой невращающейся гидростатически уравновешенной Земли. Применена модель строения Земли *PREM*, два верхних слоя которой, как и в работе [Dehant et al., 1999], заменены слоями модели *1066A*. Референц-период 1 с. При построении этой модели в уравнениях были занулены все слагаемые, отвечающие за зависимость чисел Лява от широты.

Модель 2 отличается от Модели 1 введением эллиптичности (без центробежной силы). При этом появляется достаточно резкая зависимость чисел Лява и амплитудного фактора от широты. Значения чисел  $h$  и  $k$  достаточно быстро нарастают от полюса к экватору, а значения числа Лява  $l$  и дельта-фактора, наоборот, падают (табл. 2.1.1., рис. 2.1.1 – 2.1.4).

Введение центробежной силы, прежде всего, существенно снижает скорость изменения с широтой значений чисел Лява  $h$  и  $k$ , а также дельта-фактора. Включению в рассмотрение этой силы соответствует Модель 3. Так, по сравнению с Моделью 2, перепад значений между полюсом и экватором в Модели 3 уменьшается для чисел  $h$  и  $k$  в 1.4 и 3.5 раза соответственно (рис. 2.2.1, 2.1.2), а для дельта-фактора почти в 26 раз (рис. 2.1.4), т.е. значения последнего практически перестают зависеть от широты. Скорость изменения с широтой числа  $l$  при переходе от Модели 2 к Модели 3, наоборот, нарастает почти в два раза.

Модель 4 отличается от Модели 3 только тем, что результаты здесь получены для референц-периода 200 с. Переход от 1 с к 200 с практически не меняет вида широтных зависимостей чисел Лява и дельта-фактора (значения  $h^+$ ,  $k^+$ ,  $l^+$  и  $\delta^+$  в табл. 2.1.1 остаются практически неизменными), однако значимо меняет их средние значения. Средние значения чисел  $h$ ,  $k$  и  $l$  увеличиваются на 0.0036 (0.6%), 0.0021 (0.7%) и 0.0009 (1.1%) соответственно. Меньше всего изменяется значение дельта-фактора. Оно увеличивается всего на 0.0005 (или 0.04%). Таким образом, наибольшие изменения претерпевают значения чисел  $k$  и  $l$  (рис. 4–6).

После добавления к результатам Модели 4 поправок за относительные и кориолисовы ускорения получаем Модель 5. При переходе от Модели 4 к Модели 5 значения чисел Лява и дельта-фактора полусуточных волн изменяются на единицы в четвертом знаке после запятой. Среднее значение числа  $h$  увеличивается на 0.00074 (0.12%), а числа  $k$  – на 0.00035 (0.12%). Среднее значение числа  $l$  остается практически неизменным, символически увеличиваясь на 0.00006 (0.07%), а средняя величина дельта-фактора возрастает на 0.00012 (0.01%) (табл. 2.1.1). При этом в Модели 5 по сравнению с Моделью 4 значимо уменьшаются модули амплитуд широтных зависимостей чисел Лява ( $h^+$ ,  $k^+$ ,  $l^+$ ),

а модуль  $\delta^+$ , наоборот, возрастает. В результате, в Модели 5, в сравнении с Моделью 4, перепад значений чисел Лява  $h$ ,  $k$  и  $l$  между полюсом и экватором уменьшается в 2.7, 1.6 и 1.2 раза соответственно, а аналогичный перепад дельта фактора возрастает в 3.8 раза (рис. 2.1.5-2.1.8). Таким образом, введение поправок за относительные и кориолисовы ускорения приводят в основном к изменению скорости роста широтных кривых. При этом наиболее существенно меняются значения дельта-фактора и чисел  $h$  и  $k$ .

Следует отметить, что результаты Модели 5 очень близки к результатам модели *DDW/H* [Dehant et al., 1999]. Так, среднее значение числа Лява  $h$ , полученное в Модели 5, всего на 0.00005 (0.008%) меньше, а значение числа  $l$  на 0.00003 (0.04%) больше соответствующих значений модели *DDW/H*. Несколько больше отличия значений числа  $k$  (0.00030 или 0.10%). Дельта-факторы отличаются на 0.00012 (0.01%). В большей степени отличаются широтные зависимости двух сравниваемых моделей. Коэффициент  $k^+$  нашей модели превышает по модулю аналогичный коэффициент модели *DDW/H* почти на 14%, а коэффициент  $l^+$  больше почти в 9 раз, однако его значения для обеих моделей достаточно малы. Коэффициент  $\delta^+$  возрастает на 61%. В тоже время, как видно из табл. 2.1.1, коэффициенты  $h^+$  Модели 5 и модели *DDW/H* отличаются друг от друга в меньшей степени (всего на 8%).

Как указано в работе [Dehant et al, 1999], значения чисел Лява модели *DDW/H* приведены для референц-периодов 300 с. В связи с этим, была рассмотрена дополнительная Модель 5а, которая отличается от Модели 5 только величиной периода, равного также 300 с (табл. 2.1.1, рис. 2.1.5–2.1.8). Применение этого периода приводит к уменьшению отличий средних значений числа  $k$ , а также дельта-фактора  $\delta$  Модели 5а от модели *DDW/H* по сравнению с Моделью 5 почти в 2.14 и 1.5 раза соответственно. Наше число  $k$  больше полученного в *DDW/H* на 0.00014 (0.04%). Для дельта-фактора эти отличия составляют 0.00008 (0.01%). В то же время, соответствующие различия для чисел  $h$  и  $l$ , наоборот, несколько возрастают (в 4.6 и 3.7 раза соответственно) и составляют по абсолютной величине 0.00023 (0.04%) и 0.00011 (0.13%). Амплитуды широтных зависимостей ( $h^+$ ,  $k^+$ ,  $l^+$  и  $\delta^+$ ) двух наших Моделей 5 и 5а не отличаются друг от друга.

В Модели 6 мы опять возвращаемся к референц-периоду 200 с Модели 5, дополнительно учитывая упомянутое выше напряжение, содержащее функцию  $\tau$ . Прежде всего отметим, что эта добавка совершенно не влияет на среднее значение и амплитуду широтной зависимости числа  $l$ , т.е. значения чисел  $l$  и  $l^+$  Моделей 5 и 6 не отличаются друг от друга. Это, очевидно, объясняется тем обстоятельством, что добавляемое напряжение действует вдоль нормали к земной поверхности. Также не меняются по абсолютной величине средние значения чисел  $h$  и  $k$ . Однако величины  $h^+$  и  $k^+$  в Модели 6

несколько меньше по модулю, чем в Модели 5, (-0.00025 против -0.00053 и -0.00054 против -0.00066 соответственно). То есть, величина  $k^+$  становится ближе к аналогичному значению модели *DDW/H* (-0.00057), а величина  $h^+$  – почти в два раза меньше принятого в *DDW/H* значения -0.00048. Величина  $\delta$  при переходе от Модели 5 к Модели 6 уменьшается всего на 0.00003, а  $\delta^+$  – в 1.2 раза. Таким образом, наибольшие изменения, связанные с введением напряжения, содержащего функцию  $\tau$ , претерпевает широтная зависимость  $h^+$  числа  $h$ , что несколько удаляет значения этого числа от результатов модели *DDW/H*.

В Модели 7 дополнительно учтено негидростатическое поведение оболочки. Эта модель отличается от Модели 6 профилем сжатия. Значение сжатия на поверхности, как уже было сказано выше, принято согласно Соглашениям *IERS* [McCarthy, D.D., 1996]. Из сравнения результатов Моделей 6 и 7 видно, что они полностью идентичны, за исключением символического изменения величин  $h^+$  и  $k^+$ . Таким образом, учет негидростатичности не оказывает практически никакого влияния на результаты, полученные для полусуточных волн. Впрочем, этот же вывод содержится и в работе [Dehant V., Defraigne P., Wahr J.M., 1999].

Обсудим теперь результаты, полученные для полусуточных волн с учетом диссипации.

Модель 8 (табл. 2.1.1, рис. 2.1.8–2.1.12) отличается от Модели 7 значением периода, который составляет 12 ч. Пересчет осуществлялся при помощи логарифмической функции крипа. Учет диссипации приводит к существенному росту всех трех средних значений чисел Лява и дельта-фактора. Так числа  $h$ ,  $k$  и  $l$  возрастают соответственно на 0.00367 (0.6%), 0.00213 (0.7%) и 0.00097 (1.2%). Изменение дельта-фактора составило 0.00053 (0.05%). Таким образом, введение диссипации в наибольшей степени влияет на число  $l$ .

Модель 9 отличается от Модели 8 тем, что в ней произведена замена верхних 760 км модели *PREM* моделью *IASP91*. В результате подобной замены средние значения чисел  $h$  и  $k$  в сравнении с Моделью 8 увеличились на 0.00089 (0.15%) и 0.00015 (0.05%) при почти неизменных амплитудах их широтных зависимостей  $h^+$ ,  $k^+$ . Дельта-фактор  $\delta$  вырос на (0.05%). Значение числа  $l$ , наоборот, уменьшилось на 0.00011 (0.13%). Таким образом, наиболее чувствительными к варьированию строения коры и верхней мантии являются числа  $h$  и  $k$ . К сказанному следует добавить, что именно по Модели 9 были получены наилучшие результаты при определении амплитудных дельта-факторов для неупругой вращающейся Земли с океаном в смысле их совпадения с наблюдаемыми значениями, полученными на сети GGP для территории Европы. Подробнее об этих результатах см. [Спиридонов Е.А., 2017] и Главу 3 настоящей работы.

Еще одной особенностью Модели 9 является то, что несмотря на различие применяемых функций крипа, полученные при помощи нее результаты оказались достаточно близки к таковым из работы [Mathews, P. M., 2001]. Полученные Mathews P. M [2001] средние значения чисел  $h$ ,  $k$  и  $l$  больше значений Модели 9 на 0.00044 (0.07%), 0.00005 (0.02%) и 0.00015 (0.17%) соответственно. В относительной мере наибольшее различие относится к числу  $l$ . Скорость изменения чисел Лява с широтой в Модели 9 также значительно меньше, чем в работе [Mathews, P. M., 2001], за исключением, пожалуй, числа  $l$ .

Модели 10–12 демонстрируют значения чисел Лява, рассчитанные для периода 12 часов с применением степенной функции крипа. Модель 10 аналогична Модели 5, т.е. не содержит напряжения, определяемого функцией  $\tau$ . Модели 11 и 12 аналогичны Моделям 8 и 9 и отличаются от них только применяемой функцией крипа. Значения чисел Лява и дельта-факторов этих моделей занимают промежуточное положение между результатами Моделей 8, 9 и модели *DDW/NH*.

Обсудим теперь результаты для суточных волн.

### **Числа Лява (2;1) и амплитудные факторы для суточных волн**

Результаты для суточных волн показаны в табл. 2.1.2 – 2.1.5 и рис. 2.1.13 – 2.1.20. В таблицах последовательно представлены значения чисел  $h$ ,  $k$ ,  $l$ , а также дельта-факторов  $\delta$  для 9 суточных волн ( $\sigma Q1$ ,  $Q1$ ,  $\rho 1$ ,  $O1$ ,  $P1$ ,  $K1$ ,  $\psi 1$ ,  $\phi 1$  и  $OO1$ ). Результаты приведены только для основных, рассмотренных выше моделей (Модели 5, 5а, 6, 8 и 9). При этом, для моделей 5, 5а, и 6 применена резонансная кривая модели *DDW/H*, а для моделей 8 и 9 – модели *DDW/NH*. Для сравнения приведены значения моделей *DDW/H*, *DDW/NH*, а также полученные Mathews [2001]. В целом, соотношения между полученными в различных моделях значениями чисел Лява для суточных волн остаются теми же, что и для полусуточных волн.

Рассмотрим прежде всего результаты, полученные для числа  $h$ .

Результаты Моделей 5 и 5а для этого числа, как и в случае полусуточных волн (2;2), достаточно близки к результатам *DDW/H* (табл. 2.1.2). Так, средние значения чисел  $h$  Модели 5 меньше таковых для модели *DDW/H* для волн  $\sigma Q1$ ,  $Q1$ ,  $\rho 1$ ,  $O1$  и  $OO1$  в пределах 0.003%. Несколько больше эти отличия для волн  $K1$ ,  $\psi 1$  и  $\phi 1$  (0.004%, 0.012% и 0.005%). Однако, самое большое из этих отличий все же ничтожно мало и не может быть обнаружено по данным современных GNSS-наблюдений. Соответствующие отличия модели *DDW/H* от нашей Модели 5а почти на порядок больше.

Таблица 2.1.2. Числа Лява  $h$  для суточных волн второго порядка (2;1)

Волны	Модель 5		DDW/H		Модель 5a		Модель 6		Модель 8		Модель 9		Mathews (2001)		DDW/NH	
	h	h+	h	h+	h	h+	h	h+	h	h+	h	h+	h	h+	h	h+
$\sigma Q1$	0.59665	-0.00052	0.59667	-0.00049	0.59692	-0.00052	0.59653	-0.00025	0.60080	-0.00028	0.60167	-0.00022	0.60391	-0.00061	0.60590	-0.00049
Q1	0.59621	-0.00052	0.59623	-0.00049	0.59648	-0.00052	0.59609	-0.00025	0.60033	-0.00028	0.60119	-0.00022	0.60355	-0.00061	0.60542	-0.00049
$\rho 1$	0.59615	-0.00052	0.59617	-0.00049	0.59642	-0.00052	0.59603	-0.00025	0.60026	-0.00028	0.60112	-0.00022	0.60348	-0.00061	0.60535	-0.00049
O1	0.59551	-0.00052	0.59553	-0.00049	0.59578	-0.00052	0.59539	-0.00025	0.59958	-0.00028	0.60044	-0.00023	0.60278	-0.00061	0.60466	-0.00049
P1	0.57409	-0.00057	0.57410	-0.00051	0.57434	-0.00057	0.57397	-0.00027	0.57716	-0.00030	0.57799	-0.00025	0.58169	-0.00063	0.58206	-0.00054
K1	0.51398	-0.00071	0.51400	-0.00066	0.51421	-0.00071	0.51386	-0.00034	0.51786	-0.00037	0.51860	-0.00030	0.52829	-0.00071	0.52226	-0.00066
$\psi 1$	0.93384	0.00026	0.93395	0.00023	0.93426	0.00026	0.93374	0.00012	1.07751	0.00029	1.07908	0.00023	1.05684	-0.00013	1.08671	0.00051
$\varphi 1$	0.65419	-0.00039	0.65422	-0.00034	0.65449	-0.00039	0.65408	-0.00018	0.66470	-0.00020	0.66565	-0.00016	0.66446	-0.00055	0.67032	-0.00037
OO1	0.60090	-0.00051	0.60092	-0.00046	0.60117	-0.00051	0.60078	-0.00024	0.60530	-0.00027	0.60617	-0.00022	0.60796	-0.00061	0.61044	-0.00049

Таблица 2.1.3. Числа Лява  $k$  для суточных волн второго порядка (2;1)

Волны	Модель 5		DDW/H		Модель 5a		Модель 6		Модель 8		Модель 9		Mathews (2001)		DDW/NH	
	k	k+	k	k+	k	k+	k	k+	k	k+	k	k+	k	k+	k	k+
$\sigma Q1$	0.29364	-0.00092	0.29393	-0.00079	0.29380	-0.00092	0.29364	-0.00075	0.29618	-0.00078	0.29633	-0.00073	0.29801	-0.00080	0.29916	-0.00081
Q1	0.29341	-0.00092	0.29371	-0.00079	0.29357	-0.00092	0.29341	-0.00075	0.29594	-0.00078	0.29609	-0.00073	0.29785	-0.00080	0.29891	-0.00081
$\rho 1$	0.29338	-0.00092	0.29367	-0.00079	0.29354	-0.00092	0.29338	-0.00075	0.29590	-0.00078	0.29605	-0.00073	0.29781	-0.00080	0.29888	-0.00081
O1	0.29306	-0.00092	0.29335	-0.00079	0.29321	-0.00092	0.29306	-0.00075	0.29556	-0.00078	0.29571	-0.00073	0.29748	-0.00080	0.29853	-0.00081
P1	0.28221	-0.00090	0.28249	-0.00077	0.28236	-0.00090	0.28221	-0.00073	0.28427	-0.00076	0.28441	-0.00071	0.28692	-0.00078	0.28713	-0.00079
K1	0.25179	-0.00084	0.25205	-0.00073	0.25193	-0.00084	0.25179	-0.00069	0.25441	-0.00072	0.25454	-0.00067	0.25748	-0.00072	0.25697	-0.00074
$\psi 1$	0.46427	-0.00122	0.46477	-0.00105	0.46452	-0.00122	0.46427	-0.00100	0.53619	-0.00115	0.53646	-0.00106	0.52622	-0.00125	0.54166	-0.00119
$\varphi 1$	0.32275	-0.00097	0.32308	-0.00084	0.32292	-0.00097	0.32275	-0.00079	0.32834	-0.00083	0.32850	-0.00077	0.32856	-0.00086	0.33164	-0.00086
OO1	0.29577	-0.00092	0.29607	-0.00080	0.29593	-0.00092	0.29577	-0.00075	0.29843	-0.00079	0.29858	-0.00073	0.30014	-0.00080	0.30143	-0.00081

Таблица 2.1.4. Числа Лява  $l$  для суточных волн второго порядка (2;1)

Волны	Модель 5		DDW/H		Модель 5a		Модель 6		Модель 8		Модель 9		Mathews (2001)		DDW/NH	
	$l$	$l_+$	$l$	$l_+$	$l$	$l_+$	$l$	$l_+$	$l$	$l_+$	$l$	$l_+$	$l$	$l_+$	$l$	$l_+$
$\sigma Q1$	0.08292	0.00039	0.08303	0.00006	0.08299	0.00039	0.08292	0.00039	0.08415	0.00035	0.08404	0.00035	0.08450	-0.00032	0.08544	0.00003
Q1	0.08296	0.00039	0.08306	0.00006	0.08303	0.00039	0.08296	0.00039	0.08418	0.00035	0.08408	0.00035	0.08455	-0.00032	0.08548	0.00003
$\rho 1$	0.08296	0.00039	0.08306	0.00006	0.08303	0.00039	0.08296	0.00039	0.08419	0.00035	0.08408	0.00035	0.08456	-0.00032	0.08549	0.00003
O1	0.08299	0.00039	0.08309	0.00006	0.08306	0.00039	0.08299	0.00039	0.08422	0.00035	0.08411	0.00035	0.08462	-0.00032	0.08552	0.00003
P1	0.08368	0.00043	0.08378	0.00006	0.08375	0.00043	0.08368	0.00043	0.08498	0.00039	0.08487	0.00039	0.08534	-0.00032	0.08630	0.00003
K1	0.08555	0.00053	0.08567	0.00006	0.08562	0.00053	0.08555	0.00053	0.08696	0.00050	0.08685	0.00050	0.08689	-0.00031	0.08831	0.00006
$\psi 1$	0.07246	-0.00019	0.07248	-0.00003	0.07252	-0.00019	0.07246	-0.00019	0.06832	-0.00051	0.06823	-0.00051	0.07103	-0.00033	0.06927	-0.00006
$\varphi 1$	0.08118	0.00029	0.08128	0.00003	0.08125	0.00029	0.08118	0.00029	0.08207	0.00023	0.08197	0.00023	0.08282	-0.00032	0.08332	0.00003
OO1	0.08286	0.00038	0.08297	0.00003	0.08293	0.00038	0.08286	0.00038	0.08406	0.00034	0.08396	0.00034	0.08461	-0.00032	0.08536	0.00003

Таблица 2.1.5. Амплитудные дельта-факторы  $\delta$  для суточных волн второго порядка (2;1)

Волны	Модель 5		DDW/H		Модель 5a		Модель 6		Модель 8		Модель 9		Mathews (2001)		DDW/NH	
	$\delta$	$\delta_+$	$\delta$	$\delta_+$	$\delta$	$\delta_+$	$\delta$	$\delta_+$	$\delta$	$\delta_+$	$\delta$	$\delta_+$	$\delta$	$\delta_+$	$\delta$	$\delta_+$
$\sigma Q1$	1.15241	0.00024	1.15255	0.00014	1.15245	0.00024	1.15237	0.00029	1.15294	0.00036	1.15357	0.00035	1.15404	0.00014	1.15399	0.00026
Q1	1.15264	0.00023	1.15278	0.00014	1.15268	0.00023	1.15261	0.00027	1.15316	0.00035	1.15380	0.00034	1.15405	0.00014	1.15421	0.00025
$\rho 1$	1.15265	0.00022	1.15279	0.00014	1.15269	0.00022	1.15262	0.00027	1.15317	0.00034	1.15381	0.00034	1.15405	0.00014	1.15422	0.00025
O1	1.15265	0.00020	1.15277	0.00011	1.15268	0.00020	1.15261	0.00024	1.15316	0.00032	1.15380	0.00032	1.15396	0.00014	1.15421	0.00023
P1	1.14774	-0.00058	1.14782	-0.00037	1.14778	-0.00058	1.14773	-0.00070	1.14818	-0.00039	1.14881	-0.00038	1.14889	0.00014	1.14919	-0.00029
K1	1.13312	-0.00279	1.13307	-0.00171	1.13316	-0.00278	1.13318	-0.00337	1.13420	-0.00227	1.13482	-0.00224	1.13493	0.00014	1.13512	-0.00163
$\psi 1$	1.23541	0.01262	1.23624	0.00780	1.23545	0.01261	1.23500	0.01526	1.26638	0.01549	1.26711	0.01532	1.26531	0.00017	1.26819	0.01109
$\varphi 1$	1.16730	0.00236	1.16754	0.00146	1.16734	0.00236	1.16720	0.00285	1.16890	0.00239	1.16955	0.00237	1.16926	0.00014	1.17005	0.00171
OO1	1.15461	0.00040	1.15474	0.00026	1.15465	0.00040	1.15457	0.00049	1.15517	0.00051	1.15580	0.00050	1.15551	0.00014	1.15622	0.00037

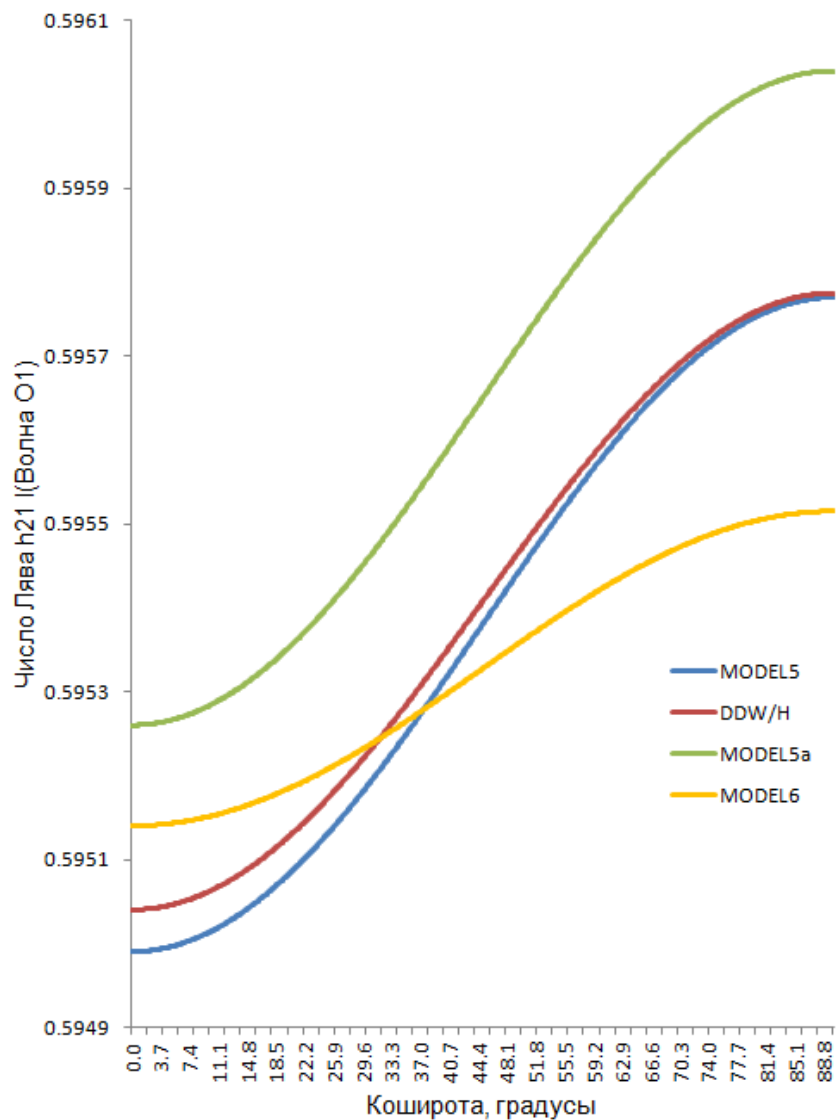


Рис. 2.1.13 Число Лява  $h(2;1)$  для волны O1. Модели 5, 5а, 6.

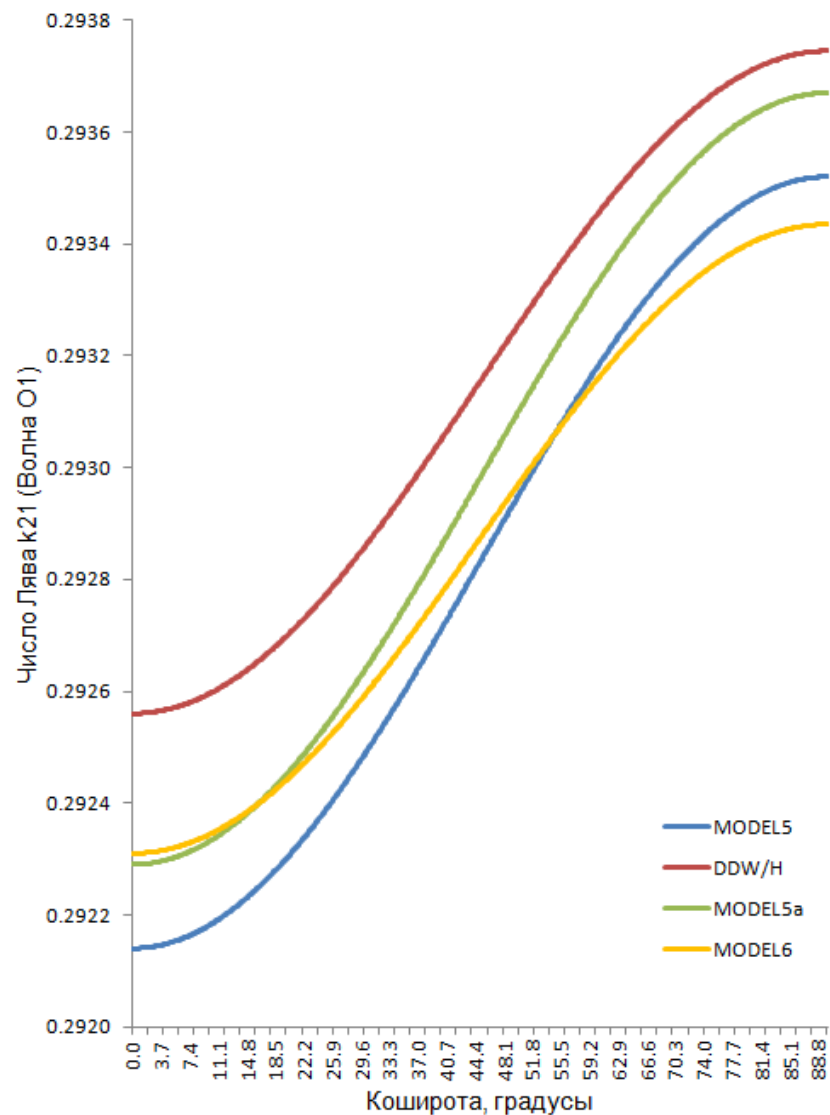


Рис. 2.1.14 Число Лява  $k(2;1)$  для волны O1. Модели 5, 5а, 6.



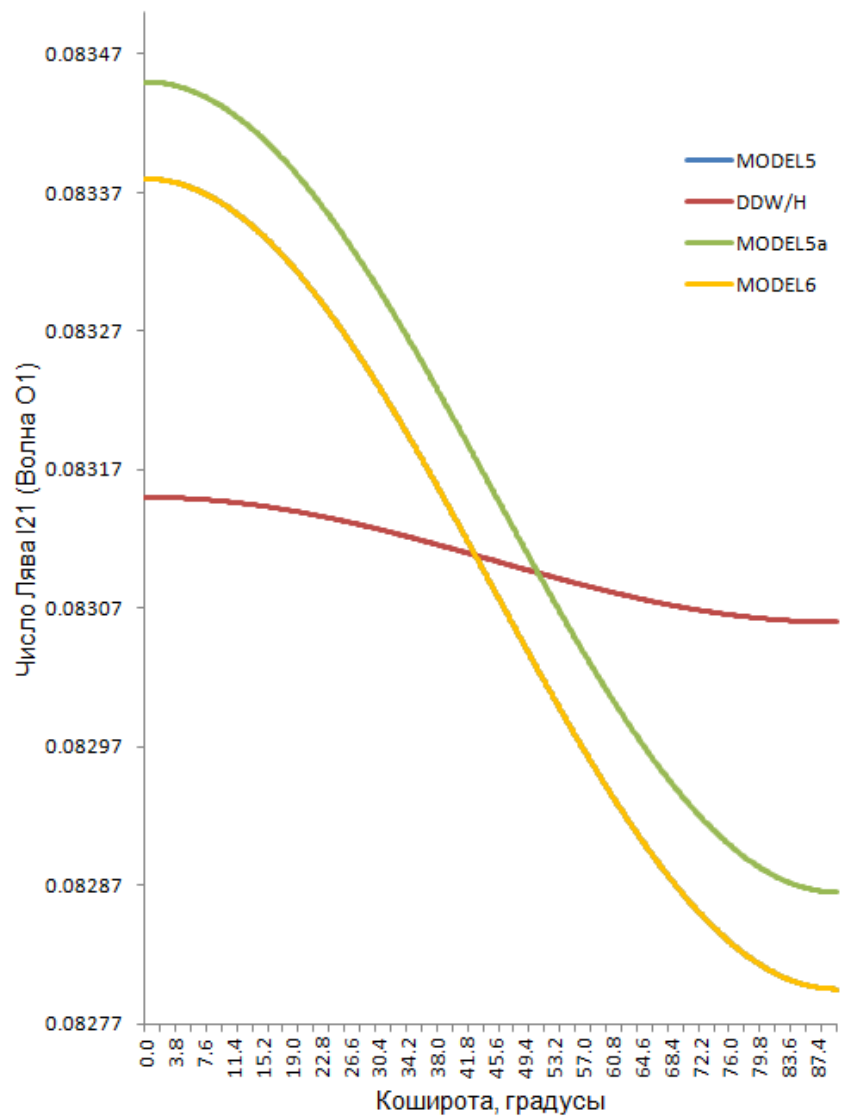


Рис. 2.1.15 Число Лява  $l(2;1)$  для волны O1. Модели 5, 5а, 6.

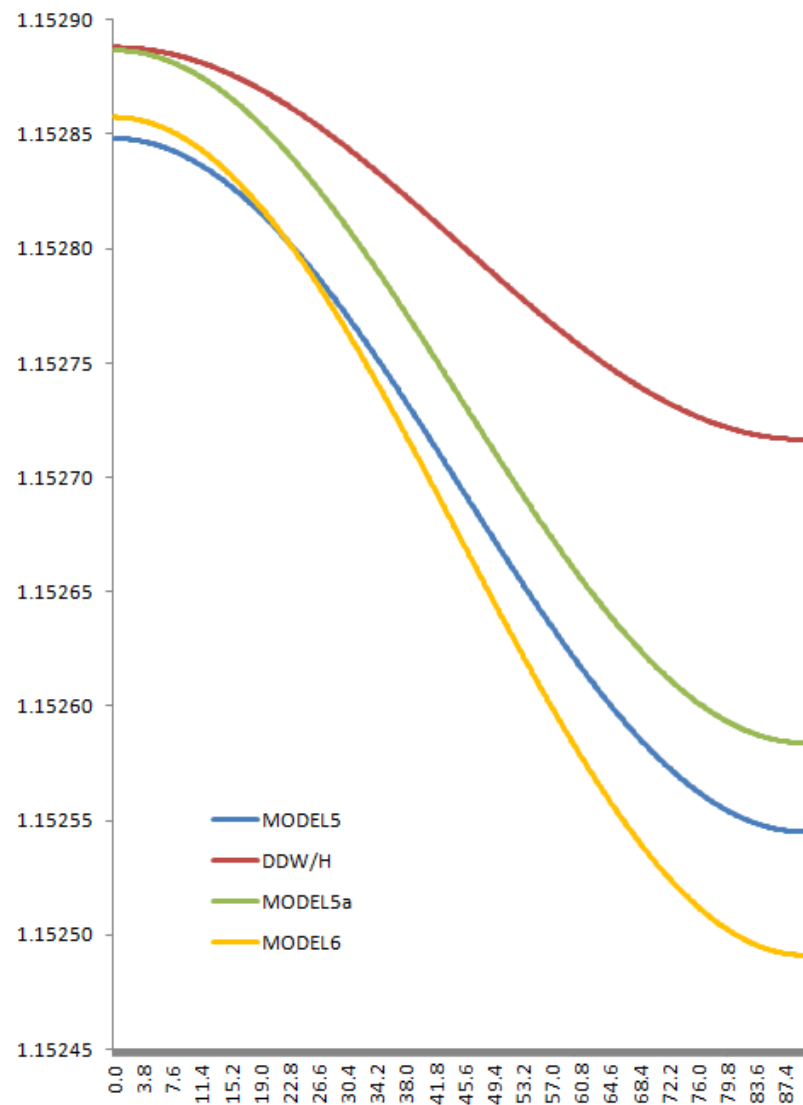


Рис. 2.1.16 Амплитудный фактор  $\delta(2;1)$  для волны O1. Модели 5, 5а, 6.

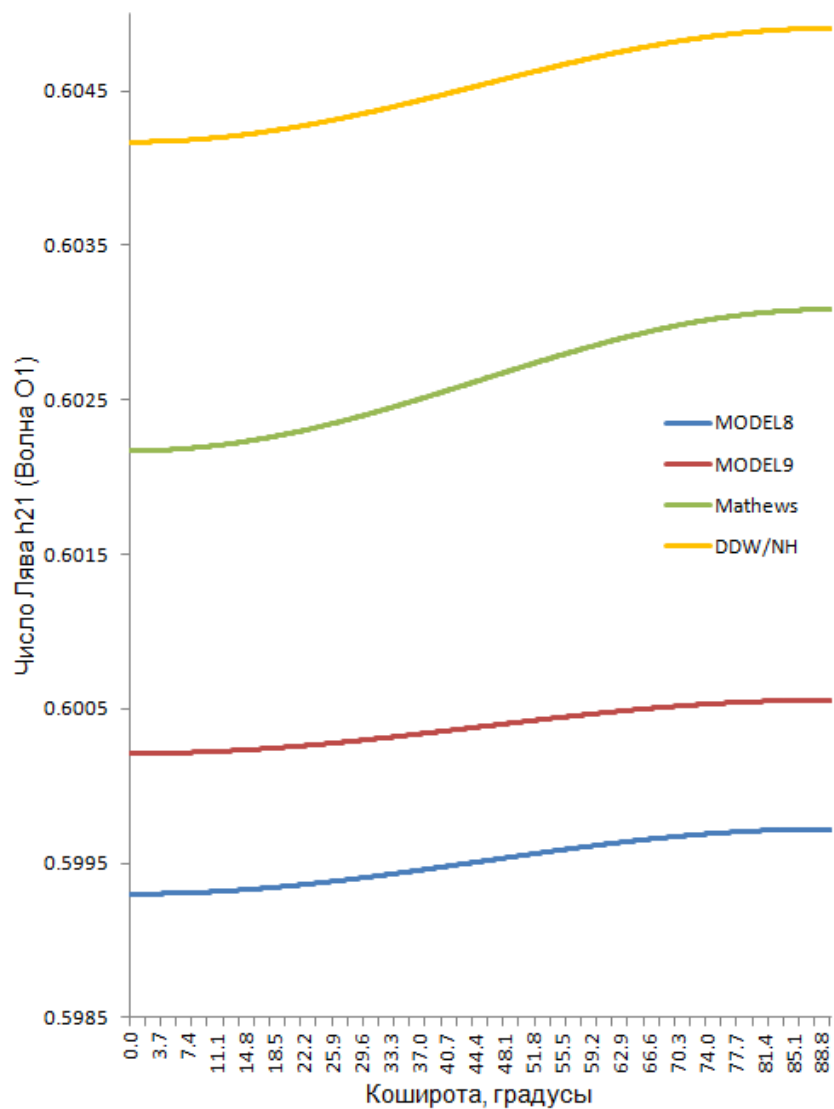


Рис. 2.1.17 Число Лява  $h(2;1)$  для волны O1. Модели 8 и 9.

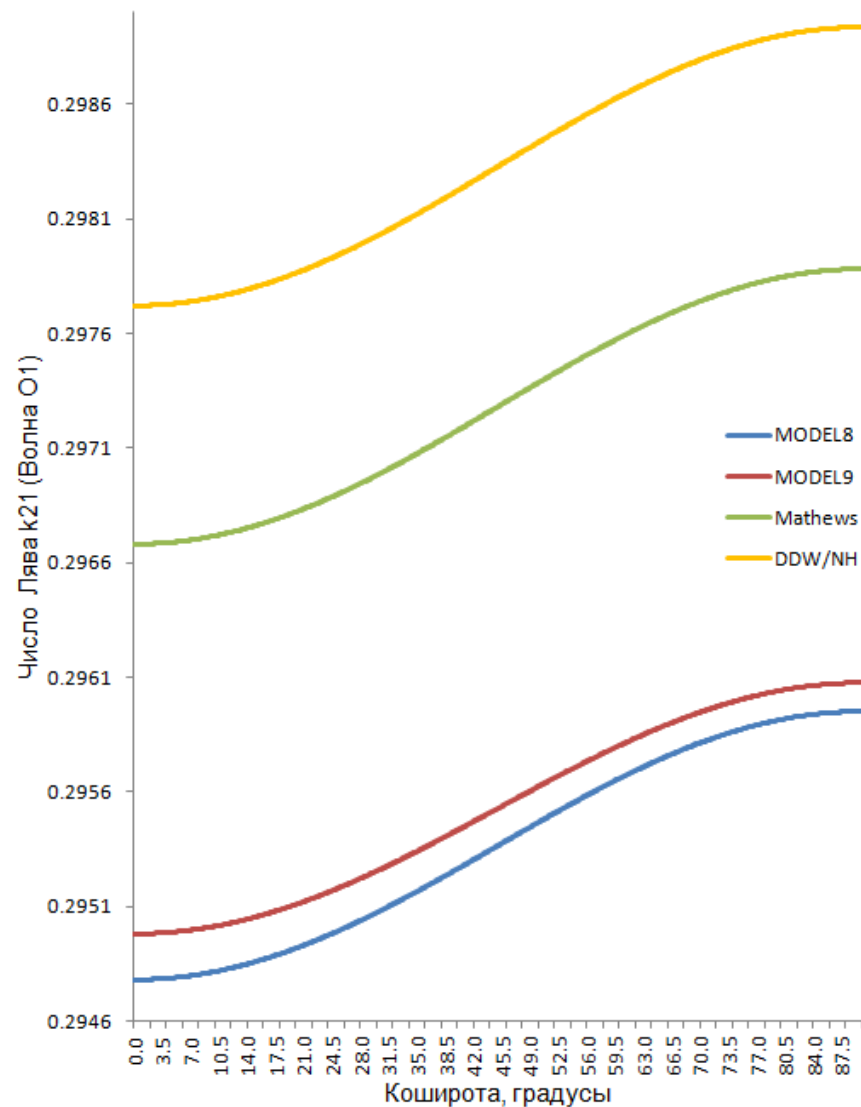


Рис. 2.1.18 Число Лява  $k(2;1)$  для волны O1. Модели 8 и 9.

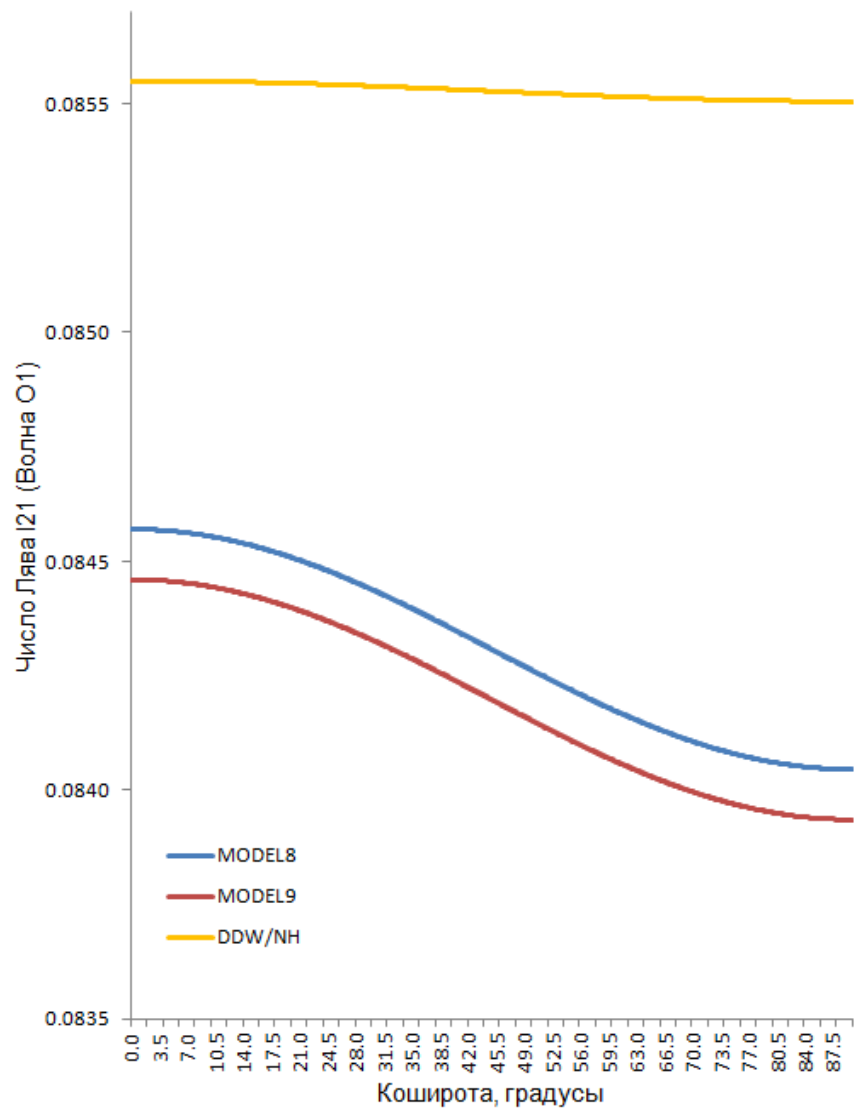


Рис. 2.1.19 Число Лява  $l(2;1)$  для волны O1. Модели 8 и 9.

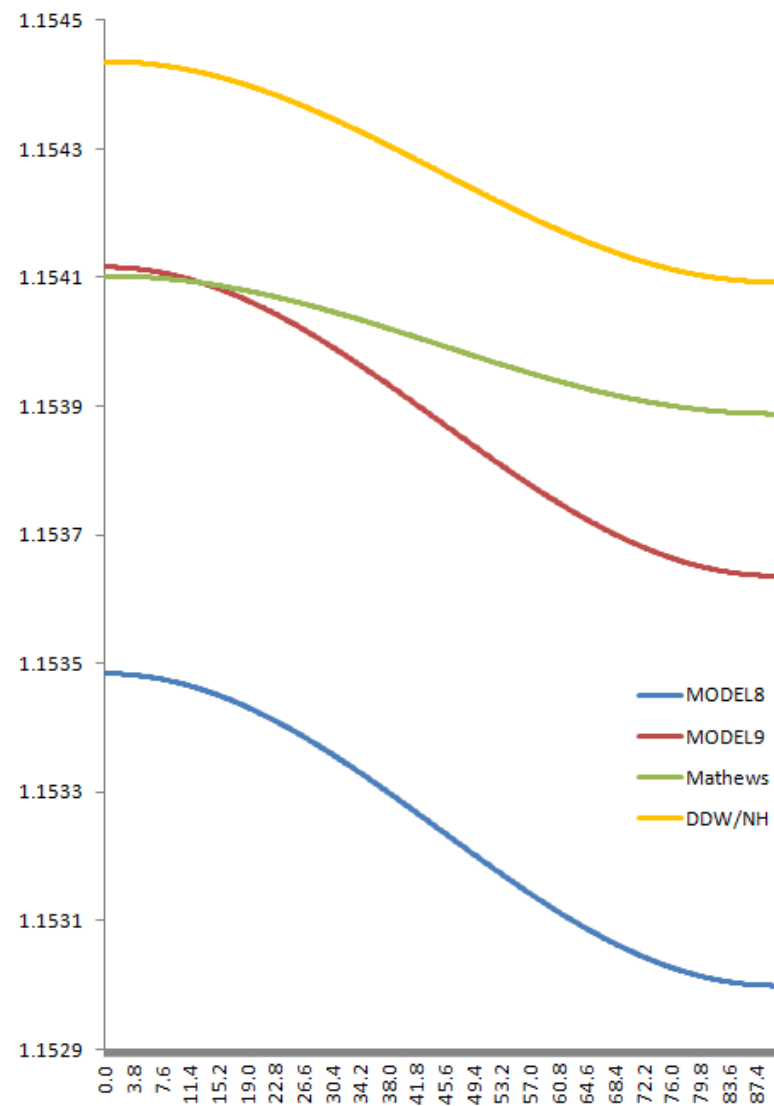


Рис. 2.1.20 Амплитудный фактор  $\delta(2;1)$  для волны O1. Модели 8 и 9.

Средние значения  $h$  нашей модели превышают здесь значения DDW/H на 0.04% для всех перечисленных в табл. 2 волн, кроме волны  $\psi 1$ , для которой указанное превышение составляет 0.03%. Средние значения числа  $h$  Модели 6 меньше соответствующих значений DDW на 0.02% для всех волн, кроме K1, для которой отличие также составляет 0.03%. В отличие от Моделей 5 и 5а, у которых с моделью DDW/H также хорошо совпадают амплитуды широтных зависимостей  $h^+$ , изменение числа  $h$  с широтой в Модели 6 происходит для всех показанных суточных волн почти в два раза медленнее. Как и для полусуточных волн, это связано с учетом напряжения, содержащего функцию  $\tau$ . Кривые числа  $h$  для обсуждаемых здесь моделей приведены на рис. 2.1.13, на котором особенно бросается в глаза близость нашей Модели 5 и DDW/H (синяя и красная кривые).

Из двух наших моделей, рассчитанных с учетом диссипации (Модели 8 и 9, период 24 ч, табл. 2) в среднем по волнам лучше совпадают между собой результаты нашей Модели 9 и значения, полученные в работе [Mathews, 2001]. Для волн  $\sigma Q1$ , Q1,  $\rho 1$  и O1 полученные нами средние значения числа  $h$  меньше на 0.4%, для волны P1 на 0.6% и для волны OO1 на 0.3%. Эти различия, очевидно, определяются в основном различиями в применяемых при учете диссипации функциях крипа. Для волны K1 среднее значение числа  $h$  из [Mathews, 2001] больше нашего уже на 1.8%, а для волн  $\psi 1$  и  $\phi 1$ , наоборот, меньше на 2.1% и 0.2% соответственно. Последнее является следствием различий в применяемых резонансных кривых. Что касается сравнения результатов нашей Модели 9 с DDW/NH, то здесь все наши средние значения  $h$  для всех волн лежат систематически ниже значений DDW на 0.7%. Это также вызвано в основном различием подходов при учете диссипации. Амплитуды широтных зависимостей наших Моделей 8 и 9 в 2-3 раза ниже, чем в моделях DDW/NH и [Mathews, 2001], что опять же определяется учетом в наших моделях функции  $\tau$ . Кривые числа  $h$  для волны O1 с учетом диссипации показаны на рис. 2.1.17.

Обсудим теперь результаты, полученные нами для числа Лява  $k$  (табл. 2.1.3, рис. 2.1.14, 2.1.18). Средние значения чисел  $k$  нашей Модели 5 меньше значений модели DDW/H на 0.10% для всех полусуточных волн. В то же время, амплитуды широтной зависимости  $k^+$  нашей модели превышают по модулю соответствующие значения DDW/H в среднем по волнам на 16%. Средние значения  $k$  Модели 5а, по-прежнему, меньше значений DDW/H, однако лежат почти в два раза ближе, нежели значения Модели 5, к результатам DDW/H, отличаясь от них в среднем по волнам на 0.05%. Таким образом, переход при учете диссипации от периода 200 с к периоду 300 с приводит к лучшему совпадению наших результатов с результатами модели DDW/H. Амплитуды широтных зависимостей  $k^+$  Моделей 5 и 5а практически совпадают. Значения  $k$  нашей Модели 6 не

отличаются от Модели 5. Что касается значений  $k^+$  Модели 6, то они гораздо лучше совпадают с соответствующими значениями DDW/H, чем амплитуды широтных зависимостей наших Моделей 5 и 5а. Результаты, полученные для числа  $k(2;1)$  волны O1 Моделей 5, 5а и 6, представлены на рис. 2.1.14. На этом рисунке обращает на себя внимание близость к DDW/H (красная кривая) результатов нашей Модели 5а (зеленая кривая), особенно вблизи экватора.

После учета диссипации (Модели 8 и 9, табл. 2.1.3, рис. 2.1.18) ближе всего к результатам работ других авторов оказываются наши значения числа  $k$  Модели 9 и те же значения, полученные в работе [Mathews, 2001]. Наши значения  $k$  для волн  $\sigma Q1$ , Q1,  $\rho 1$  и O1 меньше таковых из работы [Mathews, 2001] на 0.6%, а для волн K1,  $\phi 1$  и OO1 – на 1.1%, 0.02% и 0.5%. Значение  $k$  для волны  $\psi 1$  нашей Модели 9, наоборот, больше такового из работы [Mathews, 2001] на 1.9%. Достаточно близки между собой амплитуды широтных зависимостей сравниваемых моделей. Наши значения  $k^+$  меньше по модулю таковых из работы [Mathews, 2001] на 9% для всех волн, кроме K1,  $\psi 1$ ,  $\phi 1$ . Для последних трех волн отличия составляют 7%, 15% и 10%. Собственно, на рис. 2.1.18 в первую очередь обращает на себя внимание близость широтного хода кривых числа  $k$  для волны O1 двух наших моделей, а также модели [Mathews, 2001] и DDW/NH.

Для средних значений чисел  $l$  для полусуточных волн (табл. 2.1.4), наши значения, полученные по Модели 5а (период 300 с) опять же оказались ближе к результатам DDW/H, нежели значения Модели 5. Так, средние значения чисел  $l$  для волн Q1,  $\rho 1$ , O1, P1 и  $\phi 1$  в Модели 5 оказались меньше соответствующих значений DDW/H на 0.12%, а в Модели 5а – всего на 0.04%. Для волн  $\sigma Q1$  и OO1 различия Моделей 5 и 5а от DDW/H составляют 0.13% и 0.05% соответственно, а для волны K1 – 0.14% и 0.06%. Для волны  $\psi 1$  значение числа  $l$  Модели 5 меньше соответствующего значения DDW/H всего на 0.03%, а значение Модели 5а, наоборот, больше на 0.06%. При этом, величина амплитуд широтных зависимостей  $l^+$  наших моделей в 6 и более раз больше их значений модели DDW/H. Это особенно отчетливо видно на рис. 2.1.15. Модель 6 на этом рисунке сливается с моделью 5, поскольку значения  $l$  и  $l^+$  этих моделей попарно равны между собой. Последнее говорит о том, что введение обсуждаемого выше напряжения, зависящего от функции  $\tau$ , никак не сказывается на значениях чисел  $l$  для полусуточных волн. Впрочем, как следует из приведенного выше обсуждения, то же верно и для полусуточных волн.

Для моделей с диссипацией (Модели 8 и 9, табл.2.1.4, рис. 2.1.19) наши результаты оказались опять же ближе к результатам [Mathews, 2001], нежели DDW/NH, причем, лучшее совпадение средних значений числа  $l$  на сей раз получилось для Модели 8. Так, отличия наших средних от [Mathews, 2001] для волн  $\sigma Q1$ , Q1,  $\rho 1$ , O1 и P1 лежат в

пределах 0.4 – 0.5%, для волны K1 – 0.1% и для волн  $\psi_1$ ,  $\phi_1$  и OO1 – 3.8, 0.9 и 0.7%. При этом, все наши значения, кроме значения для волны K1, меньше таковых из работы [Mathews, 2001]. Для Модели 9 отличия средних значений от [Mathews, 2001] в среднем больше на 0.1%. Для волн  $\sigma Q_1$ ,  $Q_1$ ,  $\rho_1$ , O1 и P1 они составляют 0.5–0.6%, для волны K1 – 0.046%, а для волн  $\psi_1$ ,  $\phi_1$  и OO1 – 3.9, 1.0 и 0.8%. Что касается амплитуд широтных зависимостей  $l^+$ , то в отличие от предыдущих работ Mathews в цитируемой здесь работе [Mathews, 2001] их знак изменен на противоположный, что вызывает некоторое недоумение. Именно по этой причине результаты [Mathews, 2001] не показаны нами на рис. 2.1.19. В то же время, необходимо отметить, что по модулю значения  $l^+$  из работы [Mathews, 2001] и полученные в настоящей работе существенно ближе друг к другу, нежели полученные в нашей работе и в модели DDW/NH (табл.2.1.4). Также обращает на себя внимание совпадение знака амплитуды широтной зависимости наших моделей и моделей DDW для волны  $\psi_1$ . Это единственная волна с отрицательным значением  $l^+$ . В работе [Mathews, 2001] подобной смены знака для указанной волны не происходит.

Значения дельта-факторов основных суточных волн представлены в табл. 2.1.5 и рис. 2.1.16 и 2.1.20. Основные тенденции изменения значений амплитудных факторов при переходе от одной модели к другой в основном схожи с таковыми для полусуточных волн.

### 2.1.3. Числа Лява третьего порядка

Числа Лява третьего порядка представлены в табл. 2.1.6 – 2.1.8. Эти таблицы организованы так же как и табл. 2.1.1. На рис. 2.1.21 – 2.1.26 показаны результаты для чисел (3;2). Для чисел (3;1) и (3;3) общие тенденции изменения их значений с широтой практически совпадают с числами (3;2), поэтому соответствующие им рисунки здесь не приводятся. Произведено сравнение полученных чисел третьего порядка с моделями DDW. Основной отличительной от DDW особенностью наших чисел является то, что для них посчитаны широтные зависимости, хотя амплитуды этих зависимостей очень малы.

#### Числа Лява (3;2) третьего порядка для полусуточных волн

Значения этих чисел рассчитаны для относительных ускорений, соответствующих полусуточным волнам. При учете диссипации значения упругих модулей пересчитаны согласно логарифмической функции крипа на период 12 ч. Основные результаты представлены в табл.2.1.6 и рис. 2.1.21 – 2.1.26.

Величины средних значений числа  $h$  наших Моделей 5 и 5а больше значений DDW/NH на 0.09% и 0.15% соответственно. Значения чисел  $k$ , наоборот, меньше соответствующих значений DDW/NH на 1.28% и 1.22%. И, наконец, наши числа  $l$  превышают значения DDW/NH на 1.85 и 2.05%.

Таблица 2.1.6. Числа Лява для полусуточных волн третьего порядка (3;2)

Модель	Earth model	Shape	Centrifugal	Coriolis	tay	H/NH	Creep f	T	h	h+	k	k+	l	l+
Модель 5	PREM+1066A	ellips	+	+	-	H	log	200s	0.28686	0.00000	0.09018	-0.00074	0.01489	0.00008
DDW/H	PREM+1066A	ellips	+	+	-	H	log	300s	0.28660	-	0.09135		0.01462	
Модель 5а	PREM+1066A	ellips	+	+	-	H	log	300s	0.28702	0.00000	0.09024	-0.00074	0.01492	0.00008
Модель 6	PREM+1066A	ellips	+	+	+	H	log	200s	0.28686	0.00003	0.09018	-0.00073	0.01489	0.00008
Модель 8	PREM+1066A	ellips	+	+	+	NH	log	12h	0.28901	0.00003	0.09097	-0.00075	0.01527	0.00008
Модель 9	PREM+IASP91	ellips	+	+	+	NH	log	12h	0.28958	0.00003	0.09104	-0.00073	0.01508	0.00008
Модель 11	PREM+1066A	ellips	+	+	+	NH	alfa	12h	0.29051	0.00003	0.09141	-0.00075	0.01535	0.00008
Модель 12	PREM+IASP91	ellips	+	+	+	NH	alfa	12h	0.29096	0.00003	0.09144	-0.00075	0.01517	0.00008
DDW/NH	PREM+1066A	ellips	+	+	-	NH	alfa	-	0.29170	-	0.09315	-	0.01539	-

Таблица 2.1.7. Числа Лява для суточных волн третьего порядка (3;1)

Модель	Earth model	Shape	Centrifugal	Coriolis	tay	H/NH	Creep f	T	h	h+	k	k+	l	l+
Модель 5	PREM+1066A	ellips	+	+	-	H	log	200s	0.28651	-0.00001	0.09008	-0.00074	0.01491	0.00008
DDW/H	PREM+1066A	ellips	+	+	-	H	log	300s	0.28591	-	0.09095	-	0.01460	-
Модель 5а	PREM+1066A	ellips	+	+	-	H	log	300s	0.28667	-0.00001	0.09014	-0.00074	0.01494	0.00008
Модель 6	PREM+1066A	ellips	+	+	+	H	log	200s	0.28651	0.00003	0.09008	-0.00073	0.01491	0.00008
Модель 8	PREM+1066A	ellips	+	+	+	NH	log	24h	0.28893	0.00002	0.09097	-0.00075	0.01534	0.00008
Модель 9	PREM+IASP91	ellips	+	+	+	NH	log	24h	0.28951	0.00003	0.09104	-0.00073	0.01515	0.00008
Модель 11	PREM+1066A	ellips	+	+	+	NH	alfa	24h	0.29086	0.00002	0.09154	-0.00075	0.01546	0.00008
Модель 12	PREM+IASP91	ellips	+	+	+	NH	alfa	24h	0.29130	0.00002	0.09156	-0.00075	0.01528	0.00008
DDW/NH	PREM+1066A	ellips	+	+	-	NH	alfa	-	0.29155	-	0.09297		0.01545	-

Таблица 2.1.8. Числа Лява для волн с периодом в треть суток третьего порядка (3;3)

Модель	Earth model	Shape	Centrifugal	Coriolis	tay	H/NH	Creep f	T	h	h+	k	k+	l	l+
Модель 5	PREM+1066A	ellips	+	+	-	H	log	200s	0.28745	-0.00001	0.09036	-0.00074	0.01486	0.00008
DDW/H	PREM+1066A	ellips	+	+	-	H	log	300s	0.28770	-	0.09199	-	0.01467	-
Модель 5a	PREM+1066A	ellips	+	+	-	H	log	300s	0.28761	-0.00001	0.09042	-0.00074	0.01488	0.00008
Модель 6	PREM+1066A	ellips	+	+	+	H	log	200s	0.28761	-0.00001	0.09042	-0.00074	0.01488	0.00008
Модель 8	PREM+1066A	ellips	+	+	+	NH	log	8h	0.28893	0.00002	0.09097	-0.00075	0.01534	0.00008
Модель 9	PREM+IASP91	ellips	+	+	+	NH	log	8h	0.29003	0.00003	0.09117	-0.00073	0.01502	0.00008
Модель 11	PREM+1066A	ellips	+	+	+	NH	alfa	8h	0.29076	0.00002	0.09147	-0.00075	0.01527	0.00008
Модель 12	PREM+IASP91	ellips	+	+	+	NH	alfa	8h	0.29121	0.00003	0.09150	-0.00075	0.01509	0.00008
DDW/NH	PREM+1066A	ellips	+	+	-	NH	alfa	-	0.29252	-	0.09366	-	0.01540	-



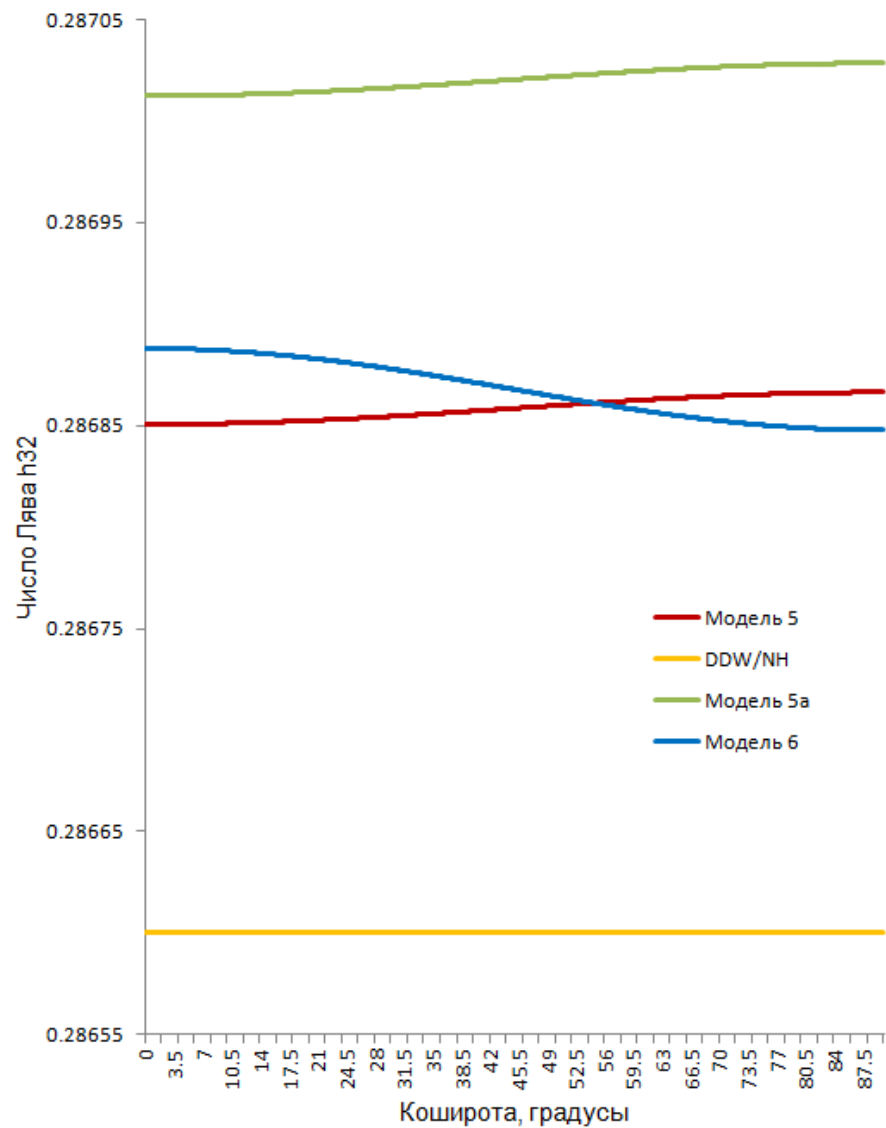


Рис. 2.1.21 Число Лява  $h(3;2)$  для полусуточных волн. Модели 5, 5a, 6

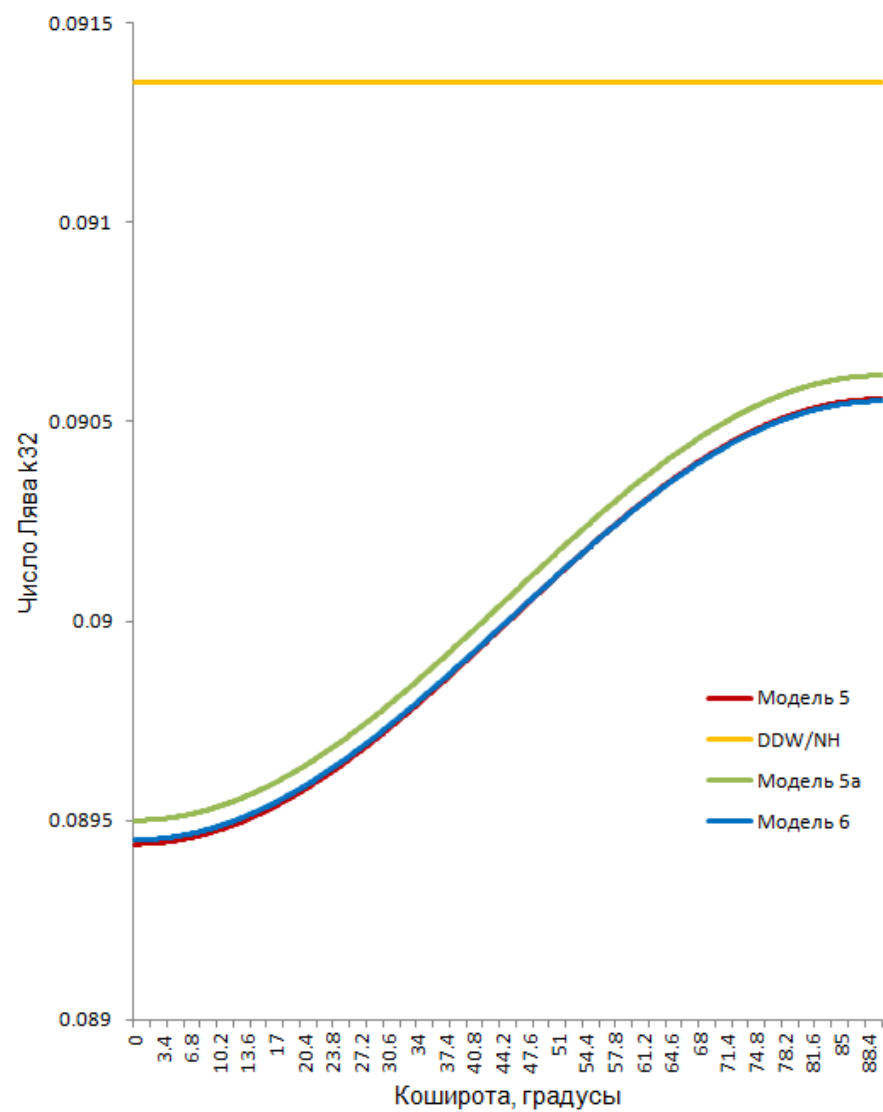


Рис. 2.1.22 Число Лява  $k(3;2)$  для полусуточных волн. Модели 5, 5a, 6.

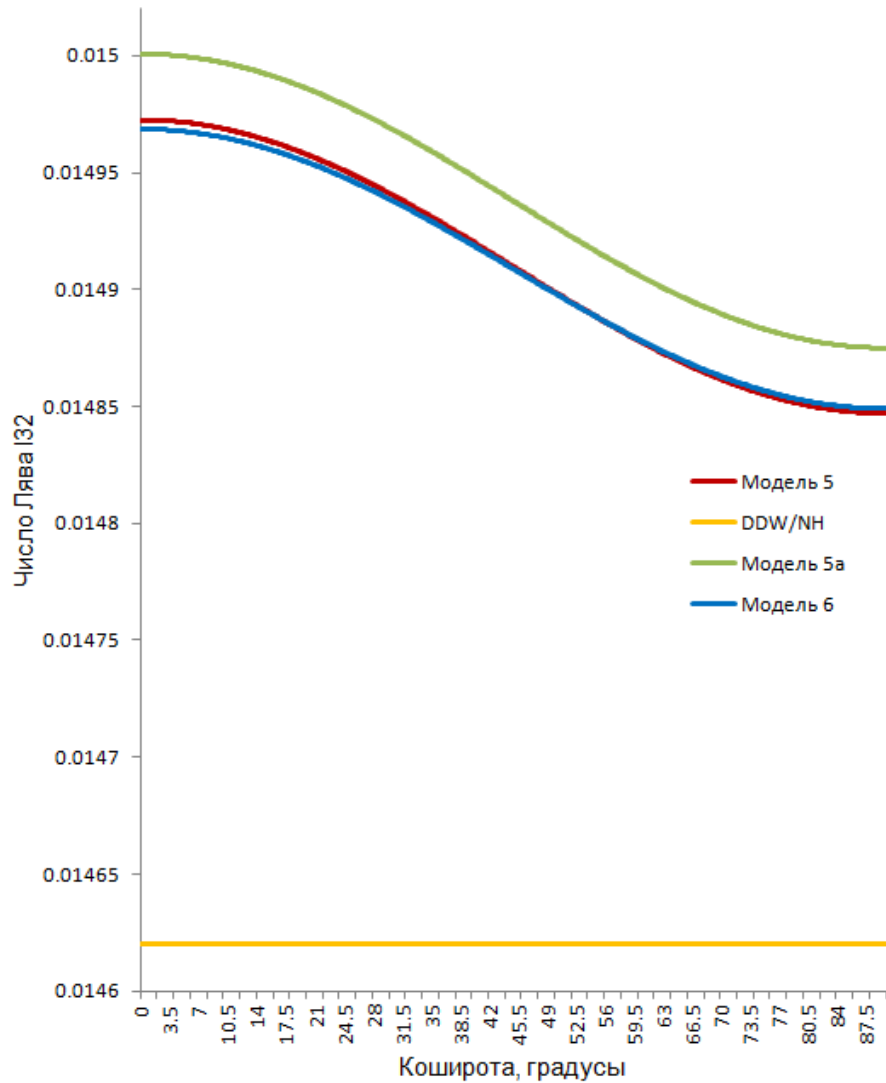


Рис. 2.1.23 Число Лява  $l(3;2)$  для полусуточных волн. Модели 5, 5а, 6.

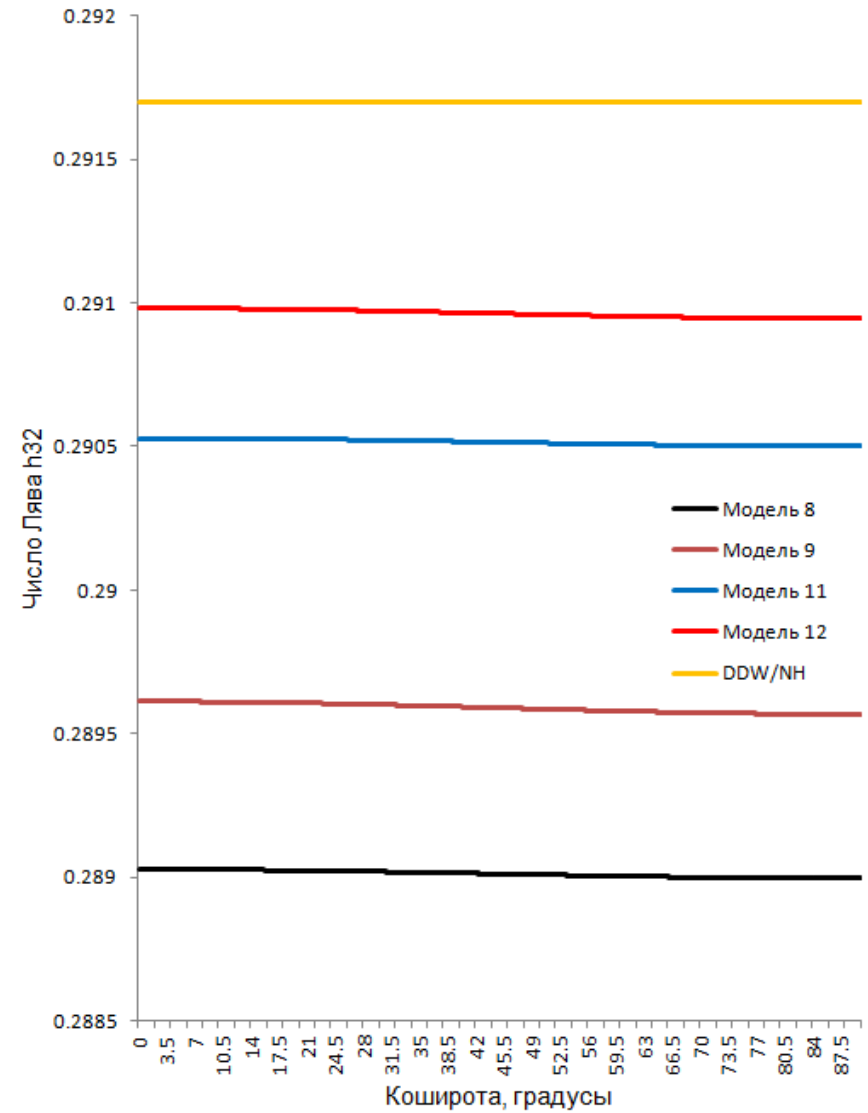


Рис. 2.1.24 Число Лява  $h(3;2)$  для полусуточных волн. Модели 8-12.

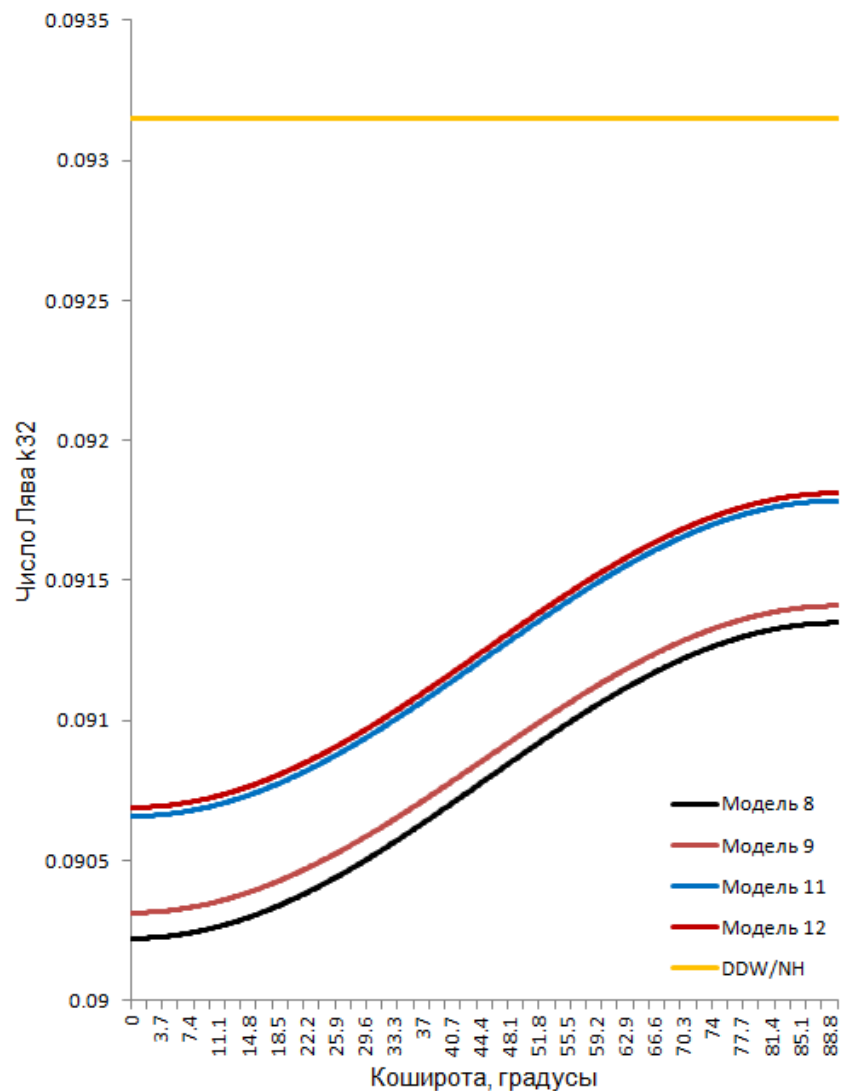


Рис. 2.1.25 Число Лява  $k(3;2)$  для полусуточных волн. Модели 8-12

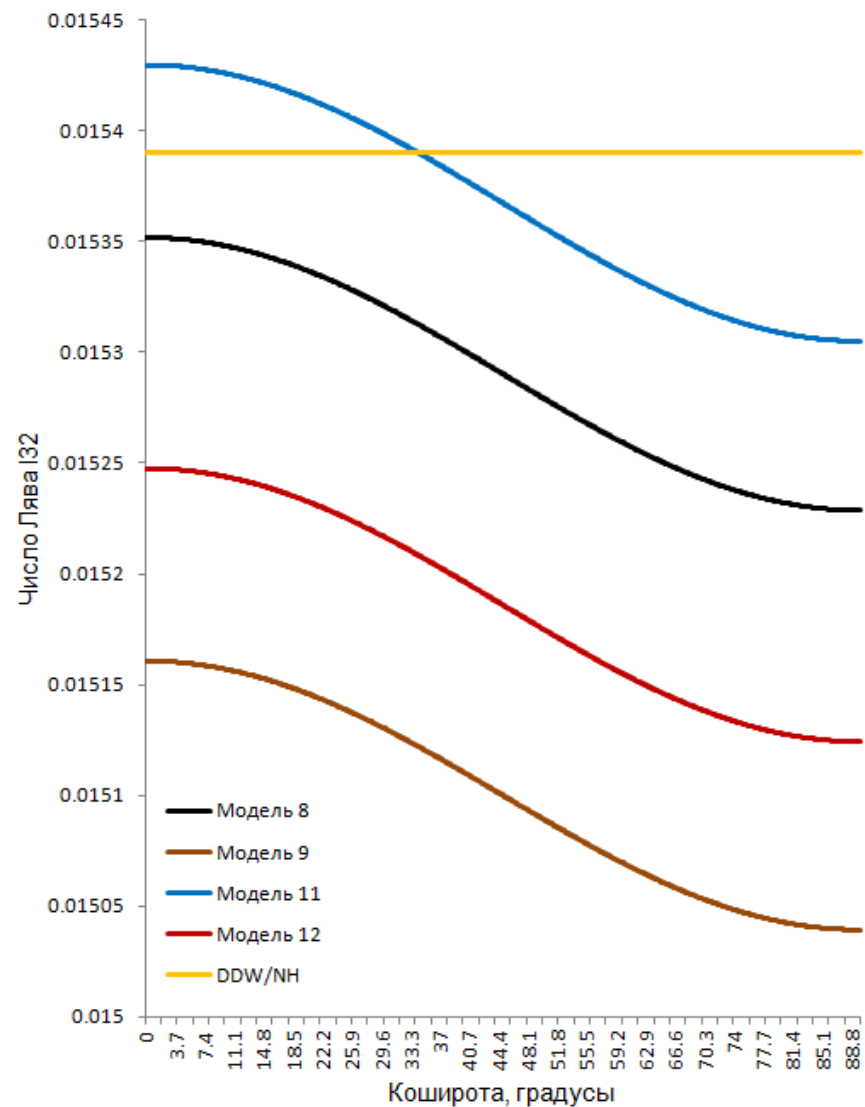


Рис. 2.1.26 Число Лява  $l(3;2)$  для полусуточных волн. Модели 8-12.

Таким образом, характерные отличия результатов наших тестовых моделей от DDW/N существенно больше, чем для чисел второго порядка (рис. 2.1.21–2.1.23).

Переход от Модели 5 к Модели 6 приводит лишь к появлению крайне слабой широтной зависимости числа  $h$ . Все остальные значения остаются неизменными.

Учет диссипации в Моделях 8 и 9 (табл. 2.1.6) приводит к росту средних значений чисел  $h(3;2)$  по сравнению с Моделью 5 на 0.75% и 0.95% соответственно. Напомним, что в указанных двух моделях применена логарифмическая функция крипа. В то же время, полученные в этих моделях значения существенно меньше результатов DDW/NH. Значения чисел  $h(3;2)$  Моделей 8 и 9 меньше соответствующих значений DDW/NH на 0.92% и 0.73% соответственно. Эти различия определяются в основном применением в DDW/NH степенной функции крипа. Отличия результатов DDW/NH от значений наших моделей 11 и 12, в которых также применена степенная функция крипа, определяется различием методик пересчета. Наши значения здесь меньше значений DDW/NH на 0.41% и 0.25% соответственно (рис. 2.1.24).

Значения чисел  $k(3;2)$  после учета диссипации, т.е. перехода от Модели 5 к Моделям 8 и 9 возрастают соответственно на 0.88% и 0.95%, уступая DDW/NH 2.34% и 2.27%. Значения этих чисел для Моделей 11 и 12 меньше соответствующих значений модели DDW/NH на 1.87% и 1.84%.

Числа  $l(3;2)$  Моделей 8 и 9 больше значений Модели 5 на 2.55% и 1.28% и меньше значений DDW/NH на 0.78% и 2.01%. Значения DDW/NH также больше наших значений, полученных в Моделях 11 и 12, на 0.26% и 1.43%.

Для Моделей 8 и 9 также были рассчитаны значения дельта факторов. Они составляют  $\delta(3;2) = 1.07305$  при  $\delta^+ = 0.00102$  и  $\delta(3;2) = 1.07335$  при  $\delta^+ = 0.00100$  соответственно.

### **Числа Лява (3;1) третьего порядка для суточных волн**

Значения чисел (3;1) рассчитаны для относительных ускорений, соответствующих суточным волнам. При учете диссипации значения упругих модулей пересчитаны согласно логарифмической функции крипа на период 24 ч. Основные результаты представлены в табл.2.1.7.

Средние значения чисел  $h(3;1)$  наших моделей 5 и 5а больше значений DDW/N на 0.21% и 0.27% соответственно. Эти различия почти в два раза больше чем для чисел  $h(3;2)$ . Значения чисел  $k(3;1)$ , как и чисел  $k(3;2)$ , наоборот, меньше соответствующих значений DDW/N на 0.96% и 0.89%, что несколько меньше, чем для чисел  $k(3;2)$ . И,

наконец, наши числа  $l$  превышают значения DDW/Н на 2.12 и 2.33%. Эти различия несколько больше, чем для чисел  $k(3;2)$ . Амплитуды широтных зависимостей чисел  $(3;1)$ , как и чисел  $(3;2)$ , минимальны и представляют лишь теоретический интерес.

Учет диссипации при помощи логарифмической функции крипа для чисел  $h(3;1)$  (Моделях 8 и 9, табл. 2.1.7) приводит к росту их средних значений по сравнению с Моделью 5 на 0.84% и 1.05% соответственно. Полученные в Моделях 8 и 9 значения чисел  $h(3;1)$  меньше соответствующих значений DDW/Н на 0.90% и 0.70% соответственно. Отличия результатов DDW/Н от значений наших Моделей 11 и 12, в которых применена степенная функция крипа, составляют 0.24% и 0.09% соответственно.

Значения чисел  $k(3;1)$  после учета диссипации, т.е. перехода от Модели 5 к Моделям 8 и 9, возрастают соответственно на 0.99% и 1.07%, уступая DDW/Н 2.15% и 2.08%. Значения этих чисел для Моделей 11 и 12 меньше значений модели DDW/Н на 1.54% и 1.52%.

Числа  $l(3;1)$  Моделей 8 и 9 больше значений Модели 5 на 2.88% и 1.61% и меньше значений DDW/Н на 0.71% и 1.94%. При этом, наше значение, полученное в Модели 11, больше соответствующего значения DDW/Н на 0.06%, а величина числа  $l(3;1)$  Модели 12 меньше его значения, полученного в DDW/Н, на 1.10%.

Значения дельта-факторов для Моделей 8 и 9 следующие:  $\delta(3;1)=1.07300$  при  $\delta^+=0.00102$  и  $\delta(3;1)=1.07330$  при  $\delta^+=0.00100$  соответственно.

### **Числа Лява (3;3) третьего порядка для волн с периодом в треть суток**

Значения чисел  $(3;3)$  рассчитаны для относительных ускорений, соответствующих волнам с периодом в треть суток. При учете диссипации значения упругих модулей пересчитаны согласно логарифмической функции крипа на период 8 ч. Основные результаты представлены в табл. 2.1.8.

В отличие от чисел  $(3;2)$  и  $(3;1)$  средние значения чисел  $h(3;3)$  наших моделей 5 и 5а не больше, а меньше значений DDW/Н на 0.09% и 0.03% соответственно. Также на 1.77% и 1.71% меньше значения наших чисел  $k(3;3)$ . Числа  $l$  превышают значения DDW/Н на 1.30 и 1.43%. Величины амплитуд широтных зависимостей, по-прежнему, очень малы.

После учета диссипации средние значения чисел  $h(3;3)$  в Моделях 8 и 9 (табл. 2.1.8) превосходят их значения, полученные в Модели 5, на 0.51% и 0.90% соответственно. Значения чисел  $h(3;3)$  в Моделях 8 и 9 меньше соответствующих

значений DDW/NH на 1.23% и 0.85%. Отличия результатов DDW/NH от значений наших моделей 11 и 12 составляют 0.60% и 0.45% соответственно.

Значения чисел  $k(3;3)$  после учета диссипации, т.е. перехода от Модели 5 к Моделям 8 и 9, возрастают соответственно на 0.68% и 0.90%, уступая DDW/NH 2.87% и 2.66%. Значения этих чисел для Моделей 11 и 12 меньше значений модели DDW/NH на 2.34% и 2.31%.

Числа  $l(3;3)$  Моделей 8 и 9 больше значений Модели 5 на 3.23% и 1.08% и меньше значений DDW/NH на 0.39% и 2.47%. Значения DDW/NH также больше наших значений, полученных в Моделях 11 и 12, на 0.84% и 2.01%.

Значения дельта-факторов для Моделей 8 и 9 следующие:  $\delta(3;3)=1.07300$  при  $\delta^+=0.00102$  и  $\delta(3;3)=1.07348$  при  $\delta^+=0.00100$  соответственно.

Те же значения для волн четвертого порядка равны:  $\delta(4;4)=1.03919$  при  $\delta^+=0.00109$  и  $\delta(4;4)=1.03930$  при  $\delta^+=0.00106$  соответственно.

## 2.2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОКЕАНИЧЕСКОГО ГРАВИМЕТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА ПО ЗЕМНОМУ ШАРУ

Прежде всего, обратим внимание на географическое распределение амплитуды суммарного (нагрузочный прилив плюс ньютоновское притяжение) океанического гравиметрического эффекта по всему земному шару для волны  $M2$  (рис. 2.2.1). Можно выделить пять крупных зон, в которых амплитуда этой волны вблизи береговой линии достигает наибольших значений (10 – 14 мкГал). Этим же зонам свойственны наибольшие градиенты амплитуды и фазы океанического эффекта. Это западное побережье Канады вместе с южным побережьем Аляски; побережье Колумбии и Эквадора; восточное побережье Бразилии; восточное побережье Африки (в районе Мадагаскара) и, наконец, западное побережье Европы, которое в дальнейшем будет проанализировано более подробно. Еще две, меньшие по протяженности, зоны высоких амплитуд расположены у северной оконечности полуострова Лабрадор, а также вдоль северо-западного побережья Австралии.

Карта, построенная по сумме четырех полусуточных волн ( $M2$ ,  $K2$ ,  $N2$ ,  $S2$ ) (рис.2.2.2), в основном повторяет основные черты распределения амплитуды волны  $M2$ . В то же время, значения амплитуд в указанных экстремальных зонах достигают уже 18 – 22 мкГал. Распределение суммы амплитуд четырех суточных ( $O1$ ,  $K1$ ,  $P1$ ,  $Q1$ ) волн (рис. 2.2.3) носит в большей степени зональный характер. В Северном полушарии наибольшие (до 12 мкГал) амплитуды наблюдаются в северной части Тихого океана – на побережье Берингова моря и залива Аляска. Несколько меньшие значения (до 10 мкГал) имеют место у берегов Вьетнама, Йемена и Омана. Вдоль береговой линии Европы влияние суточных волн мало и не превышает 2 мкГал. В южном полушарии величина эффекта постепенно нарастает от экватора к берегам Антарктиды, у которых достигает максимальных значений вблизи  $-60^\circ$  и  $+120^\circ$  долготы. На побережье моря Уэддела (Антарктида) амплитуды достигают 10 мкГал.

Наибольшая величина амплитуды суммы всех восьми волн достигается в точке  $141^\circ$  з.д. и  $54^\circ$  с.ш., т.е. в южной части залива Аляска (рис. 2.2.4). Ее значение составляет здесь 34 мкГал, что чуть меньше амплитуды объемного прилива волны  $M2$  на широте  $45^\circ$ . Непосредственно у южных берегов Канады и Аляски амплитуда близка к 25 – 30 мкГал. В целом, географическое распределение амплитуды по сумме всех волн во многом напоминает таковое по сумме полусуточных волн. Чуть меньшая, чем у берегов Канады, амплитуда (20 – 23 мкГал) наблюдается на побережье Колумбии и

Эквадора, а также вблизи восточного побережья Бразилии. У восточных берегов Африки, на юго-западе Австралии и в море Уэддела (Антарктида) ее величина доходит до 23 – 25 мкГал. Аналогичные величины можно наблюдать и у берегов Западной Европы.

Поскольку в дальнейшем влияние на величину исследуемого океанического эффекта особенностей строения коры и верхней мантии будет изучаться путем сравнения результатов, полученных по моделям *PREM* и *IASP91* для территории Европы, а также в целях наглядности, все дальнейшие рассуждения мы будем строить на основе карт именно этого региона. Территория Европы здесь и далее изображена в пределах трапеции со сторонами от 30° до 60° с. ш. и от –15° до 15° долготы.

Распределения амплитуд и фаз гравиметрического океанического эффекта для волны *M2* вблизи берегов Европы показаны на рис. 2.2.5 и 2.2.6 соответственно. Общая тенденция поведения амплитуды состоит в некотором увеличении ее градиентов и абсолютной величины при продвижении с юга на север. Так, у берегов Марокко, до входа в Гибралтарский пролив, по мере приближения к береговой линии со стороны суши с удаления в 100 км амплитуда возрастает в среднем от 4.5 до 7.0 мкГал. Однако уже у западных берегов Португалии и Франции это нарастание составляет от 6 до 10 мкГал. Еще севернее, в Бретани (мыс Сен-Матье) и Северной Англии (п-ов Корнуолл, мыс Лэндс-Энд), эффект при приближении к берегу меняется от 7 до 12,5 мкГал. В западной Ирландии соответствующее нарастание в юго-западном направлении составляет от 6 до 11 мкГал, а у северно-восточного побережья Великобритании эффект в прибрежной зоне достигает 5 мкГал. Некоторая особенность на окружающем фоне также наблюдается в проливе Ла-Манш, немного западнее Кале. Любопытно, что недалеко отсюда, в проливе Солент, приливные течения достигают огромной величины – до 10 км/час. Что касается фазы, то на рис. 2.2.6 обращают на себя внимание узловые особенности вблизи Гавра, а также в восточной части Ирландского моря и к северу от Шотландии, вблизи Оркнейских и Шетландских островов.

Распределения амплитуды по сумме полусуточных и всех восьми волн (рис. 2.2.7 и 2.2.9) опять же в основном повторяют распределение для волны *M2*. Амплитуда суммы полусуточных волн непосредственно вблизи береговой линии, как правило, составляет 12 – 15 мкГал, несколько возрастая с юга на север. Лишь на оконечностях мысов Сен-Матье и Лэндс-Энд эффект превышает 20 мкГал, а на юго-западном побережье Ирландии доходит до 15 – 18 мкГал.



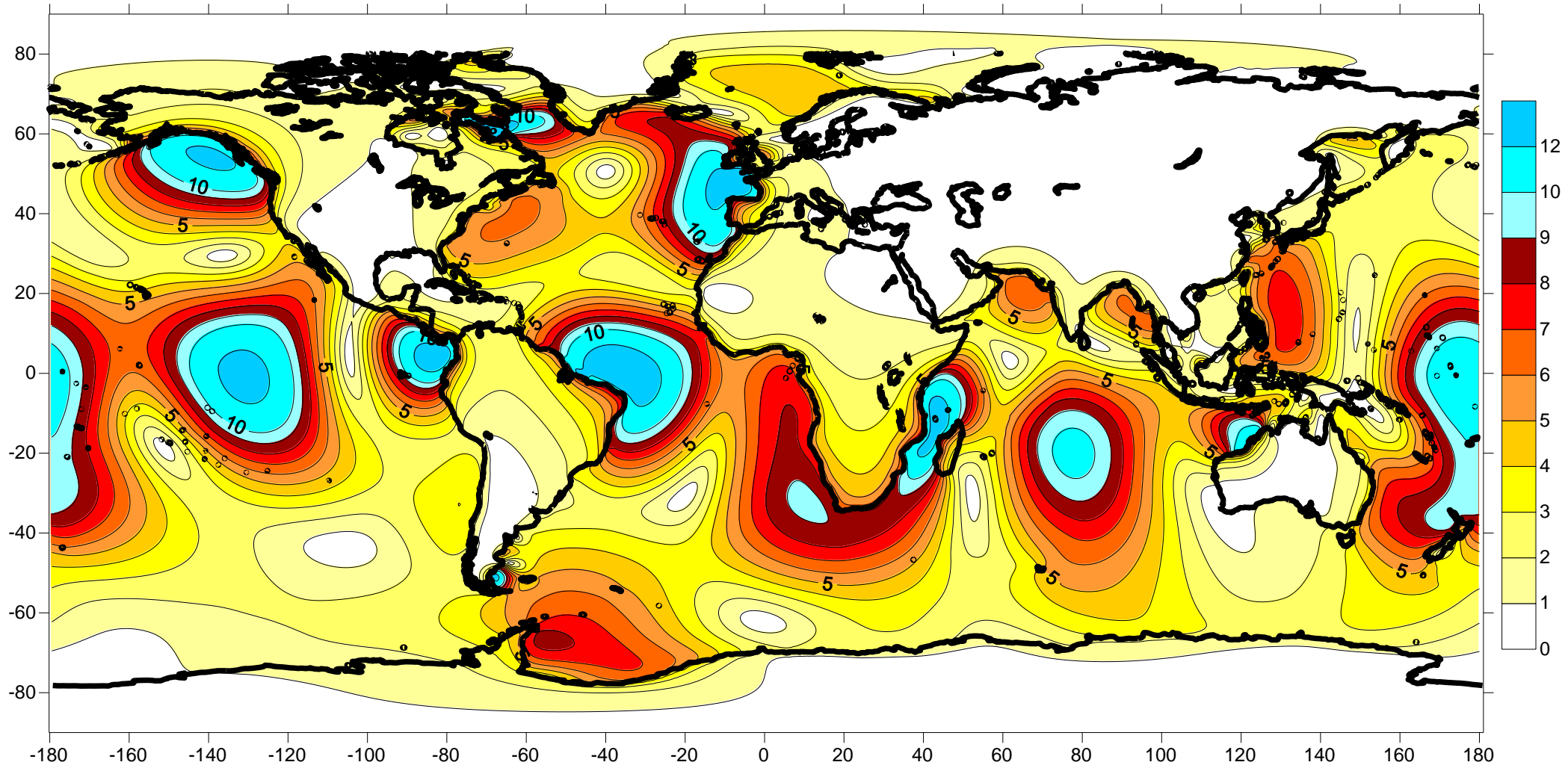


Рис. 2.2.1. Амплитуда океанического гравиметрического эффекта (мкГал). Волна *M2*. *CSR3.0*, *PREM 1c*, высота 0.0.

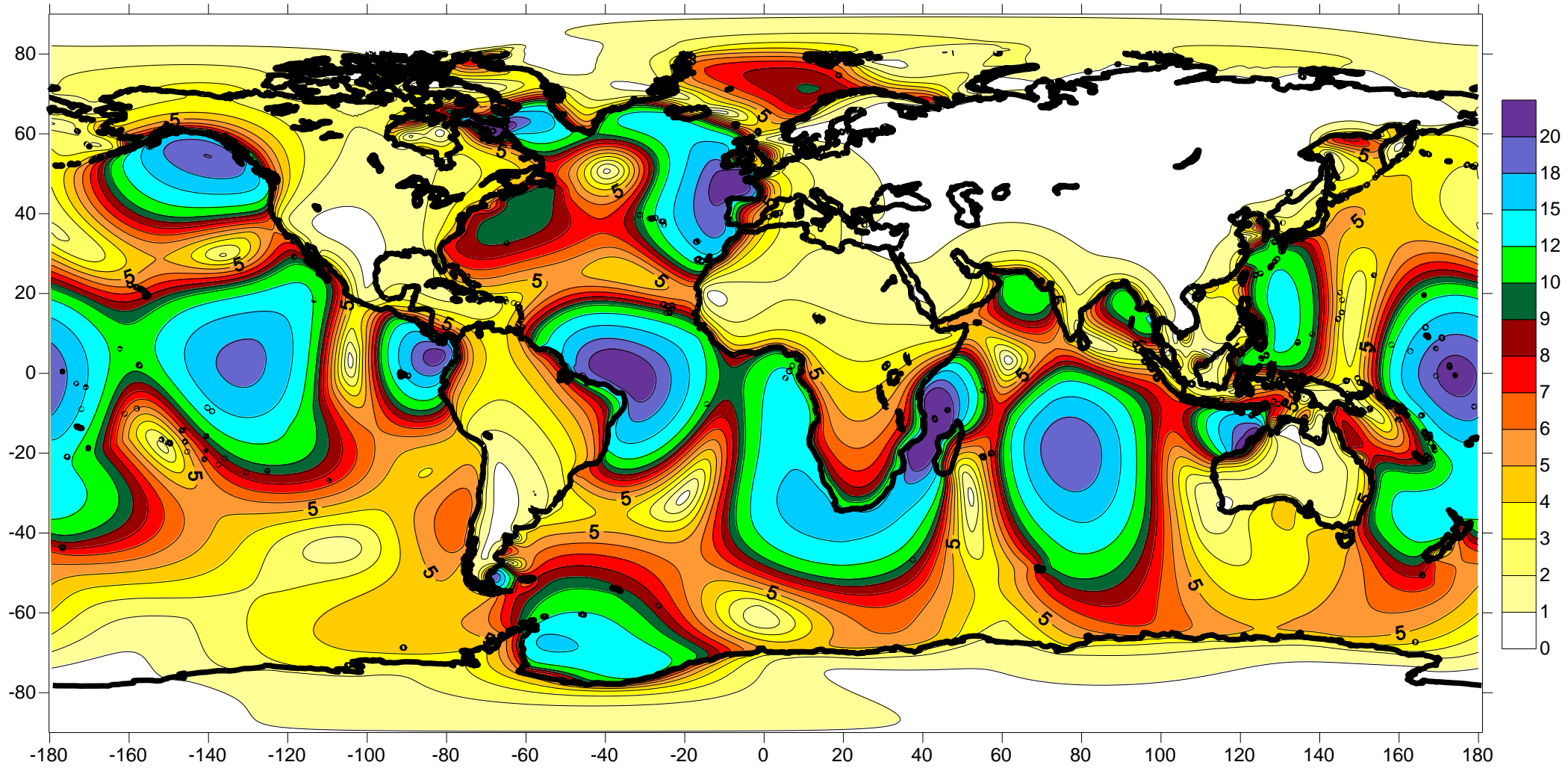


Рис. 2.2.2. Амплитуда океанического гравиметрического эффекта (мкГал). Сумма полусуточных волн ( $M2$ ,  $K2$ ,  $N2$ ,  $S2$ ).  $CSR3.0$ ,  $PREM\ 1c$ , высота 0.0.

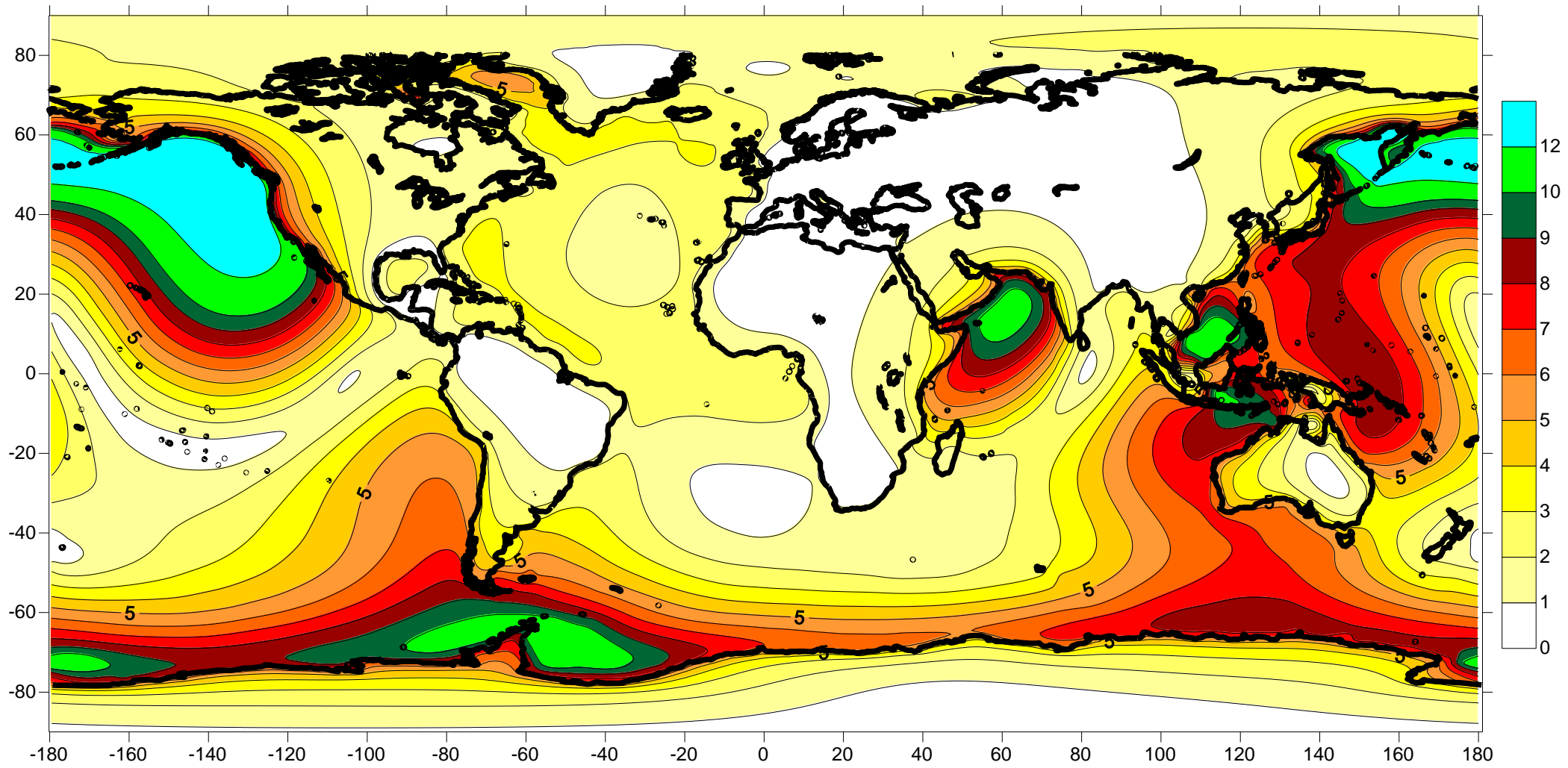


Рис. 2.2.3. Амплитуда океанического гравиметрического эффекта (мкГал). Сумма суточных волн ( $O1, K1, P1, Q1$ ).  $CSR3.0, PREM 1c$ , высота 0.0.

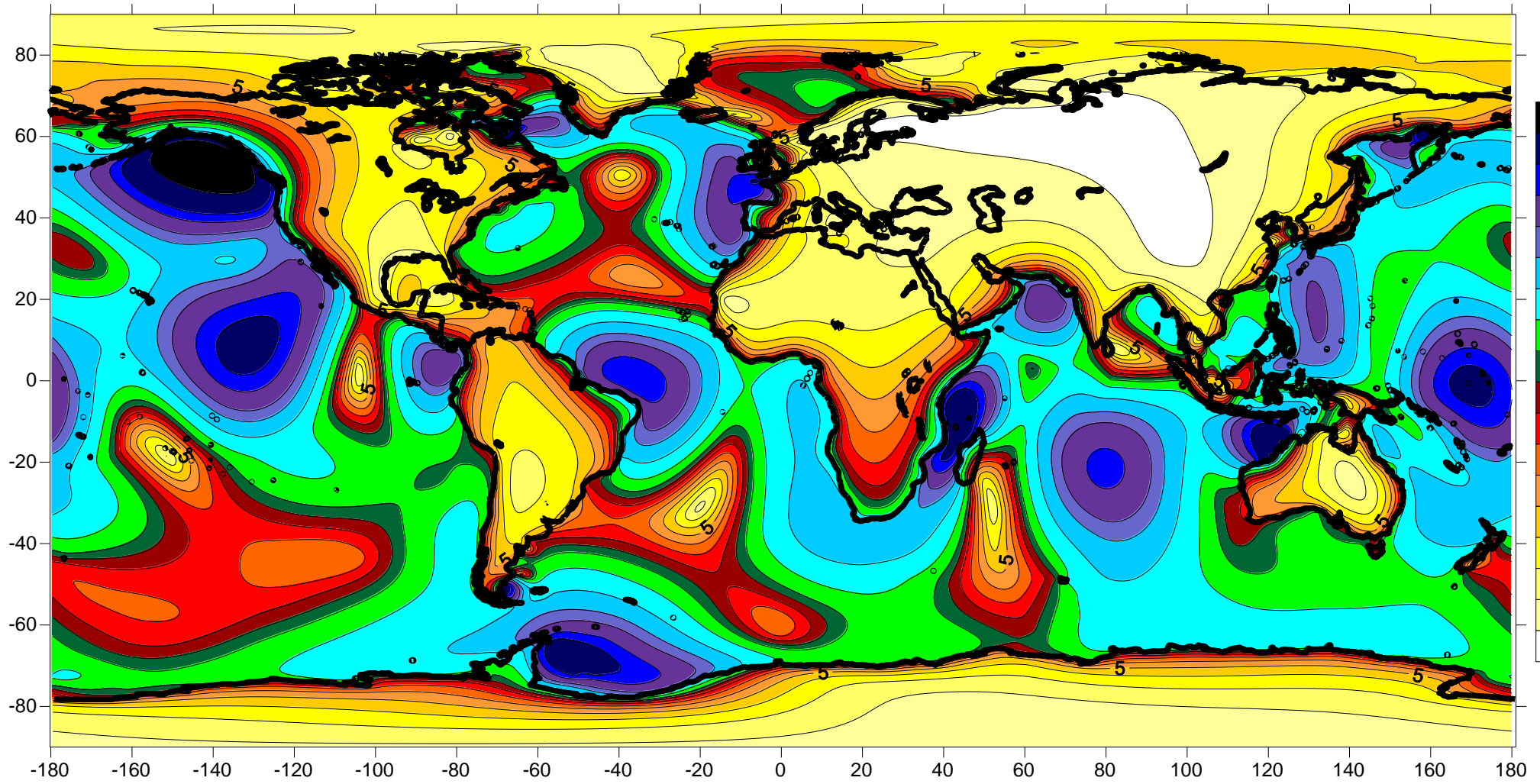


Рис. 2.2.4. Амплитуда океанического гравиметрического эффекта (мкГал). Сумма восьми волн. *CSR3.0*, *PREM 1c*, высота 0.0.

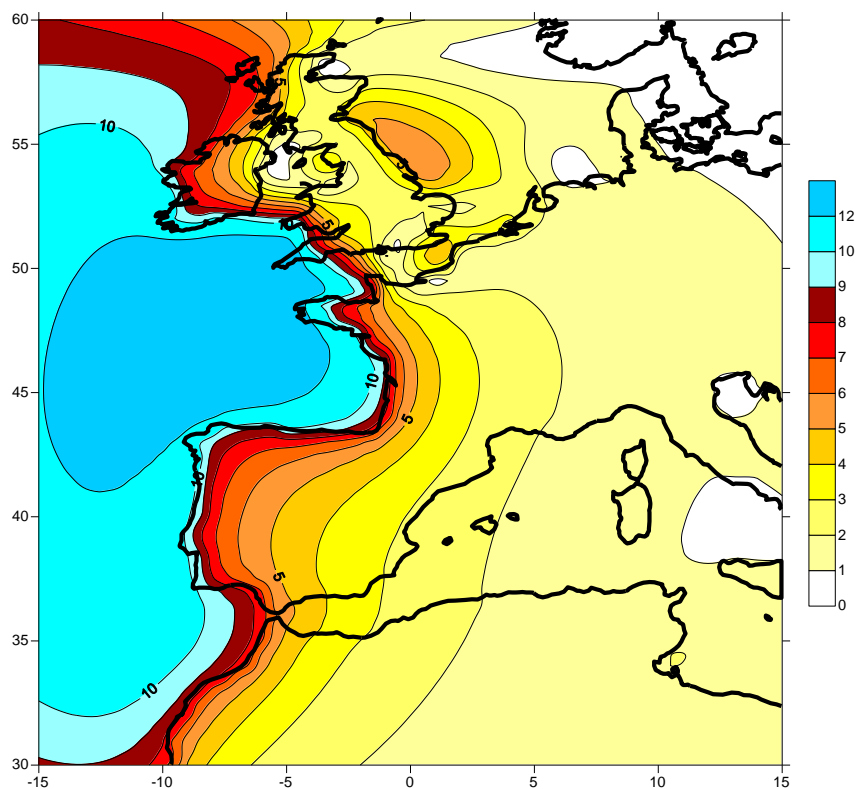


Рис. 2.2.5. Амплитуда океанического гравиметрического эффекта (мкГал). Волна *M2*. ЕВРОПА. *CSR3.0*, *PREM 1c*, высота 0.0.

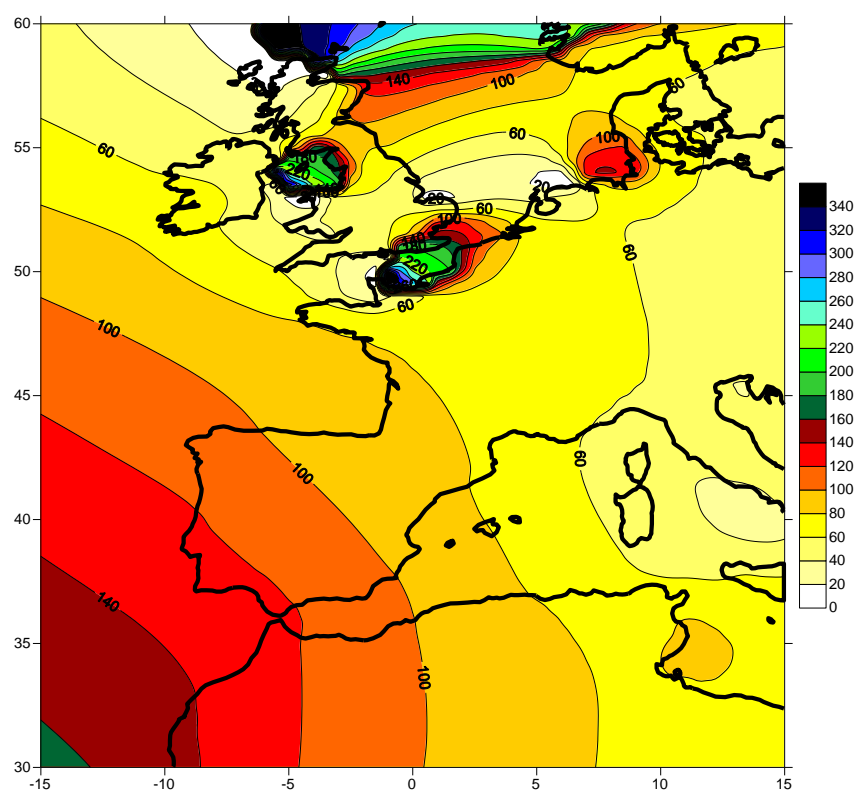


Рис. 2.2.6. Локальная фаза океанического гравиметрического эффекта (мкГал). Волна *M2*. ЕВРОПА. *CSR3.0*, *PREM 1c*, высота 0.0.

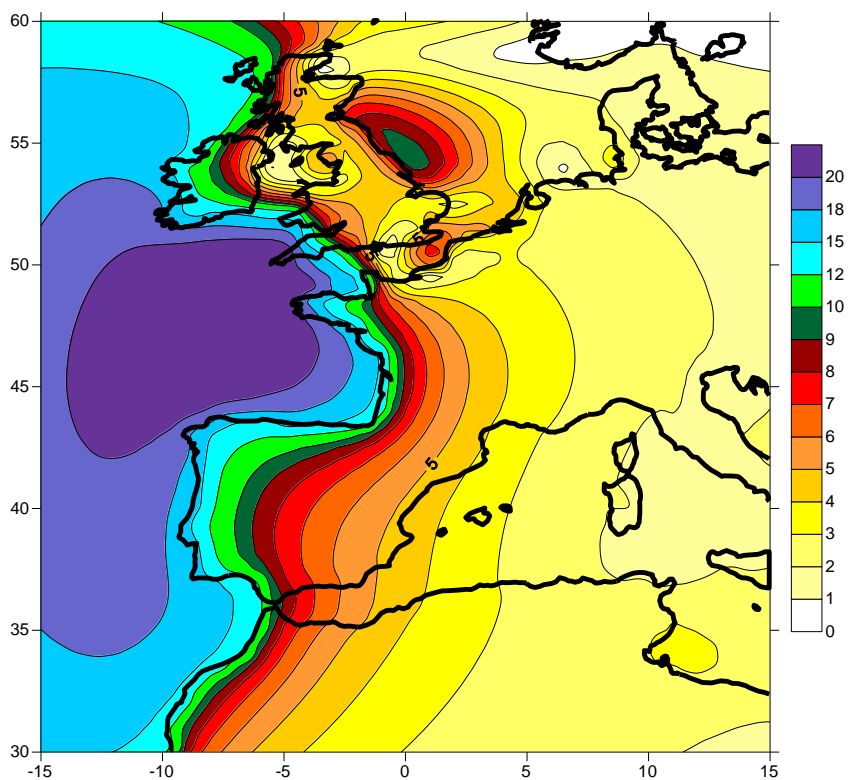


Рис. 2.2.7. Амплитуда океанического гравиметрического эффекта (мкГал). Сумма полусуточных волн ( $M2, K2, N2, S2$ ). ЕВРОПА. *CSR3.0, PREM 1c*, высота 0.0.

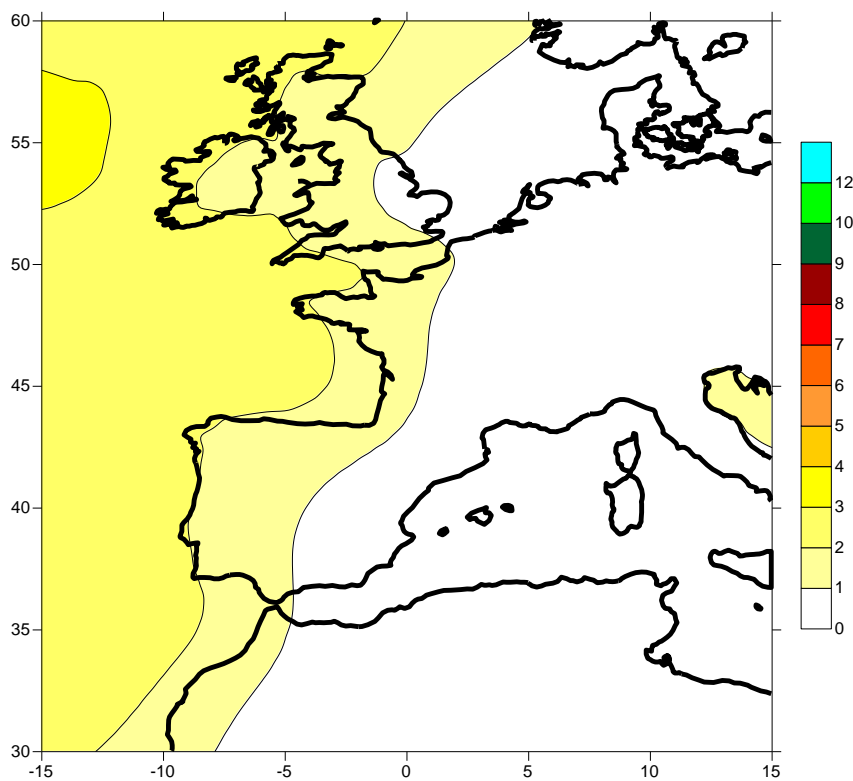


Рис. 2.2.8. Амплитуда океанического гравиметрического эффекта (мкГал). Сумма суточных волн ( $O1, K1, P1, Q1$ ). ЕВРОПА. *CSR3.0, PREM 1c*, высота 0.0.

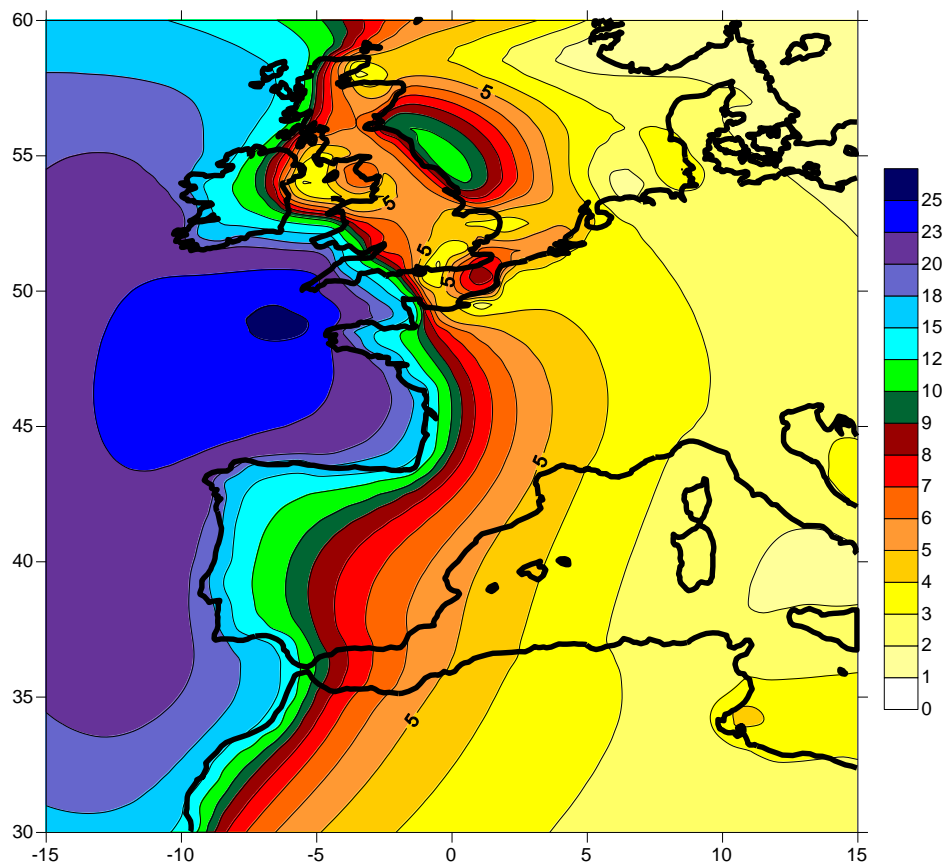


Рис. 2.2.9. Амплитуда океанического гравиметрического эффекта (мкГал). Сумма **восьми волн**. **ЕВРОПА**. *CSR3.0*, *PREM 1c*, высота 0.0.

Практически полностью аналогичная картина наблюдается по сумме всех 8 волн (рис. 2.2.9), однако амплитуды вблизи береговой линии здесь на 2 – 3 мкГал выше, достигая, например, на оконечности мыса Лэндс-Энд 23 мкГал, а на юго-западном побережье Ирландии 18 – 20 мкГал.

Как и для земного шара в целом, суммарная амплитуда суточных волн у берегов Европы достаточно мала и практически неизменна вдоль всей береговой линии (рис. 2.2.8). Обычно ее величина не превышает 2 мкГал и лишь в некоторых зонах на севере достигает 3 мкГал.

### 2.3. НАГРУЗОЧНЫЕ ЧИСЛА ЛЯВА И ФУНКЦИИ ГРИНА

В настоящем разделе прежде всего проведен сравнительный анализ чисел Лява и функций Грина, полученных в настоящей работе по двум различным моделям строения Земли с учетом и без учета диссипации, а также вычисленных другими авторами. Для проведения подобного сравнения нагрузочные числа Лява рассчитывались для невращающейся сферической Земли. После этого, обсуждается вклад в рассчитываемые нагрузочные числа Лява и нагрузочные дельта-факторы эффектов эллиптичности, вращения, а также поправок за относительные и кориолисовы ускорения.

В заключении раздела обсуждается разность значений океанического эффекта, полученных по функциям Грина из настоящей работы и из программы *LOAD89* пакета *ETERNA3.3* [Francis, Dehant, 1987]. Показано, что, несмотря на различие методик расчета, указанная разность достаточно мала. Также выявлена относительная малость разностей значений гравиметрического океанического эффекта, полученных по разложениям высоты прилива до 1440 и 720 порядков, в рамках метода, основанного на применении сферических функций. В заключении проведен краткий анализ действия всей совокупности влияющих на величину эффекта факторов

**Числа Лява.** Значения нагрузочных чисел Лява для сферической невращающейся Земли, полученные для различных моделей, приведены в табл. 2.3.1. В первых четырех парных столбцах даны значения нагрузочных чисел  $-k'n \cdot 1000$  и  $-h' \cdot 1000$  для модели *PREM* и периодов 1 с, 200 с, 12 ч и 24 ч соответственно. Далее следуют те же значения для модели *IASP91* для периодов 1 с, 12 ч, 24 ч. В последних четырех парных столбцах для сравнения приведены результаты из работ: [Gegout et al., 2010], [Pagiatakis, 1990], [Jentzsch, 1997] и [Na, Baek, 2011].

Данные табл. 2.3.1 иллюстрируют рис. 2.3.1 и 2.3.2, на которых показаны зависимости разностей значений чисел Лява, полученных для различных вариантов моделей строения Земли, от порядка  $n$ . Разности чисел Лява поделены на их полусумму и умножены на 100%. Кривая I (рис. 2.3.1) демонстрирует разность в процентах между числами  $-k'n \cdot 1000$  на периодах 12 ч и 1 с для модели *PREM*. Кривая 2 – то же для модели *IASP91*. Кривые III и IV представляют собой аналогичные разности для чисел  $-h' \cdot 1000$ .

Кривые I и II с увеличением  $n$  плавно нарастают до максимальных значений 6,3% ( $n = 50$ ) для модели *PREM* и 5,6% ( $n = 43$ ) для *IASP91*, а затем падают, приближаясь



при больших  $n$  к уровню 1%. Кривые III и IV ведут себя аналогично, однако их максимумы несколько ниже (4,1% и 3,5% соответственно) и немного смещены в сторону меньших значений  $n$ . Таким образом, пересчет чисел Лява с референц-периода 1 с на период 12 ч, осуществляемый при помощи логарифмической функции крипа (см. разд. 1.4), приводит для обеих рассматриваемых моделей строения Земли к схожим результатам. Присутствие максимумов указанных разностных кривых при  $n$  порядка 50, видимо, связано с тем, что параметры Ламе особенно резко изменяются при переходе от 1 с к 12 ч (на 8% для  $\mu$  и 4% для  $\lambda$ ) в диапазоне глубин от 80 до 220 км и на 4% и 2% соответственно вплоть до глубины 670 км (см. раздел 1.6.1).

В модели *PREM* при переходе от периода 1 с к 200 с характер изменения разностей чисел Лява с ростом  $n$  остается таким же, как на кривых I и III, однако сами разности почти вдвое меньше. Пересчет с периода 12 ч на период 24 ч для обеих моделей приводит к изменениям чисел Лява лишь на десятые доли процента, т.е. на порядок меньше разностей, приведенных на рис. 2.3.1.

Наибольший интерес представляют разности чисел Лява, полученных по различным моделям строения Земли. На рис. 2.3.2 показано, как с ростом  $n$  изменяются разности чисел  $-k'n \cdot 1000$  (кривая I) и  $-h' \cdot 1000$  (кривая II), рассчитанные по моделям *IASP91* и *PREM* для периода 12 ч. Прежде всего, обращают на себя внимание существенно большие различия чисел Лява между моделями строения Земли по сравнению с их разностями при переходе с одного периода к другому в пределах одной модели. Так, максимальные разности для чисел  $-k'n \cdot 1000$  и  $-h' \cdot 1000$  достигают до 15 и 8% соответственно, а при больших  $n$  стремятся к 10%. Сами максимумы смещены к значениям  $n$  порядка 250 – 350. Очевидно, что разности чисел Лява между моделями в большей степени связаны с различиями в строении Земли на малых глубинах, нежели с различием периодов в пределах одной модели. В связи с этим вспомним о достаточно больших разностях параметров Ламе, вычисленных по моделям *PREM* и *IASP91* в узком диапазоне глубин от 31 до 35 км. Они достигают 68% для  $\lambda$  и 35% для  $\mu$  и остаются достаточно большими по мере приближения к земной поверхности. Кривые разностей чисел Лява между моделями *IASP* и *PREM* для периода 1 с практически не отличаются от кривых для 12 ч.

Таблица 2.3.1. Значения чисел Лява для различных вариантов моделей.

n	PREM 1s		PREM 200s		PREM 12h		PREM 24h		IASP91 1s		IASP91 12h		IASP91 24h		PREM, Gegout et al [2010]		PREM, Pagiatakis [1990]		PREM, Jentsch [1997]		IASPEI, Na & Baek [2011]	
	-1000kn	-1000h	-1000kn	-1000h	-1000kn	-1000h	-1000kn	-1000h	-1000kn	-1000h	-1000kn	-1000h	-1000kn	-1000h	-1000kn	-1000h	-1000kn	-1000h	-1000kn	-1000h	-1000kn	-1000h
0	0	131	0	131	0	132	0	133	0	132	0	133	0	133	-	-	0	135	-	-	0	132
1	0	286	0	287	0	288	0	287	0	289	0	290	0	290	0	286	0	295	0	290	0	283
2	611	992	614	995	618	999	618	998	612	998	619	1005	619	1006	611	992	618	1007	648	1006	616	1003
3	588	1051	593	1056	597	1061	597	1060	589	1060	598	1069	598	1070	588	1051	596	1065	602	1049	592	1063
4	535	1054	540	1060	545	1066	545	1066	535	1063	545	1075	545	1076	535	1053	544	1069	540	1047	537	1066
5	524	1087	530	1094	535	1102	536	1101	523	1097	535	1112	535	1113	524	1086	533	1103	524	1078	-	-
6	542	1144	549	1153	556	1162	557	1162	541	1156	554	1173	555	1174	-	-	555	1164	540	1134	-	-
7	575	1213	583	1223	591	1234	592	1234	573	1226	589	1246	590	1247	-	-	590	1238	572	1202	-	-
8	613	1284	622	1296	631	1308	633	1309	610	1299	628	1321	629	1323	-	-	631	1313	610	1274	-	-
9	652	1355	663	1368	674	1382	675	1383	649	1371	670	1396	671	1398	-	-	634	1388	650	1344	-	-
10	692	1424	704	1439	716	1454	717	1455	688	1441	711	1469	712	1471	691	1423	737	1460	689	1412	687	1443
12	768	1553	783	1571	798	1589	799	1591	763	1572	791	1607	793	1609	-	-	802	1600	-	-	-	-
14	840	1670	857	1692	875	1714	877	1715	833	1692	867	1733	869	1736	-	-	878	1726	-	-	-	-
16	906	1778	926	1802	946	1827	949	1829	899	1803	937	1849	940	1853	-	-	951	1845	-	-	-	-
18	967	1875	989	1902	1012	1931	1015	1933	959	1903	1002	1956	1005	1959	-	-	1018	1952	962	1860	-	-
20	1022	1963	1046	1993	1072	2025	1076	2027	1013	1995	1061	2052	1064	2056	1021	1962	1080	2048	-	-	-	-
25	1137	2148	1166	2184	1198	2222	1202	2226	1127	2188	1185	2257	1189	2262	-	-	1209	2252	-	-	-	-
30	1222	2290	1256	2331	1293	2375	1297	2379	1213	2339	1278	2417	1283	2423	1221	2289	1307	2411	-	-	-	-
40	1332	2488	1372	2537	1415	2588	1421	2594	1323	2554	1398	2645	1404	2651	-	-	1434	2633	-	-	-	-
50	1392	2619	1436	2671	1483	2728	1489	2734	1385	2701	1464	2797	1470	2804	-	-	1502	2777	-	-	-	-
60	1426	2714	1471	2768	1519	2827	1525	2833	1422	2812	1502	2909	1507	2916	-	-	1539	2880	-	-	-	-
70	1445	2790	1489	2844	1537	2902	1543	2909	1448	2904	1524	2998	1529	3005	-	-	1557	2958	-	-	-	-
80	1457	2855	1499	2907	1545	2963	1551	2970	1468	2985	1539	3075	1544	3081	-	-	1565	3021	-	-	-	-
90	1464	2914	1504	2963	1547	3016	1553	3022	1486	3060	1551	3143	1556	3149	-	-	1567	3077	-	-	-	-
100	1470	2968	1507	3015	1547	3064	1552	3070	1503	3132	1563	3208	1567	3213	-	-	1567	3127	1454	2937	1486	3176
120	1480	3071	1512	3111	1545	3154	1549	3159	1540	3267	1588	3330	1591	3335	-	-	1564	3221	-	-	-	-
140	1493	3171	1519	3205	1547	3241	1550	3245	1581	3398	1620	3450	1623	3454	-	-	1564	3312	-	-	-	-
160	1510	3270	1532	3299	1555	3329	1558	3332	1627	3524	1660	3568	1662	3571	-	-	1570	3403	-	-	-	-
180	1532	3369	1550	3394	1569	3419	1572	3422	1677	3646	1705	3686	1707	3688	-	-	1582	3496	1505	3319	-	-
200	1558	3468	1574	3489	1590	3512	1592	3514	1729	3765	1755	3801	1757	3803	-	-	1599	3590	-	-	-	-
250	1639	3713	1651	3730	1664	3748	1665	3749	1866	4043	1889	4076	1891	4078	-	-	1662	3829	-	-	-	-
300	1737	3953	1748	3969	1759	3985	1760	3987	2002	4291	2025	4324	2027	4326	-	-	1745	4069	-	-	-	-
350	1844	4185	1854	4201	1865	4217	1867	4219	2128	4506	2152	4540	2154	4543	-	-	1840	4320	-	-	-	-
400	1955	4405	1966	4422	1977	4439	1979	4440	2240	4688	2265	4724	2267	4727	-	-	1939	4526	-	-	-	-
800	2667	5619	2682	5641	2698	5665	2699	5667	2678	5347	2709	5390	2711	5393	-	-	2675	5263	-	-	-	-
1000	2852	5902	2868	5926	2884	5951	2886	5953	2737	5427	2768	5471	2770	5474	-	-	2812	5600	2833	5850	2725	5578
2000	3063	6203	3080	6229	3097	6256	3100	6258	2784	5477	2816	5522	2818	5525	-	-	3059	6186	-	-	-	-
3000	3077	6211	3094	6237	3112	6264	3114	6267	2793	5478	2825	5523	2827	5526	-	-	3092	6262	3054	6175	-	-
5000	3094	6212	3111	6238	3129	6265	3131	6268	2810	5479	2842	5524	2844	5527	-	-	3097	6274	-	-	-	-
10000	3134	6213	3151	6239	3169	6266	3171	6268	2850	5479	2882	5524	2884	5527	-	-	3097	6274	3056	6177	2770	5636
∞	3135	6214	3152	6240	3169	6266	3172	6269	2850	5479	2882	5524	2884	5527	-	-	-	-	3072	6239	2771	5637

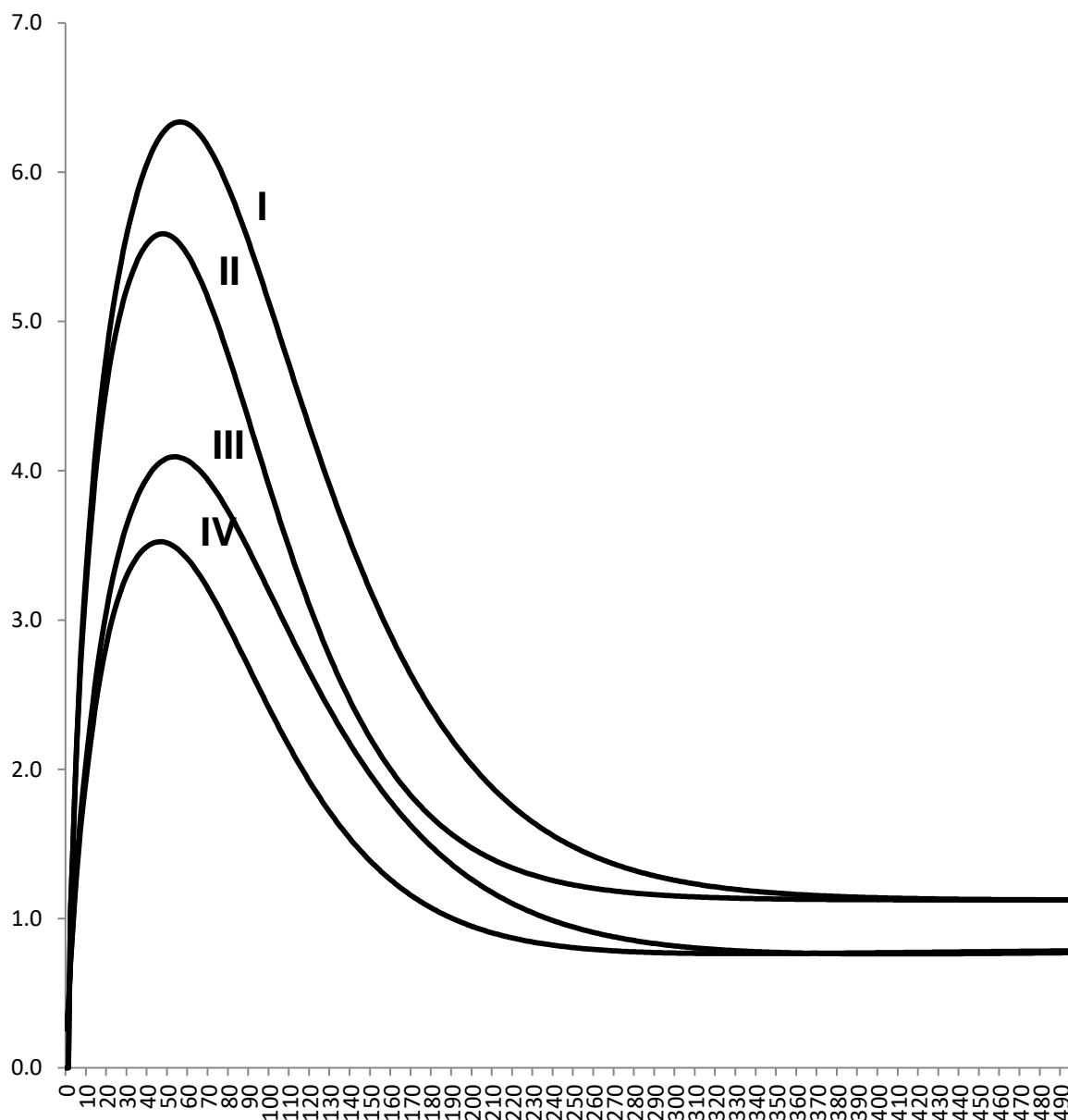


Рис.2.3.1 Разность значений чисел Лява (в процентах), рассчитанных для периодов 12 ч и 1 с (модели *PREM* и *IASP91*). Ось абсцисс – порядок  $n$ , ось ординат – разность в %. *I* – разности значений  $-kn \cdot 1000$  для модели *PREM*; *II* – то же для модели *IASP91*; *III* – разности значений  $-h \cdot 1000$  для модели *PREM*; *IV* – то же для модели *IASP91*.

**Сравнение нагрузочных чисел Лява для сферической невращающейся Земли с данными других авторов.** Нагрузочные числа, полученные по модели *PREM* для периода 1 с, лучше всего соответствуют результатам работы [Gegout et al., 2010]. Разности лежат в пределах  $0,03 \div 0,10\%$ , несмотря на очевидно различные методы вычислений.

Отличие чисел Лява, полученных в данной работе для модели *PREM* и периода 12 ч, от полученных Pagiatakis [1990], как правило, не превышает 1–2%. Исключение

составляет разность чисел  $k'$  для порядка  $n = 9$ , которая достигает 6%. Для подробно разбираемого Пайатакисом порядка  $n = 100$  различия между полученными им и нами числами  $k'$  и  $h'$  составили 1.2% и 2.0%.

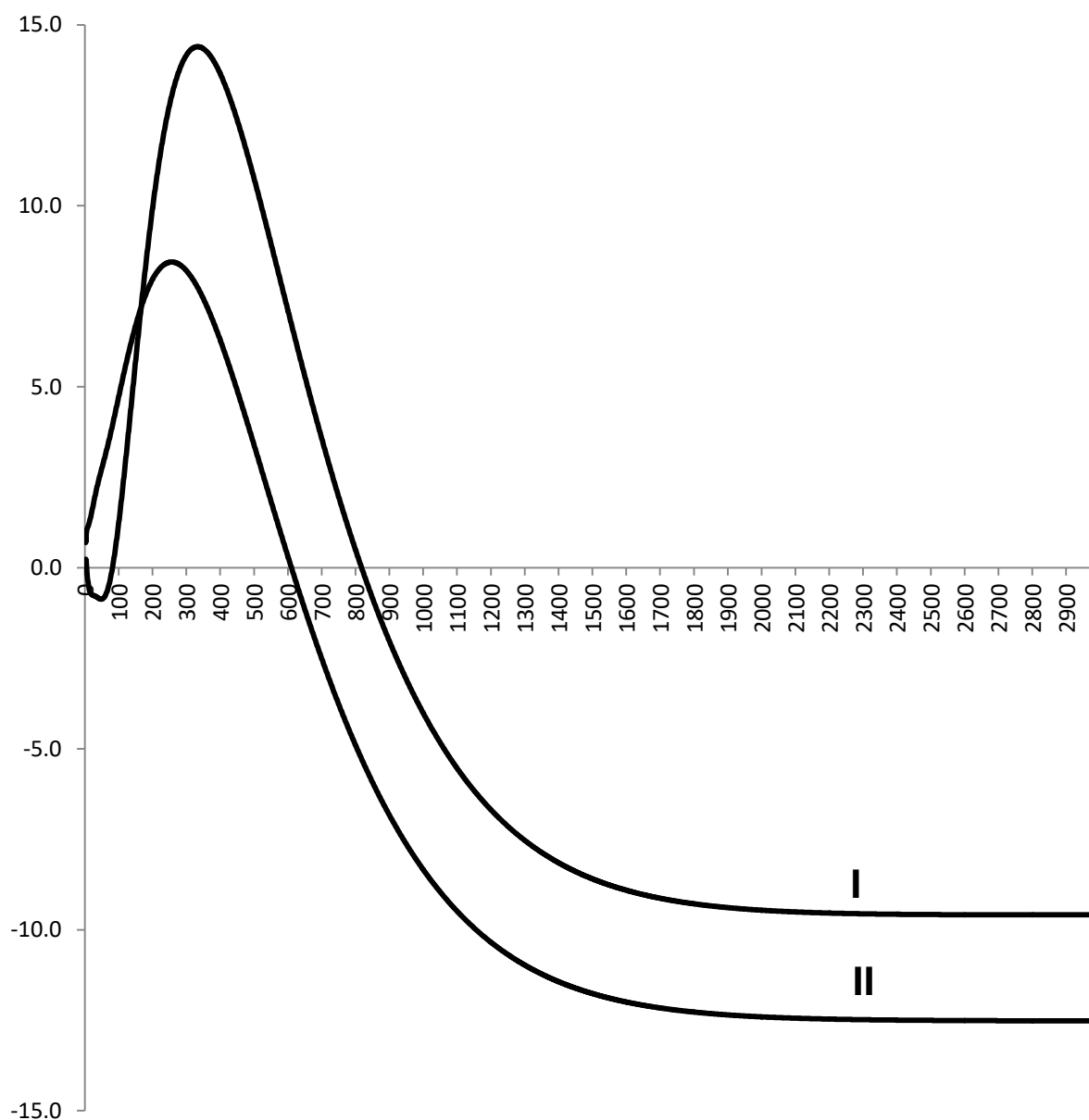


Рис. 2.3.2. Разность значений чисел Лява (в процентах), рассчитанных по моделям *IASP91* и *PREM* для периода 12 ч. Ось абсцисс – порядок  $n$ , ось ординат – разность в %. **I** – разности значений  $-kn \cdot 1000$  *IASP91-PREM*; **II** – разности значений  $-h \cdot 1000$  *IASP91-PREM*.

Отчасти причина различий состоит в том, что для своих расчетов Пайатакис брал иные значения фактора добротности  $Q$ , а именно, значения модели *SL8* [Anderson, Hart, 1978]. После того, как мы приняли те же значения  $Q$ , различия между нашими числами Лява уменьшились до 0.5 и 1.5% соответственно. Далее, расхождения несколько

снижаются после учета рассчитанных Пайатакисом эффектов, связанных с вращением Земли и анизотропией верхней мантии. Однако, частично компенсируя друг друга, суммарно эти эффекты составляют для указанного порядка 0.8% и 0.9% процента соответственно. Остаточные разности в  $-0.4\%$  и  $0.6\%$  пока не находят объяснения. Скорее всего, они связаны с возможным различием подходов к учету диссипации. Действительно, указанный Пайатакисом прирост чисел Лява  $k'$  и  $h'$  за счет диссипации по сравнению с моделью идеально упругой, изотропной, невращающейся Земли для  $n = 100$  составил  $1.5\%$  и  $0.5\%$  против нашего прироста  $5.9\%$  и  $3.8\%$ . Добавим, что при  $n > 1000$  различия между числами продолжают оставаться на уровне  $1\%$  и более. Подобные различия уже невозможно объяснить эффектами вращения и анизотропии, поскольку здесь их вклад практически равен нулю.

В работе [Jentzsch, 1997] нет прямого указания, для какого периода приведены данные, поэтому сравнение производилось с моделью *PREM 12 ч*. Различия составляют в среднем  $2-4\%$ , несколько возрастая по мере увеличения порядка.

Наконец, в статье [Na, Baek, 2011] приведены нагрузочные числа Лява для модели, близкой к примененной нами *IASP91*, для периода 12 ч. Отличия составляют в среднем  $2-3\%$ , также несколько возрастают с ростом порядка и, как правило, они больше для числа  $k'$ .

**Нагрузочные числа Лява для эллипсоидальной вращающейся Земли.** В табл. 2.3.2 приведены значения вычисленных в настоящей работе нагрузочных чисел Лява, полученных с учетом всей совокупности влияющих на их значения факторов, а именно: диссипации, эллиптичности, а также поправок за относительные и кориолисовы ускорения. Значения приведены для широты  $45^\circ$ . Учет перечисленных факторов привел к существенному отличию показанных в табл. 2.3.2 значений нагрузочных чисел Лява для больших  $n$  от приведенных выше (табл. 2.3.1) значений, вычисленных в работах [Gegout P. et al., 2010], [Pagiatakis S., 1990], [Jentzsch G., 1997], [Vinogradova O., 2012], [Vinogradova O., Spiridonov E., 2012]. В то же время, как мы увидим в дальнейшем, соответствующее указанным отличиям чисел Лява изменение амплитуды океанического гравиметрического эффекта обычно не превышает  $0.5\%$ . Именно эти значения нагрузочных чисел применяются в последней версии программы *ATLANTIDA3.1\_2014*.

Остановимся несколько подробнее на нагрузочных числах, рассчитанных по более современной модели строения Земли *IASP91*.

Таблица 2.3.2. Нагрузочные числа Лява  $k$  и  $h$ , вычисленные с учетом эллиптичности, относительных и кориолисовых ускорений

N	PREM				IASP91			
	Полусуточные		Суточные		Полусуточные		Суточные	
	-1000kn	-1000h	-1000kn	-1000h	-1000kn	-1000h	-1000kn	-1000h
0	0	132	0	133	0	133	0	133
1	0	288	0	287	0	290	0	290
2	619	998	617	996	620	1001	619	1000
3	601	1062	600	1061	602	1066	602	1066
4	551	1069	552	1069	552	1074	553	1074
5	544	1106	545	1107	545	1111	545	1111
6	567	1169	568	1170	567	1173	568	1174
7	604	1242	605	1243	603	1246	604	1247
8	647	1318	648	1320	645	1322	646	1323
9	691	1394	693	1396	688	1397	689	1399
10	736	1468	737	1470	731	1470	732	1472
20	1113	2057	1116	2061	1098	2057	1101	2060
30	1355	2428	1360	2435	1332	2426	1337	2431
40	1502	2665	1508	2673	1470	2659	1475	2665
50	1595	2830	1601	2839	1554	2817	1559	2823
60	1657	2956	1665	2965	1611	2936	1615	2941
70	1702	3058	1710	3068	1653	3032	1657	3037
80	1738	3147	1746	3158	1689	3116	1692	3121
90	1767	3228	1775	3239	1722	3194	1725	3198
100	1793	3304	1802	3314	1755	3267	1758	3271
200	2059	3988	2066	3998	2180	3959	2181	3961
300	2397	4648	2402	4657	2692	4572	2693	4574
400	2770	5278	2774	5285	3186	5054	3187	5056
500	3146	5861	3150	5867	3628	5405	3630	5408
600	3509	6389	3512	6394	4019	5649	4021	5652
700	3850	6861	3853	6866	4369	5814	4371	5817
800	4170	7281	4172	7286	4687	5924	4689	5927
900	4471	7657	4473	7661	4984	5995	4986	5998
1000	4756	7995	4758	7999	5266	6041	5268	6044
2000	7351	10442	7352	10447	7850	6119	7852	6122
3000	10040	12345	10041	12351	10383	6120	10385	6123
5000	15492	14752	15494	14760	15448	6120	15450	6124
7500	22022	15699	22024	15708	21778	6121	21780	6124
10000	28390	15860	28392	15869	28108	6121	28110	6124

Прежде всего рассмотрим относительные изменения нагрузочных чисел Лява и амплитудных дельта-факторов, связанные с введением в уравнения зависимости от широты [Спиридонов Е.А., 2016а, б]. Под введением этой зависимости будем понимать учет следующих факторов: эллиптичности Земли, центробежных и прочих ускорений, определяемых разложением геопотенциала до первого порядка по сжатию, а также относительных и кориолисовых ускорений. Расчет первого из сравниваемых далее наборов чисел (с учетом широтной зависимости) проводился для полусуточных волн по модели строения Земли *IASP91* на широте  $45^\circ$  согласно уравнениям (1.1.32) – (1.1.37) и представлен в табл. 2.3.2. Второй набор (без учета широтной зависимости) вычислялся для тех же волн и той же модели строения Земли по уравнениям (35.16) –

(35.21) работы [Vinogradova O. Yu., Spiridonov E.A., 2013]. В обоих наборах чисел была учтена диссипация.

Сразу отметим, что соответствующие относительные изменения нагрузочных чисел Лява  $h$  и  $l$  (для модели *IASP91*) достаточно малы и практически не зависят от порядка  $n$ . Для подавляющего числа порядков относительные изменения этих чисел составляют 0.51%, причем относительные разности числа  $h$  сперва плавно нарастают от 0.53% до 0.73% при переходе от порядка  $n = 2$  к  $n = 400$ , а затем несколько медленнее уменьшаются до 0.51% к  $n = 2000$  и далее уже практически не меняются. Наибольшее относительное изменение числа  $l$  наблюдается при  $n = 2$  (1.22%). Однако уже при  $n = 3$  различия не превышают 0.55% и полностью выходят на стационарный уровень 0.51% также к  $n = 2000$ , минуя локальный максимум при  $n = 400$  (0.94%).

Существенно отличается от описанного выше поведение нагрузочного числа  $k$  и соответственно нагрузочного дельта-фактора  $\delta$ . На рисунке 2.3.3 показаны относительные разности значений этих величин в зависимости от порядка  $n$ . Из рисунка видно, что относительные изменения числа  $k$  и дельта-фактора, связанные с учетом силы инерции, относительных и кориолисовых ускорений, а также эллиптичности Земли, почти линейно растут с увеличением порядка (от 0.32% при  $n = 2$  до 877.5% при  $n = 10000$  для числа  $k$  и от 1.2% до 269.0% для дельта-фактора). К сказанному следует добавить, что абсолютные значения рассматриваемых величин достаточно быстро убывают с ростом порядка. Так, значение дельта-фактора уменьшается более чем в 30 раз при переходе от  $n = 2$  к  $n = 600$  и еще почти на порядок при переходе от  $n = 600$  к  $n = 10000$ .

Обсудим теперь дополнительно вклад диссипации в последние обсуждаемые значения нагрузочных чисел. Наиболее значимые изменения, связанные с учетом диссипации, наблюдаются в области малых порядков (низких пространственных частот). На рис. 2.3.4 показаны относительные (в %) изменения значений нагрузочных чисел Лява  $h$ ,  $k$  и  $l$ , а также нагрузочного дельта-фактора полусуточных волн, связанные с введением диссипации. Расчет проводился для модели строения Земли *IASP91* с учетом широтной зависимости. Из значений, пересчитанных при помощи логарифмической функции крипа на период 12 часов, вычитались те же значения для референц-периода модели в 1 секунду. Полученные разности выражались в процентах. Переход от 12 к 24 часам вносит в полученную картину лишь незначительные изменения.

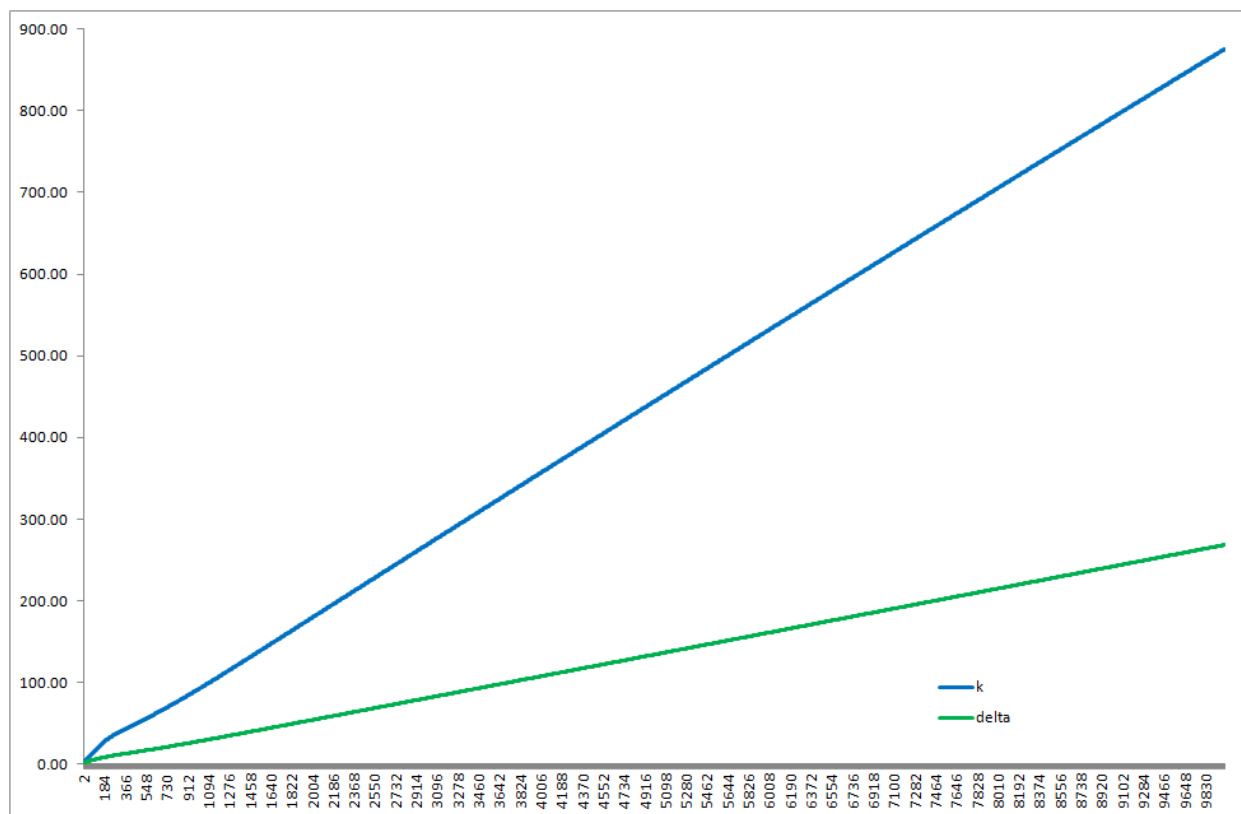


Рис. 2.3.3 Относительные изменения (в %) нагрузочного числа Лява  $k$  и нагрузочного амплитудного дельта-фактора полусуточных волн (значения с учетом широтной зависимости минус вариант без нее) с ростом порядка  $n$ . Модель строения Земли IASP91 с учетом диссипации.

Из рисунка видно, что наибольший вклад диссипации наблюдается в основном в локальных максимумах кривых. Для чисел  $k$ ,  $h$ , и  $l$  максимальные значения соответствуют порядкам 36, 37 и 67 и составляют 4.85, 3.22 и 3.38% соответственно. С ростом порядка значения разностей для числа  $k$  приближаются к 0.6%, а для чисел  $h$  и  $l$  к 0.8 и 0.2%.

Некоторой особенностью обладают разности для числа  $l$ . Нарастание до максимума у разностей этих чисел происходит от значения -10.72% при  $n = 2$ . Максимальное значение вклада диссипации в значение амплитудного нагрузочного дельта-фактора наблюдается при  $n = 38$ , где его величина достигает 2.60%, падая на высоких порядках до 1%. Как уже было сказано выше, оценке роли диссипации при расчете океанического нагрузочного эффекта посвящены работы [Виноградова О.Ю., Спиридонов Е.А., 2012; 2013].

Достаточно большие по модулю относительные разности нагрузочных чисел Лява, рассчитанных с учетом широтной зависимости, опять же наблюдаются при переходе от модели строения Земли *PREM* к *IASP91* (рис. 2.3.5).



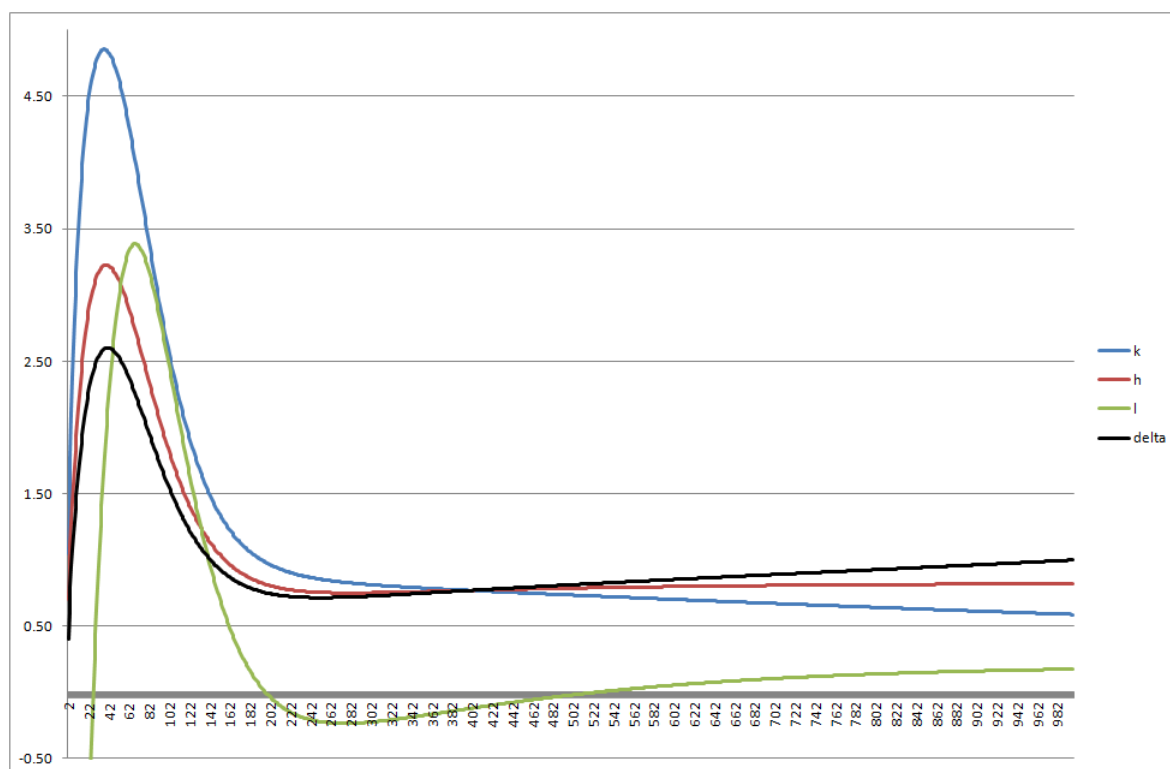


Рис. 2.3.4 Вклад диссипации. Относительные разности (в %) значений нагрузочных чисел Лява  $h$ ,  $k$ ,  $l$  и нагрузочного дельта-фактора ( $\delta$ ), рассчитанных с учетом и без учета диссипации (*IASP91* с учетом широтной зависимости).

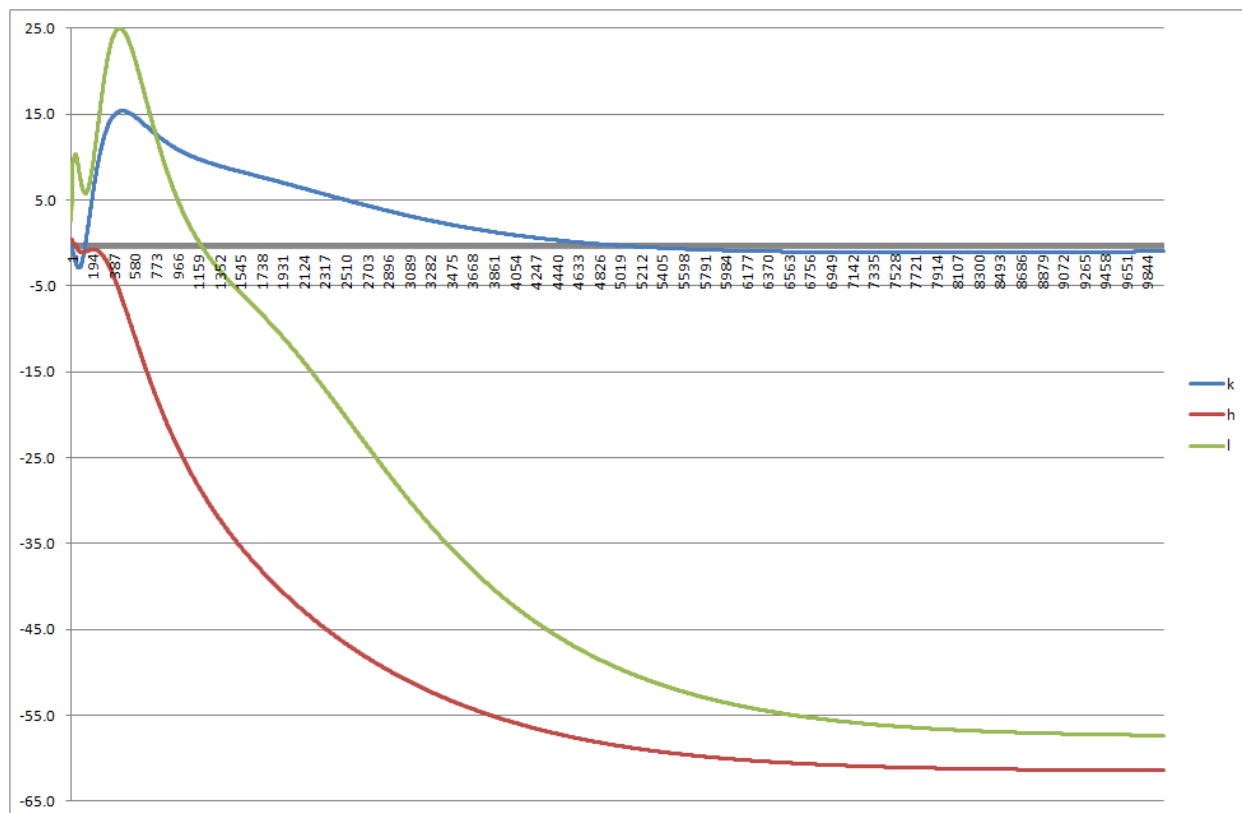


Рис. 2.3.5 Зависимость разностей (в %) значений нагрузочных чисел Лява  $h$ ,  $k$ ,  $l$ , рассчитанных по моделям *PREM* и *IASP91* с учетом диссипации и широтной зависимости, от порядка.

Полученные при переходе от *PREM* к *IASP91* разности для числа  $k$  по сравнению с двумя другими числами достаточно малы и не превышают в максимуме ( $n=487$ ) 15%. Далее они убывают с ростом порядка, не превосходя при  $n = 10000$  1%. Что касается чисел  $h$  и  $l$ , то для них относительные разности достигают на больших порядках 60%, причем разности для числа  $l$  нарастают несколько медленнее. Разности для чисел  $h$  имеют ярко выраженный максимум при  $n = 433$ , где они достигают 25%. На порядках 3700 – 4000 указанные разности составляют уже около 40%. Этот диапазон порядков интересен тем, что при  $n = 3733$  нагрузочный дельта-фактор, рассчитанный по данным модели *IASP91* с учетом широтной зависимости, уменьшается практически до нуля и меняет знак. Для модели *PREM*, равно как и для *IASP91* без учета широтной зависимости, этого не происходит. Сами числа Лява с ростом порядка свой знак не меняют и ведут себя монотонно. Причиной изменения знака нагрузочного дельта-фактора на порядке 3733 является то, что величина  $k*(n+1)/2$  становится по модулю больше  $h$ , т.е. изменение потенциала в результате деформации начинает вносить в значение нагрузочного дельта-фактора больший вклад, чем вертикальное смещение. Это происходит при расчетах по модели *IASP91* после введения силы инерции и составляющих геопотенциала первого порядка по сжатию еще до введения поправок за относительные и кориолисовы ускорения. К сказанному следует добавить, что на значения нагрузочных чисел Лява и нагрузочного дельта-фактора уже при  $n = 3000$  влияют лишь верхние 12 километров коры, что достаточно условно, поскольку четверть (по глубине) - это на самом деле рельеф. При  $n = 10000$  мы имеем дело с первыми 3-4 километрами, а при  $n = 50000$  находимся внутри верхнего полукилометрового слоя. С практической точки зрения разложение высоты прилива для целей наземной гравиметрии вполне может быть ограничено величиной  $n = 1200$ , как это и сделано в нашей программе *ATLANTIDA3.1\_2014*. Дальнейшее повышение порядка разложения, видимо, имеет смысл только при применении уточненных региональных океанических моделей и способно привести к изменениям величины океанического эффекта в пределах 0.1%. В то же время, получение чисел Лява высоких порядков может быть полностью оправдано при обработке данных морской гравиметрии, а также *GNSS*-наблюдений. В связи с этим, обсудим результаты вычислений нагрузочных чисел Лява до порядка 50000.

Поскольку с ростом порядка величина нагрузочных чисел определяется свойствами все более и более тонких слоев вблизи земной поверхности, то оптимальным техническим решением задачи их вычисления, очевидно, является

уменьшение шага интегрирования по мере удаления от подошвы мантии. Подобный подход был предложен в работе [Перцев, 1976]. В настоящей работе шаг интегрирования по глубине оставлен постоянным, и предпринята попытка интегрирования краевой задачи [Спиридонов Е.А., 2016b] для трех его значений: 100, 50 и 33,3 км. При шаге 100 км интегрирование потерпело неудачу уже при  $n = 35000$ . Однако для двух других значений шага было успешно доведено до конца.

На рис. 2.3.6 показаны значения разностей нагрузочных чисел Лява в %, полученных при шаге интегрирования 100 и 50 км для модели строения Земли *IASP91* с учетом диссипации и широтной зависимости.

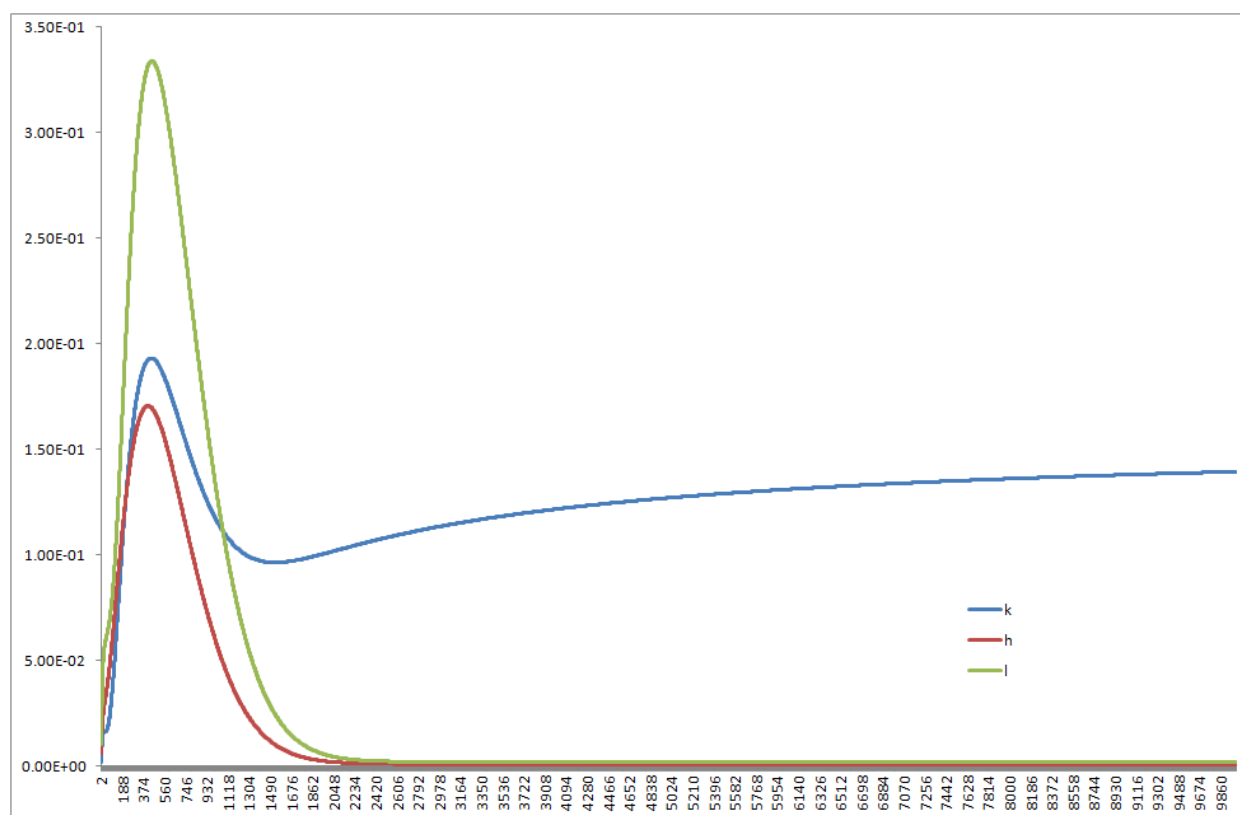


Рис. 2.3.6 Разность (в %) нагрузочных чисел  $k$ ,  $h$  и  $l$ , вычисленных с шагом интегрирования 100 и 50 км. Модель строения Земли *IASP91* с учетом широтной зависимости

По оси абсцисс отложен порядок. Он ограничен величиной 10000, поскольку при дальнейшем его увеличении обсуждаемая тенденция поведения разностей практически не меняется. Все три кривые имеют максимумы при  $n = 409$ , 450 и 405 для чисел  $l$ ,  $k$  и  $h$  соответственно. Значения в максимумах составляют 0.33, 0.19 и 0.17%. С увеличением порядка значения разностей для чисел  $l$  и  $h$  падают практически до нуля, а для числа  $k$  стремятся к 0.14%. Аналогичные кривые разностей нагрузочных чисел для шагов 50 и 33.3 км (здесь не показаны) ведут себя аналогично кривым рис. 2.3.6, однако все

значения разностей оказываются почти в три раза меньше. Так, значения разностей в максимумах для чисел  $l$ ,  $k$  и  $h$  уменьшаются до 0.11, 0.06 и 0.056% соответственно.

С увеличением порядка разности чисел  $l$  и  $h$  по-прежнему стремятся к нулю, а для числа  $k$  – стремятся к 0.047%. Таким образом, при уменьшении шага в два раза разности вычисляемых нагрузочных чисел Лява уменьшаются почти в 4.5 раза. Отсюда следует, что при вычислении чисел Лява с шагом 50 км погрешности их определения не превышают 0.1%. Значения нагрузочных чисел Лява для этого шага, вычисленные до  $n = 50000$  с учетом всех перечисленных в настоящей работе факторов для модели строения Земли *IASP91* и периода 12 часов (учет диссипации для полусуточных волн), можно скачать, пройдя по ссылке: <https://cloud.mail.ru/public/4aXG/oNp3ZRyDZ>

Нагрузочные числа Лява для суточных волн, а также для модели *PREM* и шага интегрирования 33.3 км могут быть предоставлены автором настоящей работы по запросу.

Все представленные в настоящей работе итоговые результаты (например, результаты Раздела 3) получены по нагрузочным числам, вычисленным с шагом интегрирования 33.3 км. Что касается обычных чисел Лява второго порядка, то при переходе от шага 100 км к шагу в 33.3 км они меняются лишь на пять единиц в шестом знаке после запятой.

**Функции Грина для невращающейся сферической Земли.** Полученные нами для различных вариантов моделей гравиметрические функции Грина (без учета широтной зависимости) представлены в табл. 2.3.3 и на рис. 2.3.7. Значения умножены на средний земной радиус и угловое расстояние в радианах. Данный анализ предпринят в основном с целью сравнения результатов с более ранними работами других авторов.

В первом столбце табл. 2.3.3 дано угловое расстояние в градусах. В последующих столбцах приведены: значения функций Грина для модели *PREM* и референц-периодов 1 с, 200 с, 12 ч и 24 ч; результаты для модели *IASP91* (1с, 12 ч и 24 ч); функции Грина из работ [Francis, Dehant, 1987], [Pagiatakis, 1990], [Jentzsch, 1997] и [Na, Baek, 2011].

Расхождения для периодов 1 с и 12 ч получились малыми для обеих моделей строения Земли. Они плавно возрастают для *PREM* и *IASP91* соответственно от 0.8 и 0.6 при  $\theta = 0.0001^\circ$  до максимальных значений 1.3 и 1.0 при  $\theta = 0.8^\circ$ , а затем достаточно резко падают практически до нуля уже к  $\theta = 3^\circ$ . Для модели *PREM* половина указанных разностей достигается при переходе от периода 1 с к периоду 200 с. Разности значений функций Грина для периодов 12 ч и 24 ч на порядок меньше, что является следствием относительной близости этих периодов.

Таблица 2.3.3. Гравиметрические функции Грина для различных вариантов моделей  $\times 10^{18}(a\theta)$ ..

$\theta$ , deg	PREM 1s	PREM 200s	PREM 12h	PREM 24h	IASP91 1s	IASP91 12h	IASP91 24h	PREM, Francis & Dehant [1987]	PREM, Pagiatakis [1990]	PREM, Jentzsch [1997]	IASPEI, Na & Baek [2011]
0.0001	-97.178	-97.542	-97.915	-97.946	-84.810	-85.421	-85.461	-98.084	-98.875	-90.380	-93.995
0.001	-96.824	-97.188	-97.560	-97.591	-84.659	-85.269	-85.309	-97.663	-98.361	-89.576	-93.766
0.01	-93.222	-93.576	-93.940	-93.969	-83.065	-83.671	-83.711	-93.465	-93.260	-82.532	-91.478
0.02	-88.925	-89.270	-89.624	-89.653	-80.956	-81.558	-81.598	-88.858	-87.757	-	-88.954
0.03	-84.423	-84.759	-85.105	-85.133	-78.567	-79.166	-79.206	-84.354	-82.552	-76.392	-86.459
0.04	-80.037	-80.365	-80.703	-80.730	-76.197	-76.793	-76.833	-79.990	-77.732	-	-83.997
0.06	-71.968	-72.283	-72.609	-72.634	-71.759	-72.351	-72.391	-71.821	-69.374	-	-79.226
0.08	-64.696	-65.003	-65.321	-65.346	-67.471	-68.061	-68.100	-64.566	-62.674	-	-74.713
0.10	-58.470	-58.773	-59.089	-59.114	-63.514	-64.105	-64.144	-58.341	-57.490	-60.311	-70.510
0.16	-45.539	-45.860	-46.198	-46.226	-53.527	-54.140	-54.181	-45.577	-48.726	-50.767	-59.999
0.20	-40.751	-41.100	-41.470	-41.502	-48.500	-49.141	-49.185	-40.865	-46.668	-46.669	-54.721
0.25	-37.343	-37.736	-38.153	-38.191	-43.771	-44.459	-44.506	-37.502	-45.043	-42.615	-49.765
0.30	-35.490	-35.929	-36.395	-36.439	-40.382	-41.124	-41.175	-35.654	-41.839	-39.675	-46.208
0.40	-33.607	-34.124	-34.676	-34.730	-36.169	-37.023	-37.081	-33.744	-34.798	-35.862	-41.784
0.50	-32.432	-33.006	-33.618	-33.678	-33.791	-34.743	-34.808	-32.537	-31.531	-33.635	-39.282
0.60	-31.417	-32.022	-32.669	-32.732	-32.232	-33.256	-33.326	-31.469	-31.690	-32.172	-37.622
0.80	-29.561	-30.171	-30.824	-30.885	-30.008	-31.094	-31.168	-29.541	-31.763	-30.140	-35.187
1.0	-27.880	-28.442	-29.043	-29.095	-28.193	-29.245	-29.317	-27.787	-29.756	-28.428	-33.235
1.2	-26.336	-26.825	-27.348	-27.388	-26.564	-27.524	-27.589	-26.235	-27.805	-26.805	-31.663
1.6	-23.597	-23.933	-24.289	-24.305	-23.724	-24.430	-24.478	-23.660	-24.374	-23.842	-28.838
2.0	-21.248	-21.463	-21.687	-21.686	-21.326	-21.796	-21.828	-21.424	-22.005	-21.312	-26.378
2.5	-18.782	-18.896	-19.012	-18.997	-18.824	-19.084	-19.101	-18.695	-19.033	-18.713	-23.949
3.0	-16.758	-16.812	-16.865	-16.844	-16.775	-16.906	-16.915	-16.641	-16.953	-16.625	-21.921
4.0	-13.725	-13.725	-13.721	-13.697	-13.715	-13.726	-13.726	-13.743	-13.671	-13.560	-18.910
5.0	-11.649	-11.630	-11.607	-11.583	-11.639	-11.606	-11.603	-11.710	-11.534	-11.493	-16.815
6.0	-10.202	-10.175	-10.145	-10.123	-10.205	-10.154	-10.150	-10.157	-10.081	-10.062	-15.390
7.0	-9.168	-9.138	-9.106	-9.085	-9.187	-9.129	-9.125	-9.220	-9.045	-9.042	-14.392
8.0	-8.406	-8.376	-8.344	-8.325	-8.436	-8.378	-8.374	-8.383	-8.309	-8.289	-13.639
9.0	-7.822	-7.794	-7.763	-7.746	-7.860	-7.805	-7.801	-7.848	-7.747	-7.712	-13.074
10	-7.356	-7.329	-7.302	-7.286	-7.397	-7.346	-7.343	-7.349	-7.308	-7.249	-12.628
12	-6.632	-6.610	-6.587	-6.574	-6.673	-6.631	-6.629	-6.632	-6.667	-6.531	-11.904
16	-5.571	-5.555	-5.539	-5.528	-5.601	-5.572	-5.570	-5.572	-5.714	-5.480	-10.840
20	-4.715	-4.702	-4.688	-4.679	-4.735	-4.711	-4.709	-4.713	-4.946	-4.639	-9.987
25	-3.765	-3.753	-3.741	-3.733	-3.777	-3.754	-3.753	-3.761	-4.018	-3.711	-9.051
30	-2.889	-2.877	-2.866	-2.860	-2.894	-2.872	-2.871	-2.881	-3.059	-2.858	-8.169
40	-1.343	-1.334	-1.325	-1.322	-1.337	-1.319	-1.317	-1.332	-1.468	-1.379	-6.658
50	-0.201	-0.195	-0.189	-0.188	-0.187	-0.175	-0.174	-0.189	-0.456	-0.300	-5.569
60	0.432	0.434	0.437	0.436	0.448	0.454	0.454	0.441	0.159	0.275	-4.994
70	0.576	0.576	0.576	0.575	0.591	0.592	0.592	0.580	0.512	0.387	-4.959
80	0.343	0.341	0.339	0.338	0.353	0.350	0.350	0.338	0.181	0.145	-5.287
90	-0.136	-0.138	-0.141	-0.142	-0.130	-0.135	-0.136	-0.151	-0.427	-0.315	-5.909
100	-0.737	-0.740	-0.743	-0.743	-0.736	-0.743	-0.743	-0.765	-0.890	-0.875	-6.667
110	-1.371	-1.374	-1.377	-1.376	-1.375	-1.381	-1.381	-1.413	-1.528	-1.446	-7.479
120	-1.979	-1.981	-1.983	-1.981	-1.987	-1.991	-1.991	-2.036	-2.215	-1.971	-8.291
130	-2.530	-2.530	-2.531	-2.528	-2.540	-2.542	-2.542	-2.602	-2.768	-2.427	-9.083
140	-3.013	-3.012	-3.011	-3.008	-3.026	-3.025	-3.025	-3.100	-3.272	-2.808	-9.814
150	-3.430	-3.428	-3.426	-3.422	-3.445	-3.441	-3.441	-3.532	-3.749	-3.123	-10.538
160	-3.790	-3.787	-3.784	-3.779	-3.805	-3.800	-3.800	-3.904	-4.133	-3.389	-11.226
170	-4.100	-4.095	-4.092	-4.087	-4.116	-4.109	-4.109	-4.224	-4.412	-3.622	-11.931
180	-4.329	-4.340	-4.338	-4.335	-4.366	-4.361	-4.360	-4.492	-4.660	-3.833	-12.611

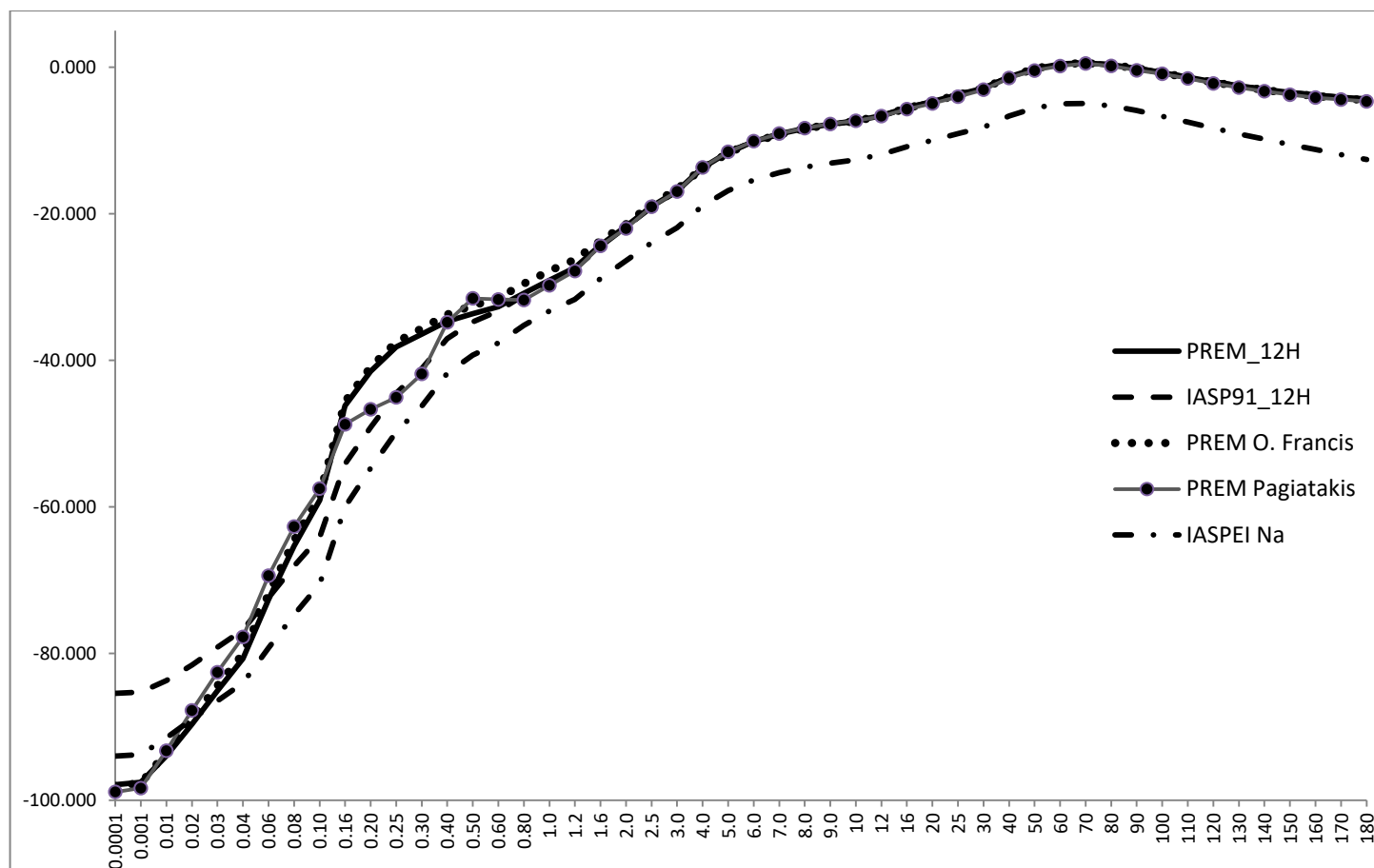


Рис. 2.3.7. Гравиметрические функции Грина для различных вариантов моделей  $\times 10^{18} (a\theta)$ .

Поведение разностей значений функций Грина согласуется с рассмотренной выше (рис. 2.3.1) тенденцией изменения разностей чисел Лява, а именно, с достаточно большими их отличиями на высоких порядках и максимумами в окрестности  $n = 80$ .

Различия между *PREM* и *IASP91* проявляются в основном в области высоких пространственных частот, что также хорошо согласуется с данными рис. 2.3.2 для разностей чисел Лява.

Разность функций Грина, построенных по моделям *PREM* и *IASP91* для периода 12 ч, на малых угловых расстояниях почти на порядок больше разностей функций для разных периодов в каждой из этих моделей по отдельности. Разность функций для *PREM* и *IASP91* сначала быстро возрастает от значения  $-12.5$  при  $\theta = 0.0001^\circ$  до  $+7.9$  при  $\theta = 0.16^\circ$ , а затем опять же достаточно быстро падает практически до нуля вблизи  $\theta = 0.8^\circ$  (рис. 2.3.7).

Отличия нашей функции Грина для модели *PREM* от результатов, полученных О. Francis и V. Dehant [1987], не превышают разностей, характерных для разных периодов одной и той же модели. Напомним, что именно данные этой работы применены в программе *LOAD89* пакета *ETERNA*.

Функция Грина у Пайатакиса [Pagiatakis, 1990] отличается от нашей для *PREM* в основном в диапазоне  $\theta = 0.16^\circ \div 0.6^\circ$ , что, видимо, связано скорее с эффектами вязкости, нежели вращения и анизотропии.

Результаты, приводимые Йенчем [Jentzsch, 1997] для *PREM*, как ни странно, оказались ближе всего к нашим для *IASP91*, хотя функция Грина для *IASPEI* [Na, Baek, 2011], на которую ссылается Йенч, существенно отличается как от наших результатов для *IASP91*, так и от функций, полученных другими авторами. Причины подобного поведения функций авторами указанной работы не раскрываются.

Необходимо отметить, что анализ разностей чисел Лява и функций Грина дает лишь весьма приблизительное представление о возможных величинах соответствующих им разностей амплитуд и фаз нагрузочного океанического эффекта. Сравнение результатов, полученных по моделям *PREM* и *IASP91*, а также вклад диссипации будут рассмотрены в разделах 2.5 и 2.6 настоящей главы. Здесь же мы коротко остановимся на сравнении наших значений нагрузочного эффекта со значениями из работ других авторов, в частности работы О. Francis и V. Dehant [1987]. Именно эти данные позволяют оценить влияние методики получения чисел Лява на конечные результаты расчета океанического эффекта [Виноградова О.Ю., 2012].

Пространственное распределение разностей амплитуд и фаз гравиметрического океанического эффекта между нашей моделью *PREM 12 ч* и моделью Пайатакиса (здесь не показано) для волны *M2* в основном совпадает с таковым для разностей между *PREM 12 ч* и *IASP 12 ч* (см. разд. 2.4). Разница состоит лишь в том, что различия амплитуд здесь почти в два раза меньше. Обычно они не превосходят 0.05 мкГал и достигают 0.15 мкГал лишь в отдельных экстремальных зонах. Разности фаз, как правило, не превосходят  $0.1^\circ$ . В основном, указанные разности вызваны скорее различиями в подходах учета диссипации, нежели учитываемыми Пайатакисом эффектами вращения и анизотропии. Последнее следует как из факта частичной компенсации этих эффектов, так и из отсутствия их влияния на высоких пространственных частотах, для которых, собственно, и выявлены различия между числами Лява и функциями Грина. Проведенный учет диссипации по значениям  $Q$  из применяемой Пайатакисом модели *SL8* не уменьшил сколько-нибудь обсуждаемые различия. Таким образом, суммарный вклад эффектов анизотропии и вращения у берегов Европы вряд ли превосходит несколько сотых микрогала. Впрочем, этот вопрос требует дополнительного анализа.

Необъяснимо велики оказались отличия результатов, полученных На и Ваек для *IASPEI* [На, Ваек, 2011] и нашей *IASP91 12 ч.* Разности достигали 1–2 мкГал практически вдоль всего побережья Западной Европы. Объяснения подобным разностям, как и отличиям в значениях функций Грина, нами не найдено. Сами На и Ваек полагают, что их функции достаточно хорошо совпадают с таковыми для *PREM*, и в подтверждение этому приводят сравнение соответствующих кривых. Однако значимые для гравиметрического эффекта различия становятся видны только после умножения функций Грина на угловое расстояние.

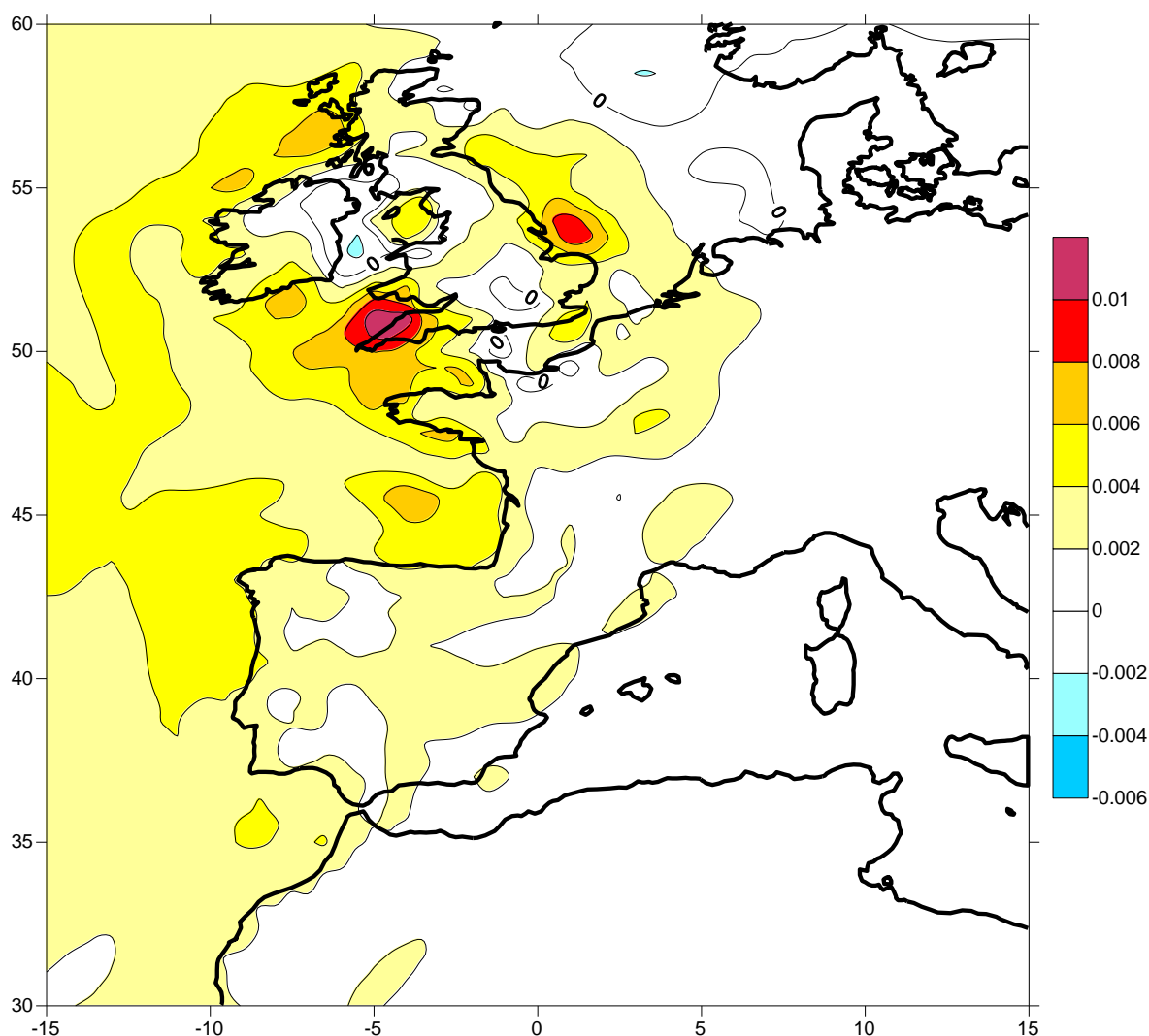


Рис. 2.3.8. Разность амплитуд волны  $M_2$  океанического нагрузочного эффекта для модели *PREM 1c*, вычисленных по функциям Грина, из настоящей работы и работы [Francis, Dehant, 1987].

Различия между результатами, полученными по функциям Грина при помощи программы *LOAD89* для модели *PREM 1c*, в настоящей работе и работе [Francis, Dehant, 1987] достаточно малы. Они лежат в пределах 0.01 мкГал по амплитуде и нескольких десятых градуса по фазе. На рис. 2.3.8 показано географическое



распределение разности амплитуд нагрузочного эффекта для указанных моделей, вычисленное для территории Европы. Данный рисунок фактически иллюстрирует величину погрешности определения эффекта, определяемую различиями методик вычисления нагрузочных чисел Лява и функций Грина. Вдоль большей части береговой линии западной Европы разности для волны  $M2$  не превышают 0.004 мкГал, т.е. являются пренебрежимо малыми. Лишь на небольшом участке Корнуэльского полуострова значения немного превышают 0.01 мкГал. В разделе 2.4 мы увидим, что различия, обусловленные разностями в подходах к вычислению нагрузочного эффекта (по функциям Грина или через разложение высоты прилива по сферическим функциям), существенно больше.

В заключение обсудим величину разности амплитуд суммарного океанического эффекта, полученного путем разложения котидальных карт  $M2$  до 1440 и 720 порядка. Географическое распределение этой разности представлено на рис. 2.3.9. Оно характеризует величину погрешности, связанную с ограничением порядка разложения. Приведенные на рисунке разности в 5 – 10 раз превышают показанные на рис. 2.3.8. В непосредственной близости (до 50 км) от береговой линии они обычно составляют 0.02 мкГал, порой достигая 0.05 – 0.07 мкГал, или 0.5 – 3% от значений амплитуд океанического эффекта волны  $M2$ . Несмотря на то, что указанные величины разностей являются значимыми для современных гравиметрических наблюдений, в настоящей работе для моделей прошлого поколения разложение остановлено на 720 порядке. Тем не менее, была также вычислена разность амплитуд при разложении до 1120 и 1440 порядка (здесь не показана). Различия результатов оказались в несколько раз меньше, т.е., в непосредственной близости от береговой линии не превышали 0.2 – 1% от амплитуды океанического эффекта. В то же время, применение разложения такой точности имеет смысл лишь в случае агрегирования глобальной океанической модели с региональными, способными изменить результат в пределах 5%. Эта идея осуществлена в океанической модели *TPX08*. Разложение для основной применяемой в программе *ATLANTIDA3.1.\_2014* океанической модели *FES2012* проведено до 1120 порядка. Дальнейшее разложение способно привести к погрешностям, не превышающим десятую часть от представленных на рис.2.3.9.

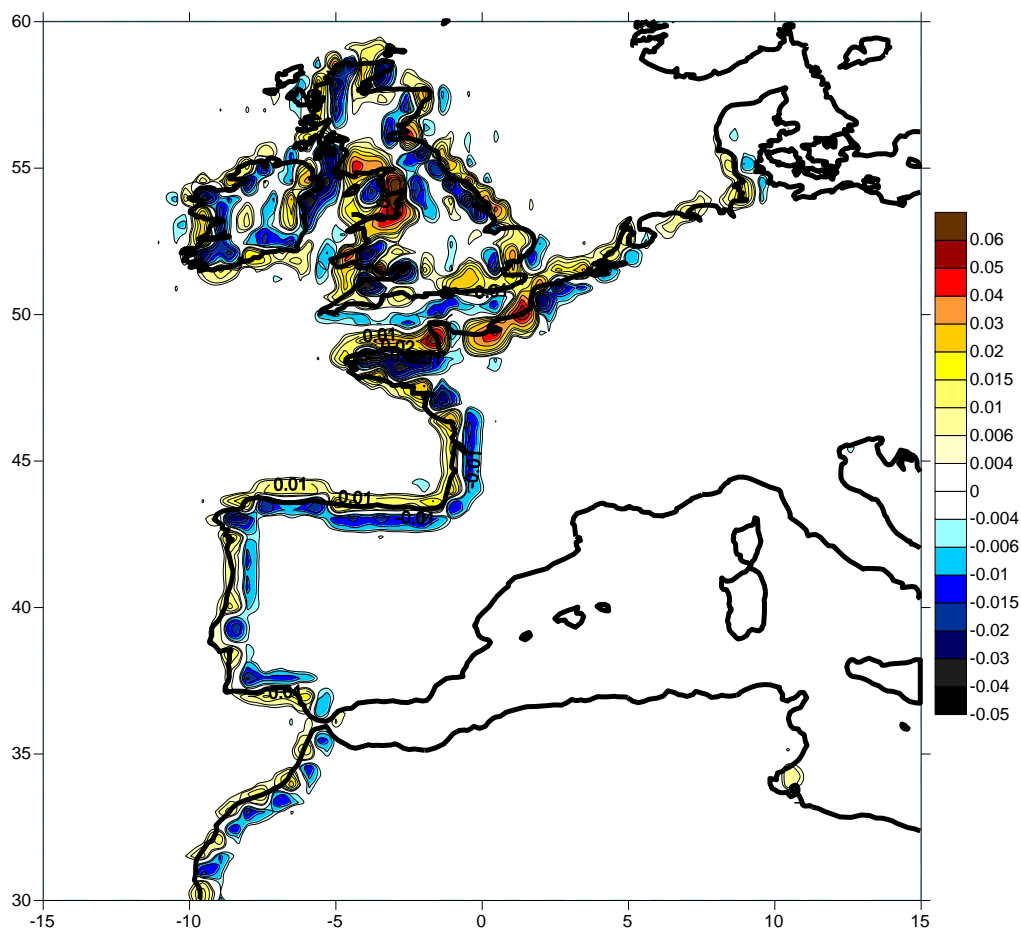


Рис. 2.3.9. Разность амплитуд океанического эффекта (мкГал), полученных по разложениям высоты прилива волны M2 до 1440 и 720 порядка. (*PREM 1c, CSR3.0*).

**Выводы.** Учет диссипации изменяет значения нагрузочных чисел Лява  $k$  и  $h$ , рассчитанных без учета эллиптичности, а также относительных и кориолисовых ускорений, максимально на 5.5 – 6.5% и 3.5 – 4% соответственно. Максимум для обоих чисел достигается при значениях  $n$  порядка 30 – 50. Величина указанных изменений для модели *IASP91* на 2 – 2.5% меньше, чем для *PREM*. Различия чисел  $k$  и  $h$ , рассчитанных по этим двум моделям строения Земли, достигают 10 и 15% соответственно для широкого диапазона  $n$ . После учета широтной зависимости, эти различия могут достигать десятков процентов.

Разности, обусловленные ограничением порядка разложения высоты прилива по сферическим функциям до  $n = 720$ , способны в непосредственной близости (до 50 км) от береговой линии привести к относительной погрешности вычисления океанического эффекта в пределах 0.5 – 3%. Это на порядок меньше вклада исследуемых в данной работе эффектов диссипации и локальных особенностей строения коры и верхней

мантии, а также в разы уступает относительным погрешностям океанических моделей прошлого поколения.

Для модели *FES2012* применяется разложение до  $n = 1120$ , и величина погрешностей здесь еще на порядок меньше. Соответственно, это диктует необходимость определения нагрузочных чисел Лява с учетом максимального количества влияющих на их значения факторов, таких как: эллиптичность, вращение, относительные и кориолисовы ускорения. Учет этих факторов приводит к существенному изменению полученных значений нагрузочных чисел Лява, в особенности для больших  $n$ , и анализируемым в дальнейшем (разд. 3.8) изменениям величины океанического гравиметрического эффекта.

#### 2.4. СРАВНЕНИЕ РАСЧЕТА ОКЕАНИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА С РЕЗУЛЬТАТАМИ ПРОГРАММЫ *LOAD89* ИЗ ПАКЕТА *ETERNA3.3*

В этом разделе мы проведем сравнительный анализ полученных в настоящей работе численных результатов с результатами, рассчитанными программой *LOAD89* пакета *ETERNA3.3*.

Напомним, что в программе *LOAD89* нагрузочный океанический эффект вычисляется с применением функций Грина и учетом особенностей ближней зоны, в то время как в настоящей работе применен метод разложения высоты прилива по сферическим функциям, и ближняя зона не учитывается. Перед разложением данные океанической модели *CSR3.0* (это одна из трех моделей, по которой можно провести сравнение) были пересчитаны методом кригинга в узлы сетки  $0.125 \times 0.125^\circ$ . Таким образом, “ближней зоной” в нашем анализе являлась вся поверхность земного шара. Эти отличительные особенности, как и преимущества применяемой здесь программы *ATLANTIDA3.1\_2014*, уже были упомянуты нами выше в разделе 2.1.

Также учтем то обстоятельство, что, несмотря на различие методик вычисления нагрузочных чисел Лява и интерполяции океанических данных, а также фактически различной последовательности вычислений, оба упомянутых выше метода (разложение по сферическим функциям и применение функций Грина) представляют собой по сути одно и то же (см. раздел 1.6), а потому должны приводить к одинаковым результатам. В связи с этим, анализ разностей нагрузочного эффекта может служить отправной точкой для оценки сравнительной методической разности полученных результатов. Здесь будет показано, что эта разность сопоставима с рассматриваемыми ниже эффектами диссипации и региональных особенностей строения коры и верхней мантии.

Все приводимые в данном разделе рисунки построены для территории Европы по земной модели *PREM* без диссипации (референц-период 1 с) и океанической модели *CSR3.0* для нулевой высоты над уровнем моря. Более современные океанические модели не рассматриваются, поскольку одной из целей данной работы являлось обеспечение преемственности результатов при применении отличающихся методов расчета.

Амплитуды разностных векторов океанического эффекта, рассчитанные в настоящей работе при помощи прошлой версии нашей программы *ATLANTIDA3.0* и по программе *LOAD89* для волны *M2* и территории Европы, показаны на рис. 2.4.1. Как

сами амплитуды исходных векторов, так и их разности нарастают с юга на север, обычно не превосходя 0.3 мкГал и являясь пренебрежимо малыми при удалении от берега более чем на 100 км. Экстремальных значений рассматриваемая разностная амплитуда достигает на Корнуоллском полуострове (до 0.8 мкГал) и в Бретани (до 0.5 мкГал). В целом же следует отметить, что на подавляющей части береговой линии Западной Европы разностные амплитуды, взятые в относительной мере, составляют не более 2.5 – 5% от рассчитываемых амплитуд океанического эффекта, приведенных на рис. 2.2.5, что, как правило, немного уступает относительной погрешности определения высоты прилива в самой океанической модели *CSR3.0*.

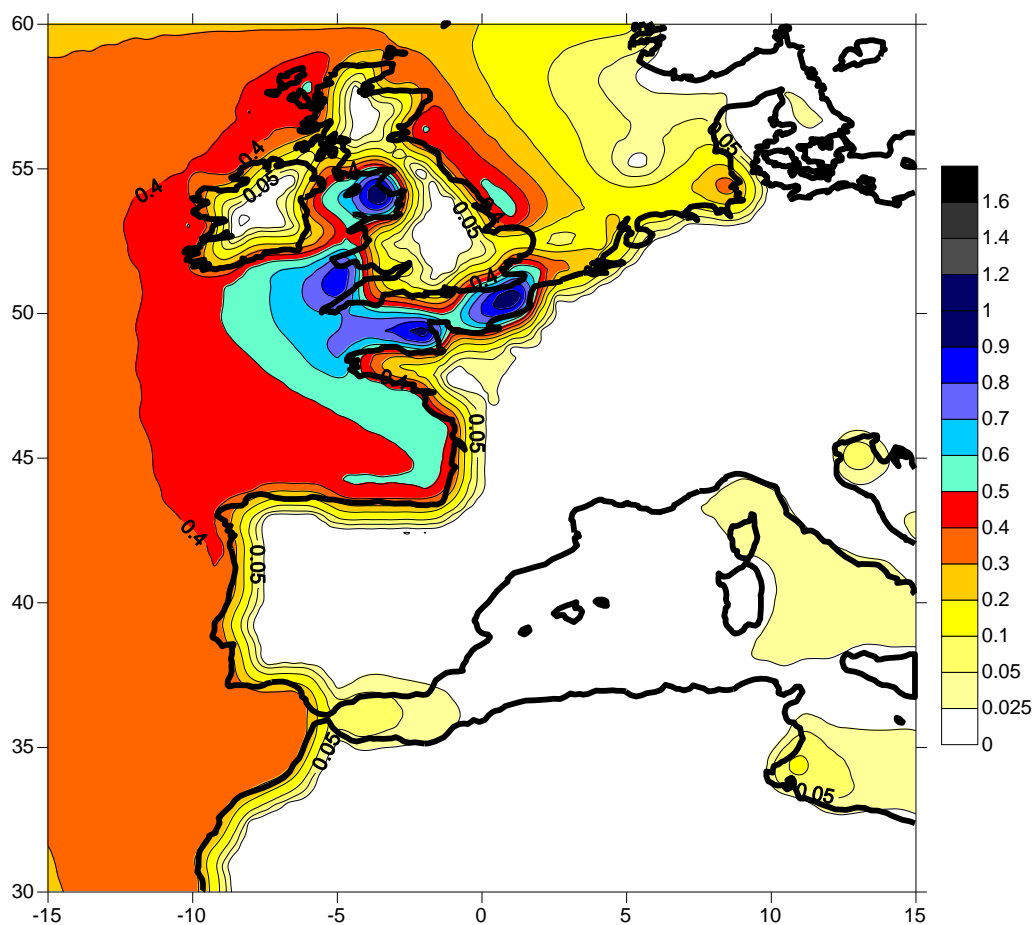


Рис. 2.4.1. Амплитуда (в мкГал) разностного вектора суммарного океанического эффекта (*ATLANTIDA3.0* минус *LOAD89*). Волна *M2*. (*PREM*, *CSR3*, высота 0.0). Европа.

Наибольшие разности фаз также наблюдаются вблизи Корнуоллского полуострова, на французском побережье Ла-Манша и западном побережье Великобритании. Вклад разности фаз в изменение исследуемого сигнала вдоль побережья Европы обычно существенно меньше самой разности амплитуд. Поэтому карта разности амплитуд

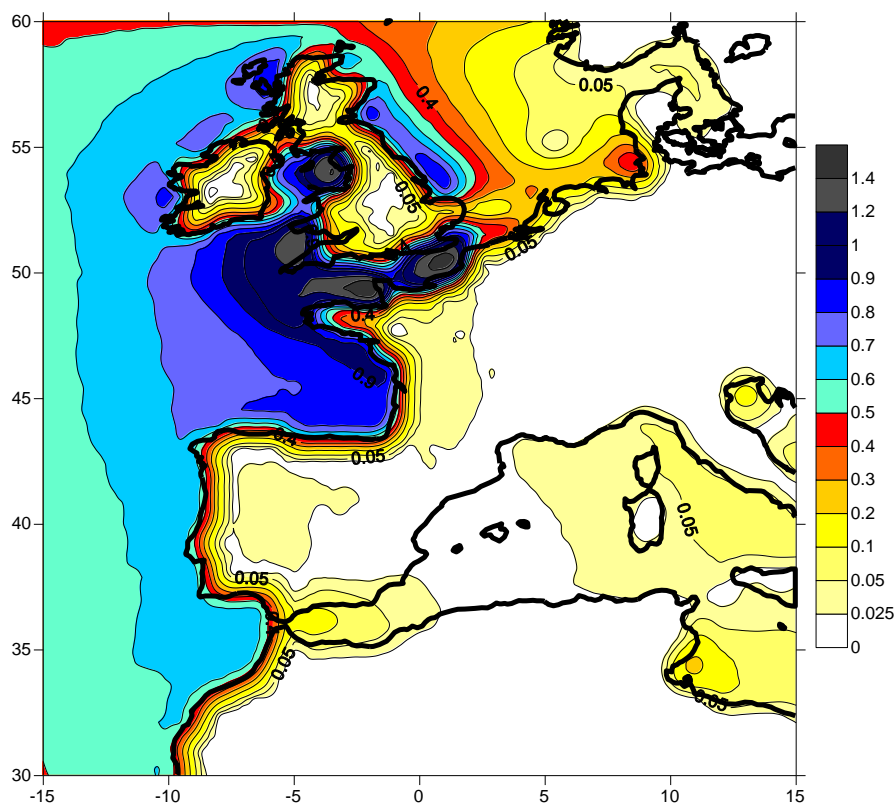


Рис. 2.4.2. Амплитуда (в мкГал) разностного вектора (*ATLANTIDA3.0* минус *LOAD89*) суммарного океанического эффекта. Сумма полусуточных волн. (*PREM*, *CSR3*, высота 0.0). Европа.

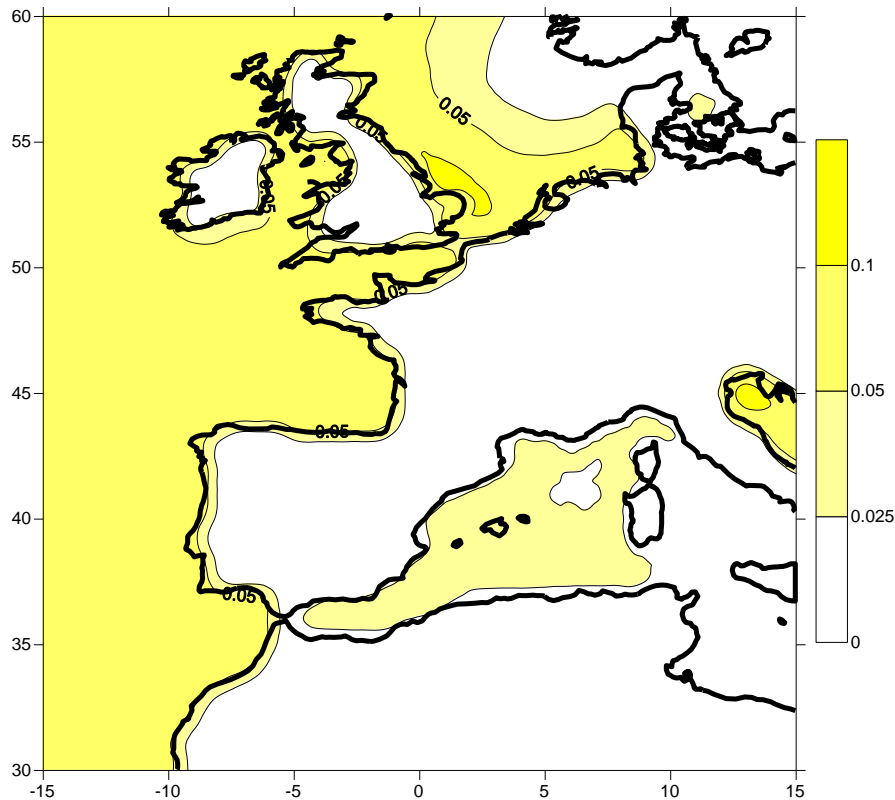


Рис. 2.4.3. Амплитуда (в мкГал) разностного вектора (*ATLANTIDA3.0* минус *LOAD89*) суммарного океанического эффекта. Сумма суточных волн. (*PREM*, *CSR3*, высота 0.0). Европа.

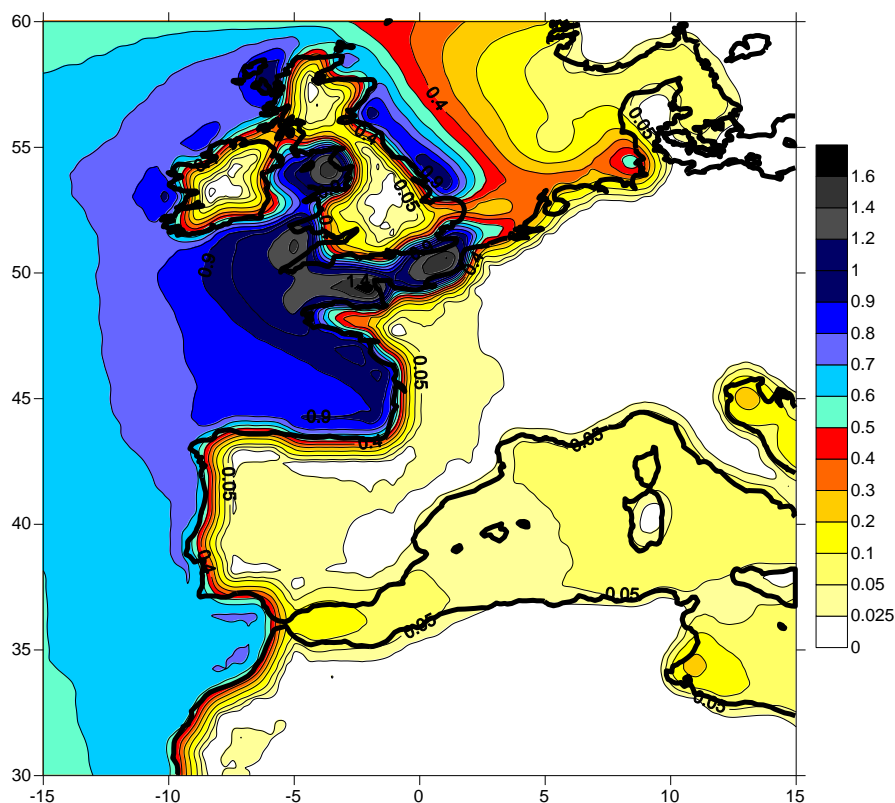


Рис. 2.4.4. Амплитуда (в мкГал) разностного вектора (*ATLANTIDA3.0* минус *LOAD89*) суммарного океанического эффекта. Сумма восьми волн. (*PREM*, *CSR3*, высота 0.0). Европа.

практически повторяет карту амплитуды разностного вектора и здесь не приводится. Это верно и для других приливных волн.

Карты сумм амплитуд разностных векторов по полусуточным волнам (рис. 2.4.2) и по всем анализируемым восьми волнам (*M2*, *N2*, *K2*, *S2*, *O1*, *P1*, *K1*, *Q1*) (рис. 2.4.4) практически повторяют карту для волны *M2*. Сами разностные амплитуды выше на 0.3 – 0.4 мкГал. Разности по суточным волнам (рис. 2.4.3) малы и обычно не превосходят 0.1 мкГал.

Необходимо отметить, что различия результатов, полученных при помощи программ *ATLANTIDA3.0* и *LOAD89*, не являются следствием ограничения порядка разложения высоты прилива по сферическим функциям величиной  $n = 720$  или небольших отличий значений нагрузочных чисел Лява и функций Грина. Действительно, как следует из рис. 2.3.5, при разложении высоты прилива до 1440 порядка амплитуда волны *M2* дополнительно изменяется на величину, на порядок меньшую исследуемых здесь разностей (около 0.02 мкГал). Еще на порядок меньше различия, связанные с применением различающихся методик вычисления нагрузочных чисел Лява. Обычно они не превышают 0.004 мкГал.

Причина различий, видимо, кроется в следующем. При расчете океанического эффекта по программе *LOAD89* вводится так называемая ближняя зона, в которой проводится интерполяция значений высоты прилива. Ее радиус обычно составляет  $2.5^\circ$ . Вне ближней зоны интерполяция данных отсутствует. В терминах разложения по сферическим функциям это означает, что уже начиная с  $n$  порядка 20 – 30 амплитуды сферических гармоник во многом зависят от особенностей географического распределения прилива именно внутри ближней зоны. Вес остальной поверхности земного шара при этом занижается. В программе *ATLANTIDA3.0* с достаточной степенью подробности проинтерполированы данные по всему земному шару, и амплитуды сферических гармоник формируются более естественным образом, т.е. без скачков масштаба. Отдать предпочтение тому или иному подходу можно было бы путем сравнения результатов с данными эксперимента. Однако на практике эта возможность практически отсутствует. Проблема здесь заключается в том, что большая часть гравиметрических станций расположена слишком далеко от берега, в зонах, где анализируемые различия стремятся к нулю. Тем не менее, нам удалось найти в литературе три станции, расположенные в непосредственной близости от береговой линии, по которым определен экспериментальный океанический гравиметрический эффект. Это станции Gueva de los Verdes на Канарских островах, Nu-Alesund на Шпицбергене и антарктическая станция Syowa. Подробное описание этих станций приведено в работе [Спиридонов Е.А., Виноградова О.Ю., 2014]. Здесь же только отметим, что указанные станции удалены от берега всего на 1600, 600 и 250 метров соответственно. Первые две из них оснащены гравиметрами Ла Коста – Ромберга, а на Syowa стоит сверхпроводящий гравиметр. На первой и третьей станциях результаты, полученные по программе *ATLANTIDA3.1\_2014* для *PREM 1 c* и *CSR3.0* по волне *M2*, оказались ближе к наблюдениям на 3.6 и 3.0% от величины наблюдаемых амплитуд океанического эффекта соответственно. В абсолютной мере разности между результатами составили 0.31 и 0.07 мкГал. На станции Nu-Alesund преимущество было скорее символическим и составило всего 1.3% (0.02 мкГал). Напомним, что аналогичные различия у берегов Европы составляют вблизи берега 2.5 – 5%. Таким образом, сравнение с результатами наблюдений говорит скорее в пользу подхода, реализованного в настоящей работе.



## 2.5. ВЛИЯНИЕ НА ВЕЛИЧИНУ ГРАВИМЕТРИЧЕСКОГО НАГРУЗОЧНОГО ЭФФЕКТА РЕГИОНАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ СТРОЕНИЯ КОРЫ И ВЕРХНЕЙ МАНТИИ

При проведении оценки влияния локальных особенностей строения верхних слоев Земли на величину океанического нагрузочного эффекта было сохранено предположение о малости горизонтальных производных от плотности и упругих параметров по сравнению с таковыми в вертикальном направлении. Оправданность данного подхода связана с тем обстоятельством, что при расчете океанического нагрузочного эффекта в пунктах Европы мы использовали усредненную модель всего континента (*IASP91*), в то время как различия строения коры и верхней мантии моделей *PREM* и *IASP91* простирались лишь до глубин порядка 700 км. Таким образом, мы смотрели, насколько изменится эффект у побережья Западной Европы при замене *PREM* более подходящей для этой территории *IASP91*, не вводя при этом в уравнения (разд. 1.1) членов, содержащих горизонтальные производные. Это позволило произвести предварительную оценку влияния латеральных неоднородностей, не прибегая к существенным усложнениям уравнений. Иными словами, мы анализировали эффект относительно больших изменений, происходящих в пространстве с пренебрежимо малыми скоростями.

На рис. 2.5.1 – 2.5.3 приведены разности амплитуд океанического эффекта, рассчитанные по моделям *IASP91 12 ч* и *PREM 12 ч* и океанической модели *CSR3.0*.

Амплитуда разностного вектора волны M2 (рис. 2.5.1) у берегов Марокко составляет 0.1 мкГал, возрастая у западных берегов Португалии и Франции до 0.15 мкГал. Наибольшие разности фаз здесь не превышают  $0.1^\circ$ . Вблизи оконечности полуострова Корнуолл, а также вблизи побережья Ирландского моря, в районе Гавра и Кале указанные различия достигают 0.3 мкГал при разностях фаз до  $3 - 5^\circ$ .

По суммам полусуточных и всех восьми волн (рис. 2.5.2 и 2.5.3) наибольшие значения разностей амплитуд опять же наблюдались вблизи мыса Лендс-Энд (п-ов Корнуолл), где они достигали 0.5 – 0.55 мкГал. В Бретани они доходили до 0.35 мкГал, а у южных берегов Европы и Марокко не превосходили 0.2 мкГал. Разность по сумме суточных волн оказалась пренебрежимо мала, не превосходя, как правило, 0.01 мкГал.

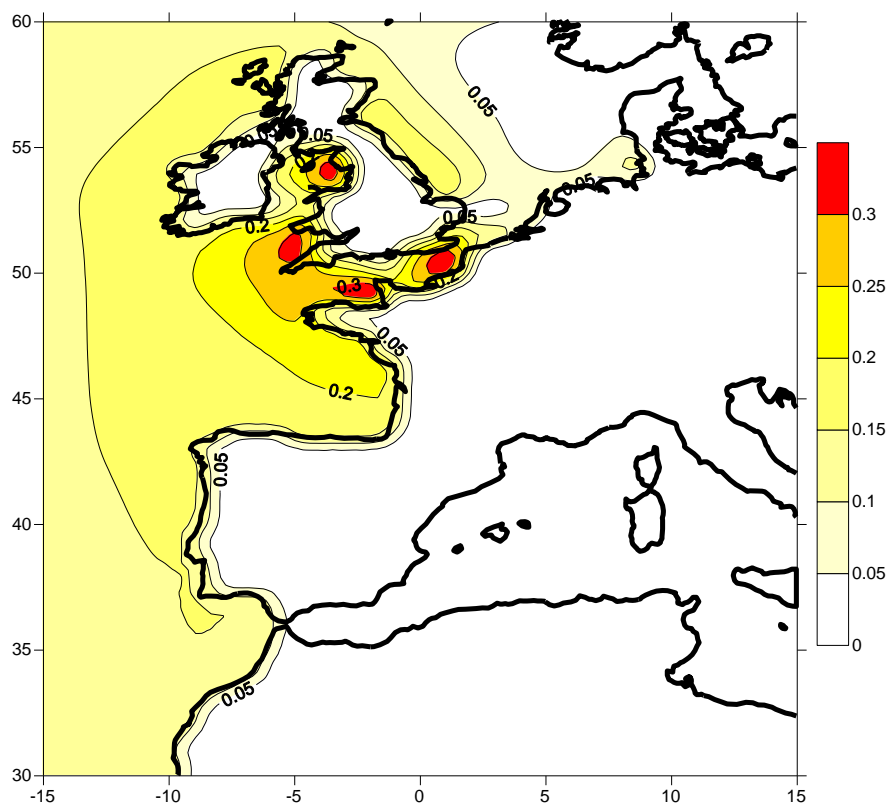


Рис. 2.5.1 Гравиметрический океанический эффект. Разность *IASP91 12 ч* и *PREM 12 ч*. Волна *M2*. *CSR3.0*. Европа.

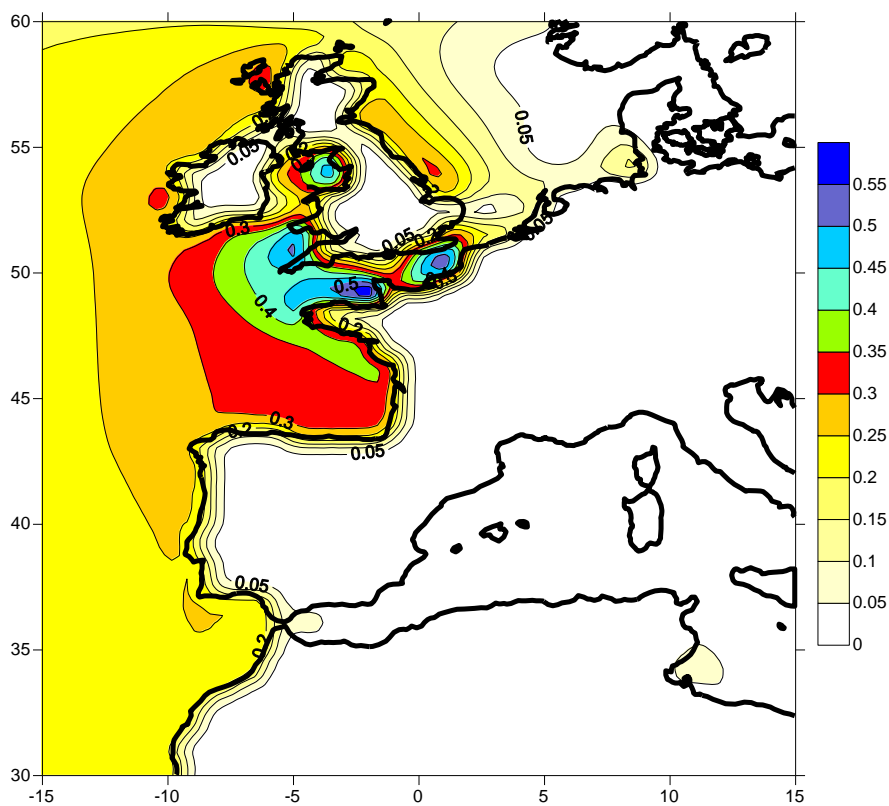


Рис. 2.5.2 Гравиметрический океанический эффект. Разность *IASP91 12 ч* и *PREM 12 ч*. Сумма полусуточных волн (*M2, N2, K2, S2*). *CSR3.0*. Европа.

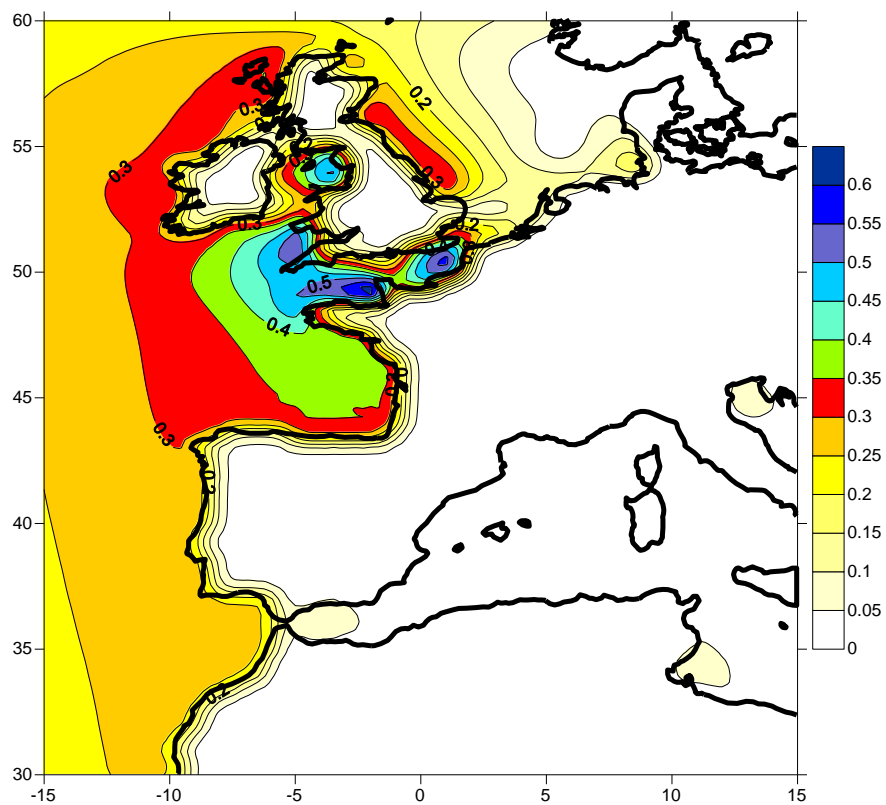


Рис. 2.5.3 Гравиметрический океанический эффект. Разность *IASP91 12 ч* и *PREM 12(24) ч*. Сумма всех волн (*M2, N2, K2, S2, O1, P1, Q1, K1*). *CSR3.0*. Европа.

## 2.6. ВКЛАД ДИССИПАЦИИ В ВЕЛИЧИНУ ОКЕАНИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

Влияние диссипации приводит к изменению амплитуды волны  $M2$  океанического нагрузочного эффекта, не превышающему, как правило, 0.1 мкГал непосредственно вблизи береговой линии. Это видно из рис. 2.6.1, на котором показана амплитуда разности векторов гравиметрического океанического эффекта, построенных по числам Лява для моделей *PREM 12 ч* и *1 с*. Несколько большие значения (до 0.2 – 0.3 мкГал) наблюдаются лишь вблизи уже упомянутых и резко выдающихся в океан мысов Сен-Матье и Лендс-Энд. Опять же обращают на себя внимание особенности в Ирландском море и проливе Ла-Манш. Различия по фазе обычно не превышают нескольких сотых градуса и могут достигать нескольких градусов лишь в уже указанных особых зонах. Аналогичные разности для модели *IASP91* практически полностью повторяют результаты, представленные на рис. 2.6.1. На расстояниях от береговой линии, превышающих 100 км, вклад диссипации становится меньше 0.01 мкГал.

Географическое распределение рассматриваемых разностей, построенных по сумме полусуточных (рис. 2.6.2) и всех (рис. 2.6.3) волн, практически повторяет рис. 2.6.1. Фактически, при переходе от рис. 2.6.1. к рис. 2.6.2 и 2.6.3 амплитуда разности каждый раз увеличивается в среднем на 0.05 мкГал, достигая по сумме всех восьми волн 0.15 – 0.2 мкГал вдоль большей части атлантического побережья Западной Европы и 0.3 – 0.4 мкГал в экстремальных зонах на оконечности Корнуоллского полуострова и в Бретани. Эффект диссипации по сумме четырех суточных волн обычно не превышает 0.01 мкГал.

Почти половина обсуждаемых разностей достигается уже при переходе от 1 с к 200 с. Переход же от 12 ч к 24 ч (рис. 2.6.4) дает для волны  $M2$  поправки менее 0.005 мкГал по амплитуде и  $0.1^\circ$  по фазе.

В разделе 3.4 будет рассмотрен вопрос о влиянии учета диссипации при расчете океанического эффекта на степень близости прогнозных и наблюдаемых значений. Дельта-факторы для упругой Земли без океана в настоящей работе всегда рассчитываются с учетом диссипации.

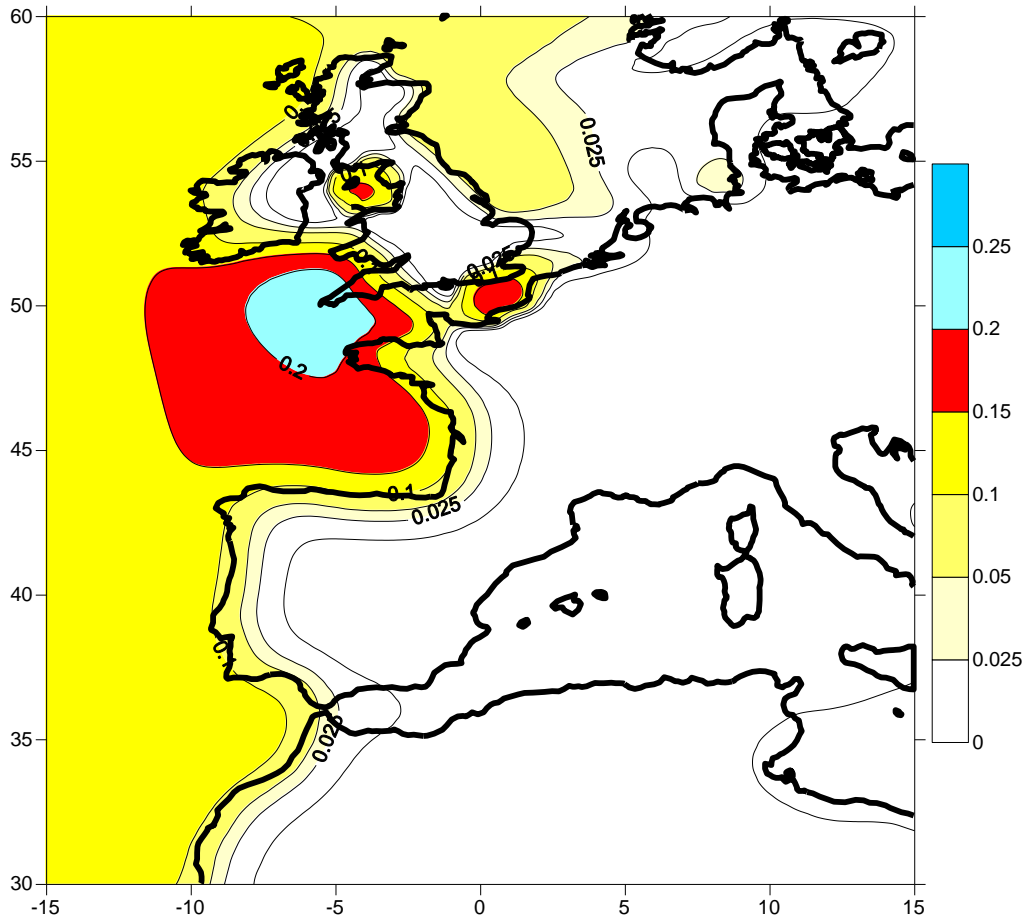


Рис. 2.6.1. Влияние диссипации. Амплитуда (в мкГал) разностного вектора суммарного океанического эффекта ( $PREM\ 12\ ч$  минус  $PREM\ 1c$ ). Волна  $M2$ . ( $ATLANTIDA3.0$ ,  $CSR3.0$ , высота 0.0). Европа.

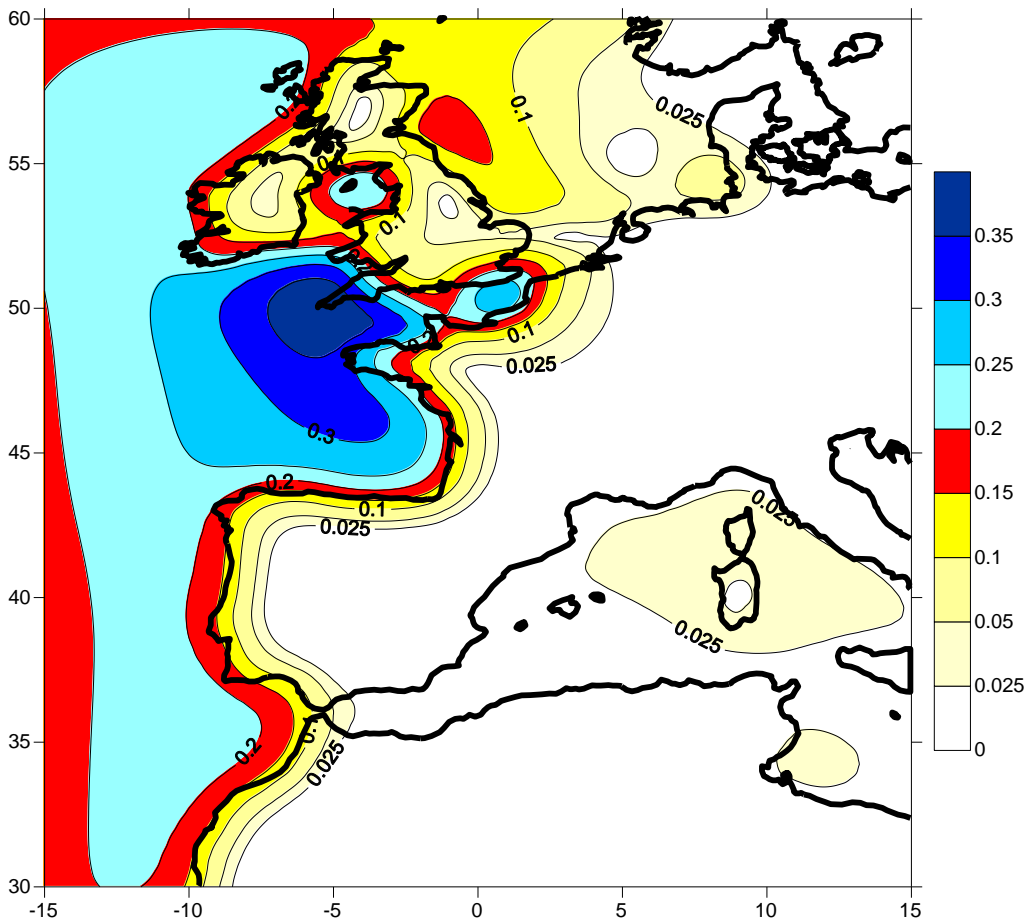


Рис. 2.6.2. Влияние диссипации. Амплитуда (в мкГал) разностного вектора суммарного океанического эффекта ( $PREM\ 12\ ч$  минус  $PREM\ 1c$ ). Сумма полусуточных волн. ( $ATLANTIDA3.0$ ,  $CSR3$ , высота 0.0). Европа.

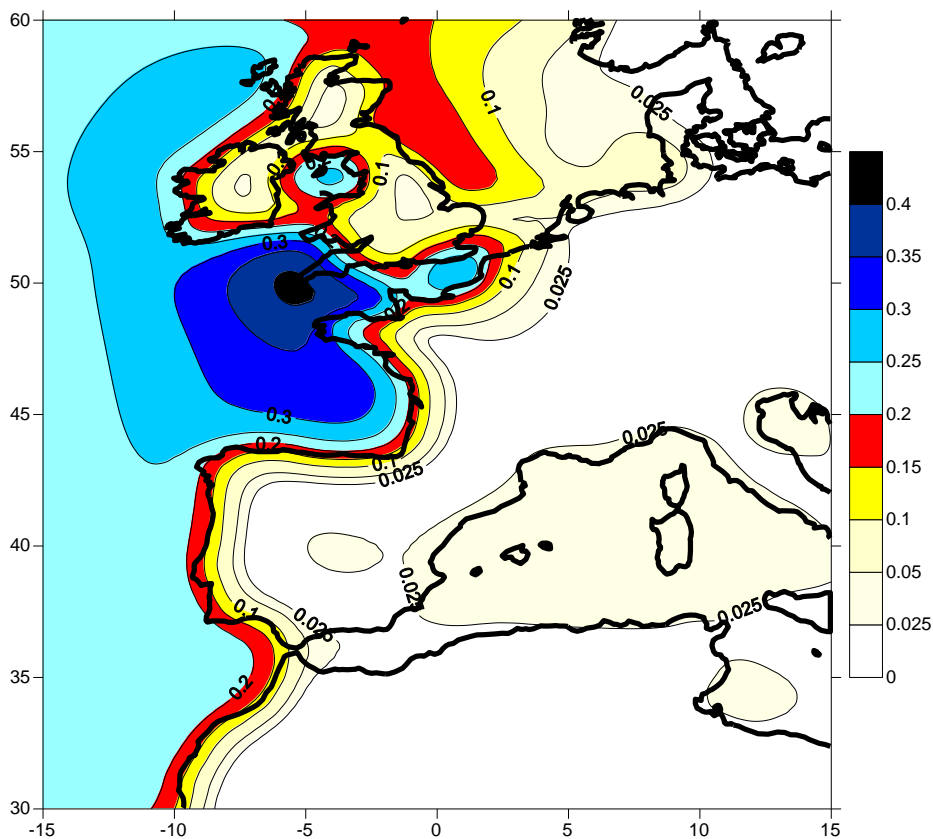


Рис. 2.6.3. Влияние диссипации. Амплитуда (в мкГал) разностного вектора суммарного океанического эффекта ( $PREM\ 12\ ч$  минус  $PREM\ 1с$ ). Сумма всех волн. (ATLANTIDA 3.0, CSR3, высота 0.0). Европа.

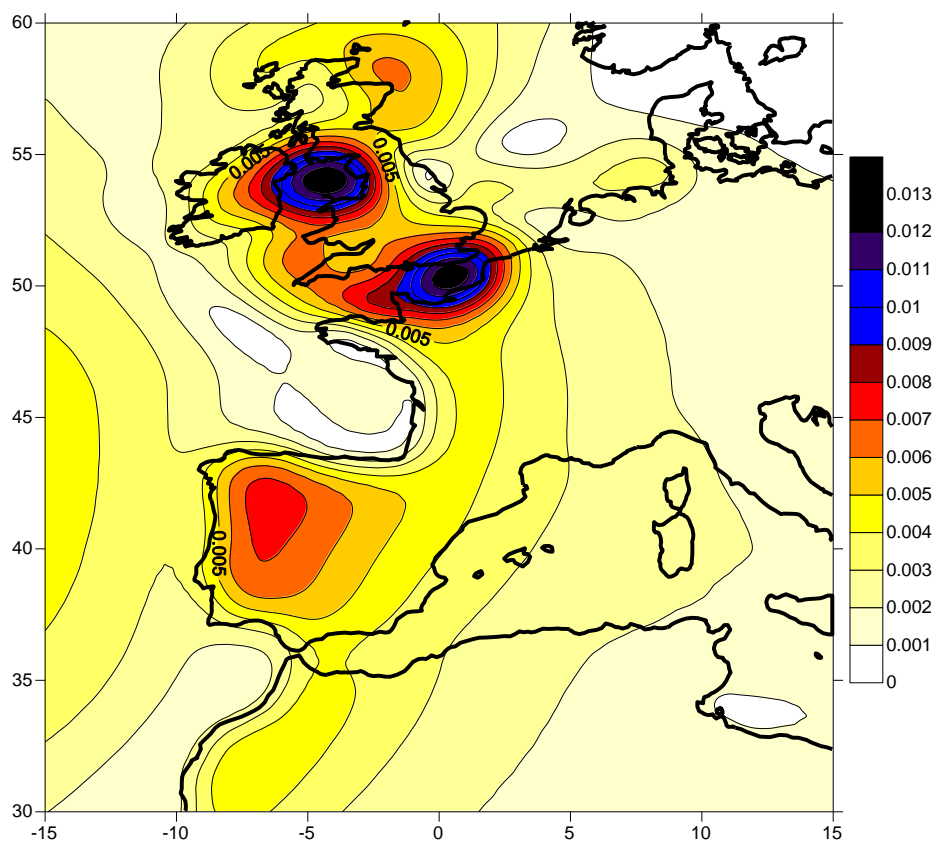


Рис. 2.6.4. Влияние диссипации. Амплитуда (в мкГал) разностного вектора суммарного океанического эффекта ( $PREM\ 24\ ч$  минус  $PREM\ 12\ ч$ ). Волна M2. (ATLANTIDA3.0, CSR3, высота 0.0). Европа.

## 2.7. НЕПРИЛИВНОЙ ОКЕАНИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

Для оценки максимального вклада неприливной составляющей океанического нагрузочного эффекта был рассмотрен ряд котидальных карт высоты прилива, после вычитания из них известных приливных волн, и выбрана одна с максимальным эффектом у берегов южной Африки [Vinogradova O.Yu., Spiridonov E.A., 2013]. Планомерный учет неприливногo океанического эффекта требует колоссальных вычислительных затрат, т.е. разложения тысяч карт за каждый момент времени по сферическим функциям, что пока недоступно для автора настоящей работы.

В качестве исходных данных были взяты следующие:

**ВЫСОТА ПРИЛИВА:** Данные по уровню моря в узлах сетки *TOPEX/Poseidon* (версия *WOCE-PODAAC-v3.0-PF9.0 0.5deg*). Из неприливных значений уровня вычтено 9-летнее среднее (1993 – 2001) (см. <http://woce.nodc.noaa.gov>). Выбранная карта (за 01.06.2001) была разложена по сферическим функциям до 150 порядка. Достаточность такого разложения определяется тем, что в данном случае мы имеем дело с аномалиями достаточно большой протяженности.

**МОДЕЛИ СТРОЕНИЯ ЗЕМЛИ:** помимо *PREM* и *IASP91*, для южной Африки рассматривалась модель *NA* [Larson A.M., 2004]. Эта модель отличается строением коры и верхней мантии и наилучшим образом подходит для южной Африки, т.е. именно того региона, для которого на выбранной нами карте наблюдался максимальный неприливной океанический эффект. Различия значений вычисленных по этой модели и по модели *PREM* нагрузочных чисел Лява можно оценить по представленной здесь табл. 2.7.1. Различия значений чисел Лява в этой таблице растут с увеличением порядка от долей процента до 10%. Относительная ошибка вычислений лежит здесь внутри 0.01%.

Результаты вычислений неприливногo океанического эффекта представлены на рис. 2.7.1 – 2.7.3.

На рис. 2.7.1 и 2.7.2 представлены гравитационные неприливные нагрузочные аномалии  $\Delta g$  для Европы (рис. 2.7.1) и южной Африки (рис. 2.7.2). Напомним, что эти аномалии рассчитаны по данным спутниковой альтиметрии *TOPEX/POSEIDON* за 01.06.2001 и моделям строения Земли *PREM* (для Европы) и *NA* (для Африки). В Европе аномалии не превышают 0.4 мкГал, а у берегов южной Африки достигают 1 мкГал.

На рис.2.7.3 показаны разности значений океанического нагрузочного эффекта, рассчитанных по моделям *PREM* и *NA* в южной Африке. Эти разности достигают 0.03 мкГал.

**Таблица 2.7.1.** Нагрузочные числа Лява для моделей строения Земли *PREM* и южноафриканской модели *NA* [Larson M.A., 2004]

n	PREM		S_AFRICA	
	-k·n·1000	-h·1000	-k·n·1000	-h·1000
2	612	990	612	993
3	589	1048	588	1053
4	535	1050	534	1055
5	524	1082	522	1087
6	542	1138	540	1144
7	575	1206	571	1212
8	613	1276	607	1283
10	691	1414	683	1420
18	965	1858	942	1865
32	1250	2311	1192	2313
100	1470	2900	1365	2926
150	1489	3119	1442	3210

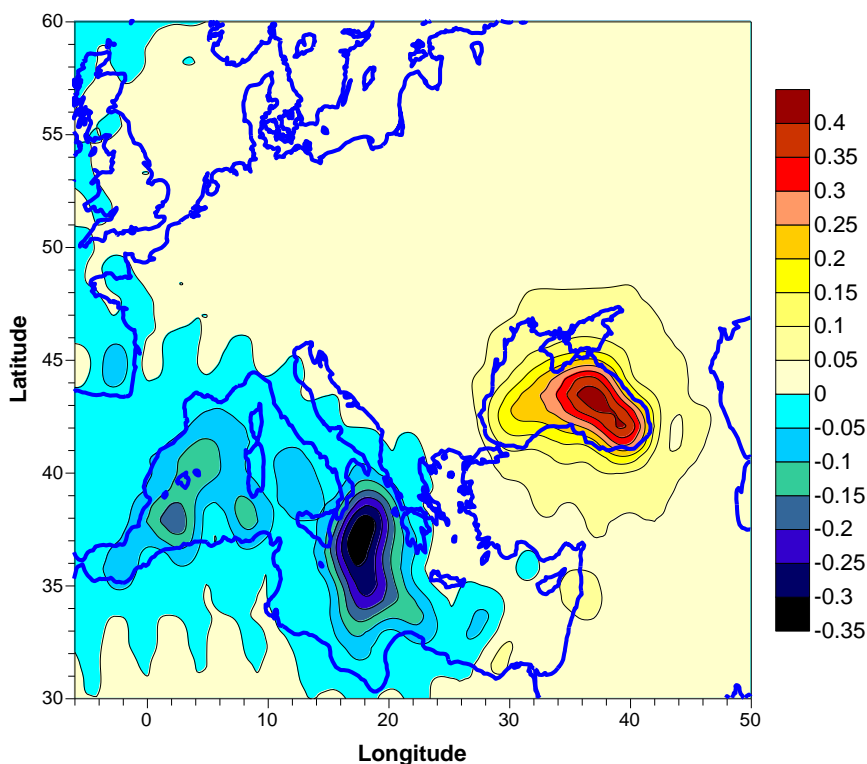


Рис. 2.7.1. Неприливной нагрузочный океанический эффект (мкГал) в Европе. Модель строения Земли *PREM*. Высота уровня моря *TOPEX/Poseidon* (карта на 01-06-2001).



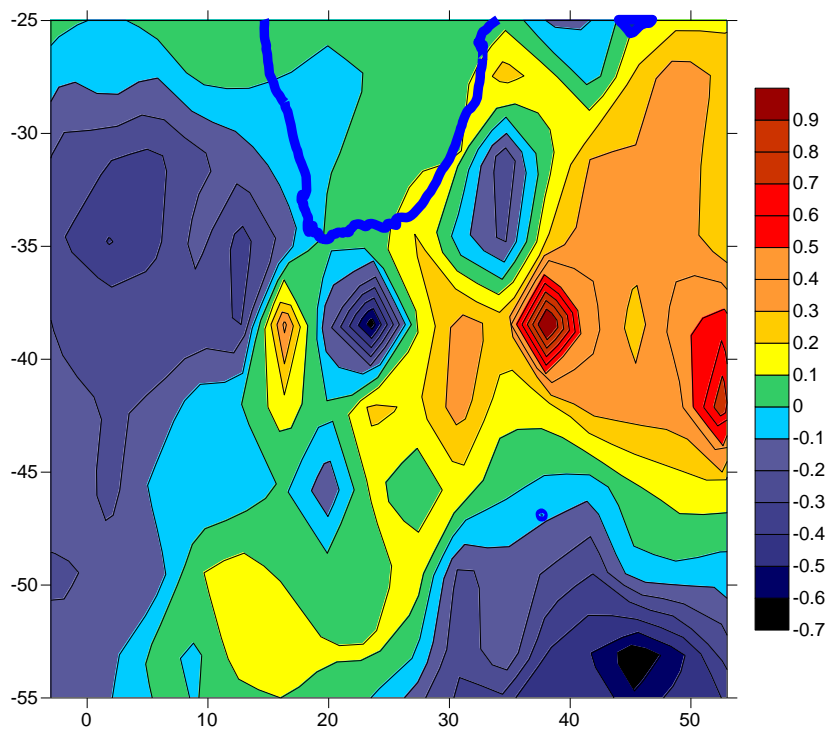


Рис.2.7.2 Неприливной нагрузочный океанический эффект (мГал) в южной Африке. Модель строения Земли *NA*. Высота уровня моря *TOPEX/Poseidon* (карта на 01-06-2001).

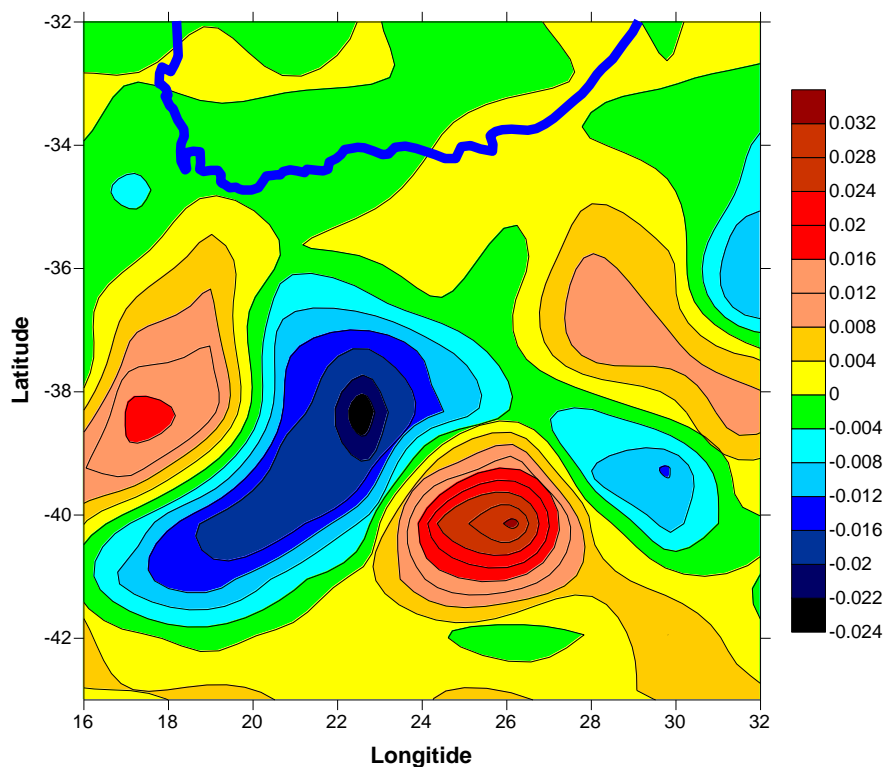


Рис.2.7.3 Неприливной нагрузочный океанический эффект (мГал). Разность *NA* минус *PREM*. Южная Африка. Высота уровня моря *TOPEX/Poseidon* (карта на 01-06-2001).

Необходимо отметить, что значимые различия между *NA* и *PREM* простираются до глубины порядка 400 км. При применении модели *IASP91* полученные значения океанического нагрузочного эффекта в южной Африке отличаются от таковых для *PREM* почти на 0.1 мкГал. Причиной этого является то обстоятельство, что *IASP91* и *PREM* заметно различаются до глубины порядка 700 км. Это приводит к различиям значений нагрузочных чисел Лява в большем диапазоне порядков.

Из всех рассмотренных автором настоящей работы данных, в различных зонах океана и в различные моменты времени с учетом 9-летнего среднего и прямого ньютоновского притяжения рассчитанный по данным *TOPEX/POSEIDON* неприливной океанический эффект не превышает 1 – 2 мкГал непосредственно вблизи береговой линии. Дополнительное уточнение местных особенностей строения коры и верхней мантии способно улучшить эту оценку в пределах  $\pm 0,1$  мкГал.

## 2.8. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЛЕКСНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОКЕАНИЧЕСКОГО ГРАВИМЕТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

В данном разделе проведена оценка совместного влияния на величину океанического гравиметрического эффекта широкой группы факторов, таких как диссипация, массовая коррекция, выбор океанической приливной модели и модели строения Земли, отказ от применения ближней зоны, учет эллиптичности Земли, относительных, кориолисовых и инерциальных ускорений.

В качестве примера, как и ранее, рассмотрим особенности распределения вертикальной составляющей океанического гравиметрического эффекта волны  $M2$  на территории Европы. Волна  $M2$  вносит основной вклад в суммарную по основным приливным волнам амплитуду эффекта, а побережье Европы является характерным для земного шара регионом повышенных амплитуд. В предыдущих разделах настоящей работы уже были рассмотрены как величины амплитуд океанического гравиметрического эффекта вблизи берегов Европы, так и, по отдельности, влияние на результаты его расчета особенностей строения коры и верхней мантии, а также диссипации. В то же время, практическое значение имеет лишь комплексный учет всей совокупности факторов, влияющих на величину океанического гравиметрического эффекта. Это и является здесь основным предметом обсуждения.

На рис. 2.8.1 показано распределение по территории Европы амплитуды разностного вектора, характеризующего переход от модели *PREM* без учета диссипации и прочих обсуждаемых в настоящей работе факторов к модели *IASP91* с учетом диссипации и широтной зависимости, появляющейся вследствие учета эллиптичности, вращения, относительных и кориолисовых ускорений. На рис. 2.8.2 представлены те же амплитуды в относительной мере (в % от амплитуды эффекта).

Из рис. 2.8.1 и 2.8.2 видно, что представленные на них амплитуды разностных векторов в разы меньше приведенных выше разностей, обусловленных учетом диссипации, а также особенностей строения коры и верхней мантии Земли, взятых по отдельности. Очевидно, это связано с взаимной компенсацией указанных факторов. Так, в непосредственной близости от береговой линии амплитуда разностного вектора, как правило, не превышает 0.05–0.1 мкГал, что в относительной мере составляет 0.5–0.75% от амплитуды океанического эффекта, достигая 1–2% в основном лишь вдоль берегов Ла-Манша.

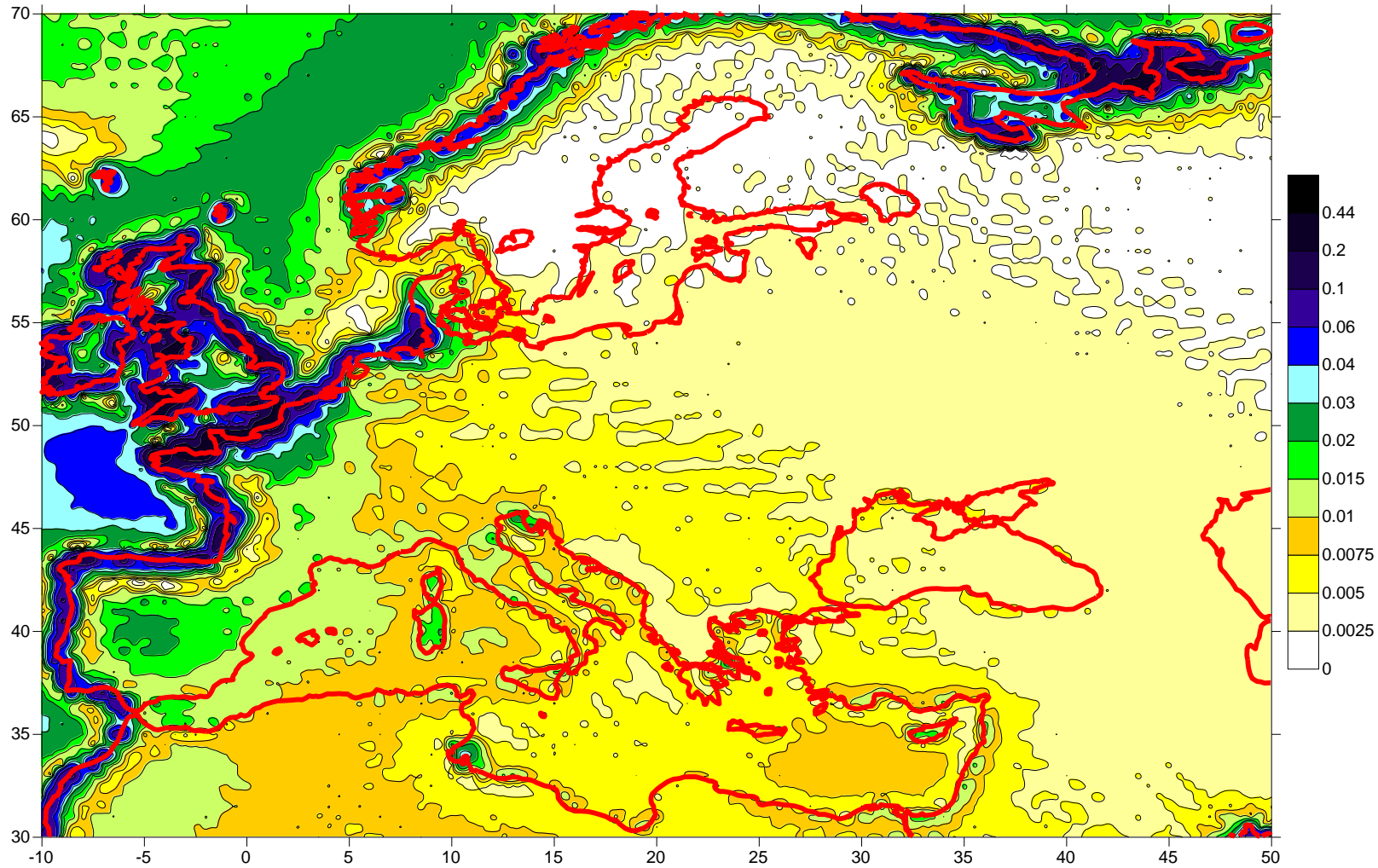


Рис 2.8.1. Амплитуда (мкГал) разностного вектора океанического гравиметрического эффекта (вариант для модели строения Земли *IASP91* с учетом диссипации, эллиптичности, центробежного, относительного и кориолисовых ускорений минус вариант для *PREM* без учета перечисленных факторов). Волна *M2*.

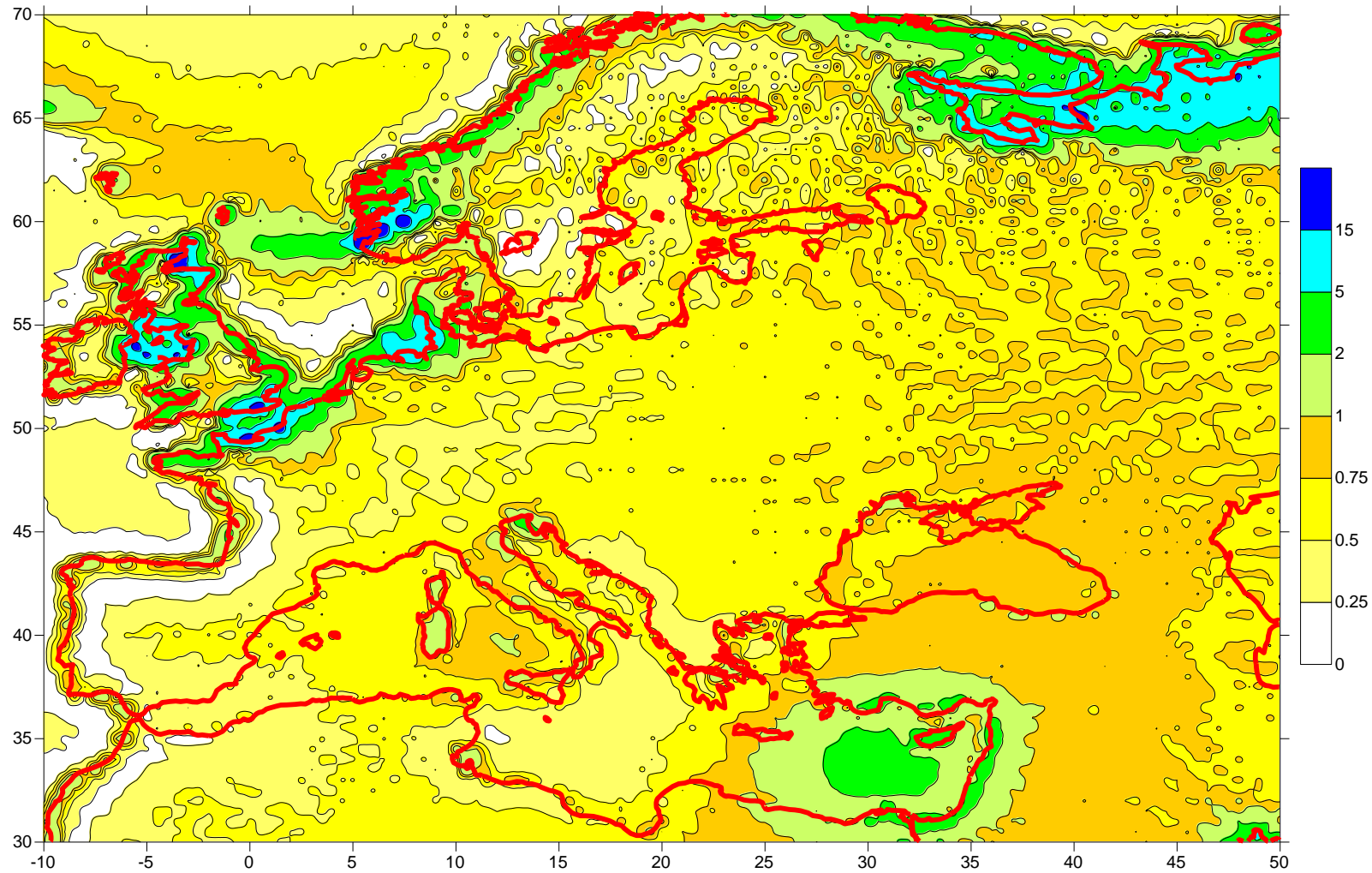


Рис. 2.8.2. Амплитуда разностного вектора океанического гравиметрического эффекта в % от амплитуды (вариант для модели строения Земли *IASP91* с учетом диссипации, эллиптичности, центробежного, относительного и кориолисовых ускорений минус вариант для *PREM* без учета перечисленных факторов). Волна *M2*.

В западной Европе вклад обсуждаемых факторов суммарно не превышает 0.01 мкГал, уменьшаясь в странах восточной Европы до 0.005 мкГал. Относительный вклад на большей части континента лежит в пределах 0.5–0.75%.

Несмотря на очевидную малость обсуждаемых поправок, они приводят к ощутимому с точки зрения точности современных гравиметрических наблюдений изменению прогнозных значений амплитудных дельта-факторов и сдвигов фаз, рассчитанных для упругой Земли с океаном. Рассмотрению этого вопроса посвящен раздел 3.8.

## 2.9. АМПЛИТУДНЫЕ ДЕЛЬТА-ФАКТОРЫ ДЛЯ ЗЕМЛИ С ОКЕАНОМ

Прогнозные амплитудные дельта-факторы для упругой Земли с океаном вычисляются путем суммарного учета объемного прилива и океанического гравиметрического эффекта. В результате подстановки вычисленных нагрузочных чисел Лява (табл. 2.3.2) вместе с коэффициентами разложения по сферическим функциям океанической приливной модели *FES2012* в формулы (1.3.1) и (1.3.2) вычислялся океанический гравиметрический эффект. Как и при расчете обычных чисел Лява, в нагрузочных числах учитывались диссипация, эллиптичность, а также поправки за относительные и кориолисовы ускорения. Затем, по полученным амплитудам и фазам океанического гравиметрического эффекта, а также показанным в настоящем разделе обычным амплитудным дельта-факторам для неупругой вращающейся эллипсоидальной Земли без океана, по формулам (1.3.14) и (1.3.15), вычислялись прогнозные амплитудные дельта-факторы и сдвиги фаз для Земли с океаном. На рисунке 2.9.3 показаны их значения для волны *M2*, из которых вычтено среднее для упругой Земли без океана.

Из рисунка видно, что на территории Европы отклонения прогнозных амплитудных факторов от среднего составляют одну-три сотых. В арктических областях эти отклонения могут достигать 5 – 6 сотых.

Что касается прогнозного сдвига фазы (рис. 2.9.4), то по мере приближения к атлантическому побережью Западной Европы, его значения достигают нескольких градусов. Интересно, что нулевая изолиния сдвига фазы на континенте вытянута преимущественно вдоль меридиана, соответствующего 37 градусам восточной долготы, т.е. представляет собой своеобразный Московский меридиан.

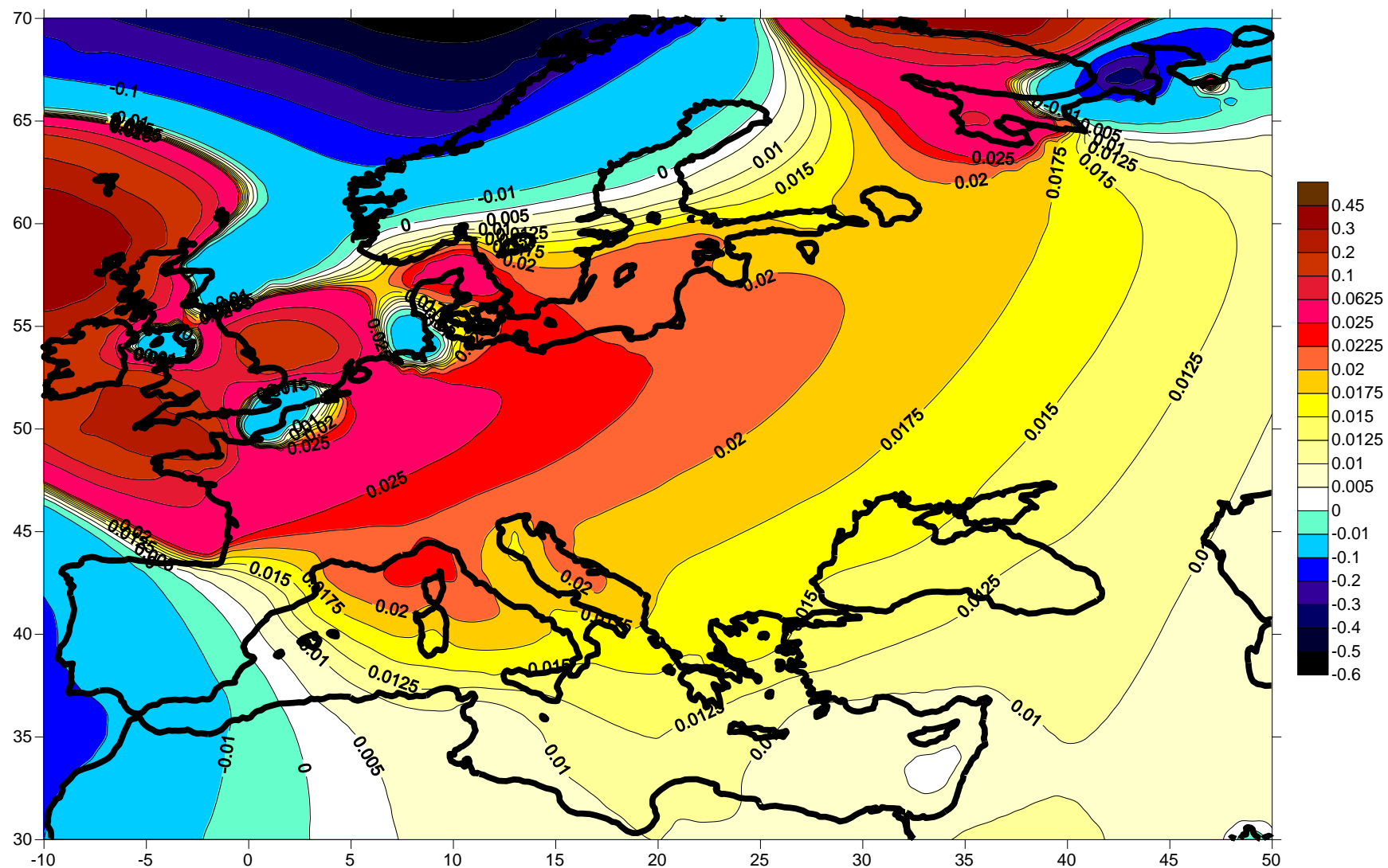


Рис. 2.9.3 Разность прогнозного амплитудного фактора волны M2 для упругой Земли с океаном (IASP91, FES2012) и его среднего значения для упругой Земли без океана (1.16167)



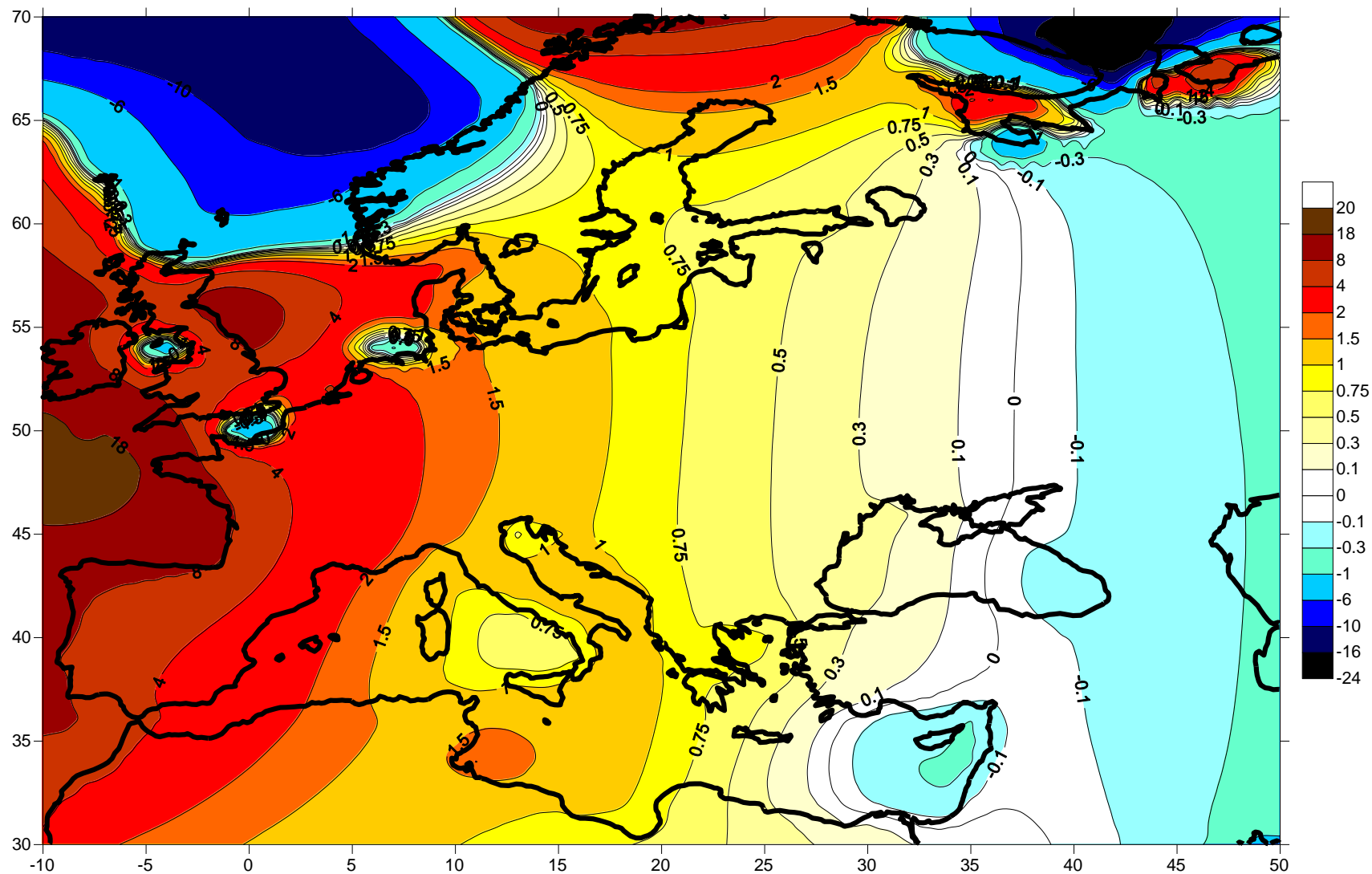


Рис. 2.9.4. Сдвиг фазы (градусы) волны M2 для упругой Земли с океаном (IASP91, FES2012)

## 2.10. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ ПРОГНОЗА ПАРАМЕТРОВ

### ЗЕМНЫХ ПРИЛИВОВ *ATLANTIDA3.1\_2014*

В настоящее время существует около десятка программ, позволяющих рассчитывать прогнозные дельта-факторы и сдвиги фаз объемного прилива, а также океанический гравиметрический эффект. Среди первых наиболее известны: *PREDICT* из пакета Венцеля *ETERNA* [Wenzel G., 1996], а также *T-soft* [Van Camp & Vanterin, 2005] и *MT80w* [сайт *ICET*]. С целью расчета океанического эффекта широко применяются программы: *LOAD97 (ETERNA 3.3)* [Francis O. and Mazzega P., 1990], *GOTIC2* [Matsumoto et al., 2001], *OLFG* [Scherneck, 1991], а также *SPOTL* [Agnew, 1996, 1997].

В задачи настоящей работы не входит детальное сравнение перечисленных программ между собой и с разработанной здесь программой прогноза параметров земных приливов *ATLANTIDA3.1\_2014*. Тем не менее, мы остановимся на основных отличиях нашей программы от предшествующих.

Прежде всего, отметим, что при вычислении чисел Лява и дельта-факторов объемного прилива для Земли без океана нами были применены их зависимости от широты, полученные в работе [Спиридонов Е.А., 2016b] (см. также разд. 1.1, 1.2 и 2.1 настоящей работы).

Вычисление нагрузочных чисел производится с учетом диссипации приливной энергии в мантии. Диссипация учтена в ряде программ, но не во всех. Например, в *LOAD97* этого нет, хотя ничто и не мешает задать этой программе нагрузочные амплитудные факторы, вычисленные с учетом диссипации. Помимо этого, при расчете океанического гравиметрического эффекта нами учтены такие факторы, как эллиптичность, вращение, а также относительные и кориолисовы ускорения.

В *ATLANTIDA3.1\_2014* вычисления можно производить по двум моделям строения Земли: *PREM* [Dzeiwonski, A.M. & Anderson, D.L., 1981] и более современной *IASP91* [Kennett B.L.N., Engdahl E.R., 1991] (см. также разд. 1.7.1). И хотя ряд авторов собственно и проводит вычисления по нескольким моделям строения Земли (например, кроме *PREM*, устаревшая *1066A*) либо модифицированным вариантам *PREM*, это до сих пор не входит в общепринятую практику, тем более при создании программ прогноза.

Во всех без исключения программах вычисления океанического нагрузочного эффекта его определение проводится при помощи интеграла свертки высоты прилива с

функциями Грина. При этом вводится понятие ближней (2 – 5-градусной) зоны, в пределах которой данные подвергаются интерполяции. Таким образом, высокие пространственные частоты высоты прилива берутся из ближней зоны, а те данные, которые лежат за ее пределами, учитываются огрубленно в узлах сетки океанической модели. На наш взгляд, такой подход не совсем оправдан, во-первых, потому, что высокочастотные составляющие действуют на всю Землю в целом, а значит, и должны вычисляться по всей поверхности. Во-вторых, наибольший вклад в рассчитываемый океанический гравиметрический эффект вносит дальняя, а не ближняя зона, расчет по которой оказывается менее точным. В связи с этим, при разработке настоящей программы нами был реализован иной подход, основанный на разложении высоты прилива по сферическим функциям после предварительной интерполяции всех данных океанических моделей со степенью подробности, не уступающей ближней зоне в работах других авторов. Строго говоря, подходы, основанные на применении функций Грина и разложении высоты прилива по сферическим функциям, с математической точки зрения полностью идентичны (разд. 1.6). В то же время, при попытке задать ближнюю зону, например, в программе *LOAD97*, порядка нескольких десятков градусов время счета программы уходит на бесконечность, а получаемый результат понемногу приближается к нашим оценкам без учета диссипации и прочих факторов.

Помимо перечисленного, в нашей программе существует возможность расчета океанического эффекта в узлах сетки. При расчете же по точке отдельно печатаются нагрузочная и ньютоновская (прямое притяжение) составляющие океанического эффекта, а также их сумма. Данная возможность реализована далеко не во всех программах.

В отличие от почти всех подобных программ, *ATLANTIDA3.1\_2014* имеет удобный интерфейс (рис.2.10.1), позволяющий начать работу с программой сразу, практически не заглядывая в руководство пользователя.

Программа *ATLANTIDA3.1\_2014* является полностью отечественной разработкой и, как целое, не имеет аналогов в нашей стране и мире.

Программа обладает следующими вычислительными возможностями:

#### **Основные:**

- **Расчет амплитуд и фаз океанического гравиметрического эффекта** с учетом диссипации, эллиптичности, вращения, а также относительных и кориолисовых ускорений по шести океаническим приливным моделям (*SCW80*, *CSR3.0*,

*CSR4.0*, *FES95.2*, *FES2012* и *NAO99b*) и двум моделям строения Земли (*PREM* и *IASP91*).

- **Расчет амплитудных дельта-факторов** для неупругой вращающейся Земли без океана, с учетом относительных и кориолисовых ускорений, а также прогнозных амплитудных факторов и сдвигов фаз для Земли с океаном. Для суточных и полусуточных волн, а также волн *M3* и *M4*, дельта-факторы объемного прилива для упругой Земли без океана и нагрузочные дельта-факторы, а также их зависимость от широты рассчитываются согласно работам [Спиридонов Е.А., 2014, 2016b]. Для остальных групп волн в данной версии программы приняты средние для Земли значения дельта-факторов объемного прилива из работы [Dehant V. et al., 1999].
- **Получение временных рядов приливов.** Этот расчет проводит встроенная программа *PRILET*, разработанная Э.А. Боярским и Л.В. Афанасьевой и дополненная в дальнейшем автором настоящей работы. Схема вычислений здесь в основном следует программе *PREDICT* из пакета Венцеля *ETERNA 3.3*. Применяется разложение приливного потенциала на 1200 волн Тамуры [1987]. Поправки для перехода от времени *UTC* к времени *TDT* взяты с сайта *USNO* <http://maia.usno.navy.mil/ser7/deltat.data> и прорежены так, чтобы для моментов после 1973 г. ошибка поправки не превышала 1 с (погрешность приливного эффекта менее 1 нм / с<sup>2</sup>).

#### **Дополнительные возможности:**

- Расчет амплитуд и фаз океанического гравиметрического эффекта в узлах сетки.
- Расчет горизонтальных составляющих океанического эффекта.

ATLANTIDA 3.1\_2014

OCEAN\_LOAD  
 YES  NO

ROWS  
 YES  NO

LAT\_DEP  
 YES  NO

LOAD07

GRAVITY  POTENTIAL  DEFORMATION  TILT

EARTH MODEL  
 PREM  
 IASP91

DISSIPATION  
 YES  NO

MASCOR  
 YES  NO

PHASE  
 LOCAL  GREENWICH

OCEAN MODELS  
 CSR3  CSR4.0  FES2012  
 FES952  FES99  GOT00  
 SCW80  NAO99b  TPX 0.5

CALCULATED BY:

POINT

NAME	LATITUDE	LONGITUDE	ALT
LISBON	38.710 [-90;90]	-9.19 [-180;180]	0

GRID

LAT: FROM	TO	STEP	LONG: FROM	TO	STEP
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

ROWS

INITIAL DATE	STEP(minutes)	N DAYS
05 05 2005	5	365

FREQUENCY (cycl/day) FROM 0 TO 5  
0.00014-3.94

© Evgeny Spiridonov, Ernst Boyarskiy, Olga Vinogradova, Larisa Afanasyeva

WAVES

- M2
- O1
- K1
- P1
- Q1
- K2
- N2
- S2
- J1
- MF
- 2N2
- F11
- P11
- SIG1
- T2
- L2
- S1
- R2
- M1
- O01

HELP  
WAVES  
OK  
CANCEL  
CLEAR  
SAVE

Рис. 2.10.1. Интерфейс программы прогноза параметров земных приливов *ATLANTIDA3.1\_2014*

В интерфейс (рис. 2.10.1) в том числе входит кнопка, запускающая программу *LOAD07*. Эта программа полностью повторяет *LOAD89(97)* из пакета *ETERNA3.3* Венцеля. В то же время, *LOAD07* имеет удобный пользовательский интерфейс, позволяющий, в частности, считать не только по точке, но и по сетке, а также выбирать необходимые пользователю волны. Этот интерфейс был разработан Эрнстом Ароновичем Боярским в 2011 году. Позднее автором настоящей работы в эту программу было внесено несколько усовершенствований. В результате достигнута ранее не реализованная возможность счета по волне *M2* для модели *FES95.2*, а также исправлены недочеты, связанные с введением поправки за высоту станции и массовой коррекции в моделях *FES95* и *SCW80*. Помимо этого, к программе были подключены функции Грина, рассчитанные с учетом диссипации по двум моделям строения Земли. *LOAD07* имеет собственный *HELP* (в данной версии только на русском языке).

Все опции, кроме выбора волн для расчета океанического эффекта, в программе *ATLANTIDA3.1\_2014* заданы при запуске оптимальными по умолчанию (см. разделы 3.4 – 3.7). Для начала работы достаточно выбрать название пункта (*NAME*), а также широту (*LATITUDE*), долготу (*LONGITUDE*) (в градусах) и высоту (*ALT*) (в метрах) местонахождения пункта наблюдения. Подробная информация об установках и опциях программы содержится в пользовательском *HELP*, а также работе [Spiridonov E. A. et al., 2015], которая, помимо прочего, содержит наиболее полное руководство пользователя. Методическим основам, заложенным в разработку программы, также посвящена работа [Спиридонов Е.А., 2014].

Как уже было отмечено выше, в программе *ATLANTIDA3.1* модели океанического прилива заранее разлагаются по сферическим функциям (разд. 1.5) (входными данными являются коэффициенты разложения). При этом, применен достаточно высокий ( $n = 720$ ) порядок разложения. Для *FES2012* разложение проводилось до порядка 1120. Достаточность подробности этого разложения обсуждается в разд. 2.3 настоящей работы (рис. 2.3.9). Благодаря высокому порядку разложения отпадает необходимость выделять “ближнюю” зону с более густым расположением исходных точек и интерполировать на них значения модели океанского прилива и функций Грина, как это делает *LOAD89*. “Ближней зоной” здесь является весь земной шар, что, как мы увидим в дальнейшем, приводит к уточнению получаемых результатов. Примененный алгоритм расчета океанического эффекта позволяет заранее выполнить основную часть вычислений, которая не зависит от координат заданного пункта.

Промежуточные результаты – котидальные карты в виде коэффициентов разложения по сферическим функциям (разд. 2.4) и модель Земли в виде нормированных нагрузочных дельта-факторов – записаны в файлах исходных данных, приложенных к программе.

Имена файлов результатов формируются автоматически после запуска программы, а сами файлы записываются в отдельную директорию (*\ATLANTIDA31\RESULTS*).

Для примера, показанного на рисунке 2.10.1, программа выдаст в директорию *RESULTS* следующие три файла:

*LISBON\_FES12\_IASP\_L\_DY\_MN\_LAT\_DEP\_YES\_GRAV.dat*

*LISBON\_FES12\_IASP\_L\_DY\_MN\_LAT\_DEP\_YES\_GRAV.prn*

*LISBON\_FES12\_IASP\_L\_DY\_MN\_LAT\_DEP\_YES\_GRAV.grw*

Первый файл (*.DAT*) содержит приливные временные ряды, второй (*.PRN*) – принятые при проведении расчетов константы, а также амплитудные дельта-факторы для упругой Земли без океана по группам волн. Прогнозные амплитудные факторы и сдвиги фаз для Земли с океаном расположены в последней таблице файла и рассчитываются только для тех волн, для которых определен океанический эффект. Эти волны легко выделить из списка по отличным от нуля сдвигам фаз. В третьем файле (*.GRW*) отдельно даны амплитуды и фазы гравиметрического океанического эффекта (ньютоновское притяжение водных масс, нагрузочный эффект и их сумма). В режиме *TILT* печатаются *SN* и *EW* составляющие вызванных океанической нагрузкой наклонов.

Имена указанных файлов различаются только расширением. Имя (согласно приведенному на рис 2.10.1 примеру) состоит из:

- *LISBON* – название пункта (в режиме *GRID* вместо названия пункта печатается имя волны и указатель на режим *GRID*, например, *M2\_GR...*);
- *FES12* – океаническая модель *FES2012*;
- *L* – локальная фаза (*G* – гринвичская);
- *DY* – диссипация *YES* (или *DN*);
- *MN* – массовая коррекция *NO* (или *MY*);
- *LAT\_DEP\_YES* – зависимость от широты *YES* (или *LAT\_DEP\_NO*);
- *GRAV* – гравиметрический эффект (или *TILT*).

В случае расчета только океанического эффекта (*ROWS NO*) выдается один файл с расширением *GRW*.

Для параметров, показанных на рисунке 2.10.1, содержание файлов результатов можно посмотреть в директории *ATLANTIDA31\EXAMPLE*.

С теоретическими и прикладными результатами, примененными при разработке программы, можно ознакомиться в статьях авторов разработки. Полные тексты этих статей на русском и английском языках помещены в директорию *\ATLANTIDA31\PAPERS*.

**Программа распространяется бесплатно, т.е. находится в свободном доступе. Патент на программу принадлежит автору настоящей работы, а также ИФЗ РАН. Для более детального знакомства с программой ее можно скачать с сайта института, пройдя по ссылке:**

<http://www.ifz.ru/applied/prognoz-parametrov-zemnykh-prilivov/>

Скачиваемый файл *ATLANTIDA.EXE* представляет собой самораспаковывающийся архив, который необходимо распаковать в корень любого диска.

В заключение отметим, что *ATLANTIDA3.1\_2014* работает подо всеми известными в настоящий момент версиями *WINDOWS*. Некоторые проблемы возникали только с обновлением Windows8 до Windows8.1 и в некоторых случаях с Windows XP. В ближайшее время эти проблемы должны быть устранены.



## ВЫВОДЫ ГЛАВЫ 2

1) Проанализировано 12 моделей (Раздел. 2.1), предназначенных для расчета обычных чисел Лява и амплитудных дельта-факторов и отличающихся друг от друга присутствием или отсутствием различных факторов. Как правило, наибольшей зависимостью от параметров модели обладают числа Лява  $h$ ,  $k$  и  $l$ . Дельта-фактор изменяется в меньшей степени.

2) Наибольшее влияние на скорость изменения значений обычных чисел Лява и дельта-факторов с широтой оказывают такие факторы, как: учет эллиптичности, центробежных и кориолисовых ускорений.

3) Тестовые Модели 5 и 5а (Раздел 2.1), рассчитанные по варианту модели строения Земли, наиболее близкому к принятому в работе [Dehant V., Defraigne P., Wahr J.M., 1999] для периодов 200 с и 300 с соответственно, показали хорошее совпадение полученных значений с результатами модели *DDW/H*. Отличия рассчитанных в Модели 5а значений чисел Лява  $h$ ,  $k$ , и  $l$  от *DDW/H* составляют сотые доли процента.

4) Полученные в Моделях 8 и 9 (Раздел. 2.1) для периода 12 ч значения чисел Лява и дельта-факторов заметно отличаются от *DDW/NH*. Это происходит, помимо прочего, вследствие различий в применяемых функциях крипа. Результаты Модели 9 лежат ближе к полученным в работе [Mathews, P. M., 2001]. В то же время, результаты именно этой модели привели к наилучшему совпадению теоретических и экспериментальных результатов в отношении приливного дельта-фактора (см. Главу 3).

5) С учетом точности современных гравиметрических наблюдений, при расчете океанического гравиметрического эффекта необходимо принимать во внимание следующую группу факторов: (1) выбор модели строения Земли, (2) выбор океанической приливной модели, в т.ч. региональной, (3) учет диссипации, (4) относительных и (5) кориолисовых ускорений, (6) эллиптичности Земли, (7) сил инерции, а также (8) сил, определяемых членами разложения геопотенциала до первого порядка по сжатию, (9) необходимость отказа от массовой коррекции и (10) методики, основанной на применении ближней зоны и функций Грина, и, наконец, (11) адекватный выбор шага интегрирования при вычислении нагрузочных чисел Лява высоких порядков.

### ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ СРАВНЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ЗЕМНЫХ ПРИЛИВОВ С ДАННЫМИ НАБЛЮДЕНИЙ

Целью данной главы является подробное сравнение результатов прогноза параметров земных приливов, получаемых при помощи разработанной автором настоящей работы программы *ATLANTIDA3.1\_2014*, с данными наблюдений, произведенных на самых высокоточных гравиметрических инструментах, принадлежащих сети сверхпроводящих гравиметров Глобального геодинамического проекта (*GGP*). Таким образом, речь идет о качестве проведенного моделирования земных приливов, которое, в свою очередь, определяется двумя факторами: успешностью расчета нагрузочных и обычных дельта-факторов для Земли без океана, а также точностью океанической приливной модели и комплексным учетом большого количества факторов, принимаемых во внимание при определении океанического гравиметрического эффекта. Последние разработки в этих двух направлениях собственно и лежат в основе *ATLANTIDA3.1\_2014* [Spiridonov et. al., 2015a].

В разделе 3.1 настоящей Главы дано краткое описание исходных данных наблюдений и показаны методы сравнительного анализа. Раздел 3.2 посвящен сравнению степени близости прогнозных значений, получаемых при помощи программ *ATLANTIDA3.1\_2014* и известной *PREDICT* из пакета Венцеля *ETERNA3.3*. Наконец, в разделе 3.3 показана большая эффективность значений амплитудных дельта-факторов из работ [Spiridonov, 2014] и [Спиридонов Е.А., 2016b] по сравнению с их значениями, взятыми из модели *DDW/NH* [Dehant et al., 1999], при использовании одной и той же, наиболее современной, приливной океанической модели *FES2012*.

Далее проведена оценка влияния диссипации и массовой коррекции при расчете океанического гравиметрического эффекта, а также выбора модели строения Земли на степень близости прогнозных значений параметров земных приливов к наблюдениям. Данные наблюдений сравниваются здесь с результатами прогноза, получаемыми при применении океанической приливной модели *FES2012* без учета диссипации (раздел 3.4) и с массовой коррекцией (раздел 3.6). Также проведен сравнительный анализ результатов применения модели строения Земли *PREM* вместо *IASP91* (раздел 3.5). В разделе 3.7 мы кратко остановимся на рассмотрении роли широтной зависимости нагрузочных дельта-факторов.

В разделе 3.8 на примере наблюдений волны *M2* в Вене проведен анализ вкладов всех рассматриваемых в настоящей работе факторов, учитываемых при расчете дельта-

факторов и сдвигов фаз для неупругой вращающейся эллипсоидальной Земли с океаном.

В заключении обсуждаются основные результаты настоящей главы и приводятся основные выводы.

Ранее автором работы уже проводились сравнения результатов вычислений с данными наблюдений отдельно для океанического гравиметрического эффекта. Так, в работе [Спиридонов Е.А., Виноградова О.Ю., 2014] проведено сравнение расчетов океанического гравиметрического эффекта по классическим моделям *CSR3.0*, *SCW80* и *FES95.2* с некоторыми относительно недавними результатами наблюдений. Сравнительный анализ проводился по полученным в работах разных авторов значениям наблюдаемого океанического эффекта на 21 станции и 22 инструментах. Две станции располагались на Канарских островах, еще две – на острове Шпицберген, 5 станций с инструментами *SLR* – в Европе и 12 станций со сверхпроводящими гравиметрами принадлежали сети *GGP*.

Несмотря то, что указанные три океанических модели уже достаточно устарели и применялись для сравнения в основном с целью сравнения получаемых результатов с программой *LOAD97*, входящей в широко известный пакет *ETERNA*, было показано достаточно хорошее согласие теоретических значений амплитуд и фаз, рассчитанных при помощи программы *ATLANTIDA3.0* (предшественница версии 3.1 [Spiridonov E.A., Afanasyeva L.V., 2014]), с их экспериментальными значениями в различных точках земного шара. В частности, было установлено, что, в основном вследствие учета диссипации, полученные результаты почти в 80% случаев лучше совпадают с наблюдениями, нежели значения, рассчитанные программой *LOAD89* из пакета *ETERNA3.3* Венцеля.

Помимо этого, в рамках тестирования изложенных в настоящей работе подходов и методов в работе [Спиридонов Е., Юшкин В.Д., Храпенко О.А., 2014] был проведен полный приливной анализ годовых рядов непрерывных синхронных наблюдений тремя гравиметрами *CG5* (40189, 40199 и 40201), установленными в Мурманске. Определены теоретические и экспериментальные значения дельта-факторов и фазовых сдвигов в диапазоне частот от 0.892934 до 2.003032 циклов в сутки и проведено их сравнение. В результате выявлена возможность и необходимость определения экспериментального океанического эффекта для четырех волн: *S2*, *M2*, *K1* и *O1*. После уточнения амплитуд и фаз океанического эффекта и учета влияния атмосферы стандартное отклонение ряда остатков, полученного для инструмента 40189 путем

вычитания теоретического сигнала из экспериментального, составило 0.67 мкГал. Данная работа фактически была нацелена на разработку программы анализа приливных данных, которую автор надеется осуществить в ближайшем будущем.

И наконец, в работе [Спиридонов Е.А., 2015с] автором настоящей работы были подвергнуты значительной дополнительной обработке данные гравиметрических наблюдений на антарктической японской станции Syowa [Kim et al., 2011]. Прежде всего, эти данные интересны в связи с достаточно высокой широтой расположения пункта (69°,007 ю.ш.). Это позволило, в частности, с большей достоверностью сравнить два широтных распределения гравиметрических амплитудных дельта-факторов для Земли без океана: *DDW/NH* [Dehant V. et al., 1999] и рассчитанного в работах [Spiridonov, 2014] и [Спиридонов Е.А., 2016b]. В то же время, находящийся на станции стабильный и точный сверхпроводящий гравиметр установлен всего в 250 м от береговой линии, т.е. в значительной степени подвержен влиянию океана. В связи с этим, интерес также представляла проверка работоспособности в Антарктике современных океанических приливных моделей (в частности, *FES2012*).

В результате проведенного анализа было выяснено, что наилучшей океанической приливной моделью в антарктическом поясе в настоящее время является *TPX07.2*. Это совпадает с результатами работы [Kim et al., 2011]. Однако, в целом, разброс результатов, получаемых по различным океаническим моделям, оказался достаточно велик. Тем не менее, было показано, что в высоких широтах, вне зависимости от выбора океанической приливной модели, применение теоретических амплитудных дельта-факторов для Земли без океана модели *DDW/NH* более чем в 70% случаев приводит к более далеким от наблюдений результатам, нежели применение амплитудных факторов нашей модели.

Ряд результатов настоящей главы получен автором в работах [Спиридонов Е.А., 2015a; 2015b; 2015с].

### 3.1 ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И МЕТОДЫ ИХ АНАЛИЗА

Для анализа были применены данные с 14 пунктов сети сверхпроводящих гравиметров Глобального геодинамического проекта (*GGP*). Основные характеристики пунктов и сроки проведения наблюдений показаны в табл. 3.1.1. В этой таблице вслед за названием станции приведены ее широта и долгота в градусах, высота в метрах и название инструмента. Далее указаны сроки начала и окончания наблюдений, общее количество дней наблюдений, а также значение коэффициента регрессии ( $(\text{нм}/\text{с}^2)/\text{ГПа}$ ), необходимого для учета эффекта атмосферного давления. Из таблицы видно, что длина рядов колеблется от 3 (*Schiltach*) до 18 (*Cantley*) лет, составляя в среднем по четырнадцати станциям величину порядка 12 лет. О местоположении основных европейских станций можно также судить по рис 3.1.1.

В таблице 3.1.2 приведены значения наблюдаемых амплитудных дельта-факторов ( $\delta$ ) и сдвигов фаз ( $\Delta\varphi$ ) в градусах для восьми основных приливных волн (*Q1, O1, P1, K1, N2, M2, S2, K2*). Эти значения получены для рядов, показанных в табл. 3.3.1, при помощи программы *ANALYZE* версии 3.40 [Schueller K., 2015]. Как сами ряды наблюдений, так и результаты их анализа были любезно предоставлены автору настоящей работы профессором Бернаром Дюкармом.

Следует отметить, что определяемые программой анализа формальные среднеквадратические отклонения значений амплитудных факторов и сдвигов фаз (здесь не приводятся) достаточно малы. Они лежат в диапазоне от  $2 \cdot 10^{-5}$  (*M2*) до  $2 \cdot 10^{-4}$  (*Q1*) для дельта-факторов и от одной тысячной (*M2*) до одной сотой градуса (*Q1*) для сдвигов фаз. Наименьшие в среднем по 8 волнам среднеквадратические отклонения наблюдаются в Вене, а наибольшие – сразу на нескольких пунктах (*Sciltach, Metsahovi, Kamioka, Cantley*).

В то же время, наблюдаемые на одном и том же инструменте изменения дельта-факторов и сдвигов фаз во времени могут быть на порядок больше указанных формальных ошибок, что указывает на недостаточность последних.

Таблица 3.1.3 содержит те же значения амплитудных факторов и сдвигов фаз, что и таблица 3.1.2, но уже рассчитанные в настоящей работе при помощи программы *ATLANTIDA3.1\_2014* для модели Земли *IASP91* и наиболее современной океанической приливной модели *FES2012*. Практически все приведенные в этой таблице значения амплитудных факторов (111 из 112, 99%) отличаются от наблюдаемых в третьем или четвертом знаке после запятой. Из них 46% – отличаются в четвертом знаке.

Таблица 3.1.1. Основные характеристики пунктов и сроки наблюдений.

Станция	Широта	Долгота	Высота	Инструмент	Начало	Окончание	Дни	Reg. Coef.
BAD HOMBURG	50.229	8.611	190	GWR 30_L + GWR C044	13.02.2001	30.01.2013	4622	-3.373
CANBERRA (STROMLO)	-35.321	149.008	763	GWR CT 031	02.07.1997	30.07.2013	5591	-3.372
CANTLEY	45.585	-75.807	269	GWR T012 TT70	07.11.1989	03.12.2013	6634	-3.423
KAMIOKA	36.425	137.308	358	SUP-GWR T016	23.10.2004	30.07.2013	3006	-2.852
MEDICINA	44.522	11.645	28	GWR C023	02.01.1998	30.01.2014	5802	-3.559
MEMBACH (BAELEN)	50.609	6.007	250	GWR C021	04.08.1995	30.12.2011	5720	-3.304
METSAHOVI	60.217	24.396	56	TT70	11.08.1994	30.07.2012	5564	-3.684
MOXA	50.646	11.616	455	CD 034 HIGH	02.01.2000	29.06.2012	4381	-3.339
PECNY	49.914	14.786	535	GWR OSG-050	02.05.2007	30.07.2013	2251	-3.322
SCHILTACH	48.330	8.327	589	GWR CD056 U	02.10.2009	29.09.2013	1137	-3.376
STRASBOURG	48.622	7.684	185	GWR C026	02.03.1997	30.12.2012	5387	-3.380
SUTHERLAND	-32.381	20.811	1791	GWR CT 037	01.10.2000	29.06.2012	3404	-2.454
VIENNE (AUTRICHE)	48.249	16.357	193	SUP-GWR C 025	02.08.1995	21.10.2007	4278	-3.498
WETZELL	49.144	12.878	580	GWR CD029_L	05.11.1998	06.10.2010	4245	-3.373

Таблица 3.1.2. Наблюдаемые дельта-факторы и сдвиги фаз.

	Q1		O1		P1		K1		N2		M2		S2		K2	
	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$
BAD HOMBURG	1.14787	-0.2303	1.15011	0.1055	1.15084	0.2011	1.13797	0.2503	1.17597	2.6445	1.18869	1.9748	1.18975	0.5357	1.19161	0.7936
CANBERRA	1.18386	-0.6651	1.16734	-0.7469	1.14576	-0.8567	1.12974	-0.8377	1.19664	-2.6583	1.17865	-2.5231	1.15489	-1.3772	1.16061	-1.1007
CANTLEY	1.16481	0.5656	1.16535	0.5540	1.16035	0.4809	1.14725	0.5850	1.20981	0.0835	1.20319	-0.5066	1.18390	-1.1399	1.18409	-0.9046
KAMIOKA	1.20311	0.9860	1.20096	0.5704	1.19218	-0.1430	1.18059	-0.1437	1.18626	0.1170	1.19058	0.5172	1.20027	-0.3582	1.19994	0.0676
MEDICINA	1.14773	-0.1372	1.14879	0.1371	1.14750	0.2555	1.13497	0.3481	1.17280	1.7065	1.18081	1.2497	1.17914	0.1383	1.18152	0.4311
MEMBACH	1.14688	-0.2092	1.14936	0.1068	1.14967	0.2267	1.13725	0.2803	1.17245	3.0652	1.18787	2.4418	1.19277	0.7689	1.19465	1.0403
METSAHOVI	1.14654	0.0774	1.15276	0.2538	1.15363	0.0538	1.13996	0.0861	1.17787	1.0494	1.18089	0.7102	1.17481	0.0760	1.17682	0.1879
MOXA	1.14638	-0.1641	1.14876	0.1242	1.14927	0.1733	1.13628	0.2257	1.17540	2.1524	1.18555	1.5828	1.18417	0.3425	1.18602	0.5792
PECNY	1.14772	-0.0945	1.15007	0.1243	1.14996	0.1200	1.13682	0.1957	1.17714	1.7538	1.18506	1.2408	1.18217	0.1687	1.18327	0.4008
SCHILTACH	1.14816	-0.2949	1.14911	0.0894	1.14999	0.1987	1.13690	0.2590	1.17179	2.7685	1.18671	2.0313	1.18803	0.5857	1.18913	0.8435
STRASBOURG	1.14716	-0.2680	1.14887	0.0860	1.14971	0.2194	1.13696	0.2713	1.17360	2.7967	1.18704	2.1558	1.18927	0.6473	1.19131	0.9089
SUTHERLAND	1.16126	0.5884	1.16317	0.1110	1.15036	-0.5186	1.13490	-0.5019	1.13962	5.5004	1.15723	5.2385	1.19927	4.2650	1.19602	4.7589
VIENNE	1.14749	-0.1068	1.14979	0.1159	1.14873	0.1499	1.13574	0.1982	1.17818	1.5392	1.18345	1.0776	1.18071	0.1088	1.18219	0.3336
WETZELL	1.14723	-0.1543	1.14967	0.1164	1.14998	0.1356	1.13665	0.2087	1.17772	1.9617	1.18556	1.4274	1.18348	0.2659	1.18543	0.5074

Таблица 3.1.3 Прогнозные дельта-факторы и сдвиги фаз (*ATLANTIDA3.1\_2014, FES2012, IASP91*)

	Q1		O1		P1		K1		N2		M2		S2		K2	
	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$
BAD HOMBURG	1.14603	-0.1728	1.14968	0.1112	1.15061	0.1593	1.13660	0.1942	1.17526	2.5893	1.18811	1.9601	1.19135	0.7468	1.19265	0.7856
CANBERRA	1.18235	-0.7223	1.17192	-0.7798	1.14875	-0.9377	1.13310	-0.9445	1.19902	-2.6373	1.18305	-2.4113	1.16267	-0.9289	1.17159	-0.9942
CANTLEY	1.16141	0.5752	1.16238	0.5332	1.15635	0.5200	1.14298	0.5542	1.20693	-0.0525	1.20130	-0.4596	1.18177	-0.7342	1.18307	-0.7566
KAMIOKA	1.20297	0.8133	1.20142	0.6195	1.19367	0.0069	1.17817	-0.1007	1.18392	0.1593	1.19069	0.5691	1.20048	0.0390	1.20300	0.0828
MEDICINA	1.14688	-0.0981	1.14941	0.1499	1.14868	0.2761	1.13443	0.2955	1.17305	1.7347	1.18141	1.2582	1.18221	0.3987	1.18239	0.3965
MEMBACH	1.14597	-0.1696	1.15001	0.1182	1.15099	0.1829	1.13688	0.2287	1.17252	3.0591	1.18856	2.4199	1.19554	1.0038	1.19758	1.0518
METSAHOVI	1.14268	0.1563	1.14869	0.2301	1.14751	-0.0636	1.13565	0.0571	1.17498	1.1030	1.17866	0.6555	1.17556	0.2149	1.17842	0.1363
MOXA	1.14589	-0.1293	1.14977	0.1204	1.15027	0.1296	1.13629	0.1592	1.17706	2.1302	1.18678	1.5480	1.18751	0.5301	1.18861	0.5578
PECNY	1.14605	-0.0870	1.14985	0.1194	1.14951	0.1118	1.13552	0.1353	1.17788	1.7472	1.18505	1.2238	1.18407	0.3684	1.18489	0.3895
SCHILTACH	1.14644	-0.2234	1.14938	0.0905	1.15025	0.1759	1.13623	0.2060	1.17340	2.6278	1.18675	2.0185	1.19075	0.8036	1.19159	0.8483
STRASBOURG	1.14637	-0.2342	1.14932	0.0900	1.15041	0.1820	1.13639	0.2137	1.17314	2.7638	1.18738	2.1365	1.19200	0.8605	1.19296	0.9091
SUTHERLAND	1.16201	0.6820	1.16297	0.2348	1.14920	-0.2615	1.13283	-0.3824	1.13824	5.4105	1.15790	5.1456	1.19971	4.4183	1.19365	4.6792
VIENNE	1.14651	-0.0627	1.14984	0.1129	1.14871	0.1177	1.13469	0.1389	1.17747	1.5409	1.18338	1.0679	1.18203	0.3107	1.18252	0.3312
WETZELL	1.14625	-0.1203	1.14974	0.1115	1.14963	0.1328	1.13562	0.1580	1.17674	1.9473	1.18534	1.4048	1.18552	0.4689	1.18629	0.4952



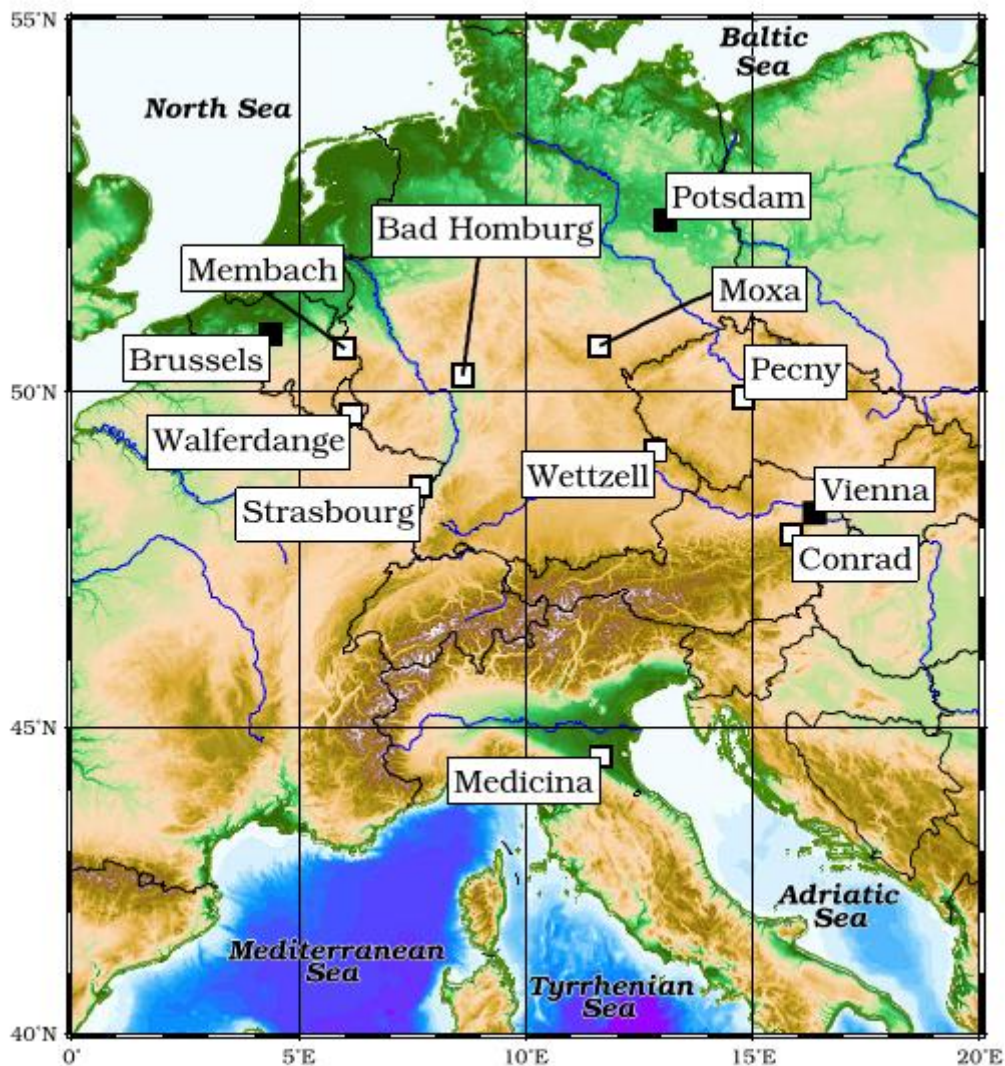


Рис.3.1.1. Расположение европейских станций сети *GGP*.

Фазы отличаются от наблюдаемых, как правило, на первые сотые доли градуса. Наилучшее совпадение как амплитуд, так и фаз фиксируется в *Vienna* и *Wetzell*, а одно из наихудших – в *Sanbeffa*. Очевидно, что указанные здесь разности в большинстве случаев почти на порядок больше приведенных выше формальных среднеквадратических отклонений, выдаваемых программой анализа. Это в основном является следствием недостаточного совершенства океанической приливной модели, а также влияния местных условий. В то же время, они в целом ряде случаев совпадают по порядку величины с указанными изменениями анализируемых приливных параметров во времени и, как мы увидим в дальнейшем, меньше разностей, получаемых при помощи программы *PREDICT* либо при помощи дельта-факторов для земли без океана, рассчитанных по модели *DDW/NH*.

Необходимо отметить, что проведение сравнительного анализа величин амплитудных факторов и сдвигов фаз по отдельности, строго говоря, не совсем содержательно. Гораздо больший смысл имеет сравнение амплитуд соответствующих разностных векторов  $\vec{A}_{dif}$ :

$$\vec{A}_{dif} = \vec{A}_p - \vec{A}_o, \quad (3.1.1)$$

где  $\vec{A}_p$  и  $\vec{A}_o$  – прогнозируемый и наблюдаемый приливные вектора, имеющие координаты  $(A \cdot \delta_p \cos \Delta \varphi_p; A \cdot \delta_p \sin \Delta \varphi_p)$  и  $(A \cdot \delta_o \cos \Delta \varphi_o; A \cdot \delta_o \sin \Delta \varphi_o)$  соответственно. Здесь  $A$  – амплитуда рассматриваемой приливной волны на твердой эллипсоидальной Земле без океана;  $\delta_o$  и  $\Delta \varphi_o$  – наблюдаемые амплитудные факторы и сдвиги фаз, показанные в табл. 3.1.2;  $\delta_p$  и  $\Delta \varphi_p$  – прогнозные амплитудные факторы и сдвиги фаз, вычисляемые программой *ATLANTIDA3.1\_2014* для упругой Земли с океаном (табл. 3.1.3). Координаты прогнозируемого вектора имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A \cdot \delta_p \cos \Delta \varphi_p &= A \cdot \delta_E + A_{oc} \cdot \cos \varphi_{oc}, \\ A \cdot \delta_p \sin \Delta \varphi_p &= A_{oc} \cdot \sin \varphi_{oc}, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

где  $\delta_E$  – амплитудный дельта-фактор для упругой Земли без океана,  $A_{oc}$  и  $\varphi_{oc}$  – амплитуда и локальная фаза океанического гравиметрического эффекта.

Амплитуда разностного вектора соответственно равна:

$$A_{dif} = A \sqrt{(\delta_p \cos \Delta \varphi_p - \delta_o \cos \Delta \varphi_o)^2 + (\delta_p \sin \Delta \varphi_p - \delta_o \sin \Delta \varphi_o)^2}. \quad (3.1.3)$$

Значения амплитуд разностных векторов, вычисленных по данным таблиц 3.1.2 и 3.1.3, т.е. характеризующих отклонения наблюдений от прогноза, полученного при помощи программы *ATLANTIDA3.1\_2014 (IASP91, FES2012)*, приведены в табл. 3.1.4. Из этих значений видно, что в среднем по восьми волнам наименьшие значения амплитуд разностных векторов наблюдаются в Wetzell, Vienne и Pecny, а наибольшие, как правило, за пределами Европы: в Canberra, Cantley, Sutherland и Kamioka. Единственным европейским пунктом с достаточно большими невязками является Metsahovi. Амплитуды разностных векторов составляют обычно десятые доли  $\text{nm}/c^2$ , т.е. десятки нГал.

Данные таблицы 3.1.4 также дополняет табл. 3.1.5.

В таблице 3.1.5 приведены значения тех же, что и в табл. 3.1.4, амплитуд разностных векторов в относительной мере, т.е. в процентах от наблюдаемых амплитуд приливных волн. Почти в 33% случаев (из 112: по 8 волнам и 14 станциям) относительные разности составляют сотые доли процента. При этом наибольшее число

таких значений (10 из 14 и 9 из 14) соответствует волнам *O1* и *M2*, а наибольшее число их в разрезе волн – станциям Wetzell, Vienne и Strasbourg (по 5 из 8 волн). Если проводить анализ данных таблицы 3.1.5 только по 9 избранным европейским станциям (Bad Homburg, Medicina, Membach, Моха, Ресну, Schiltach, Strasbourg, Vienne и Wetzell), то здесь обсуждаемые относительные разности составляют сотые доли процента уже более чем в 57% случаев. При этом выделяются волны *O1* и *M2*, для которых подобные значения наблюдаются на 9 и 8 станциях из 9 соответственно.

Таблица 3.1.4. Амплитуды разностных векторов ( $nm/c^2$ ). Прогноз *ATLANTIDA3.1\_2014* (*IASP91, FES2012*) минус наблюдения.

	<b>Q1</b>	<b>O1</b>	<b>P1</b>	<b>K1</b>	<b>N2</b>	<b>M2</b>	<b>S2</b>	<b>K2</b>
BAD HOMBURG	0.13	0.14	0.12	0.76	0.08	0.20	0.67	0.04
CANBERRA	0.11	1.36	0.46	1.63	0.23	2.48	2.78	0.71
CANTLEY	0.20	0.93	0.59	1.88	0.29	0.78	1.48	0.15
KAMIOKA	0.21	0.33	0.48	1.08	0.23	0.53	1.88	0.19
MEDICINA	0.07	0.21	0.18	0.51	0.05	0.24	1.10	0.05
MEMBACH	0.07	0.21	0.22	0.47	0.01	0.25	0.79	0.11
METSAHOVI	0.21	1.10	0.82	1.64	0.11	0.46	0.25	0.05
MOXA	0.05	0.31	0.19	0.57	0.10	0.43	0.72	0.10
PECNY	0.10	0.07	0.07	0.76	0.04	0.11	0.66	0.06
SCHILTACH	0.13	0.08	0.08	0.54	0.21	0.09	0.82	0.10
STRASBOURG	0.06	0.14	0.15	0.55	0.05	0.17	0.80	0.07
SUTHERLAND	0.11	0.71	0.69	1.24	0.23	1.07	0.81	0.20
VIENNE	0.08	0.02	0.09	0.68	0.05	0.07	0.68	0.01
WETZELL	0.07	0.04	0.05	0.62	0.06	0.17	0.70	0.04

Таблица 3.1.5 Отношение амплитуд разностных векторов из табл. 3.1.4 к наблюдаемым амплитудам в процентах.

	<b>Q1</b>	<b>O1</b>	<b>P1</b>	<b>K1</b>	<b>N2</b>	<b>M2</b>	<b>S2</b>	<b>K2</b>
BAD HOMBURG	0.19	0.04	0.08	0.16	0.11	0.06	0.39	0.09
CANBERRA	0.16	0.40	0.30	0.35	0.20	0.42	1.03	0.96
CANTLEY	0.29	0.26	0.35	0.38	0.34	0.18	0.73	0.27
KAMIOKA	0.30	0.09	0.29	0.22	0.21	0.09	0.69	0.26
MEDICINA	0.10	0.06	0.11	0.10	0.05	0.05	0.52	0.10
MEMBACH	0.11	0.06	0.14	0.10	0.01	0.07	0.47	0.25
METSAHOVI	0.36	0.36	0.57	0.38	0.26	0.21	0.25	0.16
MOXA	0.07	0.09	0.12	0.12	0.15	0.12	0.43	0.22
PECNY	0.15	0.02	0.04	0.16	0.06	0.03	0.38	0.14
SCHILTACH	0.19	0.02	0.05	0.11	0.28	0.02	0.44	0.21
STRASBOURG	0.09	0.04	0.09	0.11	0.07	0.04	0.44	0.14
SUTHERLAND	0.18	0.22	0.46	0.28	0.20	0.17	0.27	0.24
VIENNE	0.12	0.01	0.06	0.14	0.06	0.02	0.37	0.03
WETZELL	0.10	0.01	0.03	0.13	0.09	0.04	0.39	0.08

На рис. 3.1.2 показаны фазовые диаграммы, иллюстрирующие удаление наблюдаемых значений от прогнозируемых для каждой станции по восьми волнам. По оси абсцисс отложены синфазные (косинусные) составляющие разностных векторов (наблюдения минус прогноз), а по оси ординат – аутфазные (синусные) составляющие в  $\text{нм}/\text{с}^2$ .

Помимо океанической модели *FES2012*, также проводились расчеты еще по двум моделям: *CSR4.0* и *NAO*, а также среднему из трех указанных моделей (*SUM3*). Однако результаты по более ранним моделям оказались гораздо дальше от наблюдений, поэтому числовые данные по ним здесь не приводятся. В то же время, полученные по этим моделям результаты будут упоминаться в дальнейшем анализе.

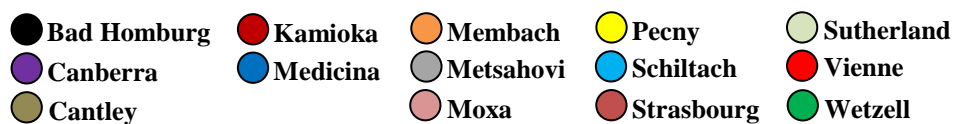
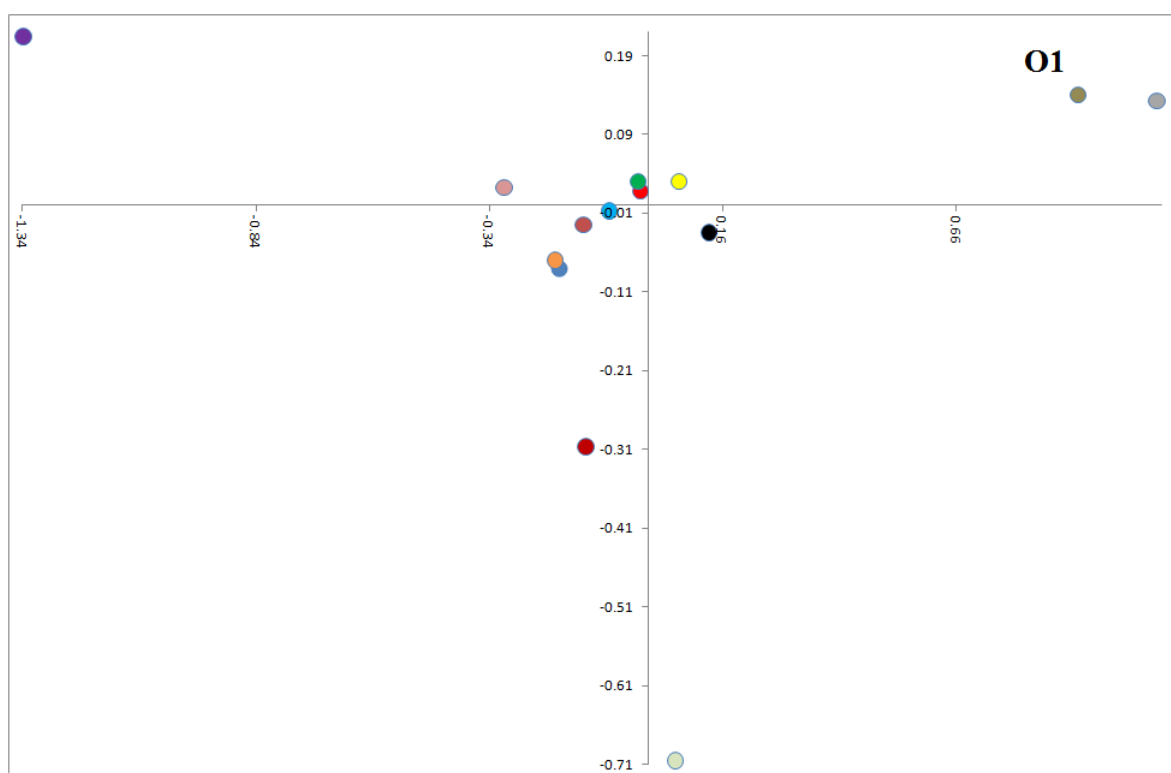
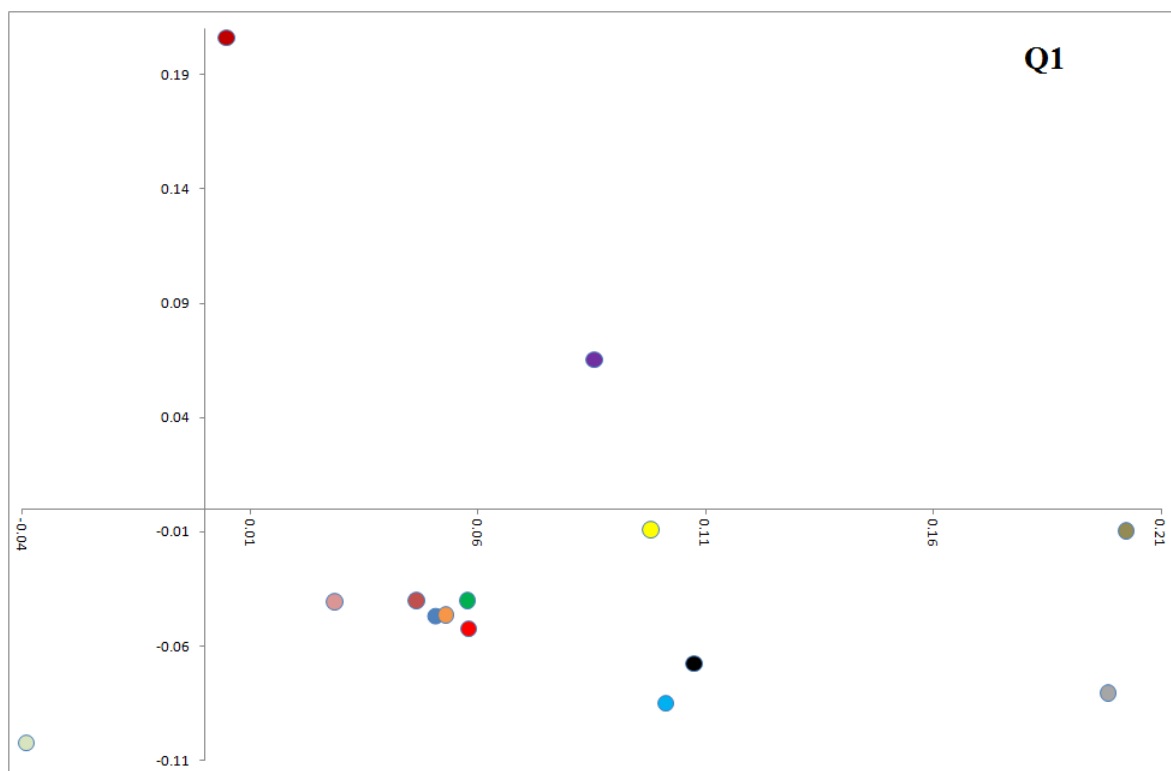
Приводимые ниже сравнения осуществлялись по различным критериям: количеству волн (всех, суточных и полусуточных, в среднем по 14 и 9 станциям), для которых амплитуды разностных векторов оказывались меньше; по количеству станций, на которых оказывалась меньшей сумма амплитуд разностных векторов (для 8 волн, отдельно суточных и полусуточных), и некоторым другим.

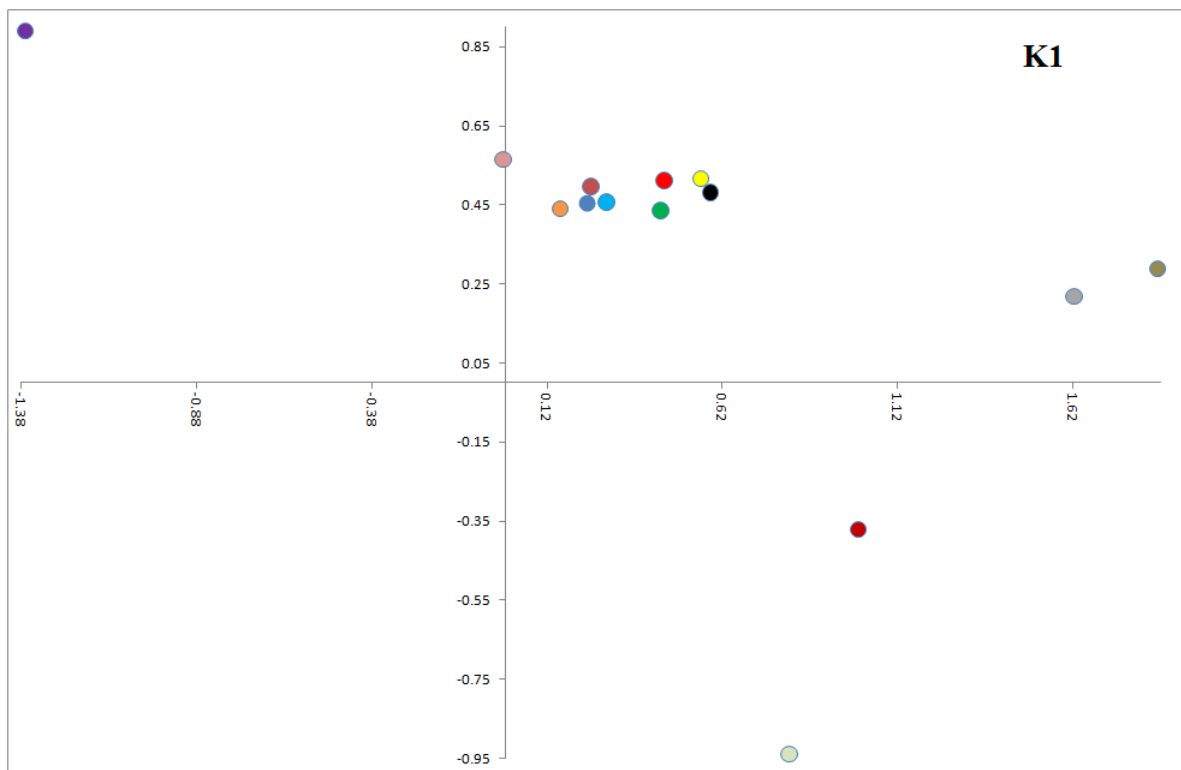
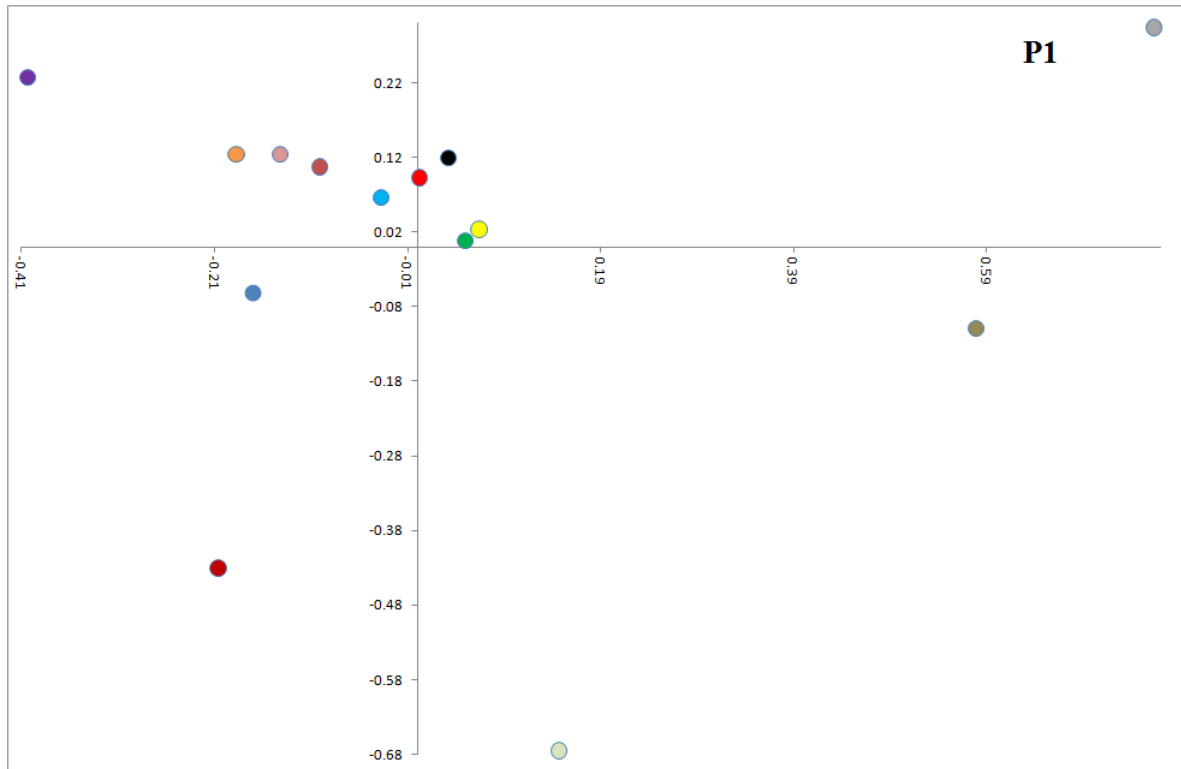
Также интересно сравнение по отношению амплитуды суммы разностных векторов по 14 и 9 станциям к соответствующим модулям сумм приливных векторов. Указанные отношения приведены в таблице 3.1.6.

Таблица 3.1.6 Отношение амплитуд суммы разностных векторов по 14 и 9 станциям к модулям сумм приливных векторов в % (*IASP91*, *FES2012*, *ATLANTIDA3.1\_2014*).

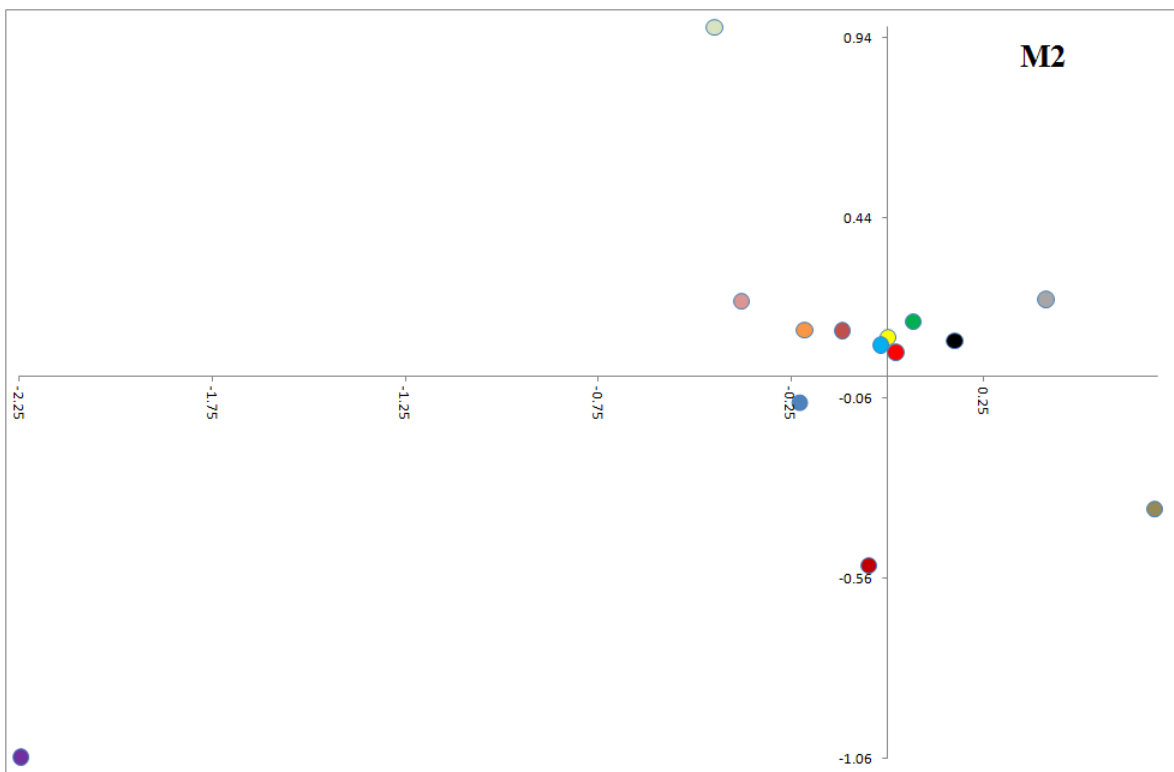
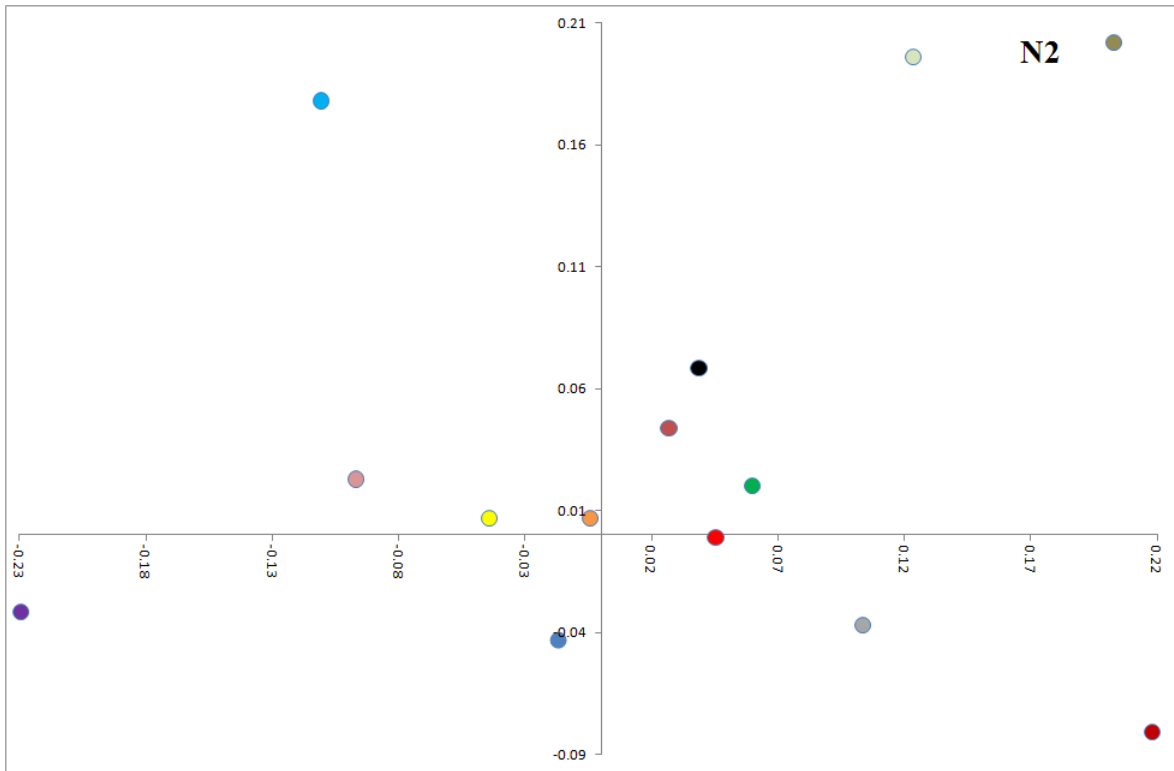
Волны	Q1	O1	P1	K1	N2	M2	S2	K2
14 станций	0.12	0.01	0.02	0.12	0.06	0.04	0.49	0.17
9 станций	0.12	0.02	0.05	0.12	0.05	0.03	0.43	0.13

Из таблицы видно, что в среднем по всем 14 станциям *GGP* применение модели строения Земли *IASP91* и глобальной приливной океанической модели *FES2012* приводит для волн *O1*, *P1* и *M2* к совпадению изложенной в настоящей работе теории с наблюдениями в пределах первых сотых долей процента. Аналогичная картина наблюдается и для 9 избранных станций. Здесь результат несколько хуже для волн *O1* и *P1*, но лучше – для всех четырех полусуточных волн.

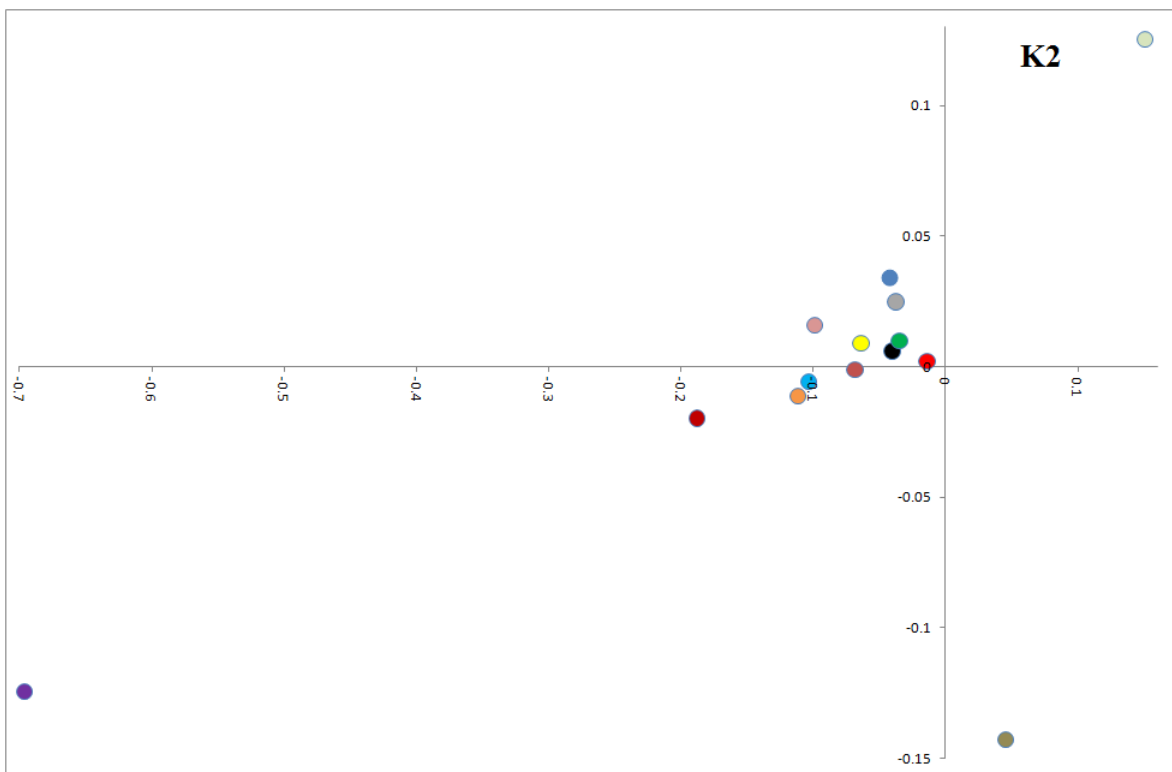
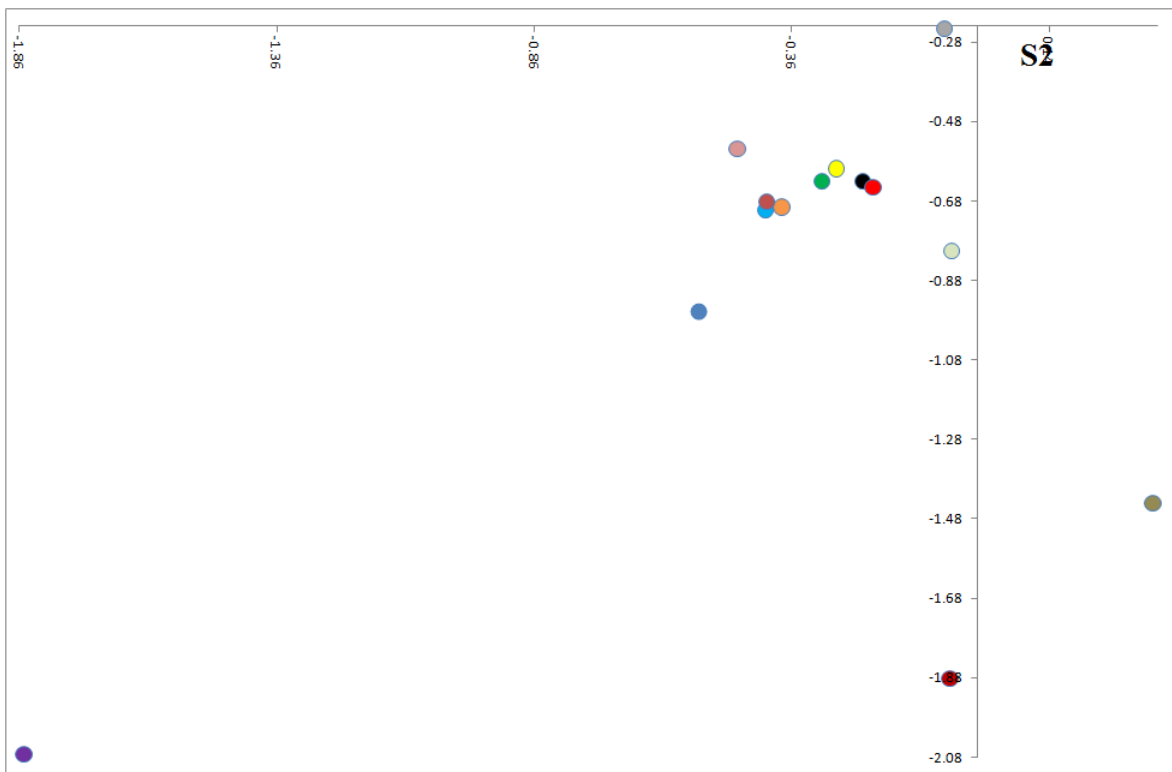
Рис. 3.1.2 Фазовые диаграммы: наблюдения минус прогноз (*IASP91, FES2012*)



- Bad Homburg
- Kamioka
- Membroch
- Pecny
- Sutherland
- Canberra
- Medicina
- Metsahovi
- Schiltach
- Vienne
- Cantley
- Moxa
- Strasbourg
- Wetzell



- Bad Homburg
- Kamioka
- Membach
- Pecny
- Sutherland
- Canberra
- Medicina
- Metsahovi
- Schiltach
- Vienne
- Cantley
- Moxa
- Strasbourg
- Wetzell



- Bad Homburg
- Kamioka
- Membach
- Pecny
- Sutherland
- Canberra
- Medicina
- Metsahovi
- Schiltach
- Vienne
- Cantley
- Moxa
- Strasbourg
- Wetzell



### 3.2. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРОГНОЗА ПРОГРАММ

#### *ATLANTIDA3.1\_2014 И PREDICT*

Амплитуды разностных векторов (3.1.3), полученные по программе *PREDICT* с применением осреднения по 9 океаническим моделям, представлены в табл. 3.2.1. Прогнозные значения соответствующих амплитудных факторов и сдвигов фаз здесь не приводятся. Их можно найти на сайте Международного Центра Земных Приливов (ICET). Некоторые результаты применения *PREDICT* с осреднением по 9 моделям содержатся в работе [Ducarme B. et al., 2009]. Вообще говоря, эта схема расчета является достаточно популярной.

Таблица 3.2.1. Амплитуды разностных векторов ( $nm/c^2$ ). Прогноз *PREDICT* (сумма 9 океанических моделей, *ICET*) минус наблюдения.

	<b>Q1</b>	<b>O1</b>	<b>P1</b>	<b>K1</b>	<b>N2</b>	<b>M2</b>	<b>S2</b>	<b>K2</b>
BAD HOMBURG	<b>0.10</b>	<b>0.08</b>	<b>0.13</b>	<b>0.55</b>	<b>0.07</b>	<b>0.14</b>	<b>0.68</b>	<b>0.05</b>
CANBERRA	<b>0.09</b>	<b>1.46</b>	<b>0.51</b>	<b>1.76</b>	<b>0.22</b>	<b>2.42</b>	<b>2.75</b>	<b>0.70</b>
CANTLEY	<b>0.17</b>	<b>0.78</b>	<b>0.52</b>	<b>1.67</b>	<b>0.28</b>	<b>0.76</b>	<b>1.48</b>	<b>0.15</b>
KAMIOKA	<b>0.21</b>	<b>0.41</b>	<b>0.50</b>	<b>0.89</b>	<b>0.24</b>	<b>0.53</b>	<b>1.88</b>	<b>0.19</b>
MEDICINA	<b>0.05</b>	<b>0.37</b>	<b>0.26</b>	<b>0.43</b>	<b>0.05</b>	<b>0.28</b>	<b>1.10</b>	<b>0.06</b>
MEMBACH	<b>0.05</b>	<b>0.41</b>	<b>0.31</b>	<b>0.44</b>	<b>0.02</b>	<b>0.30</b>	<b>0.81</b>	<b>0.12</b>
METSAHOVI	<b>0.17</b>	<b>0.87</b>	<b>0.72</b>	<b>1.31</b>	<b>0.09</b>	<b>0.40</b>	<b>0.26</b>	<b>0.05</b>
MOXA	<b>0.04</b>	<b>0.51</b>	<b>0.27</b>	<b>0.62</b>	<b>0.11</b>	<b>0.49</b>	<b>0.74</b>	<b>0.11</b>
PECNY	<b>0.06</b>	<b>0.14</b>	<b>0.04</b>	<b>0.57</b>	<b>0.06</b>	<b>0.13</b>	<b>0.67</b>	<b>0.07</b>
SCHILTACH	<b>0.11</b>	<b>0.27</b>	<b>0.14</b>	<b>0.44</b>	<b>0.22</b>	<b>0.12</b>	<b>0.83</b>	<b>0.11</b>
STRASBOURG	<b>0.04</b>	<b>0.34</b>	<b>0.22</b>	<b>0.48</b>	<b>0.05</b>	<b>0.22</b>	<b>0.81</b>	<b>0.08</b>
SUTHERLAND	<b>0.12</b>	<b>0.73</b>	<b>0.70</b>	<b>1.20</b>	<b>0.23</b>	<b>0.92</b>	<b>0.85</b>	<b>0.19</b>
VIENNE	<b>0.06</b>	<b>0.21</b>	<b>0.12</b>	<b>0.53</b>	<b>0.03</b>	<b>0.08</b>	<b>0.68</b>	<b>0.02</b>
WETZELL	<b>0.05</b>	<b>0.22</b>	<b>0.04</b>	<b>0.45</b>	<b>0.05</b>	<b>0.15</b>	<b>0.71</b>	<b>0.05</b>

Из сравнения табл. 3.1.4 и 3.2.1 видно, что в 72 случаях из 112 (14 станций на 8 волн) амплитуды разностных векторов, рассчитанные программой *ATLANTIDA3.1\_2014 (IASP91, FES2012)*, оказались меньше таковых, полученных по программе *PREDICT*, т.е. почти в 64% случаев наши результаты оказались ближе к наблюдениям. По океаническим моделям *CSR4.0* и *NAO* результаты оказались гораздо хуже (всего 35% и 41%). В то же время, *CSR4.0* оказалась наилучшей океанической моделью в Cantley, а *NAO* в Kamioka.

При сравнении числа волн, по которым данные прогноза, рассчитанные на каждой станции по обеим программам, лежат ближе к наблюдениям, гораздо лучше в целом оказались наши результаты, полученные по 9 европейским станциям: Bad Homburg, Medicina, Membach, Moxa, Pecny, Schiltach, Strasbourg, Vienne и Wetzell (рис. 3.2.1). По

общему же количеству значений (по всем 9 станциям) наши результаты здесь лучше в 72% случаев (52 из 72, правый столбик диаграммы).

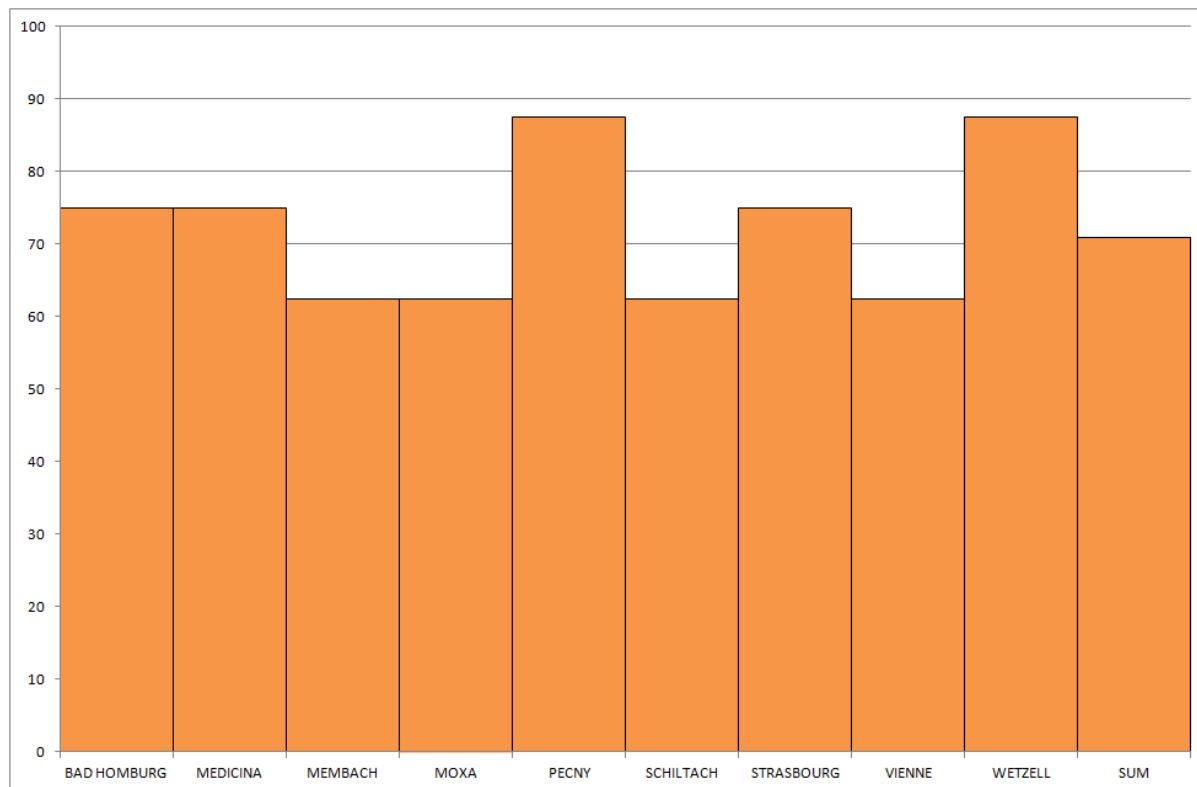


Рис.3.2.1. Количество волн в % (из 8) по 9 избранным станциям, для которых результаты *ATLANTIDA3.1\_2014* ближе к наблюдениям, чем результаты *PREDICT*.

В целом, при анализе по 14 станциям, прогноз по нашей программе оказался ближе к наблюдениям в большей степени для полусуточных (73%), нежели суточных (55%) волн. Амплитуды наших разностных векторов меньше в 12 случаях из 14 (87.5%) для волн *M2* и *O1* и в 11 (78.6%) и 10 случаях (71.4%) для волн *K2* и *S2* соответственно. Наихудший результат (6 из 14 или 43%) получился для суточных волн *Q1* и *P1*. При анализе по указанным выше 9 избранным европейским станциям наши вычисления по полусуточным волнам ближе к наблюдениям, чем результаты *PREDICT*, в 86% случаев, а по суточным – в 58%. Наилучшие результаты получаются по волнам *O1*, *M2*, *K2* (100%), а также *S2* (по 89%). Хуже всего «ведут себя» волны *Q1* и *K1* (33 и 44% соответственно). Эти данные иллюстрирует рис.3.2.2.

Дальнейший анализ проводился по абсолютной величине сумм амплитуд разностных векторов 8 рассматриваемых волн, т.е. по результатам сложения значений в строках обсуждаемых таблиц (ситуация, когда все 8 волн находятся в одной фазе). По этому критерию наша программа при расчете по океанической модели *FES2012*

превосходит *PREDICT* на 12 станциях из 14 (85.7%). (По моделям *CSR4.0* и *NAO* успех достигается лишь в 7% и 21% случаев. Исключение составляют Canberra и Моха.) Наименьшие суммы по 8 волнам получились в Vienne (1.69 нм/с<sup>2</sup>), Wetzell и Ресну (1.74 и 1.88 нм/с<sup>2</sup>). Немного хуже в Strasbourg (1.99 нм/с<sup>2</sup>). Дальше всего от наблюдений оказались Canberra (9.76 нм/с<sup>2</sup>), Cantley (6.31 нм/с<sup>2</sup>), Sutherland (5.05 нм/с<sup>2</sup>) и Kamioka (4.92 нм/с<sup>2</sup>). Лишь немного меньшее значение наблюдается в Metsahovi (4.64 нм/с<sup>2</sup>). Последние данные показаны на рис. 3.2.3. На рис. 3.2.4 для наглядности представлены разности обсуждаемых сумм амплитуд разностных векторов по восьми волнам, рассчитанные программами *PREDICT* и *ATLANTIDA3.1\_2014*. Положительные значения на этом рисунке соответствуют лучшему совпадению по сумме 8 волн результатов, полученных при помощи нашей программы.

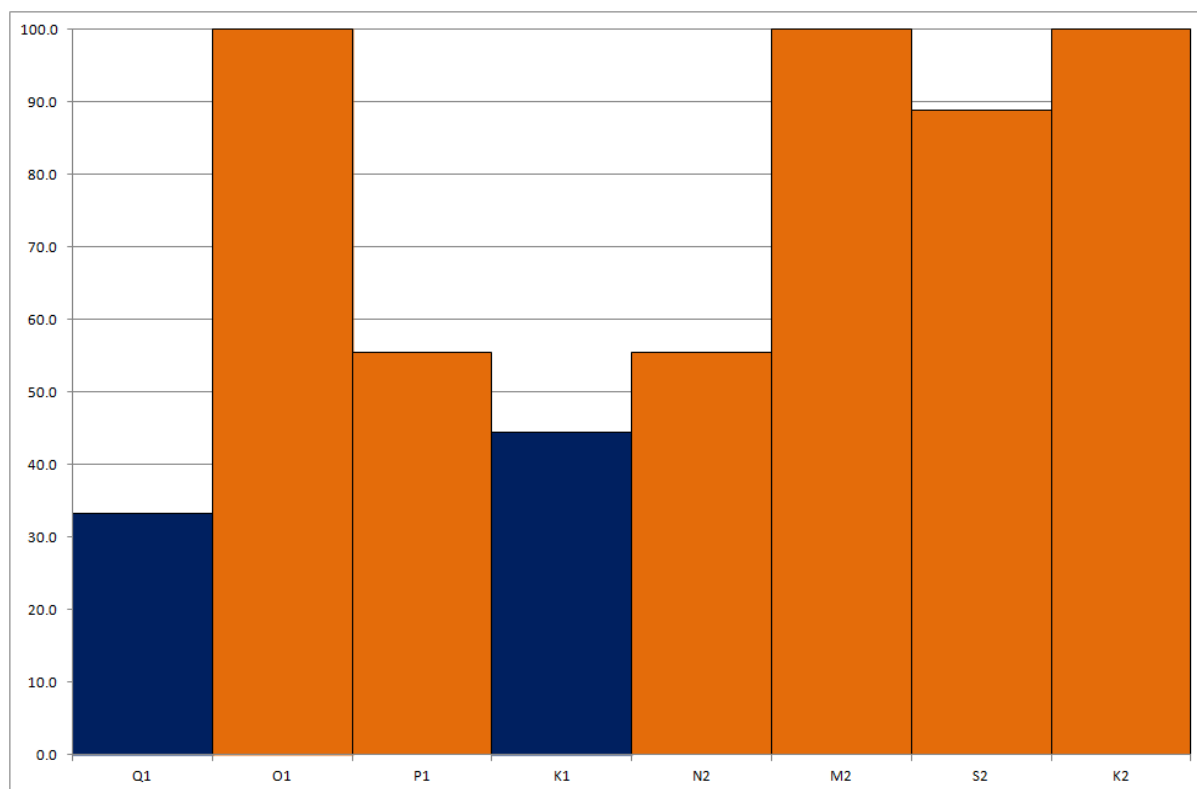


Рис. 3.2.2. Количество станций в % (из 9), для которых результаты *ATLANTIDA3.1\_2014* ближе к наблюдениям, чем результаты *PREDICT*, по каждой из 8-ми волн.

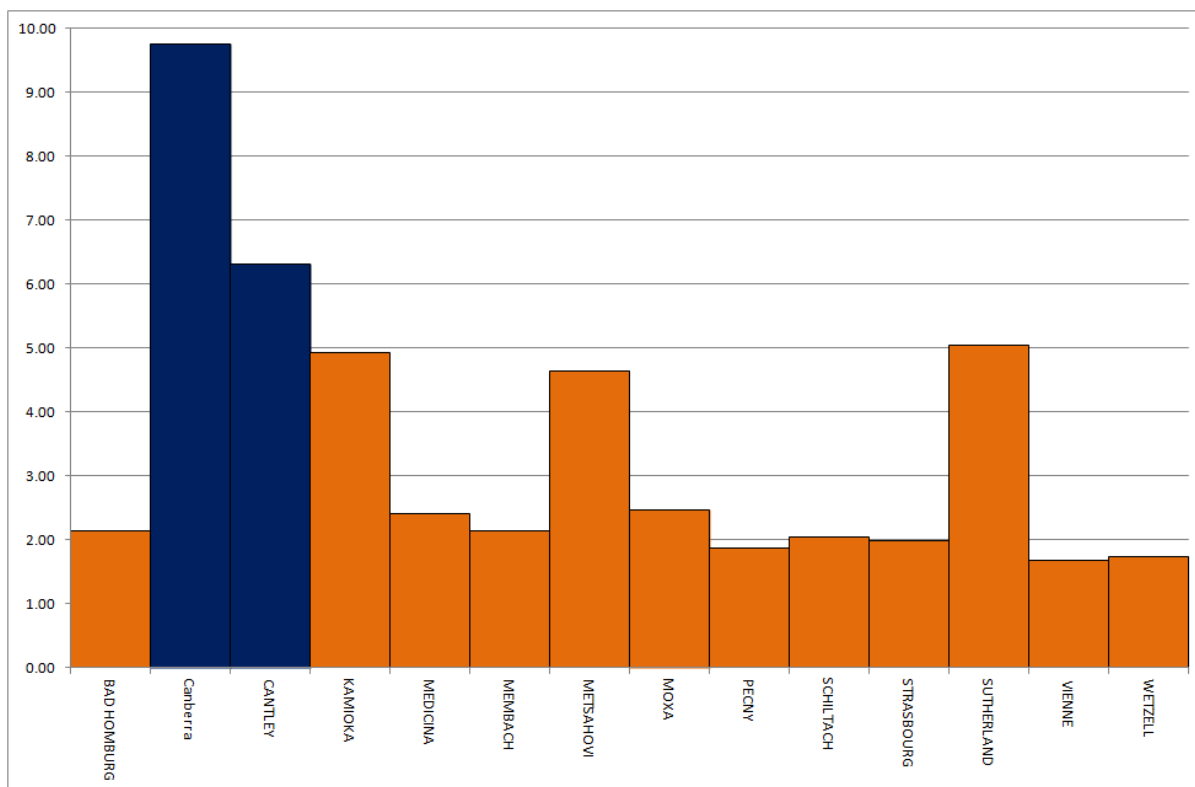


Рис.3.2.3. Сумма амплитуд разностных векторов 8 волн (нм/с<sup>2</sup>, по данным табл. 3.1.4).

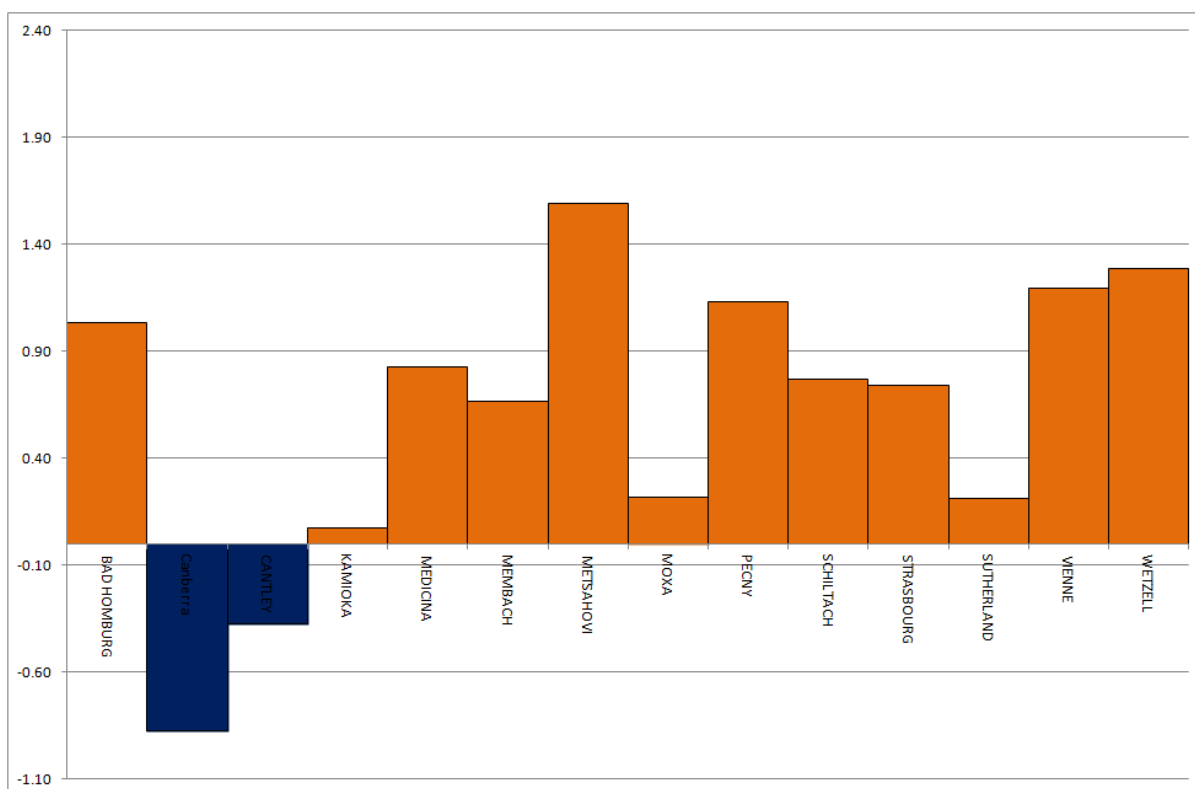


Рис.3.2.4. Разность сумм амплитуд разностных векторов (нм/с<sup>2</sup>) по 8 волнам (*PREDICT* минус *ATLANTIDA3.1\_2014*). 14 станций.

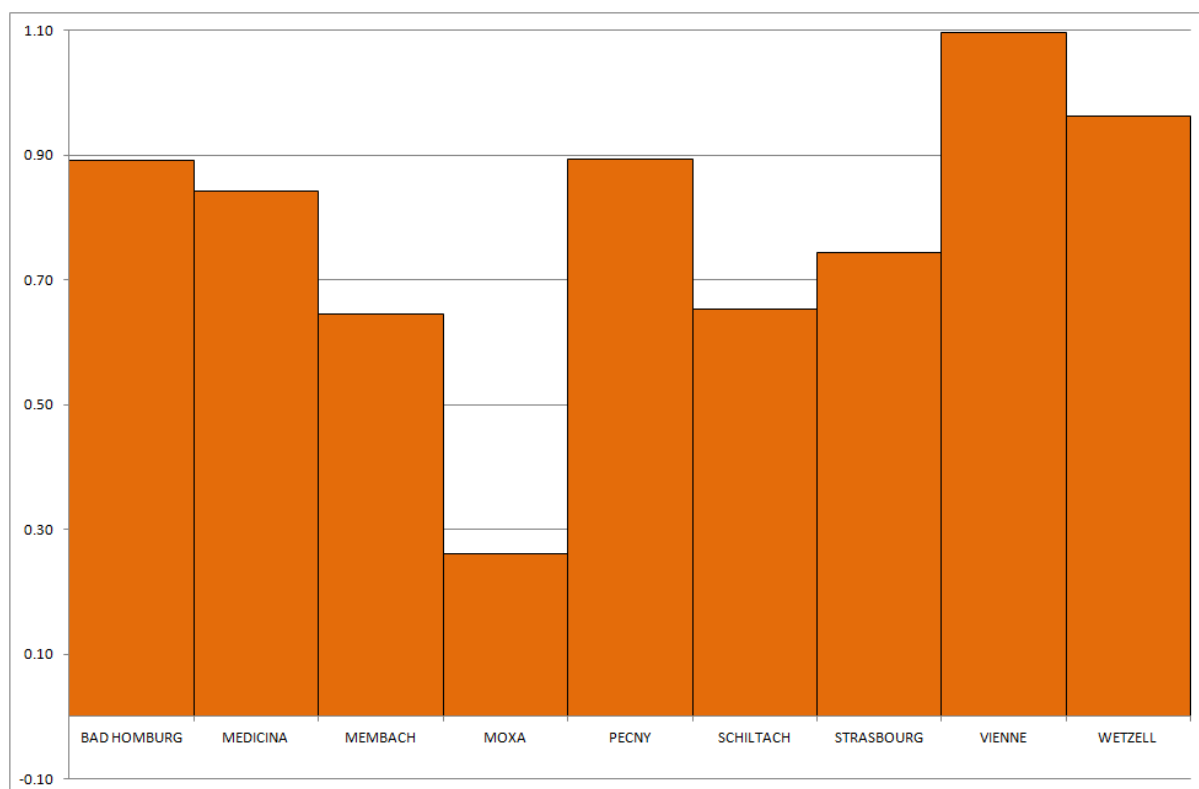


Рис.3.2.5. Разность сумм амплитуд разностных векторов ( $\text{nm}/c^2$ ) по 4 полусуточным волнам (*PREDICT* минус *ATLANTIDA3.1\_2014*). 9 избранных станций.

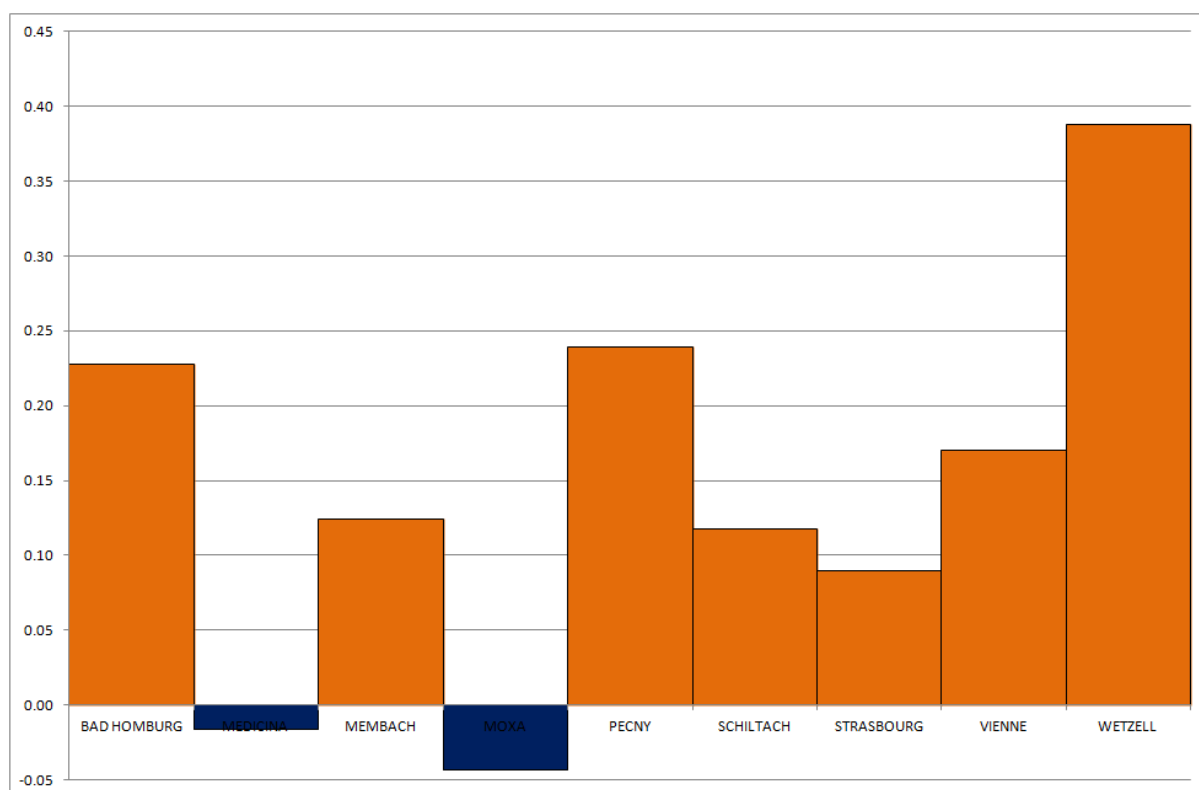


Рис.3.2.6. Разность сумм амплитуд разностных векторов ( $\text{nm}/c^2$ ) по 4 суточным волнам (*PREDICT* минус *ATLANTIDA3.1\_2014*). 9 избранных станций.

К еще более убедительным результатам приводит сравнительный анализ сумм амплитуд разностных векторов 4-х полусуточных волн. Хотя и здесь наша программа превосходит *PREDICT* также на 12 станциях из 14, а при анализе по 9 избранным станциям успех достигается на всех без исключения станциях (100% по станциям). На рис. 3.2.5, аналогичном рисунку 3.2.4, показана разность сумм амплитуд разностных векторов по 4 полусуточным волнам на 9 избранных станциях.

Из 14 станций по полусуточным волнам наименьшие суммы получились в Vienne ( $0.81 \text{ нм}/c^2$ ), Metsahovi ( $0.87 \text{ нм}/c^2$ ), Wetzell ( $0.96 \text{ нм}/c^2$ ) и Bad Homburg ( $0.99 \text{ нм}/c^2$ ), а наибольшие – опять же в Canberra ( $6.20 \text{ нм}/c^2$ ), Kamioka ( $2.83 \text{ нм}/c^2$ ), Cantley ( $2.70 \text{ нм}/c^2$ ) и Sutherland ( $2.30 \text{ нм}/c^2$ ). Наибольшее преимущество нашей программы по сравнению с *PREDICT* достигается для волны *M2* ( $+3.74 \text{ нм}/c^2$  в сумме по 14 станциям).

Что касается сумм по суточным волнам, то здесь *ATLANTIDA* лучше *PREDICT* только на 8 станциях из 14 (57%) и на 6 из 9 избранных станций (67%). При этом наихудшие результаты наблюдаются для волны *K1*. (В сумме по 14 станциям проигрыш нашей программы составляет  $0.29 \text{ нм}/c^2$ . На рис. 3.2.6 показана разность сумм амплитуд разностных векторов по 4 суточным волнам на 9 избранных станциях. Общая сумма значений положительна (*ATLANTIDA* ближе к наблюдениям, чем *PREDICT*) и составляет  $1.3 \text{ нм}/c^2$ ).

Опять же, как и в табл. 3.1.6, в приводимой ниже таблице 3.2.2. даны отношения амплитуд суммы разностных векторов по 14 и 9 станциям к соответствующим модулям сумм приливных векторов.

Таблица 3.2.2 Отношение амплитуд суммы разностных векторов по 14 и 9 станциям к модулям сумм приливных векторов в % (*PREDICT*, осреднение по 9 океаническим моделям).

Волны	Q1	O1	P1	K1	N2	M2	S2	K2
14 станций	0.05	0.05	0.07	0.11	0.08	0.03	0.55	0.23
9 станций	0.09	0.06	0.07	0.11	0.05	0.11	0.55	0.39

Из сравнения табл. 3.1.6 и 3.2.2 следует, что по указанному критерию по 14 станциям результаты *PREDICT* уступают результатам нашей программы *ATLANTIDA3.1\_2014* по 5 волнам из 8. По волне *O1* наши результаты ближе к наблюдениям в пять раз, а по волне *P1* – в три с половиной раза. Более чем в два раза *ATLANTIDA* уступает *PREDICT* по волне *Q1*, и совсем немного – по волнам *K1* и *M2*. При переходе к 9 станциям *ATLANTIDA* хуже *PREDICT* лишь по двум волнам. Это,

по-прежнему, волны  $Q1$  и  $K1$ . В то же время, заметным становится выигрыш наших результатов по волне  $M2$  (почти в 3.7 раза). В три раза ближе к наблюдениям значения, полученные при помощи *ATLANTIDA3.1\_2014*, для волны  $O1$ .

В целом, результаты, приведенные в настоящем разделе, подтверждают существенно большую степень близости прогнозных значений приливных параметров, рассчитанных программой *ATLANTIDA3.1\_2014* для океанической модели *FES2012* и модели строения Земли *IASP91*, к наблюдаемым, нежели величин, полученных при помощи программы *PREDICT* при осреднении по 9 океаническим моделям. Однако следует отметить, что в основном успех нашей программы достигался за счет применения более совершенной океанической модели и, возможно, лучшей методики расчета нагрузочных дельта-факторов. В то же время, представляет отдельный интерес изучение влияния на близость прогноза к наблюдениям отличий амплитудных дельта-факторов для Земли без океана, рассчитанных программой *ATLANTIDA3.1\_2014*, и используемых в *PREDICT* значений из модели *DDW/NH*. Этому вопросу посвящен следующий раздел настоящей работы.

### 3.3. СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ РАСЧЕТА АМПЛИТУДНЫХ ДЕЛЬТА-ФАКТОРОВ ДЛЯ ЗЕМЛИ БЕЗ ОКЕАНА

В настоящем разделе проведено сравнение разностных векторов (прогноз минус наблюдения), рассчитываемых по одной и той же океанической модели (*FES2012*), но различным наборам амплитудных дельта-факторов для неупругой Земли без океана, т.е. их значениям из настоящей работы и работы [Dehant V. et al., 1999]. Для этого в правую часть первого из выражений (3.1.2) подставлялись значения  $\delta_E$ , рассчитанные для 8 рассматриваемых волн по модели *DDW/NH* [Dehant et al., 1999]. Полученные затем по формуле (3.1.3) значения амплитуд разностных векторов сведены в табл. 3.3.1. Эти значения сравниваются с данными табл. 3.1.4. Необходимо отметить, что значения двух рассматриваемых наборов дельта-факторов для Земли без океана вблизи широты 45 градусов отличаются на несколько единиц в четвертом знаке после запятой. Вблизи этой же широты расположена и большая часть пунктов сети *GGP*. Поэтому различия рассматриваемых в настоящем разделе результатов носят в основном статистический характер.

Таблица 3.3.1. Амплитуды разностных векторов (нм/с<sup>2</sup>). Прогноз минус наблюдения. Амплитудные дельта-факторы для Земли без океана взяты согласно модели *DDW/NH* [Dehant V. et al., 1999]. Океаническая приливная модель *FES2012*.

	<b>Q1</b>	<b>O1</b>	<b>P1</b>	<b>K1</b>	<b>N2</b>	<b>M2</b>	<b>S2</b>	<b>K2</b>
BAD HOMBURG	0.10	0.04	0.12	0.75	0.07	0.13	0.68	0.05
CANBERRA	0.08	1.53	0.55	1.94	0.26	2.63	2.83	0.73
CANTLEY	0.17	0.77	0.52	1.76	0.27	0.69	1.47	0.15
KAMIOKA	0.21	0.43	0.52	0.77	0.20	0.56	1.89	0.21
MEDICINA	0.05	0.37	0.25	0.46	0.06	0.35	1.13	0.07
MEMBACH	0.05	0.35	0.27	0.46	0.02	0.32	0.81	0.12
METSAHOVI	0.19	0.99	0.80	1.82	0.10	0.42	0.26	0.05
MOXA	0.04	0.46	0.23	0.57	0.12	0.50	0.74	0.11
PECNY	0.07	0.09	0.03	0.74	0.06	0.14	0.68	0.08
SCHILTACH	0.11	0.23	0.12	0.51	0.22	0.14	0.84	0.11
STRASBOURG	0.04	0.29	0.19	0.53	0.05	0.25	0.82	0.08
SUTHERLAND	0.13	0.71	0.68	1.02	0.22	1.18	0.81	0.18
VIENNE	0.06	0.17	0.11	0.64	0.03	0.10	0.69	0.03
WETZELL	0.05	0.17	0.01	0.59	0.05	0.16	0.72	0.05

Сравнение табл. 3.1.4 и 3.3.4 показывает, что в 65 случаях из 112 (14 станций на 8 волн) амплитуды разностных векторов, рассчитанные программой *ATLANTIDA3.1\_2014 (IASP91, FES2012)* по амплитудным дельта-факторам для Земли



без океана из настоящей работы, оказались меньше таковых, полученных при применении амплитудных факторов из модели *DDW/NH* [Dehant et al., 1999] и той же океанической приливной модели. Таким образом, почти в 58% случаев результаты, полученные по дельта-факторам нашей модели, оказались ближе к наблюдениям. При этом наибольшее количество волн, по которым наш результат оказался лучше (7 из 8 волн), получилось для станций Canberra и Моха. В 6 случаях из 8 лучше соответствуют наблюдениям наши данные по станциям Kamioka, Medicina, Membach и Schiltach. Наихудший результат (0 из 8) наблюдается в Cantley.

При анализе по указанным ранее 9 избранным европейским станциям (Bad Homburg, Medicina, Membach, Моха, Ресну, Schiltach, Strasbourg, Vienne, Wetzell), результаты, полученные по нашим дельта-факторам, оказались ближе к наблюдениям почти в 62.5% случаев (45 из 72). Эту ситуацию иллюстрирует рис. 3.3.1, на котором показано, в каком проценте случаев от общего количества волн амплитуды разностных векторов нашей модели меньше (лучше), нежели таковые, полученные для той же океанической модели (*FES2012*) по амплитудным факторам упругой Земли без океана Вероники Дехант.

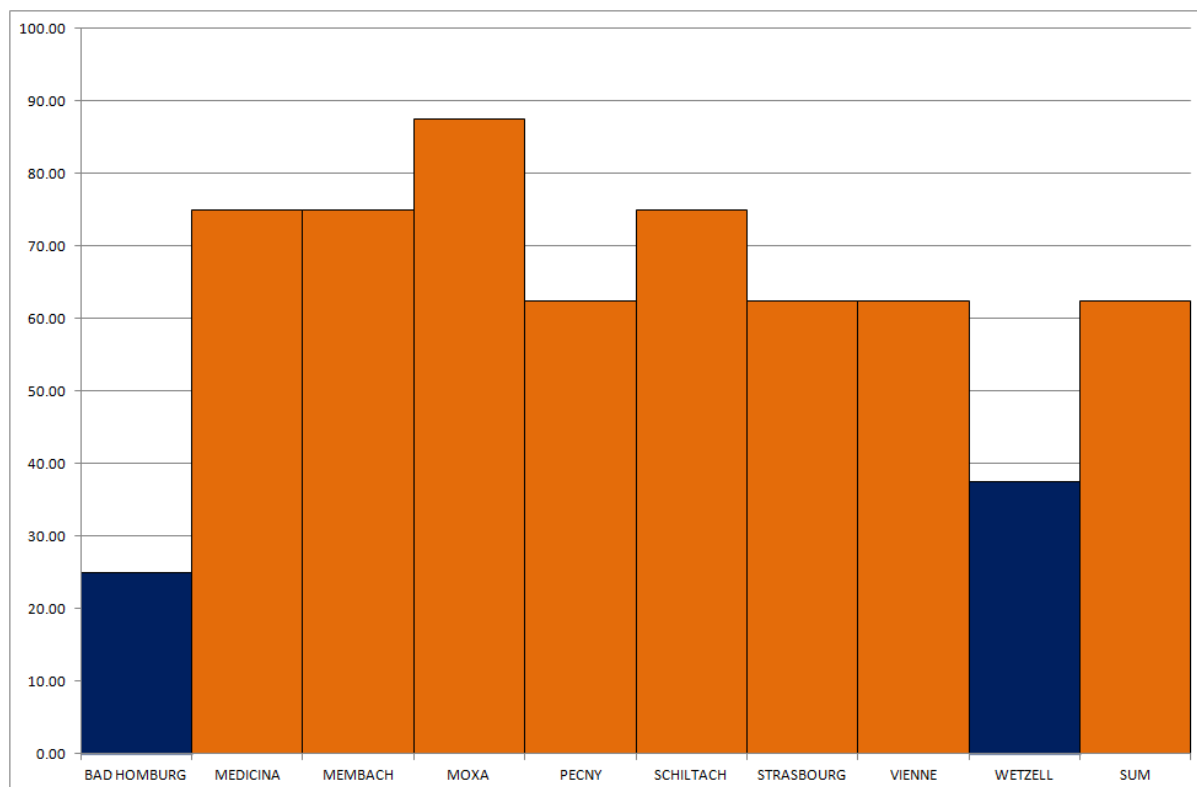


Рис.3.3.1. Количество волн в % (из 8) по 9 избранным станциям, для которых результаты *ATLANTIDA3.1\_2014* ближе к наблюдениям, чем результаты *DDW/NH*.

При анализе по 14 станциям, результаты, полученные по дельта-факторам из настоящей работы, оказались ближе к наблюдениям, нежели результаты, полученные по модели *DDW/NH*, в большей степени для полусуточных (73%), нежели суточных (43%) волн. Амплитуды наших разностных векторов оказались меньше (т.е. результаты ближе к наблюдениям) в 13 и 12 случаях из 14 (92.9% и 85.7%) для волн *S2* и *K2*, в 11 случаях (78.6%) для волны *O1* и в 10 случаях (71.4%) для волны *M2*. Наихудшие результаты (2 и 3 из 14, или 14.3% и 21.4%) получились для суточных волн *Q1* и *K1*. При этом, помимо волны *O1*, ближе к наблюдениям оказались наши расчеты по суточной волне *P1*. Здесь успех сопутствует нашей модели в 57.1% случаев. При анализе по указанным выше 9 избранным европейским станциям наши результаты по полусуточным волнам оказываются лучше расчетов по *DDW/NH* в 83.3% случаев, а по суточным – всего в 41.7%. Наилучшие результаты получают по волнам *K2* и *S2* (100%), а также *O1* (88.9%) и *M2* (77.8%). Хуже всего, по-прежнему, выглядит сравнение для волн *Q1* и *K1* (0% и 11%), при том, что по волне *P1* мы достигаем 66.7%. Последние результаты показаны на рис. 3.3.2.

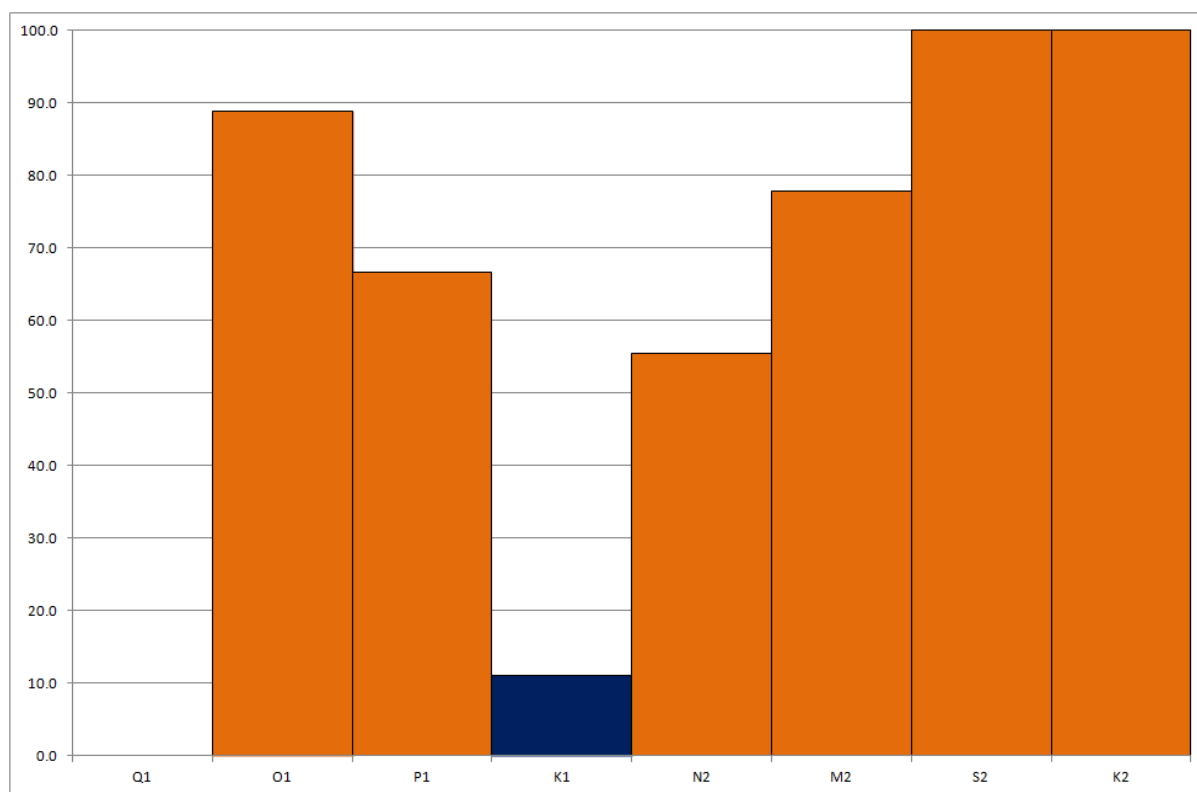


Рис. 3.3.2. Количество станций в % (из 9), для которых результаты *ATLANTIDA3.1\_2014* ближе к наблюдениям, чем результаты *DDW/NH*, по каждой из 8 волн.

В 64.2% случаев (9 станций из 14) оказалась ближе к наблюдениям вычисленная по нашей модели сумма амплитуд разностных векторов по 8 волнам. По 9 избранным станциям этот показатель составляет 88.9% (8 из 9).

Наибольший выигрыш достигается на станции Canbetta. Здесь наша сумма по восьми волнам ближе к наблюдениям, нежели сумма, рассчитанная по *DDW/NH*, на  $0.79 \text{ нм}/c^2$ . Несколько скромнее выглядят соответствующие результаты по пунктам Medicina, Моха и Membach ( $0.28 - 0.32 \text{ нм}/c^2$ ). Хуже, чем по *DDW/NH*, результаты по станциям Bad Homburg ( $-0.18 \text{ нм}/c^2$ ), Cantley ( $-0.50 \text{ нм}/c^2$ ), Kamioka ( $-0.13 \text{ нм}/c^2$ ), Metsahovi ( $-0.01 \text{ нм}/c^2$ ) и Sutherland ( $-0.13 \text{ нм}/c^2$ ). Впрочем, в трех случаях из пяти проигрыш нашей модели здесь скорее символический. Если сложить суммы амплитуд разностных векторов по 8 волнам и по всем 14 станциям, то результаты нашей модели оказываются ближе к наблюдениям на  $1.43 \text{ нм}/c^2$ , т.е. в среднем по  $0.10 \text{ нм}/c^2$  на станцию (рис. 3.3.3.). Аналогичная сумма по 9 избранным станциям чуть меньше. Она составляет  $1.40 \text{ нм}/c^2$  (по  $0.16 \text{ нм}/c^2$  на станцию).

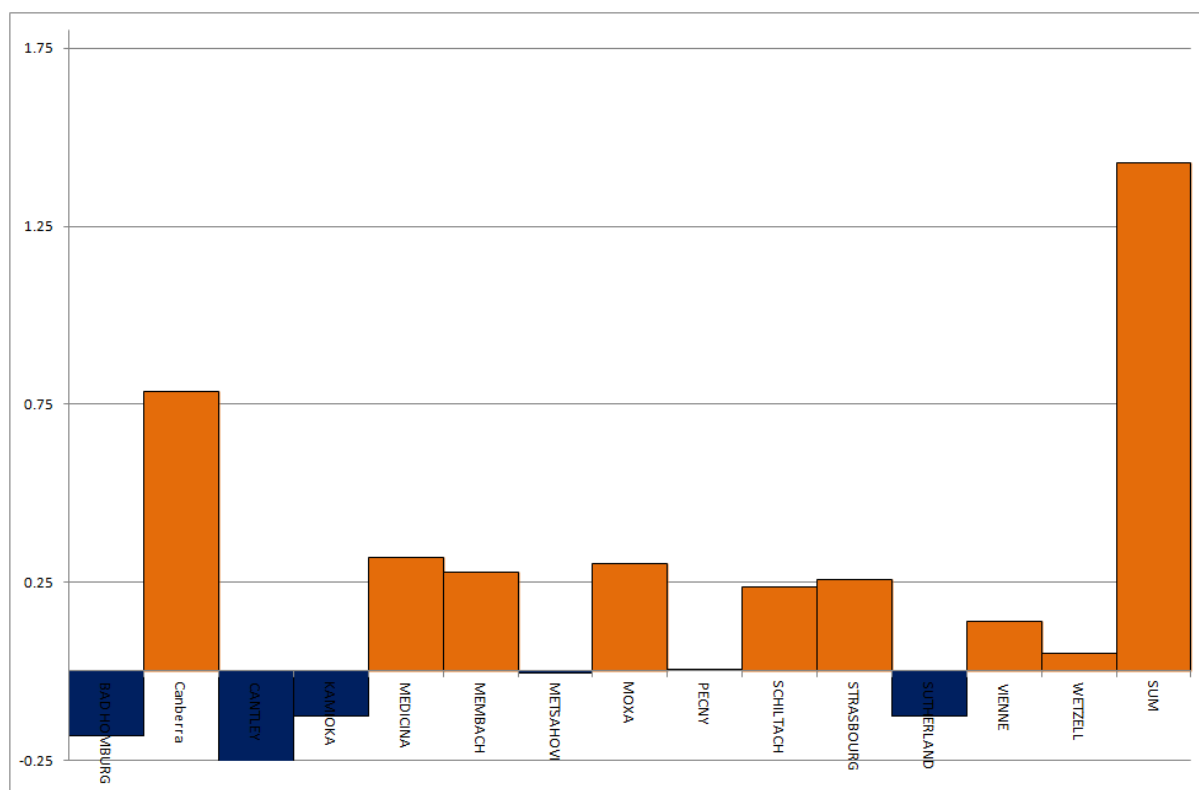


Рис. 3.3.3. Разность сумм амплитуд разностных векторов ( $\text{нм}/c^2$ ) по 8 волнам (*DDW/NH* минус *ATLANTIDA3.1\_2014*). 14 станций.

В таблице 3.3.2 приведены отношения амплитуд суммы разностных векторов по 14 и 9 станциям к соответствующим модулям сумм приливных векторов.

Таблица 3.3.2. Отношение амплитуд суммы разностных векторов по 14 и 9 станциям к модулям сумм приливных векторов в % (*PREDICT*, осреднение по 9 океаническим моделям).

Волны	Q1	O1	P1	K1	N2	M2	S2	K2
14 станций	0.08	0.05	0.02	0.10	0.05	0.06	0.50	0.20
9 станций	0.09	0.07	0.08	0.11	0.06	0.05	0.44	0.16

Из сравнения табл. 3.1.6 и 3.3.2 следует, что по указанному критерию по 14 станциям результаты *DDW/NH* уступают результатам нашей программы *ATLANTIDA3.1\_2014* по 4 волнам из 8. По волне *O1* наши результаты ближе к наблюдениям в пять раз, а по волне *M2* – в 1.75 раза. *ATLANTIDA* немного уступает *DDW/NH* по волнам *Q1*, *K1* и *N2*. При переходе к 9 станциям *ATLANTIDA* хуже *DDW/NH* лишь по двум волнам. Это волны *Q1* и *K1*. В то же время, заметен выигрыш наших результатов по волне *O1* (почти в 3.5 раза). В 1.7 раза ближе к наблюдениям значения, полученные при помощи *ATLANTIDA3.1\_2014*, для волны *M2*.

Таким образом, в среднем, результаты, полученные в настоящей работе с применением амплитудных факторов нашей модели, по различным критериям лежат ближе к наблюдениям, нежели полученные при помощи модели *DDW/NH*.

### 3.4. ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ ПРИ РАСЧЕТЕ ОКЕАНИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА НА РЕЗУЛЬТАТЫ СРАВНЕНИЯ ПРОГНОЗНЫХ И НАБЛЮДАЕМЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Для анализа вклада диссипации, а также относительных и кориолисовых ускорений при расчете океанического гравиметрического эффекта в степень близости прогнозных и наблюдаемых значений были рассчитаны амплитуды разностных векторов (прогноз минус наблюдения) для океанической модели *FES2012* без диссипации, а также относительных и кориолисовых ускорений, и модели строения Земли *IASP91*. При этом диссипация и указанные ускорения не учитывались только в нагрузочных дельта-факторах, т.е. только при расчете океанического эффекта. Роль относительных и кориолисовых ускорений, как мы увидим в разделе 3.8, достаточно мала, поэтому речь здесь идет в основном о роли диссипации. Результаты расчетов сведены в табл. 3.4.1. Из сравнения табл. 3.4.1 и табл. 3.1.4, в которой представлены результаты по океанической модели *FES2012* с учетом диссипации, следует, что различия приведенных в этих таблицах значений достаточно малы, поэтому дальнейший анализ, как и в предыдущих разделах, будет носить в большей степени статистический характер.

Таблица 3.4.1. Амплитуды разностных векторов ( $nm/c^2$ ). Прогноз *ATLANTIDA3.1\_2014* (*IASP91*, *FES2012*) минус наблюдения. Без учета диссипации для океанического эффекта.

	Q1	O1	P1	K1	N2	M2	S2	K2
BAD HOMBURG	0.13	0.14	0.12	0.75	0.07	0.16	0.68	0.05
CANBERRA	0.10	1.37	0.47	1.63	0.23	2.50	2.79	0.71
CANTLEY	0.20	0.91	0.59	1.86	0.28	0.75	1.47	0.15
KAMIOKA	0.20	0.38	0.49	1.02	0.23	0.50	1.87	0.19
MEDICINA	0.07	0.21	0.18	0.53	0.06	0.28	1.13	0.05
MEMBACH	0.07	0.20	0.23	0.45	0.02	0.30	0.80	0.12
METSAHOVI	0.22	1.09	0.81	1.63	0.11	0.46	0.26	0.04
MOXA	0.05	0.31	0.19	0.56	0.10	0.44	0.73	0.10
PECNY	0.10	0.07	0.07	0.76	0.05	0.10	0.66	0.07
SCHILTACH	0.13	0.08	0.07	0.53	0.20	0.07	0.83	0.11
STRASBOURG	0.06	0.14	0.15	0.54	0.04	0.17	0.81	0.07
SUTHERLAND	0.11	0.71	0.69	1.24	0.22	1.01	0.83	0.19
VIENNE	0.08	0.02	0.09	0.68	0.04	0.05	0.68	0.02
WETZELL	0.07	0.03	0.05	0.61	0.06	0.14	0.71	0.04

О степени различия амплитуд разностных векторов, представленных в табл. 3.4.1 и 3.1.4, можно судить по данным таблицы 3.4.2, в которой представлены разности

значений предыдущих двух таблиц. Значения таблицы 3.4.2 (см. также рис. 3.4.1), как правило, лежат в пределах от тысячных до сотых долей  $нм/с^2$ . Положительные значения соответствуют лучшему совпадению с данными наблюдений варианта с диссипацией. Таких значений (по 14 станциям и 8 волнам) оказалось почти 44.6% (50 из 112). При анализе по указанным выше 9 избранным европейским станциям их доля возрастает до 50.0%. Наибольшее отрицательное значение по сумме 8 волн наблюдается в Cantley (по  $-0.1 нм/с^2$ ). Также в отрицательной зоне по восьми волнам оказались еще 8 станций. Отклонения здесь составляют от  $-0.01$  до  $-0.05 нм/с^2$ , являясь скорее символическими. По этим станциям введение диссипации в расчет океанического эффекта в целом по 8 волнам отдаляет результаты прогноза от наблюдений. Положительным и также символическим от  $+0.01$  до  $+0.05 нм/с^2$  эффект от введения диссипации оказался на станциях Canberra, Medicina, Membach и Metsahovi.

Таблица 3.4.2. Разность амплитуд разностных векторов ( $нм/с^2$ ) при расчете океанического эффекта без учета и с учетом диссипации. (Данные таблицы 3.4.1 минус данные таблицы 3.1.4).

	Q1	O1	P1	K1	N2	M2	S2	K2
BAD HOMBURG	0.001	0.004	-0.004	-0.010	-0.010	-0.044	0.008	0.004
CANBERRA	-0.006	0.016	0.003	0.001	-0.001	0.014	0.008	-0.002
CANTLEY	-0.003	-0.018	-0.004	-0.021	-0.006	-0.036	-0.008	-0.003
KAMIOKA	-0.008	0.047	0.011	-0.060	-0.006	-0.029	-0.009	0.000
MEDICINA	-0.002	-0.003	0.000	0.019	0.013	0.045	0.029	-0.001
MEMBACH	0.000	-0.009	0.001	-0.016	0.008	0.051	0.009	0.006
METSAHOVI	0.003	-0.006	-0.011	-0.011	0.001	-0.001	0.003	0.000
MOXA	0.000	-0.003	0.000	-0.009	0.002	0.008	0.008	0.003
PECNY	0.001	-0.002	-0.001	-0.006	0.002	-0.014	0.006	0.002
SCHILTACH	0.000	-0.003	-0.002	-0.011	-0.006	-0.019	0.013	0.004
STRASBOURG	0.000	-0.002	-0.002	-0.011	-0.011	0.002	0.013	0.005
SUTHERLAND	0.003	0.005	0.000	-0.004	-0.010	-0.057	0.025	-0.007
VIENNE	0.000	-0.006	-0.002	-0.008	-0.002	-0.019	0.006	0.002
WETZELL	0.000	-0.006	0.000	-0.009	-0.004	-0.026	0.007	0.002

Положительный эффект от введения диссипации суммарно по 14 станциям наблюдается только для волн  $S2$  ( $+0.12 нм/с^2$ ) и  $O1$  ( $+0.01 нм/с^2$ ), а наибольший отрицательный – для  $K1$  ( $-0.16 нм/с^2$ ) и  $M2$  ( $-0.13 нм/с^2$ ).

Общий баланс по 14 станциям и 8 волнам символически отрицателен ( $-0.18 нм/с^2$ ). Картина немного меняется при переходе к анализу 9 избранных станций по 8 волнам. Общий баланс здесь символически положителен и составляет  $+0.004 нм/с^2$ . При этом

по всем 9 станциям (100%) включение диссипации приближает прогноз к наблюдениям для волны  $S2$ . Практически та же картина наблюдается и для волны  $K2$ , за исключением небольшого отрицательного значения на станции Medicina. Для волны  $Q1$  подобное наблюдается в 7 случаях из 9 (77.8%), а для волн  $M2$  и  $N2$  – в 4 случаях (44.4%). Последнее иллюстрирует также рис. 3.4.2.

В целом, приведенные выше результаты показывают, что учет диссипации при расчете гравиметрического океанического эффекта символически удаляет данные прогноза от наблюдений. Однако, как мы увидим в разделе 3.8, это удаление компенсируется другими факторами, например, отказом при расчете океанического эффекта от введения массовой коррекции.

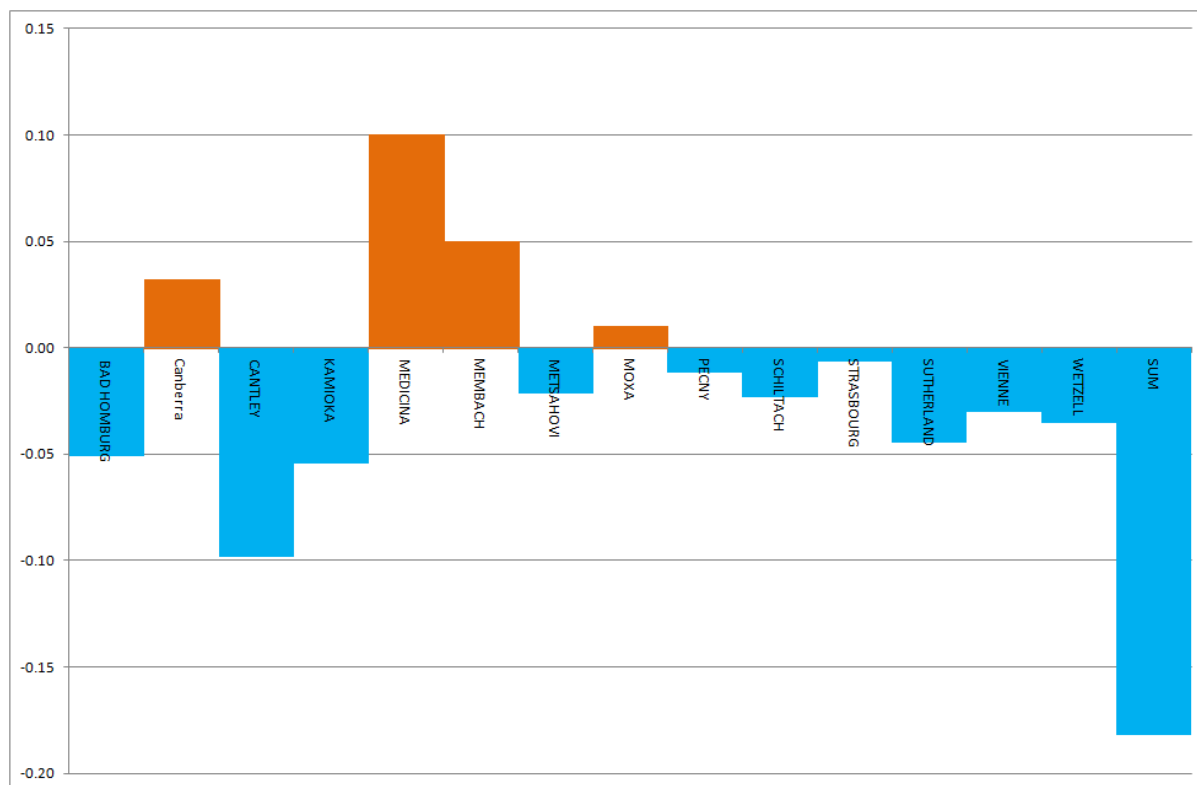


Рис. 3.4.1. Разность сумм амплитуд разностных векторов ( $\text{nm}/c^2$ ) по 8 волнам ( $FES2012$  без диссипации минус вариант с диссипацией). 14 станций.

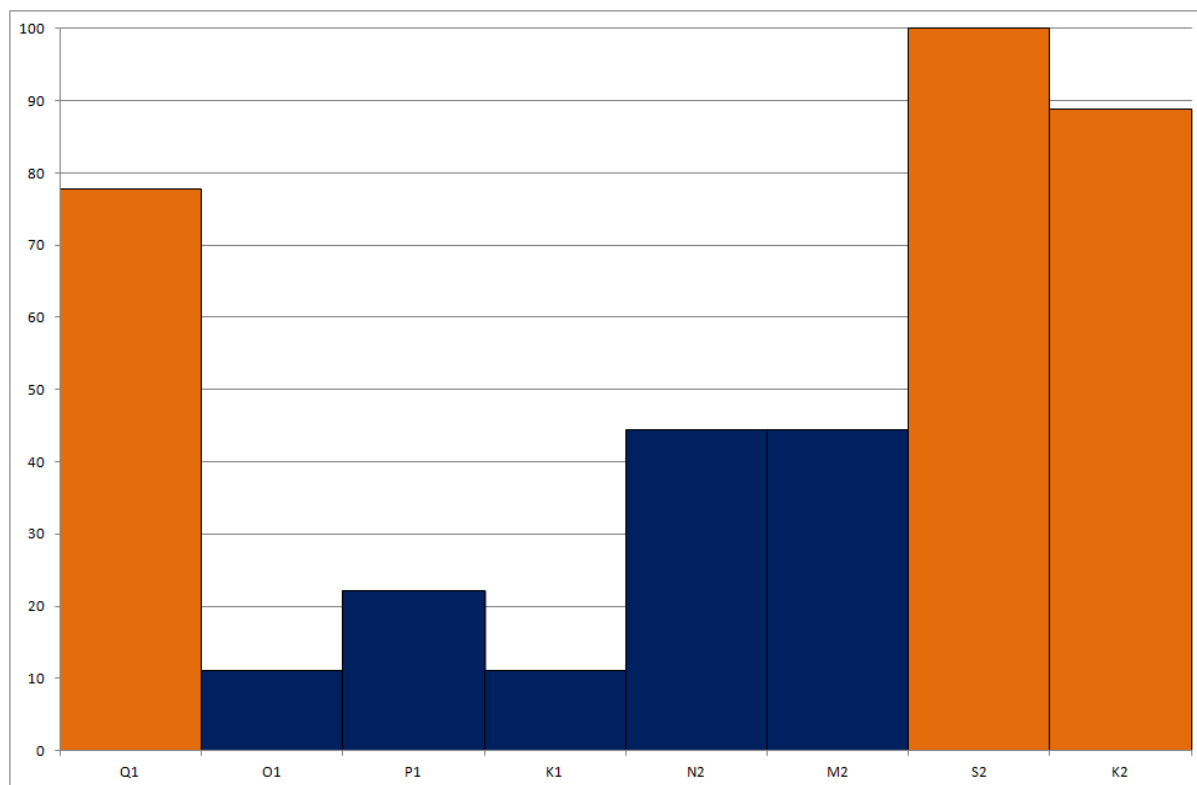


Рис. 3.4.2. Количество станций в % (из 9), для которых результаты расчета океанического эффекта с диссипацией ближе к наблюдениям, нежели результаты без диссипации, по каждой из 8 волн.



### 3.5. ВЫБОР МОДЕЛИ СТРОЕНИЯ ЗЕМЛИ

Для анализа степени влияния на результаты прогноза земных приливов выбора той или иной модели строения Земли были вычислены амплитуды разностных векторов (прогноз минус наблюдения) для модели строения Земли *PREM* и океанической приливной модели *FES2012*. Из полученных амплитуд были вычтены амплитуды разностных векторов, рассчитанные по модели *IASP91* (табл. 3.1.4) и той же океанической модели. Результаты сведены в таблицу 3.5.1. Подобно таблице 3.4.2, положительные значения в таблице 3.5.1 соответствуют лучшему совпадению с данными наблюдений варианта расчета для модели *IASP91*, а отрицательные – для модели *PREM*.

Таблица 3.5.1. Разность амплитуд разностных векторов ( $nm/c^2$ ) при расчете прогноза по модели строения Земли *PREM* и *IASP91* (океаническая модель *FES2012* с диссипацией).

	Q1	O1	P1	K1	N2	M2	S2	K2
BAD HOMBURG	0.03422	0.19955	0.04674	0.36003	0.03874	0.25843	-0.03856	-0.02905
Canberra	0.03572	-0.21701	-0.07988	-0.34169	-0.07055	-0.27025	-0.08247	-0.04320
CANTLEY	0.04333	0.22510	0.09809	0.45030	0.04739	0.29081	0.04690	0.01704
КАМЮКА	0.00989	-0.02070	-0.03721	0.45109	0.06655	0.08037	0.00990	-0.05041
MEDICINA	0.03234	-0.12792	-0.08320	0.29754	0.00268	-0.17686	-0.05803	-0.01922
MEMBACH	0.03303	-0.13269	-0.07031	0.25581	0.02486	-0.04072	-0.07253	-0.03060
METSAHOVI	0.03315	0.15961	0.05405	0.35632	0.02262	0.12792	-0.01465	-0.01172
МОХА	0.02894	-0.20054	-0.05710	0.13288	-0.03323	-0.13514	-0.07527	-0.02916
PECNY	0.03815	0.19676	0.09124	0.34430	-0.03106	0.16100	-0.04143	-0.02867
SCHILTACH	0.03277	0.03754	0.00927	0.30858	-0.00673	0.20017	-0.06184	-0.03407
STRASBOURG	0.03369	-0.06951	-0.04123	0.28115	0.03755	0.04375	-0.06542	-0.03142
SUTHERLAND	-0.00841	0.05038	0.03199	0.29653	0.06660	0.12330	-0.07950	0.05764
VIENNE	0.03242	0.16465	0.03895	0.33007	0.04528	0.21177	-0.02854	0.00307
WETZELL	0.03460	0.14620	0.09391	0.34661	0.04740	0.20855	-0.04459	-0.02499

Сумма всех значений таблицы 3.5.1 положительна и составляет  $+5.27 \text{ nm}/c^2$ . Это свидетельствует о том, что, в целом по 8 волнам и 14 станциям, модель *IASP91* дает результаты, более близкие к наблюдениям, нежели модель *PREM*. Также положительным ( $+3.34 \text{ nm}/c^2$ ) является баланс по 9 избранным станциям.

Модель *IASP91* по 14 станциям является наиболее предпочтительной для 6 волн из 8, кроме *S2* и *K2*. Ближе всего к наблюдениям, в сравнении с *PREM*, оказались результаты, полученные по модели *IASP91* для волн *Q1* и *K1* (на 13 станциях из 14 (92.9%)), *N2* и *M2* (на 10 станциях из 14 (71.4%)), а также *O1* и *P1* (на 8 станциях из 14

(57.1%)) (рис. 3.5.1). Суммы значений таблицы 3.5.1 по 14 станциям для волн  $Q1$ ,  $O1$ ,  $P1$ ,  $K1$ ,  $N2$  и  $M2$  составили: 0.41, 0.41, 0.10, 3.87, 0.26 и 1.08  $\text{нм}/\text{с}^2$ .

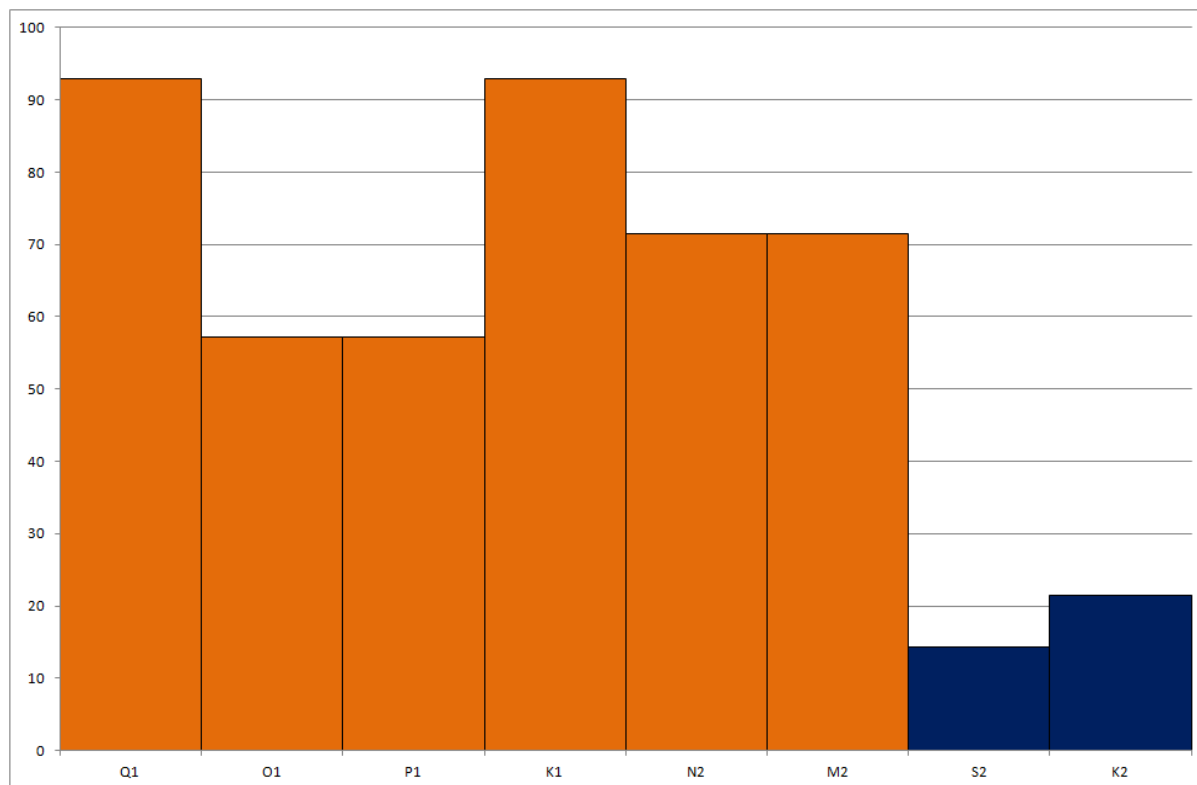


Рис. 3.5.1. Количество станций в % (из 14), для которых результаты прогноза для модели строения Земли *IASP91* ближе к наблюдениям, чем результаты для модели *PREM*, по каждой из 8 волн.

При анализе по 9 избранным станциям модель *IASP91* дает более близкие к наблюдениям результаты для тех же 6 волн ( $Q1$ ,  $O1$ ,  $P1$ ,  $K1$ ,  $N2$  и  $M2$ ) на 9 (100%), 5 (55.6%), 5 (55.6%), 9 (100%), 6 (66.7%) и 6 (66.7%) станциях соответственно. Таким образом, анализ по 9 станциям не приводит в данном случае к существенному улучшению.

Лишь на двух из 14 станций (Cantley и Kamioka) и ни на одной из 9 избранных модель *IASP91* выигрывает у *PREM* по волне  $S2$ . Успех *IASP91* для  $K2$  достигается только на станциях Cantley, Sutherland и Vienna.

В разрезе станций *IASP91* дает лучшие результаты, нежели *PREM*, на 10 станциях из 14 (см. также рис. 3.5.2). Наибольшие положительные суммы значений табл. 3.5.1 по 8 волнам наблюдаются на станциях Cantley (+1.22  $\text{нм}/\text{с}^2$ ), Bad Homburg (+0.87  $\text{нм}/\text{с}^2$ ), Metsahovi и Ресну (по +0.73  $\text{нм}/\text{с}^2$ ), а также Vienne (+0.80  $\text{нм}/\text{с}^2$ ) и Wetzell (+0.81  $\text{нм}/\text{с}^2$ ). При этом в Cantley *PREM* уступает *IASP91* по всем восьми волнам, а в Bad

Homburg, Metsahovi и Wetzell исключение составляют только волны  $S2$  и  $K2$ . В Southerland  $IASP91$  лучше  $PREM$  также для 6 волн из 8 (символические отрицательные значения только для волн  $Q1$  и  $S2$ ). Приблизительно равные положительные суммы по 8 волнам (+0.49 и +0.51) получились для станций Schiltach и Kamioka. Превосходство  $IASP91$  над  $PREM$  здесь достигается в основном за счет волн  $K1$  и  $M2$ . В символическом плюсе по сумме 8 волн станция Strasbourg (всего +0.19  $\text{нм}/\text{с}^2$ ). В то же время,  $IASP91$  явно уступает  $PREM$  на станции Canberra (-1.07  $\text{нм}/\text{с}^2$ ) по всем волнам, кроме  $Q1$ . Также отрицательный баланс по сумме восьми волн получен для станций Моха (-0.37  $\text{нм}/\text{с}^2$ ), Medicina (-0.13  $\text{нм}/\text{с}^2$ ) и Membach (-0.03  $\text{нм}/\text{с}^2$ ).

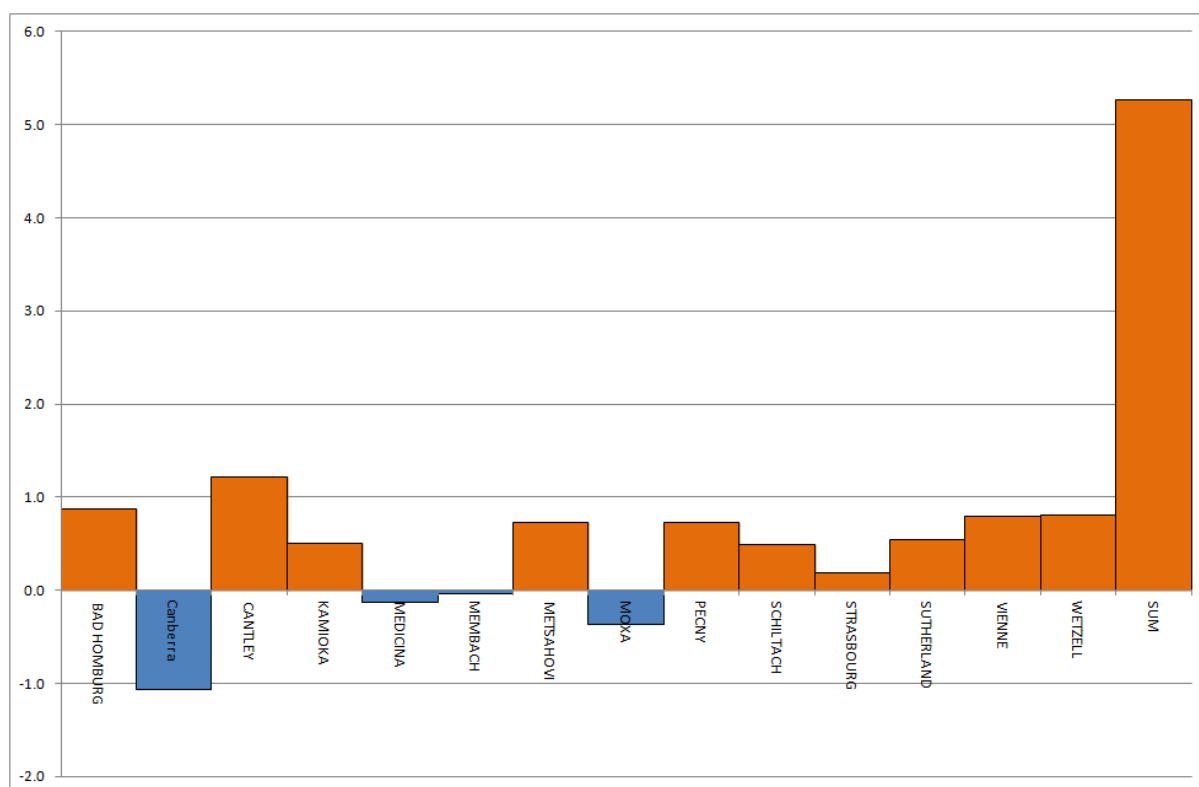


Рис. 3.5.2. Разность сумм амплитуд разностных векторов ( $\text{нм}/\text{с}^2$ ) по 8 волнам (вариант для  $PREM$  минус вариант для  $IASP91$ ). 14 станций.

Таким образом, по рассмотренным волнам и станциям модель строения Земли  $IASP91$  в большинстве случаев приводит к лучшим результатам в смысле близости прогноза к наблюдениям, нежели модель  $PREM$ . Тем не менее, результаты по волнам  $S2$  и  $K2$  носят пока обратный характер. Возможно, что картина здесь несколько изменится со временем с появлением более совершенных океанических моделей. Преимущество  $IASP91$  над  $PREM$  можно видеть также по данным табл. 3.8.1.

### 3.6. УЧЕТ МАССОВОЙ КОРРЕКЦИИ ПРИ РАСЧЕТЕ ОКЕАНИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

Как уже было отмечено выше, необходимость введения поправки за сохранение приливных масс при расчете океанического гравиметрического эффекта фактически связана с неизбежными неточностями приливных океанических моделей, которые приводят к отличию от нуля соответствующих интегралов, взятых по площади всей земной поверхности и отвечающих за сохранение массы. На языке сферических функций это означает отличие от нуля коэффициентов разложения прилива нулевой степени нулевого порядка  $A_{00}$ . В связи с этим, при введении данной поправки в вычисления, проводимые в настоящей работе при помощи программы *ATLANTIDA3.1\_2014*, указанные коэффициенты просто зануляются.

По умолчанию в нашей программе поправка за массовую коррекцию не вводится в связи с тем, что ее учет фактически является искажением исходных данных океанических моделей. Тем не менее, в данном разделе мы проанализируем вклад этой поправки с точки зрения близости получаемого с ней и без нее прогноза к данным наблюдений.

В табл. 3.6.1, аналогичной табл. 3.5.1 и 3.4.2, представлены разности амплитуд разностных векторов (прогноз минус наблюдения) при расчете прогноза с массовой коррекцией и без нее. Здесь положительные значения соответствуют преимуществу варианта без массовой коррекции, а отрицательные – наоборот. Общее количество положительных значений в таблице по 8 волнам и 14 станциям составляет 65.2% (73 случаев из 112), а при анализе по 9 избранным станциям – 76.4% (55 случаев из 72). Уже отсюда следует, что введение массовой коррекции вряд ли целесообразно.

По сумме 8 волн в отрицательной зоне находятся только 3 станции из 14. Это Kamioka ( $-0.57 \text{ нм/с}^2$ ), Metsahovi ( $-0.45 \text{ нм/с}^2$ ) и Canberra ( $-0.30 \text{ нм/с}^2$ ) (рис. 3.6.1). Для этих станций при введении массовой коррекции результаты по сумме 8 волн становятся ближе к наблюдениям. Однако для остальных 11 станций наблюдается обратная картина. Так, сумма значений табл. 3.6.1 по 8 волнам в Cantley составляет  $+0.70 \text{ нм/с}^2$ , а суммы на станциях Membach, Моха, Schiltach, Strasbourg, Vienne и Wetzell лежат в пределах  $+0.38 - +0.50 \text{ нм/с}^2$ , т.е. введение массовой коррекции для этих станций крайне нежелательно. На станциях Респу и Medicina положительный эффект по сумме 8 волн составляет  $+0.32$  и  $+0.27 \text{ нм/с}^2$ . Несколько меньше он на станциях Sutherland и Bad Houmburg ( $+0.17$  и  $+0.14 \text{ нм/с}^2$ ). Общая сумма всех 112

значений табл. 3.6.1 составляет  $+2.91 \text{ нм/с}^2$ , а аналогичная сумма значений по 8 волнам для 9 избранных станций достигает  $+3.34 \text{ нм/с}^2$ . При этом, преимущество отказа от ввода массовой коррекции наблюдается на всех этих станциях: в 1 случае по 7 волнам, а в оставшихся 8 случаях – по 6 волнам.

Таблица 3.6.1. Разность амплитуд разностных векторов ( $\text{нм/с}^2$ ) при расчете прогноза с массовой коррекцией и без нее.

	Q1	O1	P1	K1	N2	M2	S2	K2
BAD HOMBURG	-0.10672	0.07568	0.05043	-0.34595	0.05778	0.16414	0.17283	0.07330
Canberra	-0.06200	0.01296	-0.05630	-0.35276	0.07548	0.19850	-0.04021	-0.06504
CANTLEY	-0.02533	0.14187	0.24377	0.41793	-0.02748	0.10838	-0.12690	-0.03133
КАМИОКА	0.06761	-0.16972	-0.17080	-0.31401	-0.02650	0.12066	0.01284	-0.08820
MEDICINA	-0.02230	0.24045	0.26513	-0.47258	0.00706	0.03241	0.17161	0.04869
MEMBACH	-0.02197	0.23732	0.14388	-0.43918	0.07678	0.18451	0.16607	0.06294
METSAHOVI	-0.09784	-0.22721	-0.26597	-0.29651	0.00544	0.20041	0.15618	0.07553
MOXA	0.01990	0.20688	0.15263	-0.33313	0.05730	0.14048	0.16583	0.06123
PECNY	-0.04754	0.10451	0.14893	-0.41634	0.05842	0.22832	0.17258	0.07434
SCHILTACH	-0.09573	0.23378	0.18591	-0.42397	0.07648	0.22847	0.16790	0.06614
STRASBOURG	-0.00716	0.23361	0.14880	-0.46877	0.05970	0.20849	0.16675	0.06937
SUTHERLAND	0.06811	-0.07119	-0.06941	-0.04128	0.06592	0.17249	0.14425	-0.09604
VIENNE	-0.04294	0.22630	0.12964	-0.45363	0.03422	0.22867	0.16852	0.09031
WETZELL	-0.02923	0.21309	0.18855	-0.38446	0.03585	0.22339	0.17315	0.07566

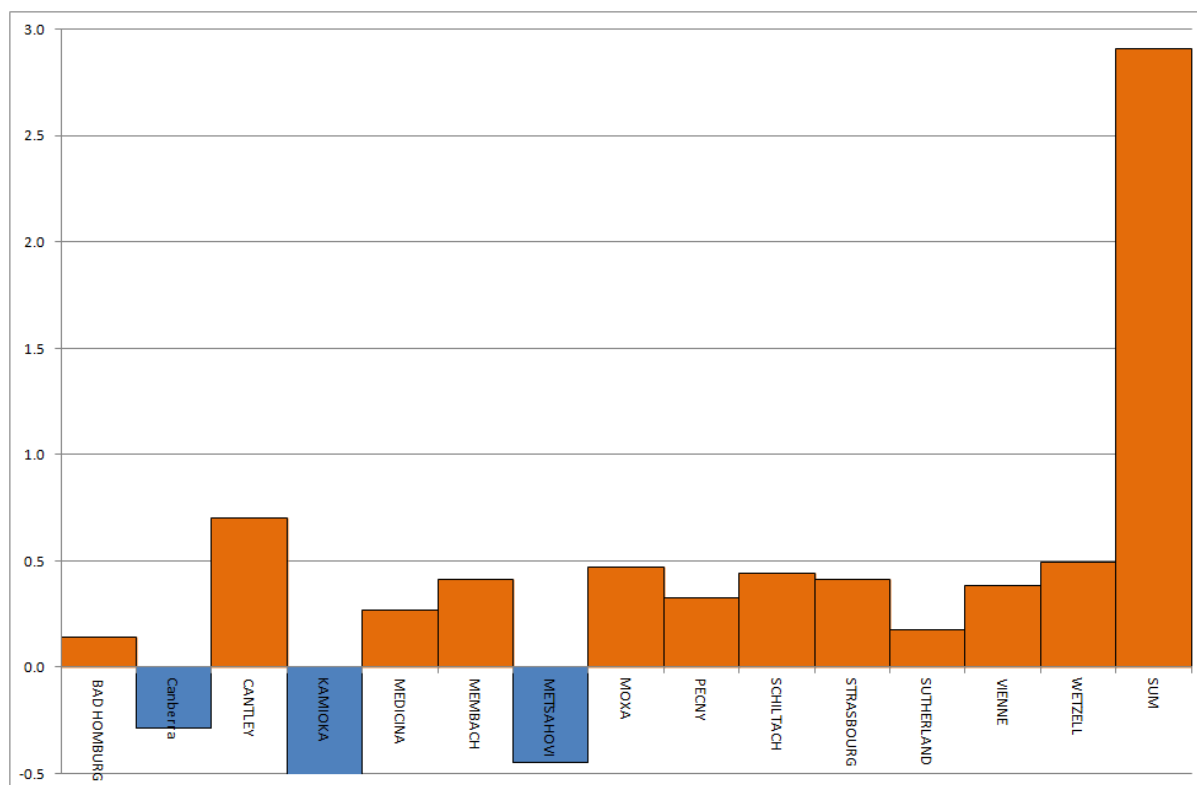


Рис. 3.6.1. Разность сумм амплитуд разностных векторов ( $\text{нм/с}^2$ ) по 8 волнам (вариант с массовой коррекцией минус вариант без нее). 14 станций.

Интересно, что на всех 14 станциях, кроме Cantley, эффект от ввода массовой коррекции дает положительный результат только для волны *K1*. В то же время, для волны *M2* на всех без исключения станциях ввод массовой коррекции удаляет результаты прогноза от наблюдений. Для волн *S2* и *N2* ввод массовой коррекции приводит к худшим результатам на 12 станциях из 14, для *O1* – на 11 и, наконец, для волн *P1* и *K2* – на 10 станциях (рис. 3.6.2).

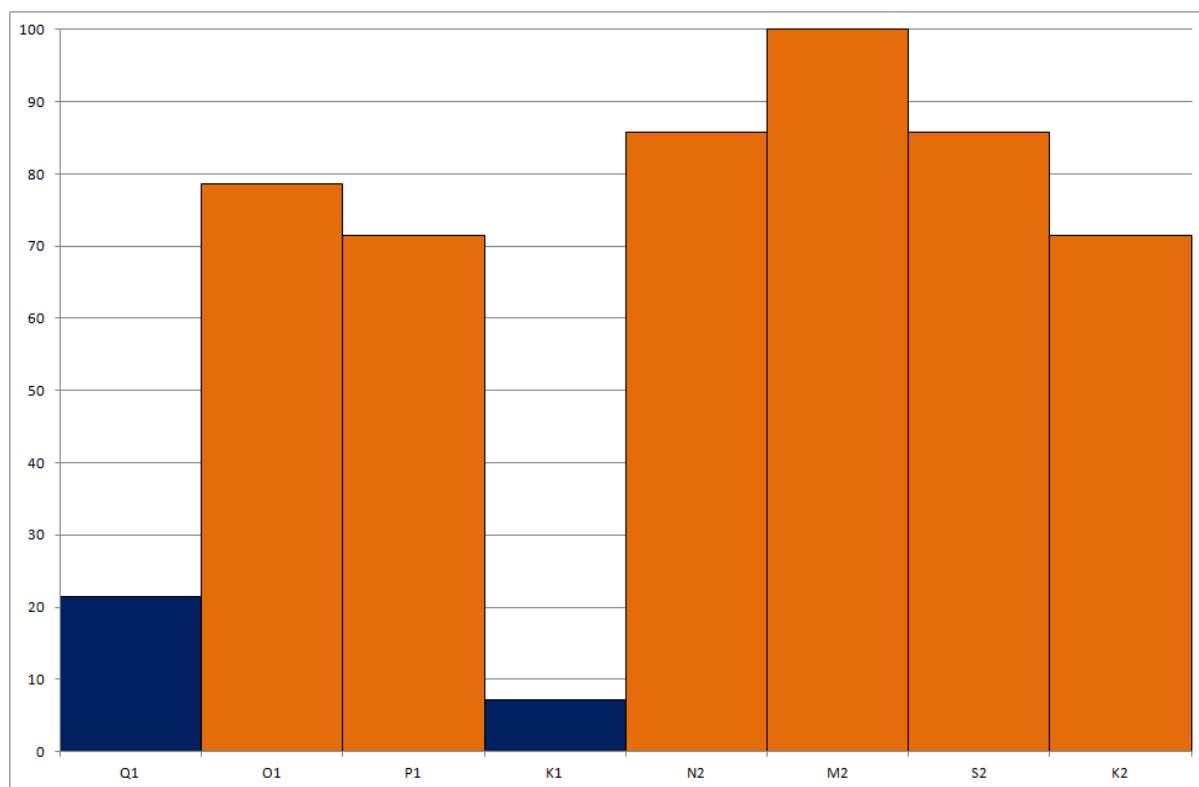


Рис. 3.6.2. Количество станций в % (из 14), для которых результаты прогноза без введения массовой коррекции ближе к наблюдениям, чем результаты с массовой коррекцией, по каждой из 8 волн.

Таким образом, учет массовой коррекции при расчете океанического гравиметрического эффекта удаляет данные прогноза параметров земных приливов от наблюдений в большей степени, чем такие ранее рассмотренные факторы, как отсутствие учета диссипации при расчете океанического эффекта или переход от модели строения Земли *IASP91* к модели *PREM*. В связи с этим, учет этого параметра при расчете прогнозных значений амплитудных дельта-факторов и сдвигов фаз, очевидно, нецелесообразен.

### 3.7. ЗАВИСИМОСТЬ ОКЕАНИЧЕСКОГО НАГРУЗОЧНОГО ЭФФЕКТА ОТ ШИРОТЫ

Как показали расчеты, проведенные при помощи программы *ATLANTIDA3.1\_2014*, зависимость нагрузочных чисел Лява от широты достаточно слабо сказывается на результатах вычисления океанического нагрузочного эффекта. Значимый вклад широтной зависимости был выявлен только для островов в открытом океане и зон с высокими градиентами амплитуд океанического эффекта. Так, на Канарских островах разность между амплитудами океанического эффекта для волны *M2*, рассчитанными с учетом и без учета широтной зависимости, достигает 0.15 мкГал, что составляет 0.2-0.25% амплитуды объемного прилива (порядка 60 мкГал) для этой волны в данном регионе земного шара (рис. 3.7.1).

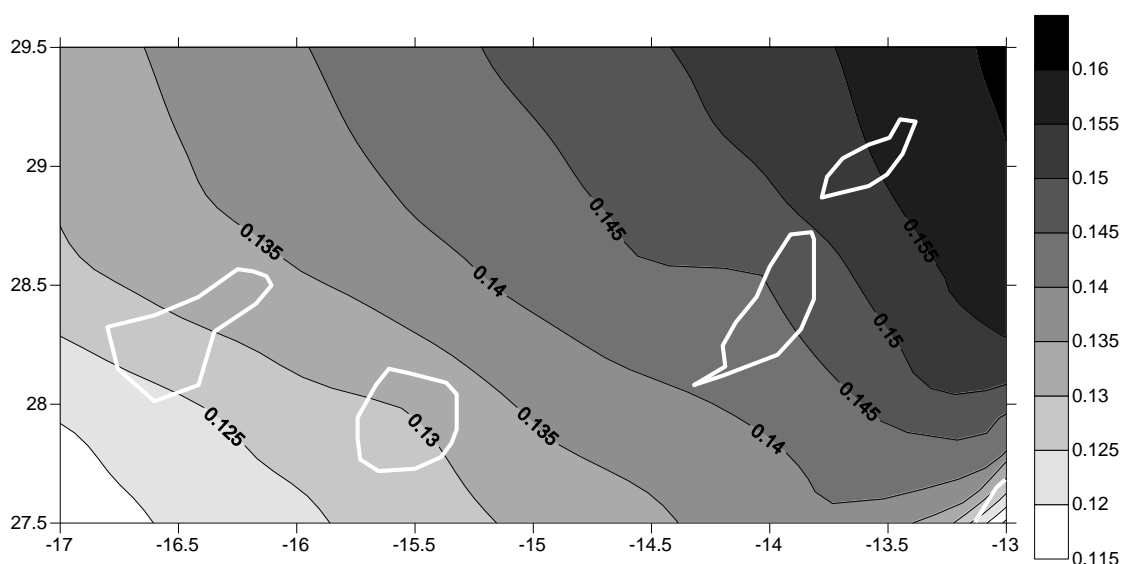


Рис. 3.7.1. Распределение амплитуды разностного вектора (с учетом широтной зависимости минус без учета ее) океанического эффекта волны *M2* (мкГал) в районе Канарских островов. (*ATLANTIDA3.1\_2014*, *IASP91*, *FES2012* с диссипацией).

Таким образом, учет зависимости от широты нагрузочных дельта-факторов способен привести к изменению прогнозных амплитудных дельта-факторов для прилива в упругой Земле с океаном в третьем-четвертом знаке после запятой лишь на очень ограниченных участках земной поверхности. На этих участках пока отсутствует высокоточная гравиметрическая аппаратура, поэтому решение вопроса о применимости широтной зависимости для нагрузочных дельта-факторов с точки зрения близости получаемых прогнозных результатов к наблюдениям является пока делом будущего. Пока же в программе *ATLANTIDA3.1\_2014* зависимость нагрузочных амплитудных дельта-факторов от широты задана по умолчанию.

### 3.8. КОМПЛЕКСНЫЙ УЧЕТ ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА ВЕЛИЧИНУ ОКЕАНИЧЕСКОГО ГРАВИМЕТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

О степени взаимной компенсации различных факторов, влияющих на величину океанического эффекта, равно как и важности учета каждого из них можно судить по данным табл. 3.8.1 и рис. 3.8.1. В качестве примера в табл. 3.8.1 и на рис. 3.8.1 приведены результаты расчетов разностных (прогноз минус наблюдения) векторов для волны  $M2$  в Вене.

В первом столбце табл. 3.8.1 даны номера позиций, соответствующие нумерации векторов на рис. 3.8.1. На рисунке нумерация начинается с третьей позиции, поскольку первые две из них не относятся к изменениям параметров расчета океанического эффекта, и соответствующие вектора имеют другой масштаб длины. Следующие три столбца конкретизируют параметры расчета объемного прилива, а именно: модель строения Земли, учет диссипации (Д) и широтной зависимости (Ш). Далее в 6 столбцах показаны факторы, принимаемые во внимание при определении океанического гравиметрического эффекта. Это опять же модель строения Земли, океаническая приливная модель, учет диссипации (Д), массовой коррекции (МК), широтной зависимости (Ш) и ближней зоны (БЗ). Затем в таблице приведены получаемые с учетом параметров, перечисленных в предыдущих столбцах, значения прогнозных амплитудных дельта-факторов  $\delta$  и сдвигов фаз волны  $M2$  в Вене для неупругой Земли с океаном, действительная и мнимая части суммарной (упругая Земля плюс океан) амплитуды прилива ( $CS$  и  $SS$ ), т.е. длины проекций векторов на оси абсцисс и ординат на рис. 3.8.1, и величина амплитуды разностного вектора  $A$  (прогноз минус наблюдения). Последний столбец таблицы содержит необходимые комментарии. Наблюдаемые значения амплитудного фактора и сдвига фаз в Вене приведены в последней строке таблицы. На рис. 3.8.1 наблюдаемое значение отнесено к началу координат. Применен анализ наблюдений в Вене на сверхпроводящем гравиметре *SUP-GWR C 025* в период с 02.08.1995 по 21.10.2007 (11.7 года).

Первая строка табл. 3.8.1 соответствует наиболее простой и ныне устаревшей схеме расчета, примененной, например, в различных версиях программ *LOAD* пакета *ETERNA* [Wenzel H.G., 1996] и распространенной вплоть до начала 2000-х годов.



Таблица 3.8.1. Основные составляющие океанического гравиметрического эффекта в Вене

N по рис.9	Объемный прилив			Океанический гравиметрический эффект						$\delta$	Фаза	CS, нГал	SS, нГал	A, нГал	Причина изменения амплитуды разностного вектора
	Модель Земли	Д	Ш	Модель Земли	Океанич. Модель	Д	МК	Ш	БЗ						
1	PREM	+	-	PREM	CSR3.0	-	+	-	+	1.17789	1.093	-185.542	7.245	<b>185.7</b>	
2	IASP91	+	-	PREM	CSR3.0	-	+	-	+	1.17856	1.093	-163.068	7.245	<b>163.2</b>	Переход при расчете обычных чисел Лява от PREM к IASP91
3	IASP91	+	+	PREM	CSR3.0	-	+	-	+	1.18225	1.089	-40.191	7.245	<b>40.8</b>	Расчет обычных чисел Лява с учетом их широтной зависимости
4	IASP91	+	+	PREM	CSR3.0	-	+	-	-	1.18235	1.095	-37.017	11.034	<b>38.6</b>	Отказ от ближней зоны при расчете океанического эффекта
5	IASP91	+	+	PREM	FES2012	-	+	-	-	1.18335	1.041	-2.872	-25.135	<b>25.3</b>	Переход от модели CSR3.0 к более современной FES2012
6	IASP91	+	+	PREM	FES2012	+	+	-	-	1.18327	1.036	-5.360	-28.474	<b>29.0</b>	Учет диссипации при расчете океанического эффекта
7	IASP91	+	+	IASP91	FES2012	+	+	-	-	1.18335	1.038	-2.827	-27.371	<b>27.5</b>	Переход от модели PREM к IASP91 при расчете нагрузочных чисел Лява
8	IASP91	+	+	IASP91	FES2012	+	-	-	-	1.18350	1.070	1.759	-4.930	<b>5.2</b>	Отказ от массовой коррекции при расчете океанического эффекта
9	IASP91	+	+	IASP91	FES2012	+	-	+	-	1.18338	1.068	-2.211	-6.525	<b>6.9</b>	Учет широтной зависимости при расчете нагрузочных чисел Лява
										1.18345	1.078	0.000	0.000	<b>0.0</b>	Наблюдения

**Условные обозначения:** Д – диссипация; Ш – зависимость от широты; МК – массовая коррекция; БЗ – ближняя зона;  $\delta$  – прогнозный амплитудный дельта-фактор; CS, SS - координаты точек по действительной и мнимой осям, A – амплитуда разностного вектора.

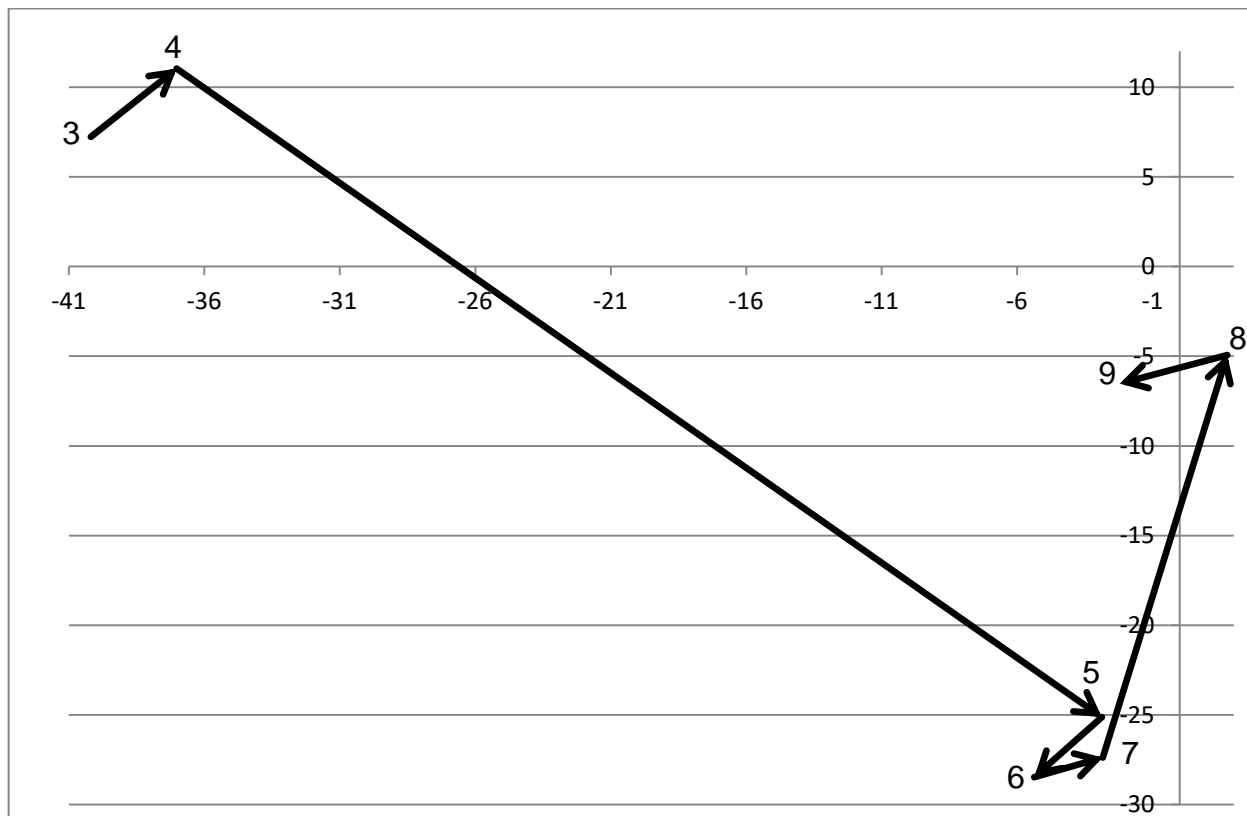


Рис. 3.8.1. Векторная диаграмма составляющих океанического гравиметрического эффекта. Волна M2, Вена (Австрия). Наблюдаемое значение соответствует началу координат. Шкалы осей в нГал. Нумерация точек соответствует таблице 1. Вектора: **3-4** – отказ от ближней зоны; **4-5** – переход от CSR3.0 к FES2012; **5-6** – учет диссипации; **6-7** – переход от PREM к IASP91; **7-8** – отказ от массовой коррекции; **8-9** – учет широтной зависимости нагрузочных чисел Лява.

В частности, в этой схеме при вычислении океанического гравиметрического эффекта применена модель строения Земли *PREM* и устаревшая океаническая приливная модель *CSR3.0* без учета диссипации и широтной зависимости, но с массовой коррекцией и ближней зоной (т.е. расчет производился не по разложению высоты прилива по сферическим функциям, а при помощи функций Грина). Объемный прилив определялся также по *PREM* и с учетом диссипации, но без учета широтной зависимости. Удаление получаемого таким образом прогноза от наблюдений характеризуется амплитудой разностного вектора, равной 185.7 нГал.

Применение при расчете обычных чисел Лява более современной модели строения Земли *IASP91* (вторая строка табл. 3.8.1) при прочих равных условиях приближает прогноз к наблюдениям на 22.5 нГал, и амплитуда разностного вектора становится равной 163.2 нГал.

Данные третьей строки табл. 3.8.1 отличаются от второй только учетом широтной зависимости (т.е. эллиптичности, вращения, относительных и кориолисовых ускорений) при расчете объемного прилива. Учет этой зависимости приводит к почти четырехкратному уменьшению амплитуды разностного вектора до 40.8 нГал (почти 4% от амплитуды океанического гравиметрического эффекта в Вене для волны M2, составляющей 1.0 мкГал). На рис. 3.8.1 данному варианту расчета соответствует точка 3. Несмотря на малость указанной остаточной амплитуды, соответствующее ей отклонение прогнозного дельта-фактора для упругой Земли с океаном (1.18225) от наблюдаемого (1.18345) составляет чуть больше единицы в третьем знаке, что почти на порядок превышает точность его определения по наблюдениям на сверхпроводящих гравиметрах.

Отказ от ближней зоны, т.е. переход к вычислению океанического эффекта при помощи разложения высоты прилива по сферическим функциям (без применения функций Грина), приближает прогноз к наблюдениям всего на 2 нГал (около 0.2% от амплитуды эффекта). Этот результат демонстрирует вектор 3-4 на рис. 3.8.1 и строки с соответствующими номерами в табл. 3.8.1. Амплитуда разностного вектора уменьшается до 38.6 нГал. Выигрыш здесь достигается за счет того, что еще до разложения котидальные карты модели *CSR3.0* подвергались интерполяции методом кригинга фактически до той же степени подробности, что и при введении ближней зоны. Таким образом, ближней зоной являлся весь земной шар. К сказанному стоит добавить, что, как уже было сказано выше, применение подхода, основанного на функциях Грина, становится крайне затруднительным с точки зрения времени

вычислений для океанических моделей высокого разрешения, таких как *FES2012*. В то же время, применение именно этой модели вместо *CSR3.0* приводит к наиболее ощутимому уменьшению разностного вектора сразу на 13 нГал (или 1.3% от амплитуды океанического эффекта в Вене). На рис. 3.8.1 и в табл. 3.8.1 этому переходу соответствует вектор 4-5. Амплитуда разностного вектора уменьшается сразу до 25.3 нГал. Затем она несколько повышается в результате учета диссипации при расчете океанического эффекта (вектор 5-6), а после снова незначительно падает после замены модели строения Земли *PREM* на *IASP91* при вычислении нагрузочных чисел Лява (вектор 6-7), достигая величины 27.5 нГал.

В дальнейшем, существенному уменьшению амплитуды разностного вектора до 5.2 нГал (вектор 7-8) способствует отказ от общепринятой поправки за сохранение океанических масс (массовой коррекции). Этот факт подтверждает высказывавшуюся ранее автором настоящей работы мысль о том, что введение массовой коррекции в некоторой степени искажает данные океанических моделей.

Учет при расчете нагрузочных чисел Лява обсуждаемых здесь факторов, связанных с широтной зависимостью (вектор 8-9), суммарно несколько удаляет прогноз от наблюдений, устанавливая окончательную величину разностного вектора в Вене на уровне 6.9 нГал, что составляет 0.7% от величины океанического гравиметрического эффекта в этом пункте или 0.02% от наблюдаемой амплитуды волны *M2*. Дальнейший прогресс здесь в основном связан как с совершенствованием океанических приливных моделей, так и с повышением точности рядов наблюдений и их анализа.

Из рис. 3.8.1 отчетливо видна значительная степень взаимной компенсации различных учитываемых при расчете океанического гравиметрического эффекта факторов. Так, вектора 3-4 и 5-6 (отказ от ближней зоны и учет диссипации), а также 6-7 и 8-9 (переход от *PREM* к *IASP91* и учет широтной зависимости) попарно почти коллинеарны, сравнимы по модулю и противоположно направлены. Также частично компенсируют друг друга вектора 4-5 и 7-8 (переход от *CSR3.0* к *FES2012* и отказ от массовой коррекции). К сказанному следует добавить, что входящие в вектор 8-9 поправки за относительные и кориолисовы ускорения также в значительной степени компенсируют друг друга. В общей сложности взаимная компенсация по всем векторам, имеющим отношение к уточнению океанического эффекта (позиции 3-9), составляет почти 54%.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ ГЛАВЫ 3

Основные результаты, обсуждаемые в разделах 3.1 и 3.2, сведены в итоговые таблицы 3.I, 3.II и 3.III. Из рассмотрения первых двух таблиц следует, что прогнозные значения амплитудных дельта-факторов и сдвигов фаз, полученных при помощи разработанной в настоящей работе теории, реализованной в виде прикладной программы *ATLANTIDA3.1\_2014*, в среднем по различным критериям почти в 70% случаев приводят к меньшим отклонениям от результатов измерений, нежели аналогичные значения, рассчитанные по широко известной программе *PREDICT* либо с применением совместно с океанической приливной моделью *FES2012* амплитудных дельта-факторов модели *DDW/NH*.

Таблица 3.I. Количество случаев (в %) по различным критериям, в которых расчеты по программе прогноза приливных параметров *ATLANTIDA3.1\_2014* (*IASP91*, *FES2012*) ближе к наблюдениям, чем расчеты по программе *PREDICT* (9 океанических моделей).

	14 станций	9 станций
<b>По количеству волн</b>		
Всех	64%	72%
Полусуточных	73%	86%
Суточных	55%	58%
<b>По сумме амплитуд разностных векторов</b>		
Всех	86%	100%
Полусуточных	86%	100%
Суточных	57%	67%

Таблица 3.II. Количество случаев (в %) по различным критериям, в которых прогноз приливных параметров по амплитудным дельта-факторам для Земли без океана модели [Spiridonov E.A., 2014] ближе к наблюдениям, чем прогноз по факторам модели *DDW/NH* [Dehant V. et al, 1999]. Океаническая приливная модель *FES2012*.

	14 станций	9 станций
<b>По количеству волн</b>		
Всех	58%	63%
Полусуточных	73%	83%
Суточных	43%	42%
<b>По сумме амплитуд разностных векторов</b>		
Всех	64%	89%
Полусуточных	75%	100%
Суточных	50%	50%

При сравнении как с программой *PREDICT*, так и моделью *DDW/NH*, наши результаты по различным критериям оказались гораздо ближе к наблюдениям по полусуточным волнам (от 73 до 100%), нежели суточным волнам (от 42 до 67%). При

этом результаты для полусуточных волн значительно улучшились при переходе от данных по всем 14 станциям к избранным 9 станциям, на которых результаты прогноза гораздо лучше совпадали с результатами наблюдений. Для суточных волн улучшение менее заметно.

В сводной таблице 3.III представлены отношения амплитуд суммы разностных векторов для каждой приливной волны по 9 избранным станциям к модулям сумм соответствующих приливных векторов в процентах. В первой строке таблицы показаны значения, вычисленные нашей программой *ATLANTIDA3.1\_2014* по модели строения Земли *IASP91* и океанической приливной модели *FES2012*. Во второй и третьей строках – те же значения, полученные программой *PREDICT* из известного пакета *ETERNA3.3*, при осреднении океанического эффекта по 9 приливным моделям, и, наконец, значения, вычисленные по модели *DDW/NH* и океанической модели *FES2012*.

Таблица 3.III Отношение амплитуд суммы разностных векторов по 9 станциям к модулям сумм приливных векторов в % (*IASP91*, *FES2012*, *ATLANTIDA3.1\_2014*).

Волны	Q1	O1	P1	K1	N2	M2	S2	K2
<i>ATLANTIDA</i>	0.12	0.02	0.05	0.12	0.05	0.03	0.43	0.13
<i>PREDICT</i>	0.09	0.06	0.07	0.11	0.05	0.11	0.55	0.39
<i>DDW/NH</i>	0.09	0.07	0.08	0.11	0.06	0.05	0.44	0.16

Из таблицы следует, что в среднем по всем 9 избранным станциям *GGP* применение модели строения Земли *IASP91* и глобальной приливной океанической модели *FES2012* приводит для волн *O1*, *P1*, *N2* и *M2* к совпадению изложенной в настоящей работе теории с наблюдениями в пределах первых сотых долей процента (первая строка таблицы). Наша программа *ATLANTIDA3.1\_2014* хуже *PREDICT* лишь по двум волнам (*Q1* и *K1*). В то же время, заметным становится выигрыш наших результатов по волне *M2* (почти в 3.7 раза). В три раза ближе к наблюдениям значения, полученные при помощи *ATLANTIDA3.1\_2014*, для волны *O1*. Из сравнения результатов *ATLANTIDA* и *DDW/NH*, следует, что полученная в настоящей работе модель расчета амплитудных дельта-факторов для Земли без океана уступает модели *DDW/NH* лишь по тем же двум волнам (*Q1* и *K1*). Заметен выигрыш наших результатов по волне *O1* (почти в 3.5 раза). В 1.7 раза ближе к наблюдениям, чем *DDW* значения, полученные при помощи *ATLANTIDA3.1\_2014*, для волны *M2*.

В целом, по результатам разделов 3.1 и 3.2 можно сделать следующие выводы:

- 1) Прогнозные значения амплитудных дельта-факторов и сдвигов фаз для Земли с океаном, получаемые при помощи разработанной в настоящей работе теории, реализованной в виде прикладной программы прогноза параметров земных приливов *ATLANTIDA3.1\_2014 (IASP91, FES2012)*, по различным критериям лучше соответствуют данным наблюдений сети сверхпроводящих гравиметров *GGP*, нежели соответствующие значения, рассчитанные программой *PREDICT*, при осреднении океанического эффекта по 9 моделям.
- 2) Данные программы *ATLANTIDA3.1\_2014* лежат ближе к наблюдениям как за счет применения более современной океанической приливной модели (*FES2012*), так и, очевидно, более точной модели расчета амплитудных дельта-факторов для Земли без океана.
- 3) Результаты прогноза оказались значимо ближе к результатам наблюдений на 9 из 14 рассмотренных станций *GGP*. Это станции: Bad Homburg, Medicina, Membach, Муха, Ресну, Schiltach, Strasbourg, Vienne и Wetzell. Все эти пункты являются европейскими.
- 4) При сравнении океанических приливных моделей, наилучшей, в смысле близости к результатам наблюдений, оказалась наиболее современная модель *FES2012*.

Из расчетов, проведенных в разделах 3.3 – 3.8 настоящей главы, получены следующие результаты:

Выяснено, что учет диссипации при расчете океанического гравиметрического эффекта скорее удаляет результаты прогноза земных приливов от наблюдений, нежели наоборот. Однако, это удаление компенсируется другими факторами (раздел 3.8).

При выборе модели строения Земли в целом существенно лучшие результаты дает модель строения Земли *IASP91*, однако модель *PREM* не уступает ей для волн *S2* и *K2*.

Совершенно очевидным является отсутствие необходимости введения при расчете океанического эффекта массовой коррекции. Ее введение ощутимо удаляет прогноз от данных наблюдений.

В разделе 3.8 показано, что отсутствие в схеме расчета океанического эффекта хотя бы одного из 11 значимых факторов может привести к значимому расхождению результатов прогноза земных приливов и данных наблюдений.

Необходимость учета зависимости нагрузочных чисел Лява и дельта-факторов от широты в настоящее время трудно подтвердить наблюдениями, поскольку эта зависимость значима лишь на очень ограниченной части земной поверхности (в зонах

больших градиентов океанического эффекта и на островах). В таких зонах пока нет высокоточного гравиметрической аппаратуры, а точный расчет гравиметрического океанического эффекта существенно затруднен и требует применения региональных приливных океанических моделей.

Таким образом, основные результаты, разделов 3.3 – 3.8 можно резюмировать следующим образом:

- 5) Подтверждены установки по умолчанию разработанной прикладной программы прогноза параметров земных приливов *ATLANTIDA3.1\_2014*, а именно: необходимость учета диссипации и отмены массовой коррекции при расчете океанического гравиметрического эффекта, а также применение модели строения Земли *IASP91*. Важную роль также играет учет влияния на результаты расчетов эллиптичности, вращения, относительных и кориолисовых ускорений Большая часть учитываемых факторов взаимно компенсирует друг друга. Доля такой взаимной компенсации достигает 54%. Таким образом, на результаты расчета океанического эффекта в первую очередь влияет вся совокупность факторов, а не каждый из них по отдельности. Корректный расчет океанического эффекта приводит к уменьшению амплитуд разностных (прогноз минус наблюдения) векторов почти на порядок.
- 6) Выяснено, что учет широтной зависимости нагрузочных дельта-факторов способен заметно сказываться на качестве прогноза приливных параметров лишь в очень ограниченных областях земной поверхности, в которых пока отсутствуют высокоточные средства наблюдений. Тем не менее, учет этой зависимости в программе также задается по умолчанию.

Наконец, из данных раздела 3.9 следует, что

- 7) Дальнейшая доработка и улучшение резонансной кривой способны уменьшить амплитуды разностных векторов для суточных волн, т.е. приблизить прогноз к наблюдениям, в среднем на 50%.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ РАБОТЫ

В результате численного интегрирования краевой задачи, описывающей состояние неупругой неоднородной сжимаемой гравитирующей эллипсоидальной вращающейся оболочки (мантии Земли), с достаточной для практических целей точностью вычислены: нагрузочные и обычные числа Лява, нагрузочные дельта-факторы, дельта-факторы для неупругой Земли без океана с учетом их широтной зависимости и прогнозные дельта-факторы и сдвиги фаз для неупругой Земли с океаном, а также нагрузочная и ньютоновская составляющие океанического гравиметрического эффекта.

Расчеты проводились по двум моделям строения Земли – *PREM* и *IASP91* с учетом диссипации, вращения, эллиптичности, а также относительных и кориолисовых ускорений. Это, в частности, позволило исследовать влияние на величину океанического эффекта локальных особенностей строения коры и верхней мантии, а также затухания приливных волн. Тестовые расчеты проводились по трем океаническим моделям: *CSR3.0*, *FES95.2* и модели Швидерского *SCW80*, а для сравнения результатов с данными наблюдений в основном применялась наиболее современная океаническая приливная модель *FES2012*, а также модели *CSR4.0*, *NAO99b* и некоторые другие.

При расчете океанического нагрузочного эффекта реализован метод разложения высоты прилива по сферическим функциям. Выписаны рекуррентные формулы для интегралов от полиномов и присоединенных полиномов Лежандра, рассмотрены вопросы учета массовой коррекции и введения поправки за высоту станции. В частности, показано, что ограничение порядка разложения высоты прилива по сферическим функциям до  $n = 720$  приводит вблизи береговой линии к относительной погрешности вычисления океанического эффекта в пределах 0.5 – 3% (0.01 – 0.02 мкГал). Разложение океанической приливной модели *FES2012* проводилось до 1120 порядка, что обеспечило относительную погрешность порядка 0.1 – 0.3%. Дальнейшее повышение порядка разложения, видимо, имеет смысл только при применении уточненных региональных океанических моделей и способно привести к изменениям величины океанического эффекта в пределах 0.1%. Эта величина в разы меньше суммарного вклада исследуемых в данной работе эффектов диссипации, локальных особенностей строения коры и верхней мантии, эллиптичности, вращения, относительных и кориолисовых ускорений.

Также при расчете океанического эффекта было уделено внимание альтернативному методу его вычисления, опирающемуся на применение функций Грина. Проведено сравнение результатов, полученных двумя методами. В итоге выяснено, что применение подхода, основанного на разложении высоты прилива по сферическим функциям, уточняет величину океанического нагрузочного эффекта в прибрежной зоне на 0.4 – 0.8 мкГал по волне  $M2$  и на 0.6 – 1.2 мкГал по сумме всех волн. Полученные разности нельзя объяснить различиями в значениях нагрузочных чисел Лява, полученных в настоящей работе, и этих же чисел, применяемых, например, в пакете *ETERNA3.30*, поскольку они приводят к разностям амплитуд исследуемого эффекта, не превышающим 0.01 мкГал и, как правило, лежащим в пределах 0.005 мкГал.

Различия чисел  $k$  и  $h$ , рассчитанных по двум моделям строения Земли (*PREM* и *IASP91*), достигают 10 и 15% соответственно для широкого диапазона порядков  $n$ . Таким образом, уточнение строения коры и верхней мантии, оцененное путем замены модели строения Земли с *PREM* на *IASP91*, способно скорректировать амплитуду океанического эффекта на 0.1 – 0.3 мкГал для волны  $M2$  и 0.2 – 0.6 мкГал по сумме восьми основных приливных волн.

Учет диссипации изменяет значения нагрузочных чисел Лява  $k$  и  $h$  максимально на 5.5 – 6.5% и 3.5 – 4% соответственно. Величина указанных изменений для модели *IASP91* на 2 – 2.5% меньше, чем для *PREM*. Вклад диссипации вблизи береговой линии составляет 0.1 – 0.3 мкГал для волны  $M2$  и не превышает 0.4 мкГал по сумме восьми волн.

В то же время, показано, что учетом точности современных гравиметрических наблюдений, при расчете океанического гравиметрического эффекта необходимо принимать во внимание следующую группу факторов: (1) выбор модели строения Земли, (2) выбор океанической приливной модели, в т.ч. региональной, (3) учет диссипации, (4) относительных и (5) кориолисовых ускорений, (6) эллиптичности Земли, (7) сил инерции, а также (8) сил, определяемых членами разложения геопотенциала до первого порядка по сжатию, (9) необходимость отказа от массовой коррекции и (10) методики, основанной на применении ближней зоны и функций Грина, и, наконец, (11) адекватный выбор шага интегрирования при вычислении нагрузочных чисел Лява высоких порядков.

Суммарный вклад всей совокупности факторов, учитываемых в настоящей работе при расчете океанического гравиметрического эффекта, в разы меньше приведенных выше разностей, обусловленных учетом диссипации, а также особенностей строения коры и верхней мантии Земли, взятых по отдельности. Очевидно, это связано с взаимной компенсацией указанных факторов. Доля такой компенсации превышает 50%. Так, в непосредственной близости от береговой линии амплитуда разностного вектора, как правило, не превышает 0.05–0.1 мкГал, что в относительной мере составляет 0.5–0.75%, достигая в Европе 1–2% в основном лишь вдоль берегов Ла-Манша. В целом, в Западной Европе вклад обсуждаемых факторов суммарно не превышает 0.01 мкГал, уменьшаясь в странах восточной Европы до 0.05 мкГал. Относительный вклад на большей части континента лежит в пределах 0.5–0.75% от амплитуды океанического эффекта.

В то же время, отсутствие в схеме расчета хотя бы одного из факторов, влияющих на результаты определения океанического гравиметрического эффекта, может привести к значимому расхождению результатов прогноза земных приливов и данных наблюдений.

Отдельное внимание было уделено неприливному океаническому эффекту. В частности, оказалось, что в различных зонах океана и в различные моменты времени с учетом 9-летнего среднего и прямого ньютоновского притяжения рассчитанный по данным *TOPEX/POSEIDON* неприливной океанический эффект не превышает 1–2 мкГал. Дополнительное уточнение местных особенностей строения коры и верхней мантии способно улучшить эту оценку в пределах  $\pm 0,1$  мкГал.

Из вычислений амплитудных дельта-факторов для неупругой Земли без океана и их широтной зависимости также следует, что применение более современной модели строения Земли *IASP91*, вместо *PREM*, увеличивает значения амплитудных дельта-факторов полусуточных волн на  $6.8 \cdot 10^{-4}$  (с 1.15771 до 1.15839). Учет эллиптичности и центробежных ускорений приводит к появлению слабой широтной зависимости и наибольшему повышению среднего (на широте  $45^\circ$ ) значения амплитудного фактора для *IASP91* до 1.16131, что на  $2.92 \cdot 10^{-3}$  больше значений для сферической невращающейся Земли. Еще на  $3.3 \cdot 10^{-4}$  амплитудный фактор возрастает после введения в рассмотрение относительных и кориолисовых ускорений, достигая для полусуточных волн своего окончательного значения 1.16164. При этом амплитудные дельта-факторы нарастают от экватора к полюсу на  $7.7 \cdot 10^{-4}$  для *PREM* и на  $7.9 \cdot 10^{-4}$  для *IASP91*.

Полученная в настоящей работе форма кривых, описывающих изменение амплитудных факторов для Земли без океана с широтой, одинакова для полусуточных и суточных волн. Это является следствием независимости полученных результатов от внешнего потенциала. Кривые для суточных волн лежат ниже кривых для полусуточных волн на  $4.24 \cdot 10^{-4}$  еще до применения резонансной кривой. Это связано с различиями при учете диссипации, а также относительных и кориолисовых ускорений. После введения резонанса, форма и положение широтных зависимостей полусуточных волн не совпадает с таковыми для моделей *DDW*, результаты которых зависят от внешнего потенциала. Рассчитанные зависимости амплитудных факторов полусуточных и суточных волн от широты расположены между таковыми для моделей *DDW/NH* и *DDW/H*. Улучшение методики расчета океанического гравиметрического эффекта и уточнение широтной зависимости амплитудных факторов для Земли без океана позволило создать современную систему прогноза параметров земных приливов, реализованную в виде прикладной программы *ATLANTIDA3.1\_2014*.

Сравнение результатов, полученных в настоящей работе при помощи программы *ATLANTIDA3.1\_2014*, с данными наблюдений на сети сверхпроводящих гравиметров *GGP* демонстрирует высокое качество прогноза.

В частности, удалось прийти к следующим выводам:

Прогнозные значения амплитудных дельта-факторов и сдвигов фаз, рассчитываемые программой *ATLANTIDA3.1\_2014* для модели строения Земли *IASP91* и океанической приливной модели *FES2012*, по различным критериям лучше соответствуют данным наблюдений, нежели соответствующие значения, рассчитанные программой *PREDICT* при осреднении океанического эффекта по 9 моделям. Данные программы *ATLANTIDA3.1\_2014* лежат ближе к наблюдениям как за счет применения более современной океанической приливной модели (*FES2012*), так и, очевидно, более точной модели расчета изменения амплитудных дельта-факторов для Земли без океана с широтой [Спирidonов Е.А., 2016b].

Результаты прогноза оказались значимо ближе к результатам наблюдений на 9 из 14 станций *GGP*. Это станции: Bad Homburg, Medicina, Membach, Мoxa, Ресну, Schiltach, Strasbourg, Vienne и Wetzell. Все эти станции расположены в Европе.

При сравнении океанических приливных моделей, наилучшей в смысле близости к результатам наблюдений оказалась наиболее современная модель *FES2012*.

При сравнении с данными наблюдений подтверждены установки по умолчанию программы прогноза приливных параметров *ATLANTIDA3.1\_2014*, а именно:

необходимость учета диссипации и отмены массовой коррекции при расчете океанического гравиметрического эффекта, а также применение модели строения Земли *IASP91*. Подтверждена необходимость привлечения при расчете океанического гравиметрического эффекта широкого спектра перечисленных выше факторов.

Дальнейшее улучшение качества моделирования земных приливов может быть достигнуто, в частности, за счет учета зависимости параметров Ламе и плотности от широты и долготы, а также введения обусловленного диссипацией сдвига фаз. Это способно увеличить точность определения амплитудных факторов в пределах 0.02–0.03%. Применение более совершенной резонансной кривой может уменьшить расхождение теории и наблюдений (амплитуды разностных векторов) для суточных волн в пределах 20–50%. Последнее особенно важно для волны *K1*. И, наконец, определенные надежды в этом направлении связаны с дальнейшим совершенствованием моделей строения Земли и изменения факторов добротности с глубиной, а также глобальных океанических приливных моделей совместно с применением региональных данных по высоте уровня моря и придонному давлению. Важную роль также будут играть данные повторных анализов более длинных и высокоточных рядов *SG*-наблюдений. Все это в совокупности способно довести точность теоретических разработок в исследуемой области до 0.01% уже в ближайшие 5 – 10 лет.

**Основные выводы всей работы** соответствуют защищаемым положениям:

1. Сформулирована новая постановка теоретической задачи расчета чисел Лява и амплитудных дельта-факторов приливных волн для вращающейся эллипсоидальной неупругой Земли без океана с учетом их широтной зависимости и осуществлено ее решение.

2. Разработана новая методика расчета океанического гравиметрического эффекта. Показано, что с учетом точности современных гравиметрических наблюдений, при расчете океанического гравиметрического эффекта необходимо принимать во внимание порядка 11 факторов. При этом степень взаимной компенсации этих факторов превышает 50%.

3. Наилучшие, в смысле близости теории к наблюдениям, результаты моделирования земных приливов для вращающейся эллипсоидальной неупругой Земли получены для модели строения Земли *IASP91* и одной из наиболее современных океанических приливных моделей *FES2012*. Амплитуды разностных (прогноз минус наблюдения) векторов на европейских *SG*-станциях сети *GGP* для волн *M2* и *O1* не превышают 0.05% от наблюдаемых амплитуд этих волн. В целом можно заключить,

что полученные в настоящей работе теоретические результаты с точки зрения близости их к наблюдениям не уступают наиболее известным аналогам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Авсюк Ю.Н.,  
Спиридонов Е.А. 2001 Приливная эволюция системы Земля-Луна и ее сопоставление с материалами исторической геологии фанерозоя. В сб. "Проблемы геологии континентов и океанов", Магадан, 2001 г., СС. 7-13.
- Буллен К.Е. 1978 Плотность Земли. М.:Мир, 1978.
- Виноградова О.Ю. 2012 Океанические приливные нагрузки у берегов Европы, рассчитанные по функциям Грина. //Физика Земли, №7-8, 2012, СС. 20-35.
- Виноградова О.Ю.,  
Спиридонов Е.А. 2012 Сравнительный анализ океанических поправок в ускорение силы тяжести, рассчитанных по моделям PREM и IASP91. //Физика Земли, №1-2, 2012, СС. 74–83.
- Виноградова О.Ю.,  
Спиридонов, Е.А. 2013 Сравнение двух методов расчета нагрузочных приливов. //Физика Земли, №1-2, 2013, СС. 88-97.
- Жарков В.Н.,  
Молоденский С.М. 1977 О поправках за динамический модуль сдвига для чисел Лява. //Иzv. АН СССР, сер. Физика Земли, № 5, СС.17-20.
- Молоденский М.С. 1953 Упругие приливы, свободная нутация и некоторые вопросы строения Земли. //Тр. Геофизического ин-та АН СССР, 1953, №19(146), СС. 3-52.

- |                                     |       |   |  |
|-------------------------------------|-------|---|--|
| Молоденский<br>М.С.,<br>Крамер М.В. | 1961a | Числа Лява для статических земных приливов 2-го и 3-го порядков.<br>Земные приливы и нутация Земли. | В сб. «Земные приливы и нутация Земли». – М.: изд-во АН СССР. 1961, с. 26.   |
| Молоденский<br>М.С.,<br>Крамер М.В. | 1961b | Теория нутации и суточных земных приливов.  | В сб. «Земные приливы и нутация Земли». – М.: изд-во АН СССР. 1961, СС. 3–25 |
| Молоденский<br>С.М.                 | 1977  | О влиянии горизонтальных неоднородностей мантии на амплитуды приливных волн.                        | //Физика Земли, №2, 1977, СС. 3-8.   |
| Молоденский<br>С.М.,<br>Крамер М.В. | 1980  | Влияние крупномасштабных горизонтальных неоднородностей мантии на земные приливы                    | //Физика Земли, №1, 1980, СС. 3-20.  |
| Молоденский<br>С.М.                 | 1984  | Приливы, нутация и внутреннее строение Земли.   | ИФЗ РАН, 1984, 215 с.  |
| Перцев Б.П.                         | 1966  | О влиянии морских приливов на приливные вариации силы тяжести.                                      | //Изв. АН СССР. Физика Земли. 1966. № 10. СС. 25–29.                         |
| Перцев Б.П.                         | 1967  | Оценка влияний морских приливов на земные в пунктах, удаленных от океанов.                          | Сб. «Земные приливы и внутреннее строение Земли», "Наука", 1967.             |
| Перцев Б.П.                         | 1976  | Влияние морских приливов ближних зон на земноприливные наблюдения.                                  | //Изв. АН СССР. Физика Земли. 1976. № 1. СС. 13–22                           |



- Перцев Б.П.,  
Иванова М.В. 1980 Расчет нагрузочных чисел Лява для земной модели 508 Гильберта и Дзивонского. В сб. «Изучение земных приливов». М.: Наука, 1980. СС. 42–47.
- Перцев Б.П.,  
Иванова М.В. 1981 Оценка влияния нагонных вод на значения силы тяжести и высоты земной поверхности в прибрежных районах. //Иzv. АН СССР. Физика Земли. 1981. № 1. СС. 87–91.
- Перцев Б.П.,  
Иванова М.В. 1994 Оценка точности вычисления приливных поправок. //Иzv. РАН. Физика Земли. 1994. № 5.
- Перцев Б.П. 2007 Приливные поправки к гравиметрическим измерениям. //Физика Земли. 2007. № 7. СС. 18–25.
- Спиридонов  
Е.А.,  
Акименко Я.В. 2003 Моделирование движения полюса по данным о моментах импульса атмосферы и океана. //Физика Земли. 2003. №11. СС. 64–73.
- Спиридонов  
Е.А.,  
Цуркис И.Я. 2006 Моделирование движения полюса Земли по данным об угловых моментах океана и атмосферы за 1980-2002 гг. //Физика Земли. 2006. №2. СС. 64-71.
- Спиридонов  
Е.А.,  
Цуркис И.Я. 2008 О периоде и добротности чандлеровского движения полюса. // Физика Земли. № 8. 2008. СС. 1–14.
- Спиридонов Е.,  
Виноградова О. 2013 Гравиметрический океанический нагрузочный эффект. Lamdert Acad. Publishing. 2013. 148 с.

- Спиридонов Е.А.,  
Виноградова О.Ю. 2014 Сравнение результатов расчета океанического гравиметрического эффекта с данными наблюдений. // Физика Земли. 2014. № 1. СС. 120–128.
- Спиридонов Е.А. 2014 Программа анализа данных земноприливных наблюдений ATLANTIDA3.1\_2014. //Наука и технологические разработки. 2014. Том 93, №3, СС. 3–48.
- Спиридонов Е.А.,  
Юшкин В.Д.,  
Храпенко О.А. 2014 Приливной анализ и экспериментальный океанический нагрузочный эффект в Мурманске. //Геодезия и Картография. 2014. №12, СС. 21-28.
- Спиридонов Е.А. 2015a Результаты сравнения прогнозных значений параметров земных приливов с данными наблюдений. //Сейсмические приборы. 2015. Т.51, №2, СС. 31-43.
- Спиридонов Е.А. 2015b О влиянии диссипации и выбора модели строения Земли на качество прогноза параметров земных приливов. //Сейсмические приборы. 2015, Т.51, №3, СС. 47-58.
- Спиридонов Е.А. 2015c Анализ данных земноприливных наблюдений на японской антарктической станции Syowa. //Проблемы Арктики и Антарктики. 2015, №3(105), СС. 27-38.
- Спиридонов Е.А. 2016a Поправки в числа Лява на относительные и кориолисовы ускорения и их зависимость от широты //Геофизические процессы и биосфера. 2016, Т.15, №1, СС. 73-81.

- Спиридонов Е.А. 2016b Амплитудные дельта-факторы второго порядка и их зависимость от широты. //Геология и геофизика. 2016, № 4. СС.796–807.
- Цуркис И.Я,  
Спиридонов Е.А. 2009 О применимости аппарата марковских процессов к описанию чандлеровского движения полюса. // Физика Земли. 2009. № 4. СС.3–16.
- Agnew D. C. 1996 SPOTL: Some programs for ocean-tide loading. //SIO Ref. Ser. 98-8, 35 pp., Scripps Inst. of Oceanogr., La Jolla, Calif., 1996.
- Agnew D. C. 1997 NLOADF: A program for computing ocean-tide loading. //J. Geophys. Res., 102, 5109– 5110, 1997.
- Anderson D.L.,  
Hart R.S. 1978 Q of the Earth. //J. geophys. Res., 83, B12, 5869-5882.
- Anderson D.L.,  
Minster J.B. 1979 The frequency dependence of Q in the Earth and implications for mantle rheology and Chandler wobble. //Geophys. J. R. Astron. Soc., 58, 431-440, 1979.
- Baker T. F.,  
Edge R. J.,  
Jeffries G. 1991 Tidal gravity and ocean tide loading in Europe. //Geophys. J. Int., 107: 1–11.
- Baker, T. F.,  
Bos, M. S. 2003 Validating Earth and ocean tide models using tidal gravity measurements. //Geophys. J. Int., 152: 468–485.

- Bos, M. S.,  
Baker T. F.,  
Røthing K.,  
Plag H.-P.                    2002    Testing ocean tide models in the Nordic seas with tidal gravity observations.    //Geophys. J. Int., 150: 687–694.
- Carrère L.,  
Lyard F.,  
Cancet M.,  
Guillot A.,  
Roblou L.                    2012    FES2012: A new global tidal model taking advantage of nearly 20 years of altimetry,    Proceedings of meeting "20 Years of Altimetry", Venice 2012.
- Dehant V.                    1986a    Earth models and Earth rotation.    in Proceedings of NATO Workshop on Earth Rotation: Solved and Unsolved Problems, Bonas, France, 1985, edited by A. Cazenave, D. Reidel, Norwell, Mass., pp. 269-275, 1986.
- Dehant V.                    1986b    Integration des equations aux deformations d'une Terre elliptique, inelastique, enrotation uniforme et noyau liquid.    Ph.D. thesis, 298 pp., Univ. Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, 1986.
- Dehant V.                    1987a    Body tides for an elliptical rotating Earth with an inelastic mantle.    in Proceedings of 10th Symposium on Earth tides, Madrid, Spain, 1985, edited by R. Vieira, pp.367-376, Cons. Super. de Invest. Cientif., Madrid, Spain, 1987.

- Dehant V., 1987b Integration of the gravitational motion equations for an elliptical uniformly rotating Earth with an inelastic mantle. //Phys. Earth planet. Inter., 49, 242-258.
- Dehant V. 1987c Tidal parameters for an inelastic Earth. //Phys. Earth planet. Inter., 49, 97-116.
- Dehant V., 1989 The effect of mantle inelasticity or tidal gravity: A comparison between the spherical and the elliptical Earth model. //Geophys. J., 97, 549-555, 1989.
- Dehant V., 1997 New transfer functions for nutations of a non-rigid Earth. //J. Geophys. Res., 102, 27, 659-688, 1997.
- Defraigne P. 1999 Tides for a convective Earth. //J. Geophys. Res., 104, 1035-1058
- Dehant V., Defraigne P., Wahr, J.M.
- Dziewonski A.M., 1975 Parametrically simple Earth models consistent with geophysical data. //Phys. Earth planet Inter., 10, 12-48.
- Hales A.L., Lapwood E.R.,
- Dziewonski A.M., 1981 Preliminary reference Earth model. //Physics of The Earth and Planetary Interiors, 25, 297-356.
- Anderson D.L.
- Eanes R., 1996 The CSR3.0 Global Ocean Tide Model: Diurnal and Semi-Diurnal Ocean Tides from TOPEX/POSEIDON Altimetry. CSR-TM-96-05, The University of Texas Center for Space Research.
- Bettadpur S.

- Egbert G. D.,  
Bennett A.F.,  
Foreman M.G.      1994      TOPEX/POSEIDON tides estimated using a global inverse model.      //J. geophys.Res., 99, 24821-24852.
- Egbert G. D.,  
Erofeeva S. Y.      2002      Efficient invers modelling of barotropic ocean tides.      //J. Atmos. Oceanic. Technol. 19 (2), 183-204.
- Farrell W.E.      1970      Gravity Tides.      Ph. D. dissertation. Univ. of California, San Diego.
- Farrell W.E.      1972      Deformation of the Earth by Surface Loads.      //Reviews of Geophysics and Space Physics, 10, 761-797.
- Francis O.,  
Dehant, V.      1987      Recomputation of the Green's functions for tidal loading estimations.      //BIM, N100, 1987, 6962-6986.
- Francis O.,  
Mazzega P.      1990      Global charts of ocean tide loading effects.      //J. Geophys. Res., 95, 11411-11424.
- Geissler W.H.,  
Kind R., Yuan X.      2008      Upper mantle and lithospheric heterogeneities in central and eastern Europe seen by teleseismic receiver functions.      //Geophys. J. Int., **174**, 351-376.
- Gegout P. et al.      2010      Practical Numerical Computation of Love Numbers and Applications.      WG1 and WG2 Workshop of the COST Action ES0701, 16-17 November 2010, Institute of Geodesy and Geophysics, Vienna.

- Gjevik B.,  
Straume T. 1989 Model simulations of the M2 and the K1 tide in the Nordic Seas and Arctic Ocean. //Tellus, 41A, 73-96.
- Gjevik B.,  
Nost E.,  
Straume T. 1994 Model simulations of the tides in the Barents Sea. //J. Geophys. Res. 99, 3337-3350.
- Inoe H., Fucao Y.,  
Tanabe K., Ogata  
Y. 1990 Whole mantle P-wave travel time tomography. //Phys. Earth Planet Inter., 59, 294-328.
- Jentzsch G. 1997 Earth Tides and Ocean Tidal Loading. in Tidal Phenomena, pp. 145-172, eds. Wilhelm, H., Zürn, W. & Wenzel, H.-G. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Kanamori H.,  
Anderson D.L. 1977 Importance of physical dispersion in surface wave and free oscillations problems: Review. //Rev. Geophys., 15, 105-122, 1977.
- Kennett B.L.N.,  
Engdahl E.R. 1991 Travel times for global earthquake location and phase identification. //Geophys. J. Int. (1991) 105, 429-465
- Kim Tae-Hee,  
Kazuo Shibuya,  
Koichiro Doi,  
Yuichi Aoyama,  
Hideaki  
Hayakawa. 2011 Validation of global ocean tide models using the superconducting gravimeter data at Syowa Station, Antarctica, and in situ tide gauge and bottom-pressure observations. //Elsevier, Polar Science 5 (2011), 21-39.

- Kowalik Z., Proshutinsky A.Y. 1993 Diurnal tides in the Arctic Ocean. //J. Geophys. Res., 98, 16449-16448.
- Kowalik Z., Proshutinsky A.Y. 1994 The Arctic ocean tides. in "The Polar Oceans", eds Johannessen, O.M., Muench, R.D. & Overland, J.E., Vol 85, Geophysical Monograph, American Geophysical Union.
- Larson A.M. 2004 S-wave velocity structure beneath the Kaapvaal Craton from surface-wave inversions compared with estimates from mantle xenoliths. Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Geosciences, p.70.
- Le Provost, C., Genco M., Lyard L., Vincent F., Canceil P. 1994 Spectroscopy of the world ocean tides from a finite-element hydrodynamic model. //J. Geophys. Res. 99, 24777-24797.
- Le Provost C., Lyard F., Molines J.M., Genco M.L., Rabilloud F. 1998 A hydrodynamic ocean tide model improved by assimilating a satellite altimeter-derived data set. //J. Geophys. Res., 103, 5513-5529.



- Le Provost 2001 Ocean tides, in Satellite Altimetry and Earth Sciences. eds. Fu, L.-L. & Cazenave, A., Academic Press, New York
- Lefevre F., 2000 FES98: a new global tide finite element //Geophys. Res. Lett., 27, 2717-2720.  
Lyard F.H.,  
Le Provost C. solution independent of altimetry.
- Lefevre F., 2002 FES99: a new global tide finite element //J.Atmos. Oceanic Technol., 19, 1345-1356.  
Lyard, F.H., solution assimilating tide gauge and altimetric information.  
Le Provost C.,  
Schrama E.J.O.
- Letellier T., 2004 The new global tidal solution. FES2004. Ocean Surface Topography Science Team Meeting, Saint Petersburg, FL.  
Lyard F.
- Liu H.P., 1976 Velocity dispersion due to inelasticity. //Geophys. J. R. Astron. Soc., 47, 41-58, 1976.  
Anderson D.L., Implications for seismology and mantle composition.  
Kanamori H.
- Longman I.A. 1963 Green's function for determining the deformation of the Earth under surface mass loads. //J. Geophys. Res., 68, N2.
- Love A.E.H., 1926 A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 643 pp., 4th ed., Dover, Mineola, N.Y., 1926.
- Mathews P.M., 1997 Tidal station displacements. //J. Geophys. Res., 102, 20, 469-477, 1997.  
Dehant V.,  
Gipson J.M.

- Matsumoto K., Takanezawa T., Ooe M. 2000 Ocean tide models developed by assimilating TOPEX/Poseidon altimeter data into hydrodynamical model: a global model and a regional model around Japan. //Oceanogr. 56, 567-581.
- Matsumoto K., Sato T., Takanezawa T., Ooe M. 2001 GOTIC2: a program for computation of oceanic tidal loading effect. //J. Geod. Soc. Jpn. 47, 243-248.
- Melchior P., De Becker M. 1983 A discussion of world wide measurements of tidal gravity respect to oceanic interactions, lithosphere heterogeneities. In: Earth's flattening and intertidal forces. //Phys. Earth Planet. Inter., 31, 27-53.
- Morelli A., Dziewonski A.M. 1989 Spherically symmetric P- and S-wave velocity models derived from ISC travel times. Abstracts 25th General Assembly IASPEI, Istanbul, Turkey.
- Na Sung-Ho, Baek J. 2011 Computation of the Load Love Number and the Load Green's function for an Elastic and Spherically Symmetric Earth. //Journal of the Korean Physical Society, Vol. 58, No. 5, pp. 1195-1205.
- Pagiatakis Spiros D. 1990 The response of a realistic Earth to ocean tide loading. //Geophys. J. Int., 103, 541-560.
- Pertsev B.P. 1970 The effect of ocean tides upon Earth-tide observations. //Communs Observ. Roy. Belgique, A9, 1970.

- Pertsev B.P. 1971 Estimation des Influences des Marees Oceaniques sur les Maree. //Marees Terrestres, Bulletin d'Information, pp. 3084-3099.
- Pertsev B.P. 1977 M2 ocean-tide corrections to tidal gravity observations in Western Europe. //Ann. Geophys. 1977. T. 33. pp. 63–65.
- Phinney R.A., Burridge R. 1973 Representation of the elastic-gravitational excitation of a spherical Earth model by generalized spherical harmonic. //Geophys. J. R. Astron. Soc., 34, 451-487, 1973.
- Ray R.D., 1999 A global ocean tide model from TOPEX/Poseidon altimetry: GOT99.2. NASA Tech. Memo. 209478.
- Revenaugh J.S., Jordan T.H. 1989 A study of mantle layering beneath the western Pacific. //J. Geophys. Res., 94, 5787-5813.
- Scherneck H. G. 1991 A parameterized Earth tide observation model and ocean tide loading effects for precise geodetic measurements. //Geophys. J. Int., 106, 677–695, 1991.
- Schueller K. 2015 Theoretical basis for Earth Tide analysis with the new ETERNA34-ANA-V4.0 program. //Bull. Inf. Marées Terrestres, Feb. 2015, №149, 12024-12061.
- Schwiderski E. W. 1980 Ocean tides, 1, global ocean tidal equations. //Mar. Geod., 3, 161-217.
- Spiridonov E. 2013 Oceanic Loading Effect for Gravity Prospecting. SPE Arctic and Extreme Environments Technical Conference and

- Exhibition, 15-17  
October, Moscow,  
Russia, 2013, Society of  
Petroleum Engineers,  
V.1, pp. 380-412.
- Spiridonov E.A. 2014 Tidal-Amplitude Delta-Factors and  
Their Dependence on Latitude. Geophysical Research  
Abstracts, 2014. V. 16,  
EGU2014-1296.
- Spiridonov E.A., 2014 The program for the oceanic  
Afanasyeva L.V. gravimetric effect computation  
(ATLANTIDA 3.0). Proc. of IAG Symposium  
on Terrestrial  
gravimetry: Static and  
mobile measurements  
(TG-SMM 2013). 17-20  
September 2013, Saint  
Petersburg. Concern  
CSRI Electropribor,  
2014, pp.158–166.
- Spiridonov E., 2015 ATLANTIDA3.1\_2014 for Windows:  
Vinogradova O., A Software for Tidal Prediction. //Bull. Inf. Marées  
Boyarskiy E., Terrestres, Feb. 2015,  
Afanasyeva L. №149, pp. 12062-12082.
- Smith M.L., 1974 The scalar equations of infinitesimal  
elastic gravitational motion for a  
rotating, slightly elliptical Earth. //Geophys. J. R. Astron.  
Soc., 37, 491-526, 1974.
- Toy K. 1989a Tomographic analysis of ISC travel  
time data for Earth structure. PhD Thesis, University  
of California, San Diego.

- Toy K. 1989b P- and S-wave lower-mantle and core seismic velocity models and station corrections from ISC travel time data. Abstracts 25th General Assembly IASPEI, Istanbul, Turkey.
- Van Camp M., Vanterin P. 2005 T-soft: graphical and interactive software for the analysis of the time series and Earth tides. //Computers and Geosciences, 31, 631-640.
- Vinogradova O. Yu., Spiridonov E.A. 2013 Some Features of TOPEX/POSEIDON Data. In 2 Application in Gravimetry, Z. Altamimi and X. Collilieux (eds.), Reference Frames for Applications in Geosciences, International Association of Geodesy Symposia 138, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013, pp.229-235.
- Wahr J.M. 1979 The tidal motions of a rotating, elliptical, elastic and oceanless Earth. Ph.D. thesis, 216 pp., Univ. Color., Boulder, 1979.
- Wahr J.M. 1981a A normal mode expansion for the forced response of rotating Earth. //Geophys. J. R. Astron. Soc., 64, 651-675, 1981.
- Wahr J.M. 1981b Body tides on an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth. //Geophys. J. R. astr. Soc., 64, 677-703.
- Wahr J.M. 1982 Computing tides, nutations and tidally-induced variations in the Earth's rotation rate for a rotating elliptical in Geodesy and Global Geodynamics; Lectures Delivered at the Third

- Earth. International Summer School in the Mountains, Frauenberg/Admont, Austria, August 30 to September 10, 1982, vol. 41, edited by H. Moritz and H. Stinkel, pp. 327-379, Mitteilu.
- Wahr J., 1986 The effect of mantle anelasticity on //Geophys. J. R. astr.  
Bergen Z. nutations, earth tides, and tidal Soc., 87, 633-668.  
variations in rotation rate.
- Wang R. 1991 Tidal deformations on a rotating, PhD Thesis, European  
spherically asymmetric, viscoelastic and University Studies,  
laterally heterogeneous Earth. Series SVII, Earth  
Sciences, vol. 5, Peter  
Lang, Frankfurt am  
Main, pp. 139.
- Wang R. 1994 Effect of rotation and ellipticity on //Geophys.J. Int., 117,  
Earth tide. 562-565, 1994.
- Wenzel H.G. 1996 The Nanogal Software: Earth Tide Data //Bull. D'Inf. Maree  
Processing Package Eterna3.30. Terr., 124, 9425-9439.
- Widmer R., 1991 Spherically symmetric attenuation //Geophys. J. Int., 104,  
Masters G., within the Earth from normal mode 541-553, 1991.  
Gilber F. data.
- Zschau J. 1977 Phase Shifts of Tidal Sea Load Proceedings of the 8th  
Deformations of the Earth's Surface due International Symposium

- to Low Viscosity Layers in the Interior. on Earth Tides, Bonn, Federal Republic of Germany, September 19-24. Springer Verlag.
- Zschau J. 1978 Tidal Friction and the Earth's Rotation : //Tidal Friction and the Loading Tides Versus Body Tides. Earth's Rotation. 1978, pp 62-94.
- Zschau J. 1983 Rheology of the Earth's mantle at tidal and Chandler wobble periods. in Proceedings of 9th International Symposium on Earth Tides, New York, 1981, Schweizerbart'sche, pp. 605-630, Stuttgart, Germany, 1983.
- Zschau J., Wang R. 1987 Imperfect elasticity in the Earth's mantle: Implications for Earth tides and long deformations. in Proceedings of 10th Int. Symposium on Earth Tides, Madrid, Spain, 1985, edited by R. Vieira, pp. 379-382, Cons. Super. de Invest. Cient., 1987.