

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ЗЕМЛИ ИМ. О. Ю. ШМИДТА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК



На правах рукописи

Ялаев Тагир Рустамович

**МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ
ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ И ТЕПЛОВЫХ СВОЙСТВ ПОРОД С
УЧЕТОМ ИХ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ И ФЛЮИДОНАСЫЩЕНИЯ**

Специальность 25.00.10

«Геофизика, геофизические методы поисков полезных ископаемых»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н.,

Баюк И.О.

Москва — 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Оглавление	2
Введение	5
Глава 1. Современное состояние теоретической базы прогноза эффективных физических свойств коллекторов углеводородов.....	13
1.2 Точные решения задачи определения эффективных свойств горных пород.....	14
1.3 Первая группа: инженерные подходы	17
1.4 Вторая группа: эмпирические подходы.....	20
1.5 Третья группа: нейронные сети.....	23
1.6 Четвертая группа: модели цифрового керна	24
1.7 Пятая группа: модели эффективных сред	26
1.8 Формула расчета эффективной теплопроводности, основанная на методе Т-матрицы	31
1.9 Экспериментальные методы определения теплопроводности.....	43
1.10 Выводы к главе 1	45
Глава 2. Моделирование физических свойств карбонатных и терригенных типов пород. Решение задачи флюидозамещения для теплопроводности	46
2.1 Основные принципы методики построения обобщенных моделей физических свойств пород	46
2.2 Уравнение связи тепловых и упругих свойств горных пород с параметрами ее структуры	48
2.3 Основные этапы построения математических моделей эффективных физических свойств пород, основанных на едином описании их микроструктуры	51

2.4	Описание коллекций и построение модельных сред	54
2.5	Определение параметров модели породы	57
2.6	Решение задачи флюидозамещения для теплопроводности на примере карбонатных и терригенных типов пород	59
2.7	Выводы к главе 2	69
Глава 3. Связь теплопроводности и упругих свойств на примере песчаника Бентхаймер..... 71		
3.1	Геологическо-физическое описание песчаника Бентхаймер	71
3.2	Измерения физических свойств и характеристик песчаника Бентхаймер при комнатной температуре и атмосферном давлении.....	72
3.3	Измерения физических свойств и характеристик песчаника Бентхаймер в условиях приложенной нагрузки.....	76
3.4	Моделирование физических свойств песчаника Бентхаймер	79
3.5	Параметрические исследования модели физических свойств песчаника Бентхаймер.....	82
3.6	Сравнение расчетных и экспериментальных данных в условиях комнатной температуры и атмосферного давления	85
3.7	Сравнение расчетных и экспериментальных данных в условиях приложенной осевой нагрузки образцов	89
3.8	Выводы к главе 3	91
Глава 4. Восстановление теплопроводности и упругих свойств горных пород по свойствам, определенных на их фрагментах..... 93		
4.1	Описание и свойства искусственных образцов и горных пород	93
4.2	Моделирование физических свойств искусственных образцов. Параметрические исследования	97

4.3 Решение обратной задачи по определению параметров модели физических свойств образцов композитного материала	104
4.4 Выводы к главе 4.....	113
Заключение	114
Список сокращений и условных обозначений.....	116
Список литературы	117
ПРИЛОЖЕНИЕ А	127
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	128

ВВЕДЕНИЕ

Согласно проекту «Энергетическая стратегия России на период до 2035 года» от 2016 года дальнейшее развитие технологий добычи нетрадиционных углеводородов будет оказывать наибольшее влияние на конъюнктуру мировых энергетических рынков. В Канаде современные технологии позволили уменьшить издержки производства нефти из битуминозных песчаников в 3,5 раза, что привело к увеличению объемов доказанных запасов нефти и битума до 23,9 млрд. т. В результате, в 2003 году Канада стала вторым государством после Саудовской Аравии по объемам доказанных запасов нефти и битума [Богданчиков, 2006]. Таким образом роль третичных методов нефтедобычи или методов увеличения нефтеотдачи (МУН) как методов, используемых при разработке месторождений нетрадиционных запасов нефти продолжает расти.

Существует 4 основных типа МУН: химические, газовые, микробиологические и тепловые. Для первого типа, как правило, используют поверхностно-активные вещества (ПАВ) или другие химические вещества для уменьшения сил, удерживающих нефть в порах [Han et al., 2013]. Для второго – углекислый газ или обогащенный природный газ для смешения его с нефтью, что облегчает его вытеснение из порового пространства. Для третьего – микроорганизмы для улучшения нефтевытесняющих свойств пород, очистки и неполного разложения нефти, а также удаления закупорок в проницаемых каналах [Donaldson et al., 1989]. В основе четвертого типа лежит тепловое воздействие на пласт, используемое для уменьшения вязкости нефти и/или для разложения ее тяжелых фракций до более легких [Robertson, 1988]. Отдельно выделяют метод плазменно-импульсного воздействия, который воздействует на пласт посредством сверхзвуковой ударной волны, что приводит к выносу коагулирующих веществ и увеличению проницаемости [Pashchenko, Ageev, 2016]. Этот метод еще не получил широкое распространение и находится на этапе проведения полевых испытаний.

По данным министерства энергетики США количество проектов в 2008 году, в которых вовлечены тепловые МУН, составило 24% от всех проектов с использованием МУН. В большей степени, не менее 80%, тепловые МУН применяются на осадочных породах терригенного типа [Alvarado, Manrique, 2010]. Использование этих методов актуально и для российских регионов. Например, за счет их применения на месторождениях Сахалина ПАО «НК «Роснефть» ежегодно добывает около 20% нефти этого региона [Богданчиков, 2006]. Активно технологии теплового МУН испытывает ПАО «Татнефть». Так с 2006 года на Ашальчинском месторождении проводятся испытания модифицированной технологии теплового воздействия на пласт через двухустьевые параллельные горизонтальные скважины [Боксерман, 2011; Хисамов и др., 2006].

Для оценки эффективности тепловых МУН часто используют, так называемые, компьютерные симуляции резервуара [Chekhonin et al., 2012]. Путем задания тепловых свойств пород они позволяют рассчитывать движение тепловых потоков в резервуаре и изменение температурного поля во времени. Для решения уравнений теплообмена необходимо задание основных тепловых свойств породы: теплопроводности, объемной теплоемкости, температуропроводности и теплового коэффициента линейного расширения (ТКЛР). Температуропроводность определяется отношением теплопроводности к произведению плотности и изобарной удельной теплоемкости. Следовательно, только три из четырех параметров независимы и подлежат определению. Объемная теплоемкость – аддитивное свойство, которое не зависит от структуры породы и может быть оценено по минеральному составу породы. Также существуют рекомендации-стандарты американского сообщества по испытанию материалов (ASTM) для определения удельной теплоемкости пород и почв [ASTM D4611-08, 2008]. Однако для теплопроводности до сих пор не существует признанных международных стандартов методов измерения, хотя попытки их создать проводятся [Popov et al., 2016].

В тех случаях, когда невозможно провести непосредственное измерение тепловых свойств горных пород, используют теоретические подходы: методы теории эффективных сред [Баюк, 2011; Gary et al., 2009; Sævik et al., 2014], методы искусственных нейронных сетей [Zhang, Friedrich, 2003], подход на основе ренормгруппового преобразования [Новиков, Wojciechowski, 1999; Тертычный, 2001], правила смешений [Madden, 1976], цифровые модели [Demianov, Korobkov, 2014] и др. При этом точные решения существуют только для простых модельных сред, например, для слоистой среды или для неограниченной среды с малой концентрацией сферических включений [Wang, Pan, 2008].

На сегодняшний день не существует ни одного надежного прибора для измерения тепловых свойств (теплопроводности, объемной теплоемкости, температуропроводности) по стволу скважины [Freifeld et al., 2008], технологии проведения акустического каротажа наиболее совершенны и входят в набор стандартных каротажей различных компаний. Вследствие этого необходимо последовательное изучение подходов, которые могут позволить связать упругие и тепловые свойства горных пород для определения последних на основе модели физических свойств породы и соответствующих экспериментальных данных по упругим свойствам породы. Предлагаемые на сегодняшний день корреляционные зависимости между тепловыми и упругими свойствами не обладают желаемой общностью и работают на узких наборах данных и/или только для моделирования отдельно упругих или тепловых свойств [Anand et al, 1973; Gegenhuber, Schoen, 2012; Vasseur et al., 1995]. Существенным этапом развития подходов для установления связи различных эффективных свойств стала разработка метода, основанного на теории эффективных сред [Баюк, 2013].

Построение модели физических свойств породы, позволяющую связать ее эффективные упругие и тепловые свойства с параметрами, характеризующими ее структуру, может быть полезно для решения и других задач. В некоторых случаях невозможно получить качественную запись акустического каротажа, например,

для зон, в которых произошли размывы или вывалы участков горной породы. Непосредственный отбор керна также проблематичен для таких зон. Для восстановления эффективных свойств таких участков можно использовать математические модели физических свойств породы и искусственных композитов, изготовленных из шлама.

Цель работы

Повышение достоверности определения макроскопических упругих и тепловых свойств основных типов коллекторов углеводородов в различных состояниях флюидонасыщения в условиях отсутствия возможности проведения непосредственных прямых измерений.

Основные задачи исследования

1. Создание и верификация обобщенных параметрических математических моделей упругих и тепловых свойств карбонатных и терригенных типов пород, построенных по результатам изучения керна, а также композитных сред, изготовленных на основе шлама этих пород.
2. Создание методики решения задачи флюидозамещения для эффективной теплопроводности на примере нескольких коллекций керна карбонатных и терригенных типов пород.
3. Разработка методики одновременного восстановления эффективной теплопроводности и упругих свойств пород по физическим свойствам искусственных композитов, изготовленных на основе шлама пород.

Научная новизна работы

1. Созданы единые математические параметрические модели упругих и тепловых свойств карбонатных и терригенных типов пород, учитывающие особенности их строения и позволяющие рассчитывать одни свойства через другие.

2. Получена новая формула для расчета эффективной теплопроводности микронеоднородной среды на основе метода T-матрицы.
3. Разработан и реализован алгоритм верификации моделей карбонатных и терригенных пород для упругих и тепловых свойств на основании решении задачи флюидозамещения.
4. Разработан и реализован способ одновременного определения эффективной теплопроводности и упругих свойств терригенных пород по физическим свойствам искусственных композитов, изготовленных из шлама этих пород.
5. Создан и реализован способ восстановления теплопроводности по упругим свойствам терригенных пород в условиях меняющегося напряженного состояния породы.

Защищаемые положения

1. Разработанная методика оценки эффективной теплопроводности микронеоднородных сред на основании метода T-матрицы позволяет определять эффективную теплопроводность горных пород по их составу и теплопроводности компонентов с учетом микроструктуры породы. Известный метод самосогласования является частным случаем разработанной методики.
2. Созданные единые математические параметрические модели упругих и тепловых свойств карбонатных и терригенных типов пород позволяют прогнозировать эти свойства при изменении параметров модели, среди которых пористость, свойства насыщающего флюида, свойства минеральных зерен породы, геометрия и связность порового пространства породы и другие характеристики пород.
3. Разработанная и верифицированная методика флюидозамещения позволяет определять с точностью необходимой для решения практических задач теплопроводность пород, насыщенных заданным флюидом.
4. Предложенный способ одновременного определения упругих и тепловых свойств терригенных типов пород по шламу позволяет определять с

точностью необходимой для решения практических задач физические свойства этих пород;

5. Разработанный подход к оценке изменения геометрии пустотного пространства пород коллекторов при приложении нагрузки позволяет прогнозировать изменение одних физических свойств пород коллекторов по другим в аналогичных условиях напряженного состояния.

Теоретическая и практическая значимость работы

1. Методика одновременного определения упругих свойств и теплопроводности пород по шламу имеет непосредственное приложение в условиях бурения без выноса керна;
2. Созданные математические параметрические модели карбонатных и терригенных типов пород для упругих и тепловых свойств могут применяться для теоретического прогноза теплопроводности по известным упругим свойствам в зависимости от пористости, емкости трещин, относительного их раскрытия, связности порового пространства, насыщающего флюида и других параметров модели;
3. Результаты расчетов параметров структуры пород, описывающих изменение относительного раскрытия элементов порового пространства математической модели песчаника при приложении одноосной нагрузки, могут быть использованы для оценки теплопроводности горных пород в аналогичных условиях.

Результаты работы легли в основу одной патентной заявки [Патентная заявка N2016120852, 2016]

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Содержит 129 страниц текста, 49 рисунков, 14 таблиц и список литературы из 99 наименований.

Личный вклад

Автор вывел новую формулу для расчета эффективной теплопроводности, основанную на методе Т-матрицы. Показал, что известная в теории эффективных сред формула метода самосогласования является ее частным случаем. Диссертант лично создал и построил единые математические параметрические модели упругих и тепловых свойств карбонатного и терригенного типов коллекторов в рамках обобщенного сингулярного приближения теории эффективных сред. Реализовал эти модели в виде программного кода на языке Fortran 90. Провел параметрические исследования предлагаемых моделей. Принимал активное участие в проведении и обработке результатов экспериментов по измерению упругих и тепловых свойств пород, относящихся к третьей и четвертой главе данной работы. Верифицировал предлагаемые методики и модели решением задачи флюидозамещения для теплопроводности породы, а также применил их для решения задачи прогноза теплопроводности терригенных типов пород. Предложил и применил метод, позволяющий прогнозировать изменение эффективной теплопроводности в зависимости от приложенной нагрузки по данным об изменении упругих свойств при соответствующих нагрузках. Построил модель искусственного композита, изготовленного из шлама породы, и применил ее для восстановления эффективных свойств нескольких терригенных типов пород.

Апробация работы

По теме диссертации автором опубликовано 10 печатных работ, среди которых 3 статьи, опубликованных в перечне рецензируемых научных изданий ВАК, и 2 расширенных тезиса конференций, цитируемых в системе SCOPUS. Результаты работы докладывались на 2 российских и 5 международных конференциях: XI-ой международной конференции «Новые идеи в науках о

Земле» (Москва, 2013), VII-ой международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодые – наукам о Земле» (Москва, 2014), XVII-ой научно-практической конференции по вопросам геологоразведки и разработки месторождений нефти и газа «Геомодель 2015» EAGE (Геленджик, 2015), XXI-ых Губкинских чтениях «Фундаментальный базис инновационных технологий поисков, разведки и разработки месторождений нефти и газа и приоритетные направления развития ресурсной базы ТЭК России» (Москва, 2016), VII-ой международной геолого-геофизической конференции и выставке «Санкт-Петербург 2016. Через интеграцию геонаук — к постижению гармонии недр» (Санкт-Петербург, 2016), V-ой научной конференции молодых ученых и аспирантов ИФЗ РАН (Москва, 2016), 50th US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium (Хьюстон, 2016). Также результаты неоднократно докладывались на семинарах Московского физико-технического института (государственного университета), Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук и Московского научно-исследовательского центра Шлюмберже.

Благодарности

Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю д.ф.-м.н. Баяк И.О. за плотное сотрудничество в течение всего периода проведения данной работы, за консультации, советы и чуткое отношение, Институту физики Земли РАН и компании Шлюмберже за возможность проведения этих исследований и приобретенный опыт работы как экспериментальных, так и теоретических исследований. Отдельная благодарность Сафонову С.С., д.ф.-м.н. Попову Ю.А., к.ф.-м.н. Абашкину В.В., к.ф.-м.н. Чехонину Е.М. и к.т.н. Паршину А.В. за организацию работы, а также Попову Е.Ю. и к.т.н. Тарелко Н.Ф. за консультации и обсуждения методов измерений, использованных в данной работе, Ромушкевич Р.А. за консультации по геологии. Особую благодарность автор выражает своей жене Ялаевой К.И за личную поддержку.

Глава 1. Современное состояние теоретической базы прогноза эффективных физических свойств коллекторов углеводородов

Для решения петрофизических, геофизических задач как на этапе поисков, так и на этапе разработки месторождений необходима информация об эффективных свойствах породы. Под эффективными свойствами мы подразумеваем ее макроскопические свойства. Первые задачи теоретического определения эффективных свойств среды были поставлены еще в XIX веке, например, задача определения эффективного удельного электрического сопротивления среды с регулярной структурой [Maxwell, 1873]. С тех пор было предложено множество теоретических подходов, которые позволяют связать эффективные свойства породы и характеристики его компонент и структуры. В этой главе проводится общий обзор наиболее известных таких подходов.

Их можно условно разбить на несколько групп: 1) инженерные, 2) эмпирические, 3) подходы, основанные на нейронных сетях, 4) модели цифрового ядра, 5) эффективные модели на основе теории эффективных сред. Подавляющее большинство из них не обладают общностью и применимы для решения узкого набора задач и для ограниченного класса объектов. Зачастую модели применимы в определенном диапазоне пористости, проницаемости, а за их пределами эти модели могут давать неприемлемые результаты. Отдельно отметим, что эмпирические подходы требуют тщательного отбора репрезентативных данных. Так в работе Шугавары и Йошизавы упоминаются две различные формулы Рибо и Рассела, которые были получены на различных образцах одного типа материала. При этом они дают результаты, отличные друг от друга до 15% [Sugawara, Yoshizawa, 1961].

$$\lambda_{\text{Рибо}}^{\text{эфф}} = \lambda_{\text{возд}} v^{\frac{1}{3}} + \lambda_{\text{мат}} \left(1 - v^{\frac{1}{3}}\right), \quad (1.1)$$

$$\lambda_{\text{Рассел}}^{\text{эфф}} = \lambda_{\text{мат}} \frac{v^{\frac{2}{3}} + \frac{\lambda_{\text{мат}}}{\lambda_{\text{возд}}} \left(1 - v^{\frac{2}{3}}\right)}{v^{\frac{2}{3}} - v + \frac{\lambda_{\text{мат}}}{\lambda_{\text{возд}}} \left(1 - v^{\frac{2}{3}} + v\right)},$$

где $\lambda^{\text{эфф}}$ – эффективная теплопроводность материала, $\lambda_{\text{мат}}, \lambda_{\text{возд}}$ – теплопроводность воздуха и вмещающей матрицы, v – объемная доля воздуха.

Прежде чем перейти к подробному описанию каждой из этих групп, необходимо рассмотреть среды, для которых могут быть получены точные решения задачи определения эффективных свойств.

1.2 Точные решения задачи определения эффективных свойств горных пород

1.2.1 Границы Фойгта-Ройсса, Винера

Рассмотрим n -компонентную среду, которая состоит из упорядоченных чередующихся слоев. Предположим, что вектор воздействия, определяющий направление звуковой волны или потока тепла, перпендикулярен направлению слоев среды (Рисунок 1.1а). Эффективные упругие свойства такой среды могут быть определены по формуле Ройсса, а теплопроводность по аналогичной формуле, так называемой, нижней границы Винера:

$$\begin{aligned} \left(C_{\text{Ройсса}}^{\text{эфф}}\right)^{-1} &= \sum_{k=1}^n v_i C_i^{-1}, \\ \left(\lambda_{\text{ниж.Винер}}^{\text{эфф}}\right)^{-1} &= \sum_{k=1}^n v_i \lambda_i^{-1}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $C^{\text{эфф}}$ – эффективный тензор упругости, C_i, λ_i – тензор упругости и теплопроводности i -той компоненты, v_i – объемная доля i -той компоненты.

В такой среде волна должна проходить через все слои как с более жесткими упругими свойствами, так и с менее жесткими. По сравнению с подобными макрооднородными средами, у которых компоненты обладают теми же свойствами, и с тем же соотношением объёмных долей компонент, тензор

упругости и теплопроводности (1.2) представляют собой нижнюю границу соответствующих свойств среды.

Если же вектор воздействия направлен вдоль слоев (Рисунок 1.1б), тогда для тензора упругости справедлива формула Фойгта, а для теплопроводности – верхняя граница Винера:

$$C_{\text{Фойгт}}^{\text{эфф}} = \sum_{k=1}^n v_i C_i, \quad (1.3)$$

$$\lambda_{\text{вер.Винер}}^{\text{эфф}} = \sum_{k=1}^n v_i \lambda_i.$$

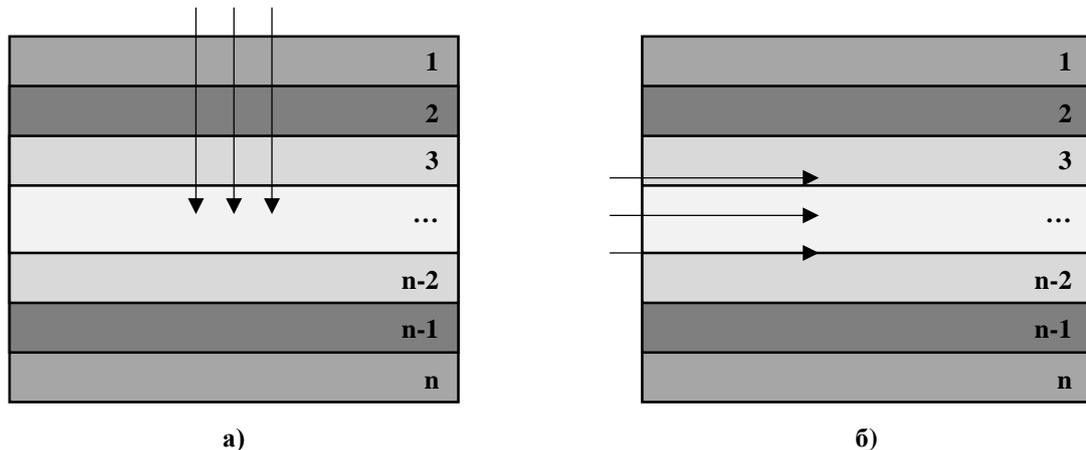


Рисунок 1.1 – Схема математической модели среды, соответствующая нижней (а) и верхней (б) границе Винера для теплопроводности, а также формулам Фойгта(а) и Ройсса(б) для упругих свойств.

Верхняя и нижняя границы Винера представляют собой, так называемые, параллельную и последовательные модели соответственно. Они широко используются в геофизике для описания слоистых сред. Эффективные свойства любой микронеоднородной среды лежат в диапазоне между значениями верхней и нижней границ.

1.2.2 Границы Хашина-Штрикмана

Более узкие значения границ для двухкомпонентной изотропной среды «матрица-флюид», в предположении ее квазиоднородности на макроскопическом уровне, дают границы Хашина-Штрикмана, которые были им получены для магнитной проницаемости с использованием вариационных принципов [Hashin, Shtrikman, 1962]. Форма компонентов среды не учитывается. Для модулей упругости верхняя граница Хашина-Штрикмана определяется следующим образом

$$\begin{aligned}
 K_{\text{ХШ}+}^{\text{эфф}} &= K_{\text{мат}} + \frac{v}{(K_{\text{фл}} - K_{\text{мат}})^{-1} + (1 - v) \left(K_{\text{мат}} + \frac{4}{3}\mu_{\text{мат}}\right)^{-1}}, \\
 \mu_{\text{ХШ}+}^{\text{эфф}} &= \mu_{\text{мат}} + \frac{v}{(\mu_{\text{фл}} - \mu_{\text{мат}})^{-1} + \frac{2(1 - v)(K_{\text{мат}} + 2\mu_{\text{мат}})'}{5\mu_{\text{мат}} \left(K_{\text{мат}} + \frac{4}{3}\mu_{\text{мат}}\right)}}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $K_{\text{ХШ}+}^{\text{эфф}}$, $\mu_{\text{ХШ}+}^{\text{эфф}}$ – верхняя граница Хашина-Штрикмана для эффективного модуля объемного сжатия и сдвига соответственно, индексы «фл» и «мат» обозначают соответствующую компоненту флюида и матрицу.

Нижние границы получаются при замене одного компонента другим, то есть

$$\begin{aligned}
 K_{\text{ХШ}-}^{\text{эфф}} &= K_{\text{фл}} + \frac{(1 - v)}{(K_{\text{мат}} - K_{\text{фл}})^{-1} + v(1 - v) \left(K_{\text{фл}} + \frac{4}{3}\mu_{\text{фл}}\right)^{-1}}, \\
 \mu_{\text{ХШ}-}^{\text{эфф}} &= \mu_{\text{фл}} + \frac{v(1 - v)}{(\mu_{\text{мат}} - \mu_{\text{фл}})^{-1} + \frac{2v(K_{\text{фл}} + 2\mu_{\text{фл}})}{5\mu_{\text{фл}} \left(K_{\text{фл}} + \frac{4}{3}\mu_{\text{фл}}\right)}}.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Для теплопроводности верхняя и нижняя граница Хашина-Штрикмана может быть рассчитана с помощью выражений

$$\lambda_{HS+}^{\text{эфф}} = \lambda_{\text{мат}} \frac{1 + 2\delta + 2(1 - \delta)v}{3\delta + (1 - \delta)(1 - v)},$$

$$\lambda_{HS-}^{\text{эфф}} = \lambda_{\text{фл}} \frac{3\delta + 2\phi(1 - \delta)}{3 + (\delta - 1)v},$$
(1.6)

где $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{\text{мат}}/\lambda_{\text{фл}}$.

Уравнения (1.4), (1.5) и (1.6) являются решением для среды, представляющей собой совокупность неперекрывающихся сфер разных диаметров, каждая из которых содержит в себе сферу меньшего диаметра со свойствами матрицы, окруженной оболочкой со свойствами флюида (для верхней границы Хашина-Штрикмана) [Тертычный, 2001].

Для обобщения полученных границ Хашина-Штрикмана на анизотропные среды Талбот и Уиллис учли функции взаимодействия второго порядка и выше [Talbot, Willis, 1987]. Это позволило получить более узкие границы, но вместе с тем значительно затруднило возможность расчетов.

Представленные здесь границы или «вилки» Фойгта-Ройсса, Винера, Хашина-Штрикмана могут быть использованы для приближенной оценки эффективных свойств (см. следующий параграф). Эти границы также имеют важное значение при использовании эмпирических зависимостей, так как дают физически обоснованные пределы, в которых могут лежать оцениваемые физические свойства.

1.3 Первая группа: инженерные подходы

К этой группе относятся подходы, позволяющие получить грубую, но очень простую оценку эффективных свойств породы на основании данных лишь о составе породы.

Один из самых простых вариантов такой оценки для упругих свойств породы был предложен Хиллом. Согласно формуле Фойгта-Ройсса-Хилла

эффективный тензор упругости среды рассчитывается как среднее арифметическое нижней и верхней границы Ройсса и Фойгта (1.2) и (1.3)

$$C_{\text{Хилл}}^{\text{эфф}} = \frac{1}{2} (C_{\text{Рейсса}}^{\text{эфф}} + C_{\text{Фойгт}}^{\text{эфф}}). \quad (1.7)$$

Хотя среднее арифметическое получило большую известность по сравнению со средним геометрическим, и другими правилами усреднения, не существует никаких обоснований использовать именно этот вариант. Сравнение между ними было проведено в работе Фучз [Fuchs et al., 2013a]. Аналогичные выражения можно записать для теплопроводности.

В действительности, даже более узкие границы Хашина-Штрикмана достаточно широки при определенных параметрах среды. Это не позволяет использовать подобные правила усреднения на практике. Для примера, рассмотрим двухкомпонентную среду «матрица-флюид», теплопроводность компонент которых составляет $\lambda_{\text{мат}} = 7,6$ Вт/(м·К) и $\lambda_{\text{фл}} = 0,12$ Вт/(м·К), что соответствует нефтенасыщенному мономиктовому изотропному песчанику, с содержанием кварца 100%. Мы видим, что при пористости 20% относительный разброс между значениями верхней и нижней границы Хашина-Штрикмана составляет 125% (рисунок 1.2). Чем выше контраст свойств компонентов среды, тем шире вилка Хашина-Штрикмана.

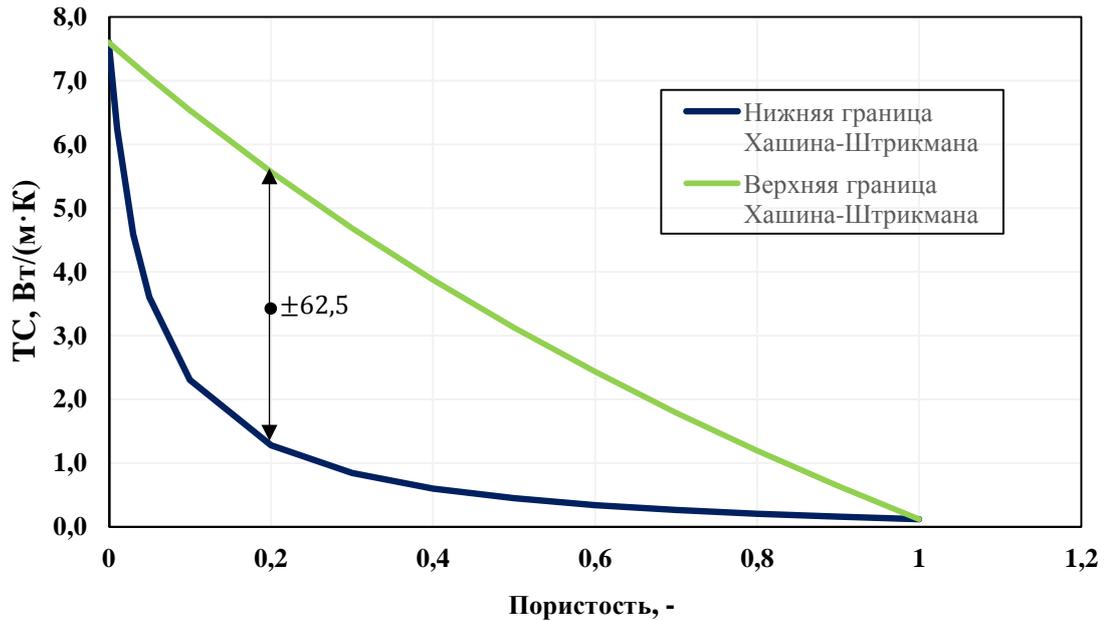


Рисунок 1.2 – Зависимости теплопроводности от пористости, рассчитанные по формулам верхней и нижней границ Хашина-Штрикмана для нефтенасыщенного мономиктового песчаника. Точка соответствует середине интервала между значениями теплопроводности верхней и нижней границ при пористости 20%.

Отдельно стоит отметить получившую широкое распространение формулу логарифмического среднего для теплопроводности (или формула Лихтенеккера) для n-компонентной среды [Lichtenecker, Rother, 1931]:

$$\lambda_{\text{Лихтенеккер}}^{\text{эфф}} = \prod_{k=1}^n \lambda_i^{v_i}. \quad (1.8)$$

Формула Лихтенеккера активно используется в гидродинамических симуляторах, при решении задач металлургии и физики почв [Zakri et al., 1998]. До недавнего времени не было строгого обоснования модели Лихтенеккера и она считалась полуэмпирической, до тех пор пока автором Симпкин не было предложено доказательство этой формулы для диэлектрической проницаемости с применением уравнений Максвелла, закона сохранения заряда в среде, форма и ориентация компонент которой имеет случайное пространственное распределение [Simpkin, 2010].

Согласно другой распространенной формуле Роя-Адлер теплопроводность может быть вычислена следующим образом [Adler et al., 1973]:

$$\lambda_{\text{Рой-Адлер}}^{\text{эфф}} = \left((1 - v)\lambda_{\text{мат}}^{\frac{1}{2}} + v\lambda_{\text{фл}}^{\frac{1}{2}} \right)^2. \quad (1.9)$$

Подходы первой группы не противоречат физическим законам, просты в использовании. Однако их можно и нужно применять, когда диапазон изменения эффективных свойств согласно вилке Фойгта-Ройсса достаточно узок. Использовать эти соотношения для связи различных свойств (упругих и тепловых) невозможно.

1.4 Вторая группа: эмпирические подходы

Подходы второй группы можно условно разбить на две подгруппы. Уравнения связи эффективных свойств первой подгруппы представляют собой модификацию уравнений связи инженерных подходов. Это позволяет эмпирически учесть влияние структуры породы на ее свойства. Уравнения связи второй подгруппы представляют собой корреляционные зависимости различных свойств.

Асаад предложил обобщение формулы Лихтенеккера для случая двухкомпонентной среды «матрица-флюид» [Asaad, 1955]. Для учета особенностей структуры он добавил эмпирический поправочный коэффициент \bar{A} :

$$\lambda_{\text{Асаад}}^{\text{эфф}} = \lambda_{\text{мат}}^{1-\bar{A}v} \lambda_{\text{фл}}^{\bar{A}v}. \quad (1.10)$$

Похожим образом с добавлением коэффициента \bar{S} было получено соотношение Сомертона, учитывающее контраст свойств флюид-матрица:

$$\lambda_s^{\text{Сомертон}} = \lambda_d \left(\frac{\lambda_{\text{мат}}}{\lambda_{\text{фл}}} \right)^{\bar{S}v}. \quad (1.11)$$

где λ_s, λ_d – теплопроводность флюидонасыщенного и сухого образца соответственно. Физического смысла коэффициенты \bar{A} и \bar{S} не имеют. Д. Коробковым была получена развернутая эмпирическая таблица, позволяющая

находить эти коэффициенты в зависимости от типа породы и пористости [Коробков, 2006]. В таблице 1.1 представлены эти коэффициенты для упрощенной версии этих методов, не учитывающей зависимость от пористости [Pоров, Romushkevich, 2002].

Таблица 1.1 – Эмпирические коэффициенты \bar{A} и \bar{S} формул Асаада и Сомертона для различных типов пород.

Тип породы	\bar{A}	\bar{S}
Слюдисто-кварцевые песчаники и алевролиты	0,87	0,50
Полимиктовые песчаники и алевролиты	0,50	0,60
Кварцевые песчаники	1,70	0,82
Органогенные известняки	0,65	0,35
Полевошпат-кварцевые и кварцевые алевролиты	0,82	0,64

Шугавара и Йошизава [Sugawara, Yoshizawa, 1962] модифицировали формулу Винера (1.3) для случая двухкомпонентной среды, введя дополнительный эмпирический коэффициент:

$$\lambda_{\text{Шуг.-Йош.}}^{\text{эфф}} = (1 - 2^n(2^n - 1)^{-1}(1 - (1 + v)^{-n}))\lambda_{\text{мат}} + 2^n(2^n - 1)^{-1}(1 - (1 + v)^{-n})\lambda_{\text{фл}}, \quad (1.12)$$

где n – положительный эмпирический коэффициент. Они проверили эту зависимость всего на 13 образцах терригенного типа пород и на 5 образцах огнеупорного кирпича.

Модель Бунтебарта [Buntebarth, Schopper, 1998] имеет вид

$$\lambda_{\text{Бунтеб.}}^{\text{эфф}} = \lambda_{\text{мат}} \frac{(1 - v)\lambda_{\text{мат}} + (\alpha + v)\lambda_{\text{фл}}}{(1 + \alpha v)\lambda_{\text{мат}} + \alpha(1 - v)\lambda_{\text{фл}}}, \quad (1.13)$$

где α – структурная константа породы. При $\alpha = 0$ модель Бунтебарта сводится к арифметическому среднему, при $\alpha \rightarrow \infty$ она стремится к гармоническому

среднему. Вариация постоянной α позволяет получить любые значения в пределах вилки Винера.

Якобсоном и Сонином [Jacobsen, Schjonning, 1995] на основе экспериментальных данных об абсолютной диэлектрической проницаемости флюидонасыщенной минеральной почвы было установлено, что параметр структуры α лежит в пределах от 0,4 до 0,8, и его величина зависит от того, какой флюид насыщает образец.

Для связи теплопроводности, плотности (ρ), пористости (v), проницаемости (k) и коэффициента удельного сопротивления породы (F) согласно Ананду [Anand et al., 1973] можно использовать выражение

$$\lambda_{\text{Ананд}}^{\text{эфф}} = 0,340\rho - 3,20v + 0,530k^{0,10} + 0,0130F - 0,031. \quad (1.14)$$

А для расчета теплопроводности насыщенной породы пород следует использовать

$$\frac{\lambda_w}{\lambda_d} = 1,00 + 0,30 \left(\frac{\lambda_{\text{фл}}}{\lambda_{\text{возд}}} - 1,00 \right)^{0,33} + 4,57 \left(\frac{v}{1-v} \cdot \frac{\lambda_{\text{фл}}}{\lambda_d} \right)^{0,48m} \left(\frac{\rho_w}{\rho_d} \right)^{-4,30}, \quad (1.15)$$

где m - показатель цементации в законе Арчи λ_w, λ_d - теплопроводности флюидонасыщенного и сухого образца, ρ_w, ρ_d - плотность флюидонасыщенного и сухого образца.

Подобных зависимостей очень много. Предоставим здесь ссылки на некоторые из них. Связь между теплопроводностью, фильтрационно-емкостными характеристиками и каротажными данными установлена в работах Госс и Хартманн [Goss et al., 1975; Hartmann et al., 2005], между теплопроводностью, продольными и поперечными скоростями и плотностью – в работах [Дахнов, Дьяконов, 1952; Horai, 1971; Horai, Simmons, 1969; Ozkahraman et al., 2004; Somerton et al, 1974].

Стоит отметить, что предлагаемые зависимости сильно отличаются друг от друга, расхождение доходит до 100% между различными зависимостями. При этом они позволяют рассчитывать эффективные свойства изучаемых пород в

каждой отдельной работе с хорошей точностью. Это означает высокую избирательность и отсутствие общности моделей второй группы.

1.5 Третья группа: нейронные сети

Искусственные нейронные сети – это компьютерная система, которая моделирует процессы образом, сходным с процессами, проходящими в нейронной системе мозга человека. Эта система имеет высокую взаимосвязь между ячейками структуры, называемые нейронами, и она способна обрабатывать большие массивы данных. На первом шаге необходима тренировка нейронной сети на большом количестве данных при известных входных и выходных параметрах модели. На этом шаге происходит обучение нейронной сети, она распознает паттерны, группы, похожие по свойствам друг с другом. На втором шаге используют обученную модель на новых входных данных и получают прогноз по выходным параметрам. Практически модели этой группы являются альтернативой методам линейной регрессии, многопараметрической регрессии, корреляции и другим методам статистической обработки данных.

Существует множество методов реализаций искусственных нейронных сетей. Наиболее широко известным и апробированным, в том числе - в задачах прогноза эффективных свойств горных пород, является метод обратного распространения ошибки, подробности которого изложены в работе Ханделвал [Khandelwal, 2010].

Для того, чтобы обучить нейронную сеть необходимо иметь большое количество образцов. Принято делить весь массив данных в пропорции 80% на 20% [Sonmez et al., 2006], но не менее 100 образцов (точек на каротажных данных) на обучающую выборку. По ссылкам приведенных здесь работ использовали выборки по 1500, 609, 127, 254 данным. На скорость расчетов влияет количество рассматриваемых параметров [Singh et al., 2004].

Сравнение корреляционных методов и нейронных сетей при прогнозе модуля Юнга и прочности на одноосное сжатие показывает эффективность

последних [Yılmaz, Yüksek, 2008]. Прогноз теплопроводности также возможен [Goutorbe et al., 2006].

Нейронные сети требуют тщательного отбора репрезентативных образцов для исследований. В связи с тем, что трудно получить большие выборки данных с необходимыми параметрами (пористость, плотность, различные физические свойства, геологические характеристики, структурные характеристики и т.д.), на данный момент невозможно получить обученную нейронную сеть, одинаково хорошо работающую на разных типах пород. С этой точки зрения модели этой группы близки к эмпирическим моделям.

Другая особенность этой группы состоит в том, что часто невозможно повторить результаты других исследователей по обучению нейронных сетей из-за отсутствия данных, на которых проводилось обучение.

1.6 Четвертая группа: модели цифрового ядра

Существует две альтернативы построения цифровой модели породы: построить симуляцию среды, основываясь на статистических данных и особенностях среды или восстановить реальную структуру с помощью рентгеноструктурной томографии и обработки изображений. Затем задаются свойства компонент моделируемой среды и используются численные методы для решения задачи распространения теплового потока.

Наиболее успешные шаги по определению различных эффективных свойств для разных типов пород с помощью цифровой модели ядра были сделаны в работах Андрэ [Andrä et al., 2013a; Andrä et al., 2013b]. На образцах терригенного типа пород Фантебло и Береа и карбонатного типа пород Гросмонт были получены кубические цифровые модели ядра с характерным размером грани 2мм. Для расчета эффективных упругих свойств они использовали численный метод предложенный авторами Мулинек и Зуки [Moulinec, Suquet, 1998], основанный на уравнении Липмана-Швингера, а также метод конечных-элементов, метода решеточных уравнений Больцмана и метод явного скачка

[Wiegmann, Bube, 2000]. Абсолютное относительное среднеквадратичное отклонение расчетных от экспериментальных данных составило для модуля объемного сжатия 20%, модуля сдвига – 11%, проницаемости – 38%, пластового коэффициента – 23%.

Численное моделирование тепловых свойств на примере песчаника Береа [Churcher et al., 1991] представлено в работе Демьянова и Коробкова [Demianov, Korobkov, 2014]. Были проведены расчеты теплопроводности и температуропроводности для образца, насыщенного различными флюидами, воздухом (сухой образец), моделью пластовой нефти (керосином) и моделью пластовой воды (водным раствором NaCl). Для этого понадобилось провести множество измерений, построить модель цифрового керна, учитывающую реальное распределение минералов в образце, произвести множество расчетов. Относительное отклонение расчетных от экспериментальных данных для модели цифрового керна составили 6,8%, 6,5% и 0,98% соответственно для сухих, насыщенных моделью пластовой нефти и моделью пластовой воды образцов (таблица 1.2). В настоящей работе проведено сравнение этих результатов с прогнозом теплопроводности, получаемой с помощью формулы Лихтенеккера, упомянутой в этой работе (1.8). Относительное отклонение для нее составило соответственно 0%, 3,5%, 6,0%, то есть формула Лихтенеккера дает прогноз не хуже подхода с использованием цифрового керна. При этом для использования модели Лихтенеккера необходимо иметь только минеральный состав и пористость образца. Это означает что для решения конкретной задачи определения эффективной теплопроводности в разных состояниях флюидонасыщения для песчаника Береа можно использовать модель Лихтенеккера как наиболее практичную. Этот пример показывает, что в некоторых случаях нет необходимости использовать трудоемкие подходы и усложнять модель породы.

Таблица 1.2 – Сравнение измеренной теплопроводности песчаника Береа и рассчитанной с помощью двух подходов: формулы Лихтенеккера и модели цифрового ядра.

Насыщающий флюид	ТС эксперимент, Вт/(м·К)	ТС циф. ядр, Вт/(м·К)	ТС Лихтенеккер, Вт/(м·К)
Воздух	2,35	2,51	2,35
Модель пластовой нефти	3,21	3,30	3,10
Модель пластовой воды	4,33	4,11	4,07

Для реализации моделей цифрового ядра необходима труднодоступная и дорогостоящая оборудование для рентгеновской томографии. При этом не существует единого подхода, позволяющего переходить от структуры реальной среды к модели цифрового ядра. В процессе построения модели породы необходимо решать задачи, связанные с сегментацией цифровой модели, построением расчетной сетки, заданием свойств на контактах компонент среды, которые невозможно определить прямым методом. При этом необходимо учитывать уровень пространственного разрешения съемки аппаратуры. Например, минимальное разрешение на самых современных томографах таких как ZEISS Xradia 520 Versa составляет 0,7 мкм [Gelb et al., 2014],. Для того, чтобы получить такое разрешение, размер образца должен быть не более 2 мм. Не для всех пород репрезентативный объем составляет по одному из измерений 2 мм, что ограничивает область применения цифровых моделей ядра.

1.7 Пятая группа: модели эффективных сред

Подходы теории эффективных сред позволяют установить связь между упругими, тепловыми свойствами среды с учетом основных особенностей структуры среды. Неоднородная среда заменяется однородной средой с эффективными свойствами путем упрощения учета взаимодействия полей напряжения и деформации между неоднородностями среды

Рассмотрим общий подход теории эффективных сред [Шермергор, 1977]. В этом подходе поля представлены в виде случайных функций. Разбивая значение функции на постоянную и флуктуационную часть (обозначено штрихом), получаем для поля теплового потока и теплопроводности:

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{r}) &= \langle \lambda(\mathbf{r}) \rangle + \lambda'(\mathbf{r}), \\ \mathbf{Q}(\mathbf{r}) &= \langle \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \rangle + \mathbf{Q}'(\mathbf{r}), \mathbf{Z}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{Z}(\mathbf{r}) \rangle + \mathbf{Z}'(\mathbf{r}),\end{aligned}\tag{1.16}$$

где $\mathbf{Q}(\mathbf{r}), \mathbf{Z}(\mathbf{r})$ – плотность теплового потока и градиент поля температуры. Усреднение производится по репрезентативному объему. Предполагается, что справедлива эргодическая гипотеза, что позволяет переходить от среднего по ансамблю реализаций к среднему по объему.

Предположим, что флуктуационная и средняя части связаны линейным образом, то есть

$$\mathbf{Z}'(\mathbf{r}) = \mathbf{W}(\mathbf{r})\langle \mathbf{Z}(\mathbf{r}) \rangle,\tag{1.17}$$

где $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ – тензорный интегральный оператор, определение которого в общем случае невозможно, так как при этом необходимо решить задачу взаимодействия многих тел, в нашем случае элементов компонент среды. Покажем, что эффективные свойства можно определить через интегральный оператор $\mathbf{W}(\mathbf{r})$. Эффективная теплопроводность определяется законом Фурье:

$$\langle \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \rangle = \lambda^{eff} \langle \mathbf{Z}(\mathbf{r}) \rangle.\tag{1.18}$$

В каждой точке можно записать

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r})\mathbf{Z}(\mathbf{r}).\tag{1.19}$$

После ряда простых преобразований, получаем выражение для эффективной теплопроводности и интегральной функции $\mathbf{W}(\mathbf{r})$.

$$\lambda^{eff} = \langle \lambda(\mathbf{r}) \rangle + \langle \lambda'(\mathbf{r})\mathbf{W}(\mathbf{r}) \rangle.\tag{1.20}$$

По аналогии можно получить выражение и для тензора упругости

$$\mathbf{C}^{eff} = \langle \mathbf{C}(\mathbf{r}) \rangle + \langle \mathbf{C}'(\mathbf{r})\mathbf{W}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (1.21)$$

Дальнейший поиск эффективного тензора упругости и теплопроводности возможен только с допущением упрощения функции $\mathbf{W}(\mathbf{r})$. Рассмотрим некоторые приближения. Допустим, что поле градиента температуры или деформации однородно, то есть эффективные свойства совпадают со своей постоянной частью, то есть со своим средним. Это значит, что решение (1.20) совпадает с решением для модели Фойгта и Винера, которые мы подробно рассмотрели выше. Если заменить тензор упругости на тензор податливости, то мы получим решение для модели Ройсса. Как мы отмечали, такое приближение не позволяет учитывать строение структуры образца, в отличие от обобщенного сингулярного приближения. Рассмотрим его подробнее.

Рассмотрим два тела, имеющих одинаковую форму и размер. Свойства одного подлежат определению, свойства другого, так называемого «тела сравнения» произвольны, и в отличие от первого оно однородно.

Упругие поля определяются уравнением равновесия:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{u} &= -\mathbf{f}, \\ L_{ik} &\stackrel{\text{def}}{=} \nabla_j C_{ijkl} \nabla_l, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где \mathbf{u} – вектор перемещения, \mathbf{f} – плотность распределения объемных сил.

Предполагается, что флуктуации полей первого тела определяются через свойства тела сравнения, то есть

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}) = \mathbf{L}'(\mathbf{r}) + \mathbf{L}^c, \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}'(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^c, \mathbf{C}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}'(\mathbf{r}) + \mathbf{C}^c. \quad (1.23)$$

При этом выполняется уравнение равновесия для тела сравнения, то есть

$$\mathbf{L}^c \mathbf{u}^c = -\mathbf{f}. \quad (1.24)$$

После ряда преобразований приходим к выражению

$$\mathbf{L}^c \mathbf{u}' = -\mathbf{L}'(\mathbf{u}^c + \mathbf{u}'). \quad (1.25)$$

Определим тензор Грина \mathbf{G} оператора \mathbf{L}^c как

$$\mathbf{L}^c \mathbf{G} = -\mathbf{I} \delta(\mathbf{r}). \quad (1.26)$$

Это позволяет представить решение предыдущего уравнения следующим образом

$$\mathbf{u}'(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{L}'(\mathbf{r}') \mathbf{u}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (1.27)$$

После ряда преобразований связь локального и среднего поля деформаций имеет вид [Шермергор, 1977]

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) = (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{C}'(\mathbf{r}))^{-1} \langle (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{C}'(\mathbf{r}))^{-1} \rangle^{-1} \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) \rangle, \quad (1.28)$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ – интегральный оператор свертки, нахождение которого связано с поиском решения задачи о взаимодействии многих тел.

Аналогичное выражение может быть получено и для градиента поля температуры [Баяк, 2013]:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}) = (\mathbf{I} - \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{r}))^{-1} \langle (\mathbf{I} - \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{r}))^{-1} \rangle^{-1} \langle \mathbf{Z}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (1.29)$$

Откуда получается точное выражение для эффективных свойств среды, которое позволяет связать упругие свойства среды и теплопроводность

$$\mathbf{X}^{eff} = \langle \mathbf{X}(\mathbf{r}) (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{X}'(\mathbf{r}))^{-1} \rangle \langle (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{X}'(\mathbf{r}))^{-1} \rangle^{-1}. \quad (1.30)$$

Отдельно отметим, что в этой формуле свойства тела сравнения произвольны и это не влияет на значение эффективных свойств.

В обобщенном сингулярном приближении производится переход от интегрального оператора \mathbf{H} к постоянному тензору \mathbf{g} . Для этого необходимо представить оператор в виде ряда

$$(\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{X}'(\mathbf{r}))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{H}\mathbf{X}'(\mathbf{r}))^n. \quad (1.31)$$

Допустим, что

$$Q_{ijkl}X'_{klpq} \equiv \int G_{k(i,j)l}(r-r')X'_{klpq}(r')dr' = g_{ijkl}X'_{klpq}(r), \quad (1.32)$$

где $G_{k(i,j)l} = \frac{1}{2}(G_{k(i,j)l} + G_{l(i,j)k})$. Это возможно только если отбросить формальную часть второй производной тензора Грина и принять $G_{k(i,j)l} = g_{ijkl}\delta(r)$, где $\delta(r)$ – обобщенная функция Дирака. Из этого следует что

$$\begin{aligned} X^{eff} &= \langle X(\mathbf{r})(\mathbf{I} - \mathbf{g}X'(\mathbf{r}))^{-1} \rangle \langle (\mathbf{I} - \mathbf{g}X'(\mathbf{r}))^{-1} \rangle^{-1}, \\ g_{ijkl} &= \int G_{k(i,j)l}(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Полученное уравнение позволяет рассчитать эффективные свойства произвольной ограниченной среды. В этом приближении учитываются все типы многочастичных взаимодействий за счет дополнительных упрощений среды. Это приводит к размазыванию поля по зерну неоднородности и обращение в нуль дисперсии упругих и тепловых полей в его границах. Отдельно отметим, что теперь в уравнении (1.33) эффективные свойства зависят от свойств тела сравнения. Задание свойств тела сравнения позволяет учесть контактные свойства образца, которые не могут быть заданы прямым образом. В настоящей работе уравнение (1.33) обобщенного сингулярного приближения используется для установления уравнения связи упругих и тепловых свойств.

Существуют и другие возможности учета многочастичного взаимодействия, например, в корреляционном приближении учитываются только парно-корреляционные взаимодействия между элементами компонент среды. Это приводит к следующему решению

$$\begin{aligned} L^{eff} \langle \mathbf{u} \rangle &= -\mathbf{f}, \\ L^{eff} &= \langle L \rangle + \langle L' \mathbf{G} * L' \rangle, L_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_j C_{ijkl} \nabla_l, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где \mathbf{G} – тензор Грина оператора L

Рассмотрим еще одну модель среды, основанную на теории эффективных сред. Модель Максвелла представляет собой среду, в которой сферические элементы одной компоненты с теплопроводностью $\lambda_{\text{фл}}$ рассеяны во второй с теплопроводностью $\lambda_{\text{мат}}$ [Beck, 1976]. Предполагается, что элементы неоднородностей не взаимодействуют друг с другом. Это возможно если их концентрация очень мала, и они расположены на большом расстоянии друг от друга. Это значит, что для каждой неоднородности можно записать решение задачи Эшелби [Eshelby, 1957], а затем усреднить получившиеся поля.

$$\lambda_{\text{Максвелл}}^{\text{эфф}} = \lambda_{\text{мат}} \left(1 - \frac{3\phi(\lambda_{\text{мат}}\lambda_{\text{фл}}^{-1} - 1)}{2\lambda_{\text{мат}}\lambda_{\text{фл}}^{-1} + 1 + \phi(\lambda_{\text{мат}}\lambda_{\text{фл}}^{-1} - 1)} \right). \quad (1.35)$$

Согласно методу построения этой модели, она лучше описывает среды при слабом контрасте теплопроводности ее компонент. В работе Вудсайд и Мессмер [Woodside, Messmer, 1961] экспериментально было показано, что уравнения моделей Лихтенеккера (1.8) и Максвелла дают приблизительно схожий результат в одном и том же диапазоне пористости и теплопроводности матрицы, при небольшом контрасте свойств между матрицей и флюидом.

Преимущество подходов теории эффективных сред состоит в том, что они позволяют учесть особенности структуры породы. Кроме того, способ построения решения для эффективной среды предполагает возможность построения связи различных физических свойств, в том числе, исследуемых тепловых и упругих.

1.8 Формула расчета эффективной теплопроводности, основанная на методе Т-матрицы

В данной части главы автором предложена формула по расчету эффективной теплопроводности, которая была разработана в рамках теории эффективных сред с использованием функции Грина и метода Т-матрицы, предложенного авторами Зеллер и Дедерих [Zeller, Dederichs, 1973]. Показано, что

одним из частных случаев предлагаемого метода – является метод самосогласования.

1.8.1 Общее выражение для эффективной теплопроводности

Рассмотрим неоднородную неупорядоченную среду со сложной микроструктурой. В соответствии с законом Фурье в состоянии равновесия поле плотности теплового потока $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ связано с градиентом поля температуры $\mathbf{Z}(\mathbf{r})$ следующим образом:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})\mathbf{Z}(\mathbf{r}), \quad (1.36)$$

где $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})$ – это тензор теплопроводности в точке \mathbf{r} . Для применения методов теории случайных функций в дальнейшем будем рассматривать локальную теплопроводность в качестве случайной функции со средней по пространству частью $\boldsymbol{\lambda}^0$ и флуктуирующей частью $\delta\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})$

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\lambda}^0 + \delta\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}). \quad (1.37)$$

Средняя часть теплопроводности $\boldsymbol{\lambda}^0$ может быть выбрана произвольным образом при условии, что миноры его тензора остаются положительными.

Нас интересуют макроскопические свойства среды. По аналогии с локальной записью закона Фурье (1.36) введем понятие эффективной теплопроводности $\boldsymbol{\lambda}^{\text{eff}}$, которое связывает усредненные поля

$$\langle \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \rangle = \boldsymbol{\lambda}^{\text{eff}} \langle \mathbf{Z}(\mathbf{r}) \rangle, \quad (1.38)$$

где $\langle \cdot \rangle$ усреднение по ансамблю. В общем случае $\boldsymbol{\lambda}^{\text{eff}} = \boldsymbol{\lambda}^{\text{eff}}(\mathbf{r})$ зависит от координаты. Мы предполагаем, что среда макроскопически однородна, следовательно, этой зависимостью можно пренебречь. Предположим также выполнение эргодической гипотезы, следствием которой является равенство среднего по ансамблю реализаций и среднему по объему среды. В дальнейшем под усреднением подразумевается усреднение по объему, то есть

$$\langle \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{dr} \mathbf{Q}(\mathbf{r}). \quad (1.39)$$

Рассматриваемый объем $|\Omega|$ должен быть достаточно большой по сравнению с характерным размером неоднородностей среды (минеральные зерна, органические включения), что необходимо для использования условия макроскопической однородности среды. Задача состоит в том, чтобы определить λ^{eff} по статистической информации о $\lambda(\mathbf{r})$. Для этого запишем для потока в состоянии равновесия закон сохранения

$$\nabla \mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (1.40)$$

Из уравнений (1.36), (1.37) и (1.40) следует, что

$$\nabla (\lambda^0 \mathbf{Z}(\mathbf{r})) = -\nabla (\delta \lambda(\mathbf{r}) \mathbf{Z}(\mathbf{r})). \quad (1.41)$$

Решение данного уравнения может быть записано в тензорном виде с помощью функции Грина $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ [Zeller, Dederichs, 1973]

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}) = \mathbf{Z}^0 + \mathbf{G}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * (\delta \lambda(\mathbf{r}') \mathbf{Z}(\mathbf{r}')),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{B}(\mathbf{r}') \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \mathbf{dr}' \mathbf{A}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{B}(\mathbf{r}'), \quad (1.42)$$

$$\mathbf{G}_{ij}^0(\mathbf{r}'') = \frac{\partial^2 \mathbf{g}^0(\mathbf{r}'')}{\partial \mathbf{r}_i \partial \mathbf{r}_j},$$

где \mathbf{Z}^0 – градиент температуры, установленный в среде с постоянной теплопроводностью λ^0 (произвольный тензор) с теми же граничными условиями. Скалярная функция Грина $\mathbf{g}^0(\mathbf{r}'')$ – это решение уравнения теплового потока в однородной среде с точечным источником, то есть

$$\lambda_{ij}^0 \frac{\partial^2 \mathbf{g}^0(\mathbf{r}'')}{\partial \mathbf{r}_i \partial \mathbf{r}_j} + \delta(\mathbf{r}'') = \mathbf{0} \quad (1.43)$$

с граничными условиями на поверхности $\mathbf{g}^0(\mathbf{r}'') = \mathbf{0}$ для всех \mathbf{r}'' , лежащих на границе области $\partial\Omega$. Выражение (1.42) сходно по записи с уравнением Липмана-Швингера или Дайсона из квантовой теории рассеяния, что позволяет воспользоваться ее методами.

Определим понятие T-матрицы как тензор второго порядка $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ следующим образом

$$\delta\lambda(\mathbf{r})\mathbf{Z}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}(\mathbf{r})\mathbf{Z}^0. \quad (1.44)$$

Из (1.42) следует, что для T-матрицы справедливо следующее выражение

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}) = \mathbf{Z}^0 + \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * (\mathbf{T}(\mathbf{r}')\mathbf{Z}^0). \quad (1.45)$$

Для нахождения неизвестной T-матрицы умножим (1.45) слева на $\delta\lambda(\mathbf{r})$

$$\delta\lambda(\mathbf{r})\mathbf{Z}(\mathbf{r}) = \delta\lambda(\mathbf{r})\mathbf{Z}^0 + \delta\lambda(\mathbf{r})\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * (\mathbf{T}(\mathbf{r}')\mathbf{Z}^0). \quad (1.46)$$

Левую часть этого выражения можно выразить по определению через T-матрицу (1.44). Так как \mathbf{Z}^0 – произвольная скалярная величина, то можно записать

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \delta\lambda(\mathbf{r}) + \delta\lambda(\mathbf{r})\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{T}(\mathbf{r}'). \quad (1.47)$$

Теперь получим выражение для эффективной теплопроводности через T-матрицу. Из уравнений (1.36) и (1.37) следует, что

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \lambda^0\mathbf{Z}(\mathbf{r}) + \delta\lambda(\mathbf{r})\mathbf{Z}(\mathbf{r}) = \lambda^0\mathbf{Z}(\mathbf{r}) + \mathbf{T}(\mathbf{r})\mathbf{Z}^0. \quad (1.48)$$

Усредним выражения (1.45) и (1.48)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Z}(\mathbf{r}) \rangle &= \mathbf{Z}^0 + \langle \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * (\mathbf{T}(\mathbf{r}')) \rangle \mathbf{Z}^0, \\ \langle \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \rangle &= \lambda^0 \langle \mathbf{Z}(\mathbf{r}) \rangle + \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle \mathbf{Z}^0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Из первого выражения определяем \mathbf{Z}^0 , подставим во второе и получаем

$$\langle \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \rangle = \left(\lambda^0 + \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * (\mathbf{T}(\mathbf{r}')) \right)^{-1} \right) \langle \mathbf{Z}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (1.50)$$

Отсюда из определения эффективной теплопроводности получаем

$$\boldsymbol{\lambda}^{\text{eff}} = \boldsymbol{\lambda}^0 + \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle (\mathbf{I} + \langle \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{T}(\mathbf{r}') \rangle)^{-1}. \quad (1.51)$$

Здесь и далее единичный оператор \mathbf{I} определен следующим образом

$$I_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.52)$$

Выражение (1.51) совпадает с аналогичным выражением для тензора упругости, полученного авторами Зеллер и Дедерихс [Zeller, Dederichs, 1973].

1.8.2 Эффективная теплопроводность среды с кусочно-постоянной функцией поля теплопроводности

Применим полученную формулу для эффективной теплопроводности для среды, на которой поле теплопроводности задано кусочно-постоянной функцией $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r})$. Горную породу можно представить в виде сплошной среды, разбитой на N семейств областей с одинаковой формой и теплопроводностью $\boldsymbol{\lambda}^k, k = 1, N$. Каждое из таких семейств содержит $\alpha = 1, n^k$ областей. Для каждой области Ω_α^k определим характеристическую функцию $\boldsymbol{\theta}_\alpha^k(\mathbf{r})$

$$\boldsymbol{\theta}_\alpha^k(\mathbf{r}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_\alpha^k, \quad (1.53)$$

$$\boldsymbol{\theta}_\alpha^k(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \notin \Omega_\alpha^k.$$

Тогда флуктуацию теплопроводности $\delta\boldsymbol{\lambda}_\alpha^k(\mathbf{r})$ в каждой из этих областей можно записать

$$\delta\boldsymbol{\lambda}_\alpha^k(\mathbf{r}) = \delta\boldsymbol{\lambda}^k \boldsymbol{\theta}_\alpha^k(\mathbf{r}), \quad (1.54)$$

$$\delta\boldsymbol{\lambda}^k = \boldsymbol{\lambda}^k - \boldsymbol{\lambda}^0. \quad (1.55)$$

Тогда для любой точки среды флуктуация теплопроводности примет вид

$$\delta\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=1}^{n^k} \delta\boldsymbol{\lambda}_\alpha^k(\mathbf{r}). \quad (1.56)$$

Разложение функции \mathbf{T} -матрицы $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ для рассматриваемой среды имеет вид

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=1}^{n^k} \mathbf{T}_{\alpha}^k(\mathbf{r}), \quad (1.57)$$

$$\mathbf{T}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) = \mathbf{T}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\theta}_{\alpha}^k(\mathbf{r}). \quad (1.58)$$

Из уравнений (1.47), (1.56) и (1.57) следует, что

$$\mathbf{T}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\delta} \lambda_{\alpha}^k(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\delta} \lambda_{\alpha}^k(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \sum_{l=1}^N \sum_{\beta=1}^{n^k} \mathbf{T}_{\beta}^l(\mathbf{r}'). \quad (1.59)$$

В приложении А показано, что если обозначить через $\mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r})$ решение уравнения

$$\mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\delta} \lambda_{\alpha}^k(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\delta} \lambda_{\alpha}^k(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r}'), \quad (1.60)$$

то (1.59) можно переписать через $\mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r})$

$$\mathbf{T}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) = \mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) \left(\mathbf{I} + \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \sum_{l=1}^N \sum_{\beta=1}^{n^k} \mathbf{T}_{\beta}^l(\mathbf{r}') - \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{T}_{\alpha}^k(\mathbf{r}') \right). \quad (1.61)$$

Невозможно получить численное решение этого уравнения без установления дополнительных допущений, так как уравнение (1.61) представляет собой бесконечный не сходящийся ряд. Рассмотрим далее различные приближения данного подхода.

В нулевом приближении

$$\mathbf{T}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) = \mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r}). \quad (1.62)$$

В первом приближении

$$\mathbf{T}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) = \mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) + \mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \sum_{l=1}^N \sum_{\beta=1}^{n^k} \mathbf{t}_{\beta}^l(\mathbf{r}') - \mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r}'). \quad (1.63)$$

Второе и третье слагаемое представляют собой взаимодействие между двумя включениями. В одном из следующих параграфов эти случаи будут подробно рассмотрены.

1.8.3 Эффективная теплопроводность среды с одним включением

Рассмотрим частный случай среды Ω^{med} с единственным однородным включением Ω^{inc} , имеющего форму эллипсоида. Допустим, что среда без включения – матрица Ω^{mat} однородна и имеет свойства λ^{mat} , возьмем в качестве постоянной части тензора теплопроводности среды λ^0 свойства матрицы, то есть $\lambda^0 = \lambda^{mat}$. Это позволяет опустить дополнительные расчеты $\mathbf{t}_\alpha^k(\mathbf{r})$ для матрицы Ω^{mat} , так как из (1.54) и (1.55) следует, что

$$\delta\lambda_\alpha^k(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \Omega^{mat}. \quad (1.64)$$

С учетом (1.60), (1.61) это приводит к

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\alpha^k(\mathbf{r}) &= \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \Omega^{mat}, \\ \mathbf{T}_\alpha^k(\mathbf{r}) &= \mathbf{0} \mathbf{r} \in \Omega^{mat}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Последнее выражение с учетом (1.61) означает, что мы можем перейти к $\mathbf{t}_\alpha^k(\mathbf{r})$ в записи выражения (1.44)

$$\delta\lambda_\alpha^k(\mathbf{r})\mathbf{Z}^{med}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{t}_\alpha^k(\mathbf{r})\mathbf{Z}^0, \quad (1.66)$$

где $\mathbf{Z}^{med}(\mathbf{r})$ – поле градиента температуры рассматриваемой среды Ω^{med} . Если его можно представить в виде

$$\mathbf{Z}^{med}(\mathbf{r}) = \mathbf{Z}_\alpha^k(\mathbf{r}) = \mathbf{Z}^k\theta_\alpha^k(\mathbf{r}), \quad (1.67)$$

тогда $\mathbf{t}_\alpha^k(\mathbf{r})$ также должен быть постоянным тензором, то есть

$$\mathbf{t}_\alpha^k(\mathbf{r}) = \mathbf{t}^k\theta_\alpha^k(\mathbf{r}). \quad (1.68)$$

С учетом этого, из (1.54) и (1.60) следует, что

$$\mathbf{t}^k\theta_\alpha^k(\mathbf{r}) = \delta\lambda^k\theta_\alpha^k(\mathbf{r}) + \delta\lambda^k\theta_\alpha^k(\mathbf{r})\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{t}^k\theta_\alpha^k(\mathbf{r}'). \quad (1.69)$$

Интегрируя по всему объему получим,

$$\mathbf{t}^k = \delta\lambda^k + \delta\lambda^k |\mathbf{G}(\mathbf{r})|\mathbf{t}^k, \quad (1.70)$$

или

$$\mathbf{t}^k = \left(\mathbf{I} - \delta\lambda^k \widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}) \right)^{-1} \delta\lambda^k, \quad (1.71)$$

где

$$\widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{1}}{|\Omega^{inc}|} \int_{\Omega^{inc}} d\mathbf{r} \int_{\Omega^{inc}} d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (1.72)$$

Определив \mathbf{t}^k , можно получить $\mathbf{t}_\alpha^k(\mathbf{r})$.

$$\mathbf{z}^k = \mathbf{Y}^k \mathbf{z}^0,$$

$$\mathbf{Y}^k \stackrel{\text{def}}{=} (\delta\lambda^k)^{-1} \mathbf{t}^k = \left(\mathbf{I} - \delta\lambda^k \widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}) \right)^{-1}. \quad (1.73)$$

В частном случае, когда включение имеет форму эллипсоида вращения $\widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{r})$ можно рассчитать по следующей формуле [Pozdniakov, Tsang, 2004] и:

$$\widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{r})_{ii} = -F_i / \lambda_{ii}^0, \quad (1.74)$$

где \tilde{F}_i коэффициент деполяризации для сплюснутого эллипсоида, аспектное отношение $\alpha < 1$,

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{2}(1 - F_3),$$

$$F_3 = \frac{(1 + \varkappa^2)}{\varkappa^3} (\varkappa - \mathit{arctg}(\varkappa)), \quad (1.75)$$

$$\varkappa = \sqrt{\alpha^{-2} - 1}.$$

и для выпуклого эллипсоида, аспектное отношение $\alpha > 1$,

$$\tilde{F}_3 = \frac{(1 - \varkappa^2)}{\varkappa^3} (\mathit{arcth}(\varkappa) - \varkappa), \quad (1.76)$$

$$\varkappa = \sqrt{1 - \alpha^{-2}}.$$

1.8.4 Эффективная теплопроводность среды ансамбля включений

Как было уже упомянуто, мы не можем посчитать численно точное решение задачи многих тел. Рассмотрим решение этой задачи в первом приближении, то есть без учета взаимодействий более чем двух включений. В приложении Б показано, что оператор T-матрицы можно разложить на сумму

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{T}_2(\mathbf{r}), \quad (1.77)$$

где

$$\mathbf{T}_1(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \mathbf{t}^k \tilde{\boldsymbol{\theta}}_\alpha^k(\mathbf{r}), \quad (1.78)$$

$$\mathbf{T}_2(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k,l} \mathbf{t}^k \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}) \tilde{\boldsymbol{\theta}}^l(\mathbf{r}') \mathbf{t}^l - \sum_{k,\alpha} \mathbf{t}^k \boldsymbol{\theta}_\alpha^k(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{t}^k \boldsymbol{\theta}_\alpha^k(\mathbf{r}'),$$

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}) = \sum_\alpha \boldsymbol{\theta}_\alpha^k(\mathbf{r}). \quad (1.79)$$

Усредняя по ансамблю выражение (1.77) получаем

$$\langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) \rangle + \langle \mathbf{T}_2(\mathbf{r}) \rangle, \quad (1.80)$$

$$\langle \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) \rangle = \sum_k \mathbf{t}^k \mathbf{v}^k, \quad \mathbf{v}^k = \langle \tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}) \rangle, \quad (1.81)$$

$$\langle \mathbf{T}_2(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{k,l} \mathbf{t}^k \langle \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}) \tilde{\boldsymbol{\theta}}^l(\mathbf{r}') \rangle \mathbf{t}^l - \sum_k \mathbf{t}^k \tilde{\mathbf{G}}^k \mathbf{t}^k, \quad (1.82)$$

где под интегральным выражением $\tilde{\mathbf{G}}^k$ совершен переход от усреднения по ансамблю к усреднению по объему

$$\tilde{\mathbf{G}}^k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\alpha \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega d\mathbf{r} \boldsymbol{\theta}_\alpha^k(\mathbf{r}) \int_\Omega d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \boldsymbol{\theta}_\alpha^k(\mathbf{r}'). \quad (1.83)$$

Отметим, что интегралы $\tilde{\mathbf{G}}^k$ и $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{r})$ связаны, если учитывать, что для каждого включения можно рассчитать коэффициент деполяризации \mathbf{F}^k :

$$\tilde{\mathbf{G}}^k \stackrel{\text{def}}{=} \nu^k \hat{\mathbf{G}}^k(\mathbf{r}), \quad (1.84)$$

так как

$$\nu^k = \sum_{\alpha} \frac{|\Omega^k|}{|\Omega|} = F^k \frac{|\Omega^k|}{|\Omega|}. \quad (1.85)$$

Зная $\langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle$, найдем теперь эффективную теплопроводность \mathbf{L}^{eff} из (1.51) при условии существования соответствующих обратных матриц:

$$\begin{aligned} (\delta\lambda^*)^{-1} &= \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle^{-1} + \langle \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{T}(\mathbf{r}') \rangle \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle^{-1}, \\ \delta\lambda^* &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda^{\text{eff}} - \lambda^0. \end{aligned} \quad (1.86)$$

После ряда преобразований с учетом (1.80) имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) \rangle (\delta\lambda^*)^{-1} &= \langle \mathbf{I} + \langle \mathbf{T}_2(\mathbf{r}) \rangle \langle \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) \rangle^{-1} \rangle^{-1} + \\ &+ \langle \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) \rangle \langle \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{T}(\mathbf{r}') \rangle \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle^{-1} \end{aligned} \quad (1.87)$$

Далее предположим, что эффекты, связанные с взаимодействием двух включений значительно меньше, чем с каждого включения с матрицей, то есть

$$\| \langle \mathbf{T}_2(\mathbf{r}) \rangle \langle \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) \rangle^{-1} \| \ll 1. \quad (1.88)$$

Это позволяет разложить по малому параметру первое слагаемое выражения в правой части уравнения (1.87)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) \rangle (\delta\lambda^*)^{-1} &= \mathbf{I} - \langle \mathbf{T}_2(\mathbf{r}) \rangle \langle \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) \rangle^{-1} + \\ &+ \langle \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) \rangle \langle \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{T}(\mathbf{r}') \rangle \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle^{-1}, \end{aligned} \quad (1.89)$$

или

$$\delta\lambda^* = (\mathbf{I} - \langle \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) \rangle^{-1} \mathbf{B})^{-1} \langle \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) \rangle, \quad (1.90)$$

$$\mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{T}_2(\mathbf{r}) \rangle + \langle \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) \rangle \langle \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{T}(\mathbf{r}') \rangle \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle^{-1} \langle \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) \rangle$$

Для нахождения \mathbf{B} воспользуемся уравнениями (1.81), (1.82) и (1.84):

$$\mathbf{B} = \sum_k \sum_l \mathbf{t}^k \mathbf{A}^{k,l} \mathbf{t}^l - \sum_k \mathbf{t}^k \tilde{\mathbf{G}}^k \mathbf{t}^k, \quad (1.91)$$

где

$$\mathbf{A}^{k,l} \stackrel{\text{def}}{=} \int d\mathbf{r}' (\langle \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}) \tilde{\boldsymbol{\theta}}^l(\mathbf{r}') \rangle - \langle \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{T}(\mathbf{r}') \rangle \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle^{-1} \langle \tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}) \rangle \langle \tilde{\boldsymbol{\theta}}^l(\mathbf{r}') \rangle). \quad (1.92)$$

Следуя формализму Шермергора [Шермергор, 1977], для корреляционного приближения в дальнейшем мы выносим тензор Грина за знак осреднения, тогда можно переписать

$$\mathbf{A}^{k,l} = \langle \mathbf{A}^{k,l} \rangle = \int d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\langle \tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}) \tilde{\boldsymbol{\theta}}^l(\mathbf{r}') \rangle - \langle \tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}) \rangle \langle \tilde{\boldsymbol{\theta}}^l(\mathbf{r}') \rangle). \quad (1.93)$$

$\mathbf{A}^{k,l}$ зависит только от λ^0 и от формы включений.

Рассчитаем $\mathbf{A}^{k,l}$ для среды с эллипсоидальным включением. Из (1.93) получаем

$$\langle \mathbf{A}^{k,l} \rangle = \delta_{kl} \nu^k \tilde{\mathbf{G}}^k - \nu^k \nu^l \tilde{\mathbf{G}}^{k,l} \int_{\Omega^{k,l}} d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathbf{r} \in \Omega^{k,l}, \quad (1.94)$$

где

$$\tilde{\mathbf{G}}^{k,l} = \int_{\Omega^{k,l}} d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathbf{r} \in \Omega^{k,l}, \quad (1.95)$$

а также

$$\mathbf{B} = - \sum_k \sum_l \mathbf{t}^k \nu^k \int_{\Omega^{k,l}} d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{t}^l \nu^l. \quad (1.96)$$

После ряда преобразований из уравнений (1.78), (1.86), (1.90) и (1.96) можно получить выражение для эффективной теплопроводности

$$\lambda^{eff} = \lambda^0 + \lambda_1 (\mathbf{I} + (\lambda_1)^{-1} \lambda_2)^{-1}, \quad (1.97)$$

$$\lambda_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \mathbf{t}^k \nu^k,$$

$$\lambda_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_m \sum_n \mathbf{t}^m \mathbf{v}^m \int_{\Omega^{k,l}} d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{t}^n \mathbf{v}^n.$$

или при разложении по малому параметру

$$\lambda^{eff} = \lambda^0 + \sum_k \mathbf{t}^k \mathbf{v}^k - \sum_k \sum_l \mathbf{t}^k \mathbf{v}^k \int_{\Omega^{k,l}} d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{t}^l \mathbf{v}^l + \mathbf{O}((\mathbf{v}^k)^3) \quad (1.98)$$

Выражение (1.97) согласуется с подобными оценками для тензора проницаемости [Jakobsen, 2007] удельной проводимости [Ландау, Лившиц, 2005] и упругости [Zeller, Dederichs, 1973].

Для использования формулы (1.97) необходимо задать теплопроводность λ^0 . Так как выбор этого значения произволен, то можно предположить, что она совпадает с эффективными свойствами среды, то есть $\lambda^{eff} = \lambda^0$. С учетом этого, а также пренебрегая в формуле (1.98) малой частью, мы получаем

$$\sum_k \mathbf{t}^k \mathbf{v}^k - \sum_k \sum_l \mathbf{t}^k \mathbf{v}^k \int_{\Omega^{k,l}} d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{t}^l \mathbf{v}^l = \mathbf{0}. \quad (1.99)$$

Если и только если $\int_{\Omega^{k,l}} d\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{G}$ для всех k и l , тогда это выражение можно записать как

$$\sum_k \mathbf{t}^k \mathbf{v}^k = \mathbf{0}. \quad (1.100)$$

Из определения \mathbf{t}^k следует, что

$$\sum_k (\lambda^k - \lambda^{eff}) (\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}) (\lambda^k - \lambda^{eff}))^{-1} \mathbf{v}^k = \mathbf{0} \quad (1.101)$$

или

$$\lambda^{eff} = \left(\sum_k \lambda^k \mathbf{Q}^k \mathbf{v}^k \right) \left(\sum_l \mathbf{Q}^l \mathbf{v}^l \right)^{-1}, \quad (1.102)$$

$$\mathbf{Q}^k = (\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{r}) (\lambda^k - \lambda^{eff}))^{-1}.$$

Последнее выражение было получено для теплопроводности, заданной в виде кусочно-постоянной функции. Обобщая это выражение на функции более общего вида, мы получаем выражение, аналогичное формуле (1.54) при условии, что в качестве тела сравнения выбрано тело со свойствами, совпадающими с эффективными свойствами среды

$$\lambda^{eff} = \langle \lambda(\mathbf{r})(I - \widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{r})(\lambda(\mathbf{r}) - \lambda^{eff}))^{-1} \rangle \langle (I - \widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{r})(\lambda(\mathbf{r}) - \lambda^{eff}))^{-1} \rangle^{-1}. \quad (1.103)$$

Используя результаты работ [Cantanedo, Willis, 1995] и [Шермергор, 1977], в которых рассмотрены эффективные упругие свойства, можно показать, что формула (1.97) аналогична выражению для эффективной теплопроводности, полученному с помощью обобщенного сингулярного приближения теории эффективных сред для произвольного тела сравнения

$$\lambda^{eff} = \langle \lambda(\mathbf{r})(I - \mathbf{G}(\lambda(\mathbf{r}) - \lambda^0))^{-1} \rangle \langle (I - \mathbf{G}(\lambda(\mathbf{r}) - \lambda^0))^{-1} \rangle^{-1}. \quad (1.104)$$

1.9 Экспериментальные методы определения теплопроводности

Механизм теплопередачи можно описать с помощью трех независимых процессов: теплопроводность, конвекция и тепловое излучение. На глубинах меньше 3 км тепловым излучением можно пренебречь, так как температура здесь не превышает 200°C. В данной работе рассматриваются только стационарные задачи, предполагается, что теплопередача конвекцией также пренебрежимо мала.

На сегодняшний день не существует ни одного метода измерения теплопроводности горных пород, одобренного признанными отечественными или зарубежными стандартами ГОСТ, ASTM, ISO, ASHRAE и др. Измерение теплопроводности горных пород осложняется рядом факторов: неоднородностью горных пород, анизотропией разной природы, наличием контактных эффектов между компонентами среды. В том числе теплопроводность зависит от изменения свойств насыщающего флюида, изменения структуры вследствие изменения напряженного состояния среды. Тем не менее, для применения большинства из

приведенных выше теоретических методов актуально определение эффективных свойств прямым измерением. Рассмотрим кратко наиболее распространенные методы измерения теплопроводности на горных породах.

Метод разделенного стержня является самым распространенным и стандартным методом измерения теплопроводности горных пород и задает стандарт точности его измерения [Chekhonin et al., 2012]. Согласно этому методу образец горной породы и стандартный образец с известной теплопроводностью помещают между латунными стержнями. Для создания теплового потока на концах этой конструкции задают разную постоянную температуру. При достижении стационарного потока определяется теплопроводность образца посредством сравнения изменения температуры на образце и на стандарте [Blackwell, Spafford, 1987].

В отличие от метода разделенного стержня метод линейного источника, предложенный Ягером [Jaeger, 1958], позволяет измерить теплопроводность в неустановившемся режиме. В основе этого метода лежит сравнение теоретического и экспериментального отклика материала на точечное тепловое воздействие. Измерения могут проводиться по всей поверхности образца при условии не нарушения граничных условий, то есть при сохранении расстояния от края образца, при котором не будет нарушен тепловой поток [Wait et al., 2006]. Это позволяет получить данные о теплопроводности на поверхности образца и установить наличие тепловых неоднородностей.

Согласно последним работам, наиболее сбалансированным с точки зрения следующих параметров: точность измерений, погрешность измерений, требования к пробоподготовке, скорость измерений, инвазивности – является метод оптического сканирования, предложенный Ю.А. Поповым [Попов, 1983]. Метод оптического сканирования также, как и метод линейного источника, проводит измерения в неустановившемся режиме.

Подробный сравнительный анализ трех методов можно найти в работах Ю.А. Попова [Popov et al., 2016; Popov et al., 1999].

1.10 Выводы к главе 1

В данной главе рассмотрены наиболее распространенные теоретические подходы для расчета эффективных свойств пород. Эти методы были разбиты на пять групп. Подходы первой группы, инженерные, имеют достаточно простую математическую формулировку и позволяют быстро оценить теплопроводность породы по ее составу. Подходы второй группы, эмпирические, используют имеющиеся экспериментальные данные для установления эмпирических зависимостей. Нейронные сети, подходы третьей группы, по своему основному смыслу близки ко второй группе моделей. Они позволяют установить больше зависимостей с лучшей точностью, но для их использования необходимо большое количество образцов, которые не всегда доступны. Методы первых трех групп не задают параметры, описывающие структуру среды. Для установления связи различных свойств необходим учет особенностей строения породы. Для этого могут быть использованы четвертая и пятая группа подходов. Модели цифрового ядра могут давать теоретически лучшие результаты по сравнению с подходами теории эффективных сред. Однако на сегодняшний день несовершенство инструментальной базы и отсутствие баз данных делает эти модели применимыми только для решения узкого класса задач. Наконец, подходы пятой группы теории эффективных сред рассматриваются автором как наиболее привлекательными, так как они позволяют учитывать особенности породы при достаточно сильном упрощении ее реальной структуры.

Для верификации описанных методов, кроме методов первой группы, необходимы надежные экспериментальные данные. Среди существующих методов измерения теплопроводности нашим требованиям удовлетворяет метод оптического сканирования.

Предложена новая методика по расчету эффективной теплопроводности породы на основе метода T-матрицы. Показано, что этот метод более общий, чем метод самосогласования.

Глава 2. Моделирование физических свойств карбонатных и терригенных типов пород. Решение задачи флюидозамещения для теплопроводности

В предыдущей главе были рассмотрены теоретические методы определения эффективных свойств горных пород. Автором были выбраны модели теории эффективных сред по следующим причинам. Во-первых, для их применения нет необходимости в большом объеме экспериментальных данных, во-вторых, в отличие от эмпирических зависимостей возможен контроль параметров модели физических свойств породы, то есть можно исследовать, как меняются эффективные свойства в зависимости от них. В связи с этим в качестве основы предлагаемой здесь методики связи упругих и тепловых свойств горных пород был выбран метод теории эффективных сред.

Как было показано в главе 1, связь различных эффективных свойств обеспечивается за счет того, что математическая запись уравнений равновесия для стационарной задачи является одинаковой, как для тепловых, так и для упругих свойств. Единая запись уравнений позволяет ввести параметры, которые характеризуют структуру породы и которые одинаковы при решении задачи прогноза как тепловых, так и упругих свойств. Предлагаемая методика позволяет рассчитать эти параметры по результатам измерений эффективных физических свойств породы.

В данной главе описывается теоретико-экспериментальный подход, позволяющий на основе единой математической модели физических свойств карбонатных и терригенных типов пород связать тепловые свойства этих пород (теплопроводность и тепловой коэффициент линейного расширения) с модулями упругости породы.

2.1 Основные принципы методики построения обобщенных моделей физических свойств пород

Для построения единой математической модели физических свойств породы была использована теория эффективных сред в обобщенном сингулярном

приближении. В основе предлагаемой методики лежит возможность единообразной записи уравнений связи эффективных упругих и тепловых свойств породы и параметров, характеризующих ее её состав и строение структуры. Подход применим для решения стационарных задач.

Эффективные свойства пород зависят от множества факторов: плотности, пористости, минерального состава пород, размера минеральных зерен, формы неоднородностей, включений, наличия и формы трещин и порового пространства, объемного содержания компонент, наличия или отсутствия развитой площади контактов между зернами и других параметров [Maqsood et al., 2004]. Предлагаемая методика не ставит задачу восстановления реальной структуры среды, наоборот, задача состоит в том, чтобы минимизировать количество параметров, описывающих структуру среды, при этом сохраняя основные ее особенности.

Под математической моделью эффективных физических свойств породы понимают триаду, составными частями которой являются:

- 1) Модельная среда, отражающая основные черты строения породы.
- 2) Параметры модели, описывающие ее структуру и свойства (форма зерен, пустот, связность компонент, пористость разного вида, параметры, характеризующие свойства компонент).
- 3) Уравнения связи между физическими свойствами и параметрами модели.

В основе построения моделей физических свойств горных пород лежат два основных принципа, которые будут подробно рассмотрены в следующих параграфах.

1. Принцип связи различных эффективных свойств породы и единых параметров структуры ее модели.
2. Принцип построения структуры модели физических свойств породы, который позволяет учитывать основные особенности породы, с минимальным количеством параметров.

2.2 Уравнение связи тепловых и упругих свойств горных пород с параметрами ее структуры

В этой части параграфа представлены уравнения, связывающие параметры структуры пористой среды и ее эффективных свойств. Уравнения получены на основе метода обобщенного сингулярного приближения теории эффективных сред, описанного подробно в главе 1.

Предполагается, что порода представляет собой микронеоднородную пористую среду. При это предполагается макрооднородность эффективных свойств породы, то есть ее физические свойства не меняются при увеличении рассматриваемого объема, начиная с некоторого масштаба. Для связи эффективных свойств ограниченной среды и параметров ее структуры мы используем следующее выражение, вывод которого представлен в главе 1,

$$\mathbf{X}^{eff} = \langle \mathbf{X}(\mathbf{r})(\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{X}'(\mathbf{r}))^{-1} \rangle \langle (\mathbf{I} - \mathbf{g}\mathbf{X}'(\mathbf{r}))^{-1} \rangle^{-1}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{X}^{eff} – эффективное свойство (тензор упругости, теплопроводности) среды, $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ – соответствующее локальное свойство образца, $\mathbf{X}'(\mathbf{r}) = \mathbf{X}(\mathbf{r}) - \mathbf{X}^c$, \mathbf{X}^c – соответствующее свойство тела сравнения, которое учитывает связность элементов порового пространства и так называемые контактные эффекты, \mathbf{g} – сингулярная часть второй производной тензора Грина, которая зависит от геометрии элементов пустотного пространства среды. Свойства тела сравнения будут рассмотрены в следующем параграфе этой главы при построении моделей физических свойств карбонатного и терригенного типов пород.

Рассмотрим далее тепловые свойства среды. Для транспортных свойств тензор \mathbf{g} может быть записан через тензор деполяризации \mathbf{F} , который зависит исключительно от формы компонент породы [Ландау, Лившиц, 2005]

$$\mathbf{g} = -(\mathbf{X}^c)^{-1}\mathbf{F} \quad (2.2)$$

Для нахождения численного решения этого уравнения необходимо сделать упрощение модели среды. Положим, что все компоненты среды имеют форму

эллипсоида. В таком случае главные компоненты тензора деполяризации представимы в виде эллиптических интегралов

$$F_i = \frac{X_1 X_2 X_3}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s + X_i^2) \sqrt{(s + X_1^2)(s + X_2^2)(s + X_3^2)}} \quad (2.3)$$

X_i – длина оси i эллипсоида, F_i изменяется в диапазоне от нуля до единицы.

Для эллипсоидов вращения $X_1 = X_2$, а значит справедливо следующее

$$F_1 = F_2 \stackrel{\text{def}}{=} F, F_3 = 1 - 2F \quad (2.4)$$

Аспектное отношение эллипсоида вращения – соотношение его полуосей. Этот параметр, который характеризует его форму. В дальнейшем мы будем использовать этот параметр для описания геометрии структуры порового пространства. Если аспектное отношение элемента порового пространства близко к нулю, тогда этот элемент имеет трещиновидную форму, если близко к единице, тогда он имеет сферическую форму, а при дальнейшем росте аспектного отношения, элемент получает приобретает форму карандаша. Это позволяет описывать широкую вариацию форм компонентов породы.

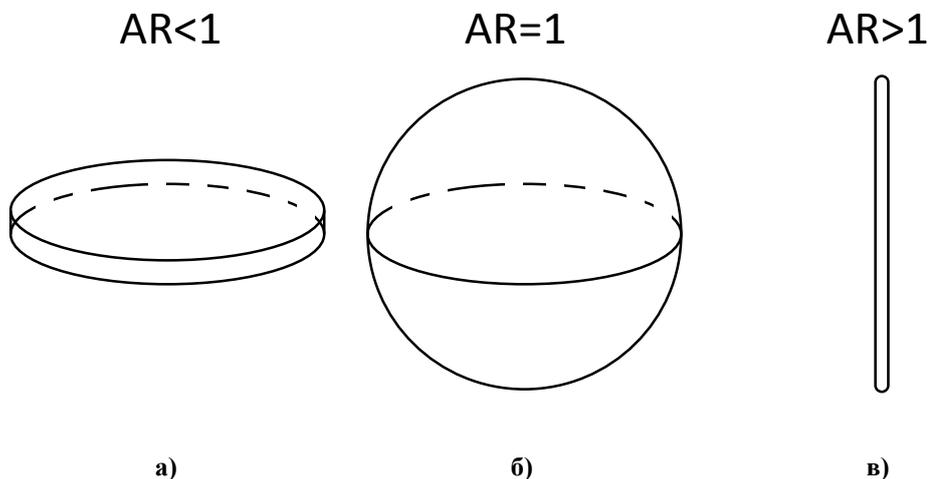


Рисунок 2.1 – Схема, отражающая изменение формы элемента компоненты среды в зависимости от аспектного отношения. Аспектное отношение (AR) а) меньше единицы, б) равно единице и в) больше единицы.

Рассмотрим в качестве примера расчет эффективной теплопроводности двухкомпонентной среды «матрица-флюид», в которой все элементы ее

компонент имеют единую форму, описываемую коэффициентом деполяризации для флюида $F^{\text{фл}}$ и для матрицы $F^{\text{мат}}$. Продольная компонента теплопроводности имеет вид:

$$\lambda_{\text{прод}} = \frac{\frac{v\lambda^{\text{фл}}\lambda^c}{(F^{\text{фл}}\lambda^{\text{фл}} + (1 - F^{\text{фл}})\lambda^c)} + \frac{(1 - v)\lambda^{\text{мат}}\lambda^c}{(F^{\text{мат}}\lambda^{\text{мат}} + (1 - F^{\text{мат}})\lambda^c)}}{\frac{v\lambda^c}{(F^{\text{фл}}\lambda^{\text{фл}} + (1 - F^{\text{фл}})\lambda^c)} + \frac{(1 - v)\lambda^c}{(F^{\text{мат}}\lambda^{\text{мат}} + (1 - F^{\text{мат}})\lambda^c)}}. \quad (2.5)$$

Для поперечной компоненты эффективной теплопроводности

$$\lambda_{\text{попер}} = \frac{\frac{v\lambda^{\text{фл}}\lambda^c}{((1 - F^{\text{фл}})\lambda^{\text{фл}} + (1 + F^{\text{фл}})\lambda^c)} + \frac{(1 - v)\lambda^{\text{мат}}\lambda^c}{((1 - F^{\text{мат}})\lambda^{\text{мат}} + (1 + F^{\text{мат}})\lambda^c)}}{\frac{v\lambda^c}{((1 - F^{\text{фл}})\lambda^{\text{фл}} + (1 + F^{\text{фл}})\lambda^c)} + \frac{(1 - v)\lambda^c}{((1 - F^{\text{мат}})\lambda^{\text{мат}} + (1 + F^{\text{мат}})\lambda^c)}}. \quad (2.6)$$

В изотропной среде нет выделенного направления, все компоненты направлены хаотично. С учетом этого для эффективной теплопроводности изотропной среды получим:

$$\lambda^{\text{eff}} = \frac{1}{3}(\lambda^{\text{tran}} + 2\lambda^{\text{long}}). \quad (2.7)$$

Для расчета эффективных упругих свойств тензор \mathbf{g} был рассчитан напрямую через вторую производную тензора Грина:

$$g_{ijkl}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \int_V G_{k(i,j)(i}(r - \tau)d\tau,$$

$$g_{ijkl} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\theta, \phi=0}^{\pi} n_m n_n \Lambda_{ij}^{-1} \sin\theta d\theta d\phi, \Lambda_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} C_{imjn}^c n_m n_n, \quad (2.8)$$

$$n_1 = \frac{1}{a_1} \sin\theta \cos\phi, n_2 = \frac{1}{a_2} \sin\theta \sin\phi, n_3 = \frac{1}{a_3} \cos\theta,$$

где a_1, a_2, a_3 – полуоси эллипсоида, моделирующего элемент поровой среды. Из этих формул видно, что для эллипсоидального включения тензор g_{ijkl} не зависит от координат.

Если известны упругие свойства породы, то можно оценить и тепловой коэффициент линейного расширения породы. Для этого можно использовать следующее выражение [Вауик et al., 2011]

$$k^{\text{эфф}} = \langle k \rangle + (k^{\text{мат}} - k^{\text{фл}}) \frac{(K^{\text{эфф}})^{-1} - (K_{\text{Ройсс}}^{\text{эфф}})^{-1}}{(K^{\text{мат}})^{-1} - (K^{\text{фл}})^{-1}}, \quad (2.9)$$

где k – коэффициент линейного расширения, $K_{\text{Ройсс}}^{\text{эфф}}$ – объемный модуль упругости, рассчитанный по формуле Ройсса (1.2).

2.3 Основные этапы построения математических моделей эффективных физических свойств пород, основанных на едином описании их микроструктуры

Уравнения связи эффективных физических свойств установлены. Переходим ко второму принципу – моделирование эффективных физических свойств горных пород. В этой части второй главы рассмотрены основные этапы построения математических моделей физических свойств пород с учетом их структуры. Были выделены пять этапов.

1. Определение характерного масштаба породы.

На первом этапе необходимо определить и соотнести друг с другом характерные масштабы неоднородностей, трещин, включений породы, а также характерные величины, связанные с методом и установкой. Необходимо определить минимальный размер порового пространства, начиная с которого начинается движение насыщаемого флюида. Особое внимание уделяется возможности движения флюида на наномасштабе. Также необходимо соотнести, например, для упругих свойств, длину акустической волны и размера характерных неоднородностей породы.

2. Предварительный геологический анализ породы

Второй этап подразумевает всесторонний анализ истории образования и развития породы, связанный с изменением ее структуры, и минерального состава

породы. Анализ процесса породообразования предполагает изучение стадии литогенеза. Не исключаются более глубокие стадии, при которых меняется минеральный состав пород и их структура и происходит максимальное уплотнение осадочных пород. Под изменением структуры пород подразумевается укрупнение размера минеральных зерен, упорядочивание их ориентировки. В результате проведения этого анализа может быть сделан вывод о возможности возникновения в породе макротрещин на масштабе керна и/или крупных органических включений, исключительных областей, в которых содержится глины и др. Это позволяет ограничивать возможный диапазон изменения формы зерен, элементов пустотного пространства, трещин и др.

Анализ вещественного состава пород включает в том числе определение минерального и элементного состава пород методами рентгеноструктурного анализа XRD, или методом инфракрасной спектроскопии с использованием преобразования Фурье FTIR [Ruessink, Harville, 1992], рентгенофлуоресцентного анализа XRF [Leoni, Saitta, 1976] или химического состава методом рентгеноспектрального микроанализа EPMA [Shukuno, 1995]. По результатам этого анализа может быть получена грубая оценка теплопроводности минеральной матрицы, величину которой определить прямыми измерениями невозможно.

Структурный анализ образца в разных масштабах представляет собой целый комплекс анализа фотографий структуры породы, полученных на разных масштабах с помощью оптического и сканирующего электронного микроскопа. В результате этого анализа могут быть установлены связность пустотного пространства (параметр модели), форма компонент пород (минеральных зерен, пустот, включений органического вещества). Если наблюдается упорядоченность формы компонент породы, то это может привести к анизотропии ее физических свойств.

3. Выделение минимального числа параметров модели, определяющих макроскопические физические свойства коллектора. Определение

значений, границ диапазона изменения параметров модели на разных масштабах.

После проведения первого и второго этапов необходимо параметризовать модель физических свойств породы, то есть выделить основные характеристики, влияющие на эффективные свойства породы.

4. В случае необходимости проведение корректировки параметров математической модели на основании сравнения расчетных значений (скоростей продольных и поперечных волн, теплопроводности и др.) с соответствующими экспериментальными значениями.

Предлагаемая методика расчета эффективных свойств предполагает необходимость использования экспериментальных данных, полученных на репрезентативных образцах породы. Они необходимы для настройки математической модели физических свойств породы. Расхождение расчетных и экспериментальных данных свидетельствует о необходимости пересмотра выделенных параметров модели, границ изменения этих параметров. Это может быть связано как с недостаточно детальным анализом структуры породы, так и с неправильным выбором одного из ключевых параметров модели – свойства тела сравнения, характеризующего связность пустотного пространства. При большом количестве образцов и достаточном количестве экспериментальных данных проведение корректировки, как правило, не требуется. Следует отметить, что измерение эффективных свойств породы входит в комплексный анализ породы. Измерения должны проводиться по методике, позволяющей выявить возможную анизотропию ее физических свойств.

5. Проведение параметрического исследования модели, то есть определение чувствительности модели к изменению ее параметров.

2.4 Описание коллекций и построение модельных сред

В этом параграфе описано применение предлагаемой методики к построению параметрических моделей теплопроводности для некоторых карбонатных и терригенных типов пород.

В данной работе мы исследовали две коллекции по 102 и по 55 репрезентативных образцов карбонатного типа пород, извлеченных из двух различных месторождений, а также 93 образцами терригенного типа пород [Ялаев и др., 2013а; Ялаев и др., 2013b; Ялаев и др., 2014].

В результате проведения специального комплексного петрофизического анализа были установлены характеристики состава, структуры и физических свойств каждой породы: размеры зерен минеральной матрицы, связность пустотного пространства, диапазон изменения формы элементов порового пространства, наличие анизотропии свойств, наличие или отсутствие преимущественной ориентации минералов, масштаб движения флюидов, свойства минеральной матрицы и эффективная теплопроводность пород.

Ниже приводится геологическое описание этих пород.

Коллекция 1. Первая коллекция представлена 102 образцами биогермных, органогенно-детритовых известняков, иногда кристаллически-зернистых (перекристаллизованных) известняков, известковистых доломитов (вторичных доломитов), доломитизированных известняков, кремнисто-карбонатных пород. По типу пустотного пространства их можно разделить на пористые, кавернозно-пористые, трещиноватые и плотные породы.

Образцы были отобраны таким образом, чтобы диапазон пористости покрывал как можно больший диапазон. Это позволяет оценить косвенным методом матричные (без пор) свойства образца. Для отобранных образцов диапазон пористости составляет от 0,27% до 30,56%, а диапазон проницаемости – от 0 до 0,07 дарси. Минеральная плотность пород составляет 2,73 до 2,84 г/см³.

Коллекция 2. Образцы второй коллекции представлены 55 образцами продуктивных отложений франского яруса, которые сложены довольно

однообразными известняками, органогенными водорослево-сгустковыми, комковато-сгустковыми, сферово-сгустковыми. Различаются крупнокомковатые от 0,5 до 3 мм и мелкокомковатые от 0,1 до 0,5 мм разности известняков, которые располагаются линзовидно и постепенно переходят друг в друга. Четкой закономерности в распространении крупно- и мелкокомковатых разностей по разрезу не отмечается. Породы состоят из чистого кальцита.

Коллекция 3. Третья коллекция представлена 91 образцами терригенного типа пород с пористостью от 13,9% до 28,6%. В основном они представлены кварцевыми песчаниками, однако также присутствуют образцы из кварцевого песчаника с лейкоксеном, лейкоксен-кварцевого песчаника, песчаника кварцевого с глинистым и глинисто-сидеритовым цементом, и алевролитов.

Основные общие уравнения используемой методики были приведены в предыдущих частях этой главы. Далее будут рассмотрены особенности конкретных пород, представленных тремя коллекциями. При построении модели физических свойств карбонатного типа пород были приняты следующие предположения. Все компоненты среды представлены в виде эллипсоидов вращения, они распределены в пространстве случайным образом. Сумма объемных долей элементов пустотного пространства составляет величину равную пористости образца. Минеральные зерна имеют фиксированную форму близкую к сфере с аспектным отношением 0,8. Форма элементов порового пространства не фиксирована. Предполагается, что эта величина подчиняется закону бета-распределения в интервале от 0,0001 до 1,0 для аспектного отношения, установленному в результате комплексного геологического анализа породы. Функция распределения выбрана с учетом ограниченности изменения параметра аспектного отношения, исключены очень узкие и вытянутые трещины и включения, так как они не наблюдаются в породе. В качестве тела сравнения было выбрано тело с эффективными свойствами породы, это связано с тем, что элементы пустотного пространства связаны между собой развитыми контактами. Это можно определить по результатам анализа шлифов как на рисунке 2.2, а

неоднородности можно представить в виде замкнутых областей – эллипсоидов разной формы (аспектного отношения).

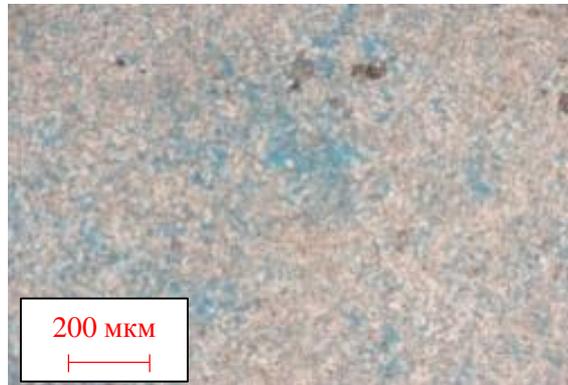


Рисунок 2.2 – Фотография шлифа, изготовленного из образца карбонатного типа пород коллекции 1, под оптическим микроскопом.

При построении модели физических свойств терригенного типа пород были приняты следующие предположения. Все компоненты среды представлены в виде эллипсоидов вращения, они распределены в пространстве случайным образом. Сумма объемных долей элементов пустотного пространства составляет величину равную пористости образца. Минеральные зерна имеют фиксированную форму близкую к сфере с аспектным отношением 1,0. Форма элементов порового пространства не фиксирована. Предполагается, что эта величина подчиняется закону бета-распределения в интервале от 0,00001 до 10 для аспектного отношения, установленному в результате комплексного геологического анализа породы. Функция распределения выбрана с учетом ограниченности изменения параметра аспектного отношения, и хотя мы не наблюдали никаких трещин в породе, между минеральными зернами были обнаружены узкие вытянутые каналы, относительное раскрытие которых (аспектное отношение) близко к 10^{-5} . В качестве тела сравнения было выбрано тело сравнения, свойства которого определяются параметром связности f . Это связано с тем, что условные элементы порового пространства на качественном уровне хорошо связаны между собой.

Другими словами, площадь поверхности минеральных зерен, не контактирующих с другими зернами, велика. Это видно на фотографии шлифа (рисунок 2.2).

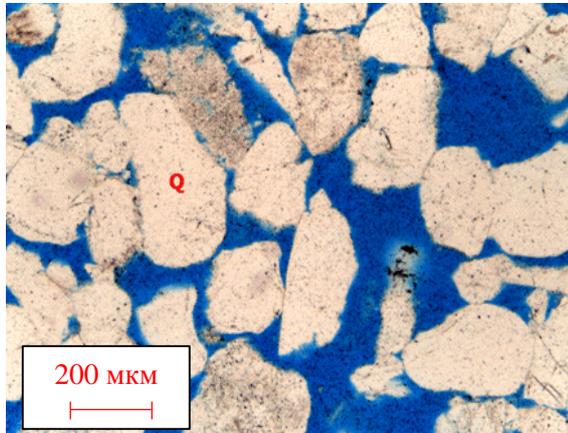


Рисунок 2.3 – Фотография шлифа, изготовленного из образца терригенного типа пород коллекции 3, под оптическим микроскопом.

Мы ограничились рассмотрением только эллипсоидов вращения, так как это уменьшает количество параметров модели по сравнению со случаем рассмотрения эллипсоида общего вида (с тремя разными осями).

2.5 Определение параметров модели породы

Не все параметры математической модели физических свойств породы могут быть определены прямым измерением. В нашем случае неизвестными параметрами математической модели физических свойств являются: теплопроводность минеральной матрицы и параметры функции плотности вероятности бета-распределения для описания вариации аспектного соотношения элементов пустотного пространства. Тем не менее, мы определили их по экспериментальным данным в результате решения обратной задачи. Прямая задача – это задача определения эффективных свойств с помощью формул (2.1), (2.2) и (2.8) по известным параметрам модели породы. Обратная задача состоит в нахождении всех или части параметров модели по экспериментальным данным.

Для решения обратной задачи был использован один из методов нелинейной оптимизации с ограничениями на искомые параметры, известный как

метод Нелдера-Мида или метод деформируемого многогранника [Nelder, Mead, 1965]. Этот метод был выбран, так как для его использования не надо рассчитывать на каждом шаге градиент функции. В качестве невязки экспериментальных и расчетных данных было использовано выражение

$$\sqrt{\sum_{i,k} \frac{(\lambda_{i,k}^{eff} - \lambda_{i,k}^{exp})^2}{(\lambda_{i,k}^{exp})^2}}, \quad (2.10)$$

индексы i и k указывают номер образца и номер порозаполняющего флюида, $\lambda_{i,k}^{exp}$ – измеренная теплопроводность образца, $\lambda_{i,k}^{eff}$ - теплопроводность образца, полученная в рамках методики.

Здесь и далее вид функционала выбран таким образом, чтобы сделать максимально правдоподобную оценку, в результате серий измерений было установлено, что разброс значений теплопроводности подчиняется случайному распределению, а дисперсия зависит квадратично от значения.

Ограничение диапазона вариации параметров модели играют важную роль при решении обратной задачи. Иногда, особенно, для пород со сложной структурой число параметров модели превышает число экспериментальных данных. Это, в свою очередь, приводит к неоднозначности решения обратной задачи и она становится некорректно поставленной по Адамару [Кабанихин, 2009]. Ограничение параметров – является одним из способов ее регуляризации, поэтому нами были использованы любые источники информации, которые влияют на эти параметры. Используемый метод нелинейной оптимизации позволяет произвести быстрый расчет неизвестных параметров моделей. Однако если область решения обратной задачи большая относительно потребностей задачи, то следует применять другие методы. В главе 3 и 4 данной работы был использован метод Монте-Карло, основанный на случайных реализациях модели.

Единые параметры модели физических свойств породы позволяют рассчитать в дальнейшем одни физические свойства через другие.

Для оценки упругих свойств породы помимо параметров, характеризующих особенности структуры породы, также были определены упругие свойства минеральной матрицы, упругие свойства флюида и плотность породы.

2.6 Решение задачи флюидозамещения для теплопроводности на примере карбонатных и терригенных типов пород

В этой части главы представлены результаты решения задачи флюидозамещения для теплопроводности с использованием построенных математических моделей теплопроводности пород карбонатного и терригенного типов [Yalaev et al., 2016]. В работе Фучз указано, что наилучшее решение этой задачи показывает модель Лихтенеккера (1.8), однако результаты расчетов при этом остаются неудовлетворительными [Fuchs et al., 2013b].

После отбора образцов карбонатных и терригенных типов пород были проведены измерения фильтрационно-емкостных характеристик для каждого образца. Затем были проведены серии измерений теплопроводности образцов, насыщенных последовательно тремя различными флюидами. Последовательно были определены теплопроводность сухого образца, теплопроводность образца, насыщенного моделью пластовой воды, и теплопроводность образца, насыщенного моделью пластовой нефти для терригенного [Новиков, 2009] и карбонатного типа пород. В качестве модели пластового флюида был использован водный раствор соли хлорида натрия NaCl с концентрацией 15 г/л, а для модели пластовой нефти – керосин. В таблице (2.1) отображены тепловые свойства этих флюидов [Новиков и др., 2009].

Таблица 2.1 Теплопроводность флюидов, использованных для насыщения породы

Тепловые свойства	Воздух	Модель пластовой нефти	Модель пластового флюида
Теплопроводность, Вт/(м·К)	0,024	0,11	0,60
Объемная теплоемкость, кДж/(кг·К)	1,00	2,01	3,93

Полученные данные по измерению теплопроводности пород позволяют сделать косвенную оценку теплопроводности матрицы породы, то есть теплопроводности ее жесткой составляющей без учета порового пространства, одного из параметров модели физических свойств породы. На рисунке 2.4 представлено поле корреляции между измеренной теплопроводностью образцов терригенного типа коллектора и пористостью. В качестве интерполирующей кривой была выбрана экспоненциальная функция, как функция которая дает минимальное среднеквадратичное отклонение от экспериментальных данных. После экстраполяции этих кривых на нулевую пористость была получена оценка теплопроводности матрицы для всей породы 5,05 Вт/(м·К). Это позволило нам ограничить этот параметр для нашей модели в диапазоне от 4,5 до 6,0 Вт/(м·К).

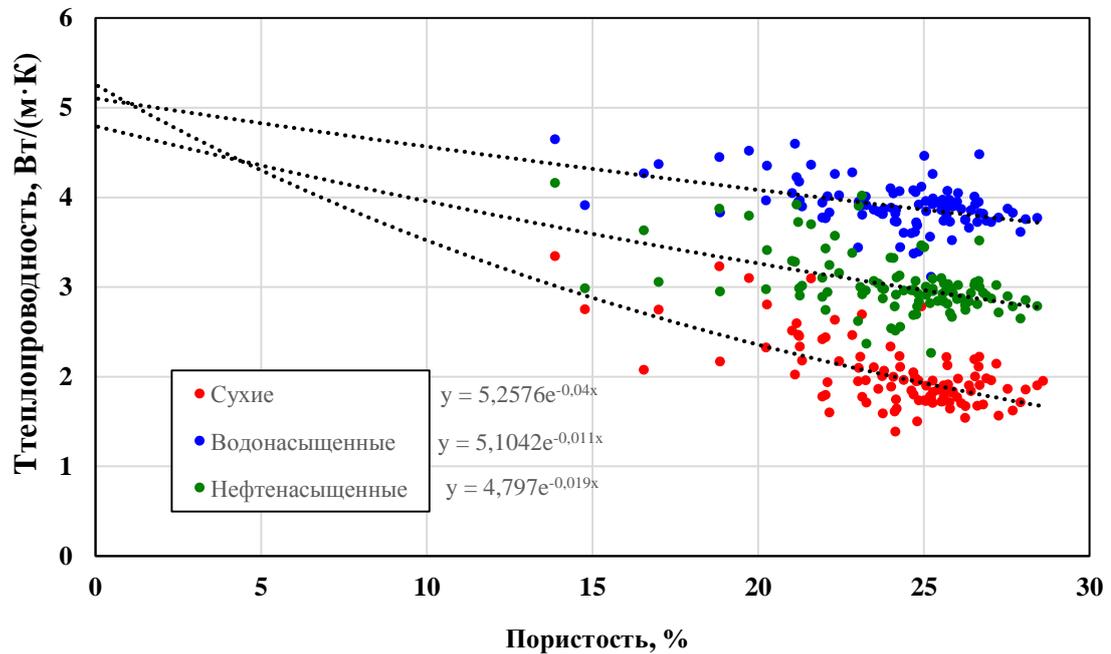


Рисунок 2.4 – Поле корреляции между теплопроводностью образцов и их пористостью для сухих, водонасыщенных и нефтенасыщенных образцов коллекции 3 терригенного типа коллектора. Линии обозначают интерполирующие функции по соответствующим данным.

По аналогии были определены границы для теплопроводности матрицы для коллекций карбонатного типа пород от 2,5 до 4,2 Вт/(м·К) (рисунок 2.5). Оценка теплопроводности матрицы составила 3,16 Вт/(м·К).

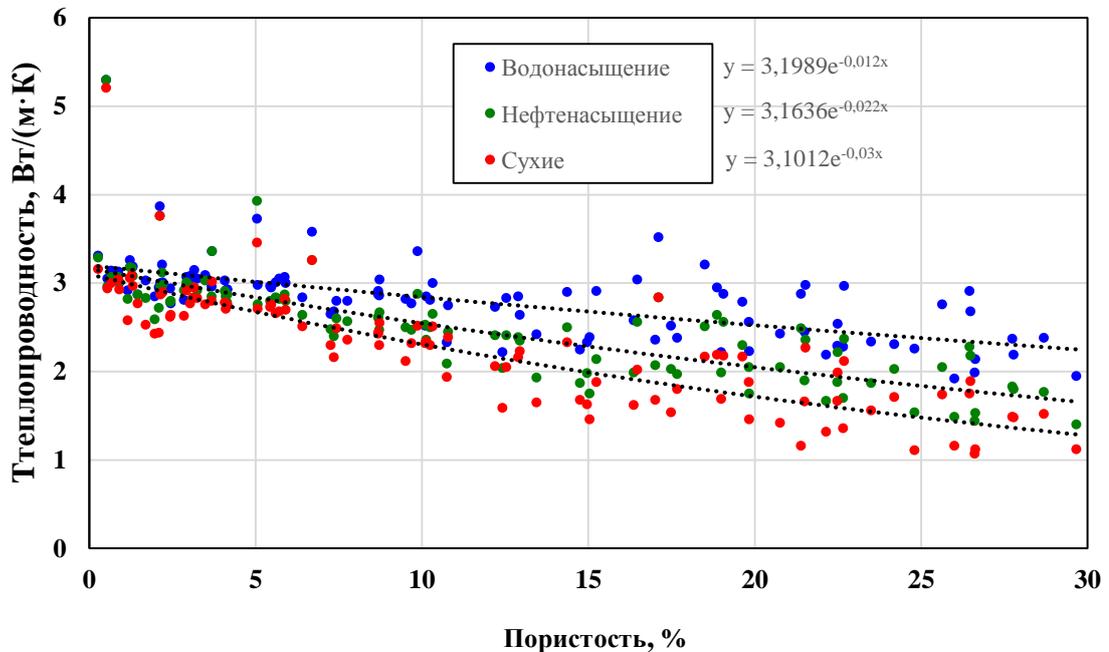


Рисунок 2.5 – Поле корреляции между теплопроводностью образцов и их пористостью для сухих, водонасыщенных и нефтенасыщенных образцов коллекции 1 карбонатного типа коллектора. Линии обозначают интерполирующие функции по соответствующим данным.

Рассмотрим далее задачу определения теплопроводности образцов, насыщенных нефтью, по данным о теплопроводности сухих и водонасыщенных образцов [Yalaev et al., 2016]. Такая задача может быть актуальна в связи со слабой консолидацией породы и, как следствие, невозможностью насытить ее тяжелой нефтью с целью проведения эксперимента по измерению теплопроводности в нефтенасыщенном состоянии. Схема алгоритма решения задачи флюидозамещения представлена на рисунке 2.6.

После определения теплопроводности образцов решалась обратная задача по минимизации невязки экспериментальных и расчетных значений теплопроводности, полученных по выражению (2.10), расчеты проводились

отдельно для каждого образца с целью определения неизвестных параметров модели.

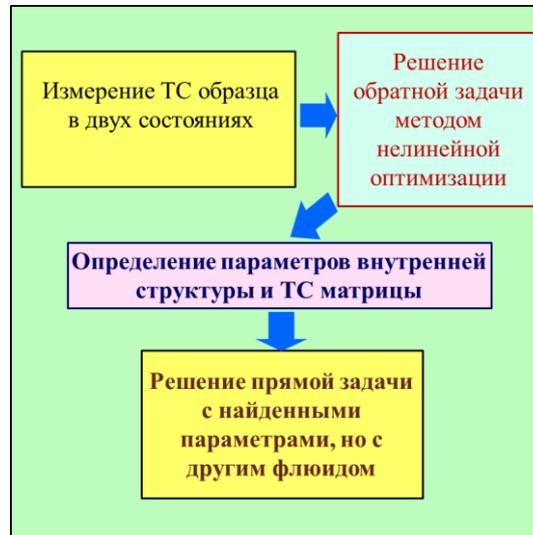


Рисунок 2.6 – Схема алгоритма прогноза теплопроводности флюидонасыщенного образца по данным о его теплопроводности при насыщении другими флюидами. ТС – теплопроводность.

После этого производился расчет эффективной теплопроводности образца, насыщенного нефтью по результатам решения прямой задачи с найденными параметрами структуры породы и известным значением теплопроводности модели пластовой нефти. Аналогичным способом были найдены теплопроводность сухого образца и водонасыщенного образца по соответствующим оставшимся парам измерений. На рисунках 2.7-2.9 представлены графики прогнозных значений теплопроводности с разными насыщающими флюидами для образцов карбонатного и терригенного типа коллектора в сравнении с соответствующими экспериментальными данными. На всех графиках расчетные и экспериментальные значения показаны значками (ромбами и треугольниками).

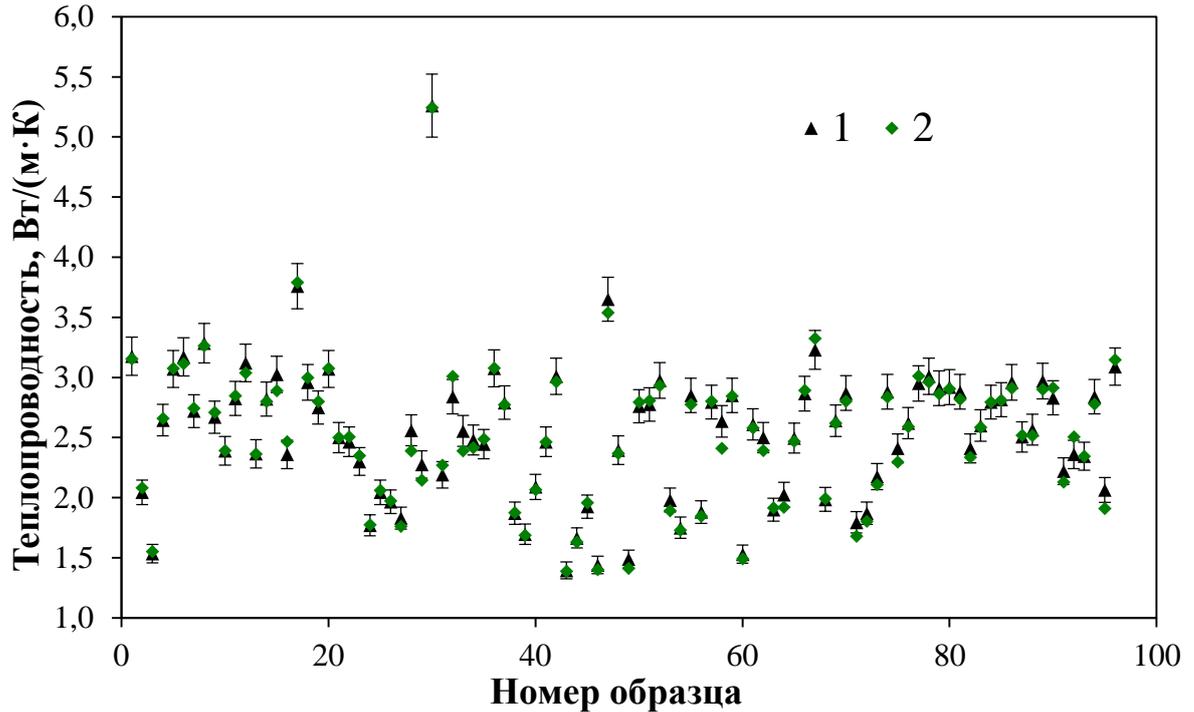


Рисунок 2.7 – Сравнение расчетной (2) и измеренной (1) теплопроводности нефтенасыщенных образцов карбонатного типа коллектора коллекции 1. Разброс соответствует относительному 5%-ному отклонению.

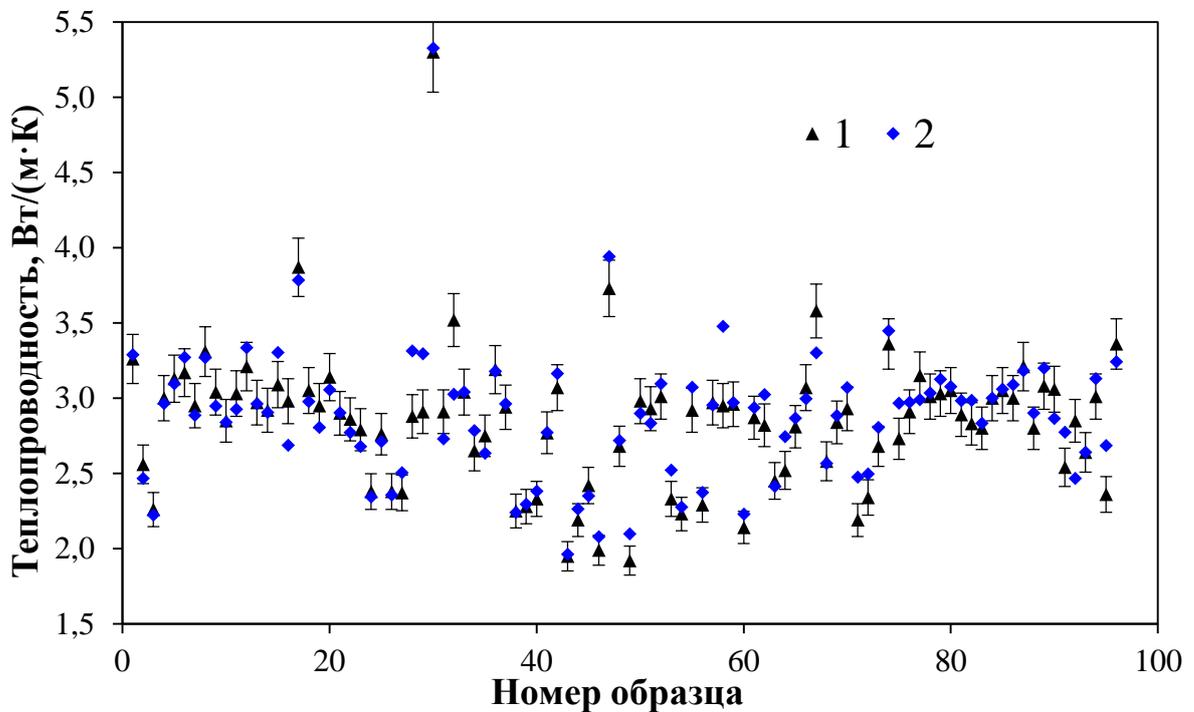


Рисунок 2.8 – Сравнение расчетной (2) и измеренной (1) теплопроводности водонасыщенных образцов карбонатного типа коллектора коллекции 1. Разброс соответствует относительному 5%-ному отклонению.

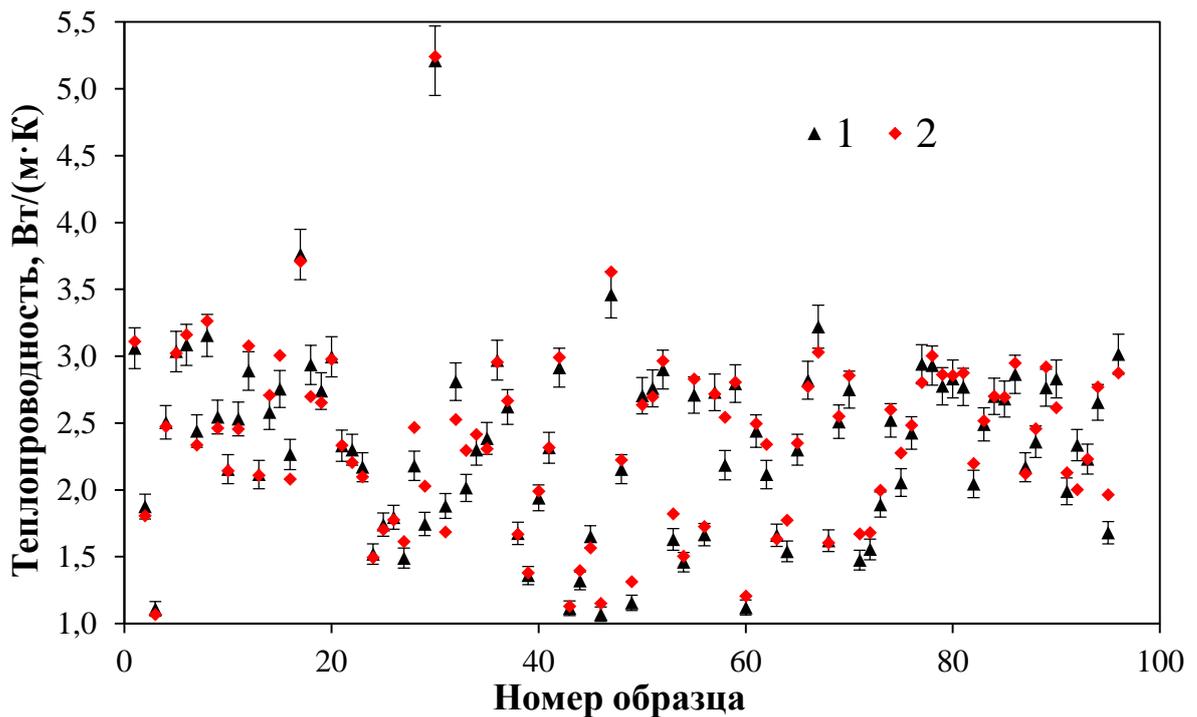


Рисунок 2.9 – Сравнение расчетной (2) и измеренной (1) теплопроводности сухих образцов карбонатного типа коллектора коллекции 1. Разброс соответствует относительному 5%-ному отклонению.

В таблице 2.2 приведены статистические данные по всем образцам коллекции 1 карбонатного типа коллектора по относительному отклонению расчетных данных от измеренных. Наилучшие показатели прогноза теплопроводности получены для нефтенасыщенных образцов. Это связано с тем, что для пары «воздух-модель пластовой воды» контраст теплопроводности составляет приблизительно 25, тогда как в других парах («воздух-модель пластовой нефти» и «модель пластовой воды-модель пластовой нефти»), контраст теплопроводности приблизительно равен пяти. А с увеличением контраста насыщаемых флюидов растет точность расчета теплопроводности матрицы породы.

Также в таблице 2.2 приведены для сравнения результаты теоретического прогноза теплопроводности, полученного с помощью формулы Лихтенеккера (1.8) и Роя-Адлер (1.9). Для этого были использованы значения теплопроводности

матрицы породы, полученной при построении поля корреляции между теплопроводностью образцов и пористостью.

Таблица 2.2 – Относительное отклонение расчетной теплопроводности от измеренной для нефтенасыщенных, водонасыщенных и сухих образцов карбонатного типа коллектора коллекции 1.

Абсолютное относительное отклонение	Предлагаемая модель	Формула Лихтенеккера	Формула Рой-Адлер
Среднее отклонение, %	2,1/3,9/4,7	12,3/8,4/18,7	10,2/7,0/16,5
Максимальное отклонение, %	8,5/17,9/16,8	41,5/40,9/54,1	40,4/40,7/70,3
Стандартное отклонение	1,9/3,8/4,3	11,2/8,6/15,2	9,3/7,4/16,7

Мы использовали одну и те же модель для коллекции 1 и коллекции 2 карбонатного типа пород по следующим соображения. Во-первых, образцы коллекций имеют схожую структуру, во-вторых, был использован качественный критерий выбора модели породы по параметру контраста – отношение теплопроводности водонасыщенного образца к его теплопроводности в сухом состоянии [Ялаев, Баяк, 2016а; Ялаев, Баяк, 2016б]. На рисунке 2.10 приведено сравнение этого параметра для двух коллекций. Как мы видим характер зависимости для этих двух коллекций одинаков, и можно построить экстраполирующие линейные функции, линейные коэффициенты которых будут совпадать друг с другом.

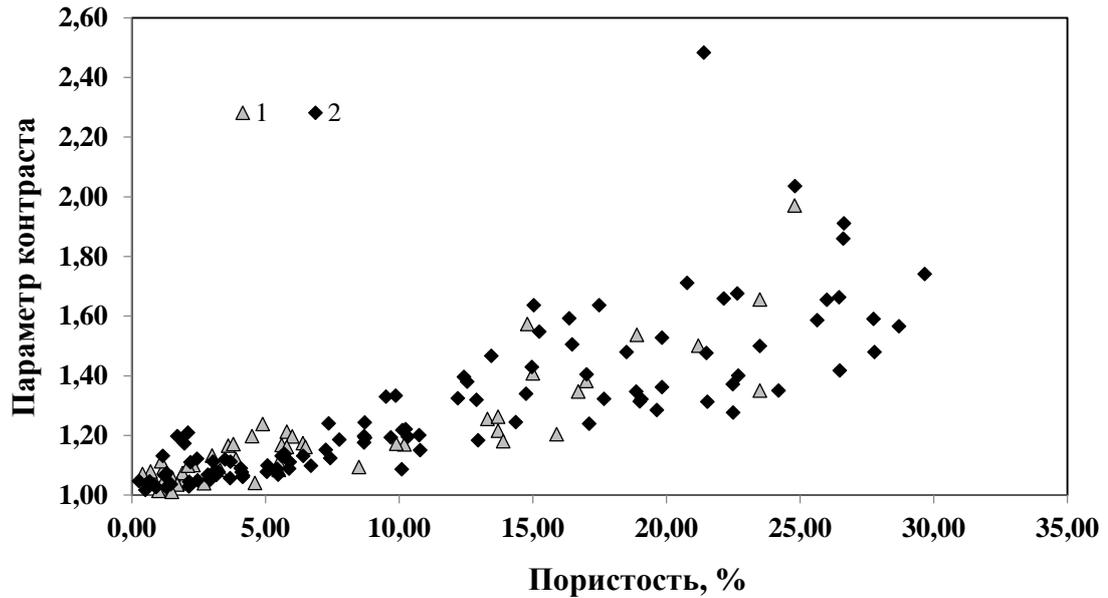


Рисунок 2.10 – Зависимость параметра контраста от пористости для коллекции 1 и 2 карбонатного типа коллектора.

В таблице 2.3 показаны результаты сравнения эффективной теплопроводности, полученной с помощью предложенной модели, и измеренной.

Таблица 2.3 – Относительное отклонение расчетной теплопроводности от измеренной для разных насыщающих флюидов карбонатного типа коллектора коллекции 2.

Абсолютное относительное отклонение	Нефтенасыщенный образец	Водонасыщенный образец	Сухой образец
Среднее отклонение, %	2,1	2,4	3,3
Стандартное отклонение	5,1	3,2	5,8

На рисунке 2.11 приведено сравнение «параметра контраста» между образцами терригенного типа коллектора коллекция 3 и карбонатного типа коллектора коллекция 1. Этот параметр показывает, как сильно изменяются свойства породы при изменении свойств флюида, и это связано со структурой породы. Из рисунка видно, что насыщение образцов коллекции 3, приводит к двукратному изменению свойств и более высокому разбросу параметра контраста, чего не наблюдается для образцов карбонатного типа пород. Это связано с более

развитой площадью поверхностных контактов образцов коллекции 3, что подтверждается комплексным анализом породы и отражается в построении отличной модели породы.

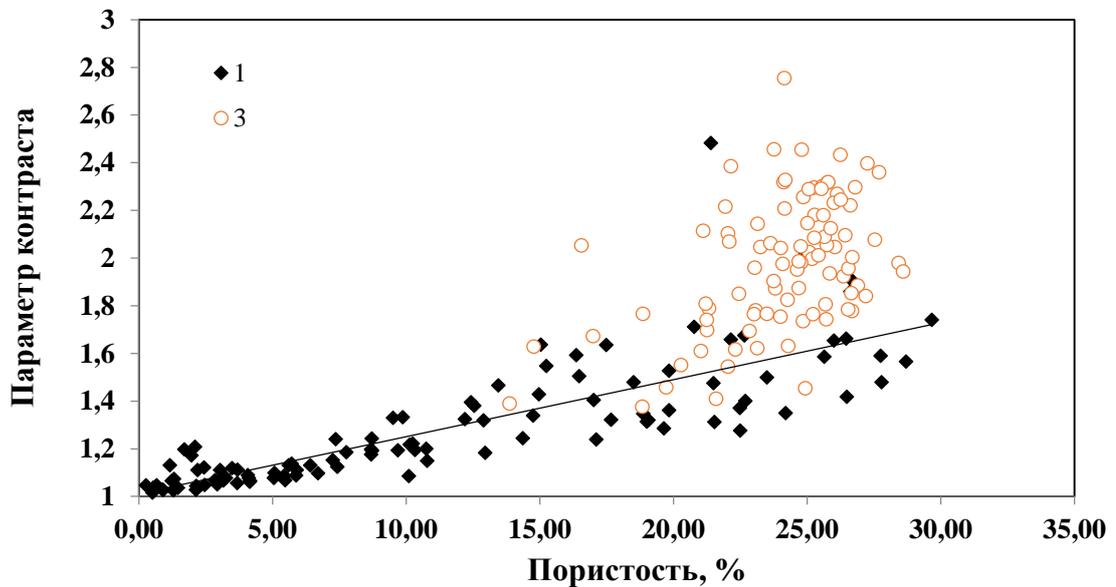


Рисунок 2.11 – Зависимость параметра контраста от пористости для коллекции 1 карбонатного типа коллектора и 3 терригенного типа коллектора.

Исходя из описанных выше причин, для моделирования коллекции 3 терригенного типа коллектора была принята модель физических свойств терригенного типа коллектора. На рисунках 2.12-2.14 представлено сравнение результатов расчета и измерений для 90 образцов этой коллекции. Как мы видим прогноз теплопроводности терригенного типа коллектора уступает по качеству прогноз для коллекций 1 и 2. Это связано с более высокой неоднородностью этой коллекции, что отражается широким разбросом параметра контраста.

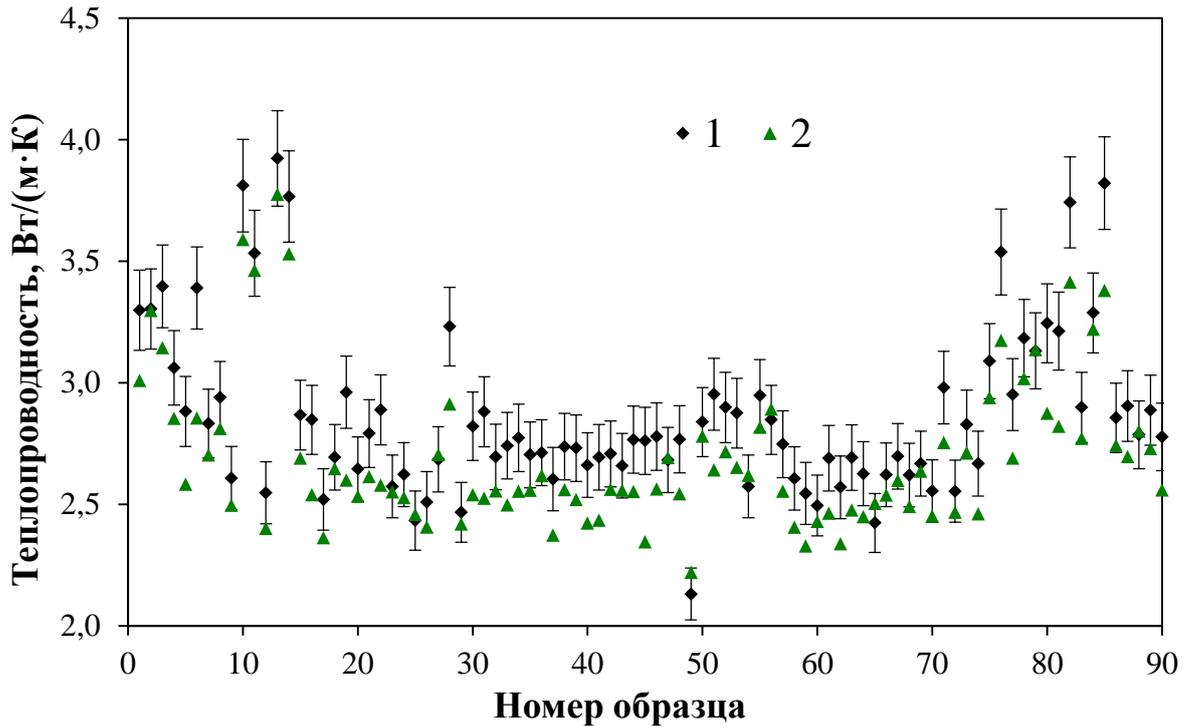


Рисунок 2.12 – Сравнение расчетной (2) и измеренной (1) теплопроводности нефтенасыщенных образцов терригенного типа коллектора коллекции 3. Разброс соответствует относительному 5%-ному отклонению.

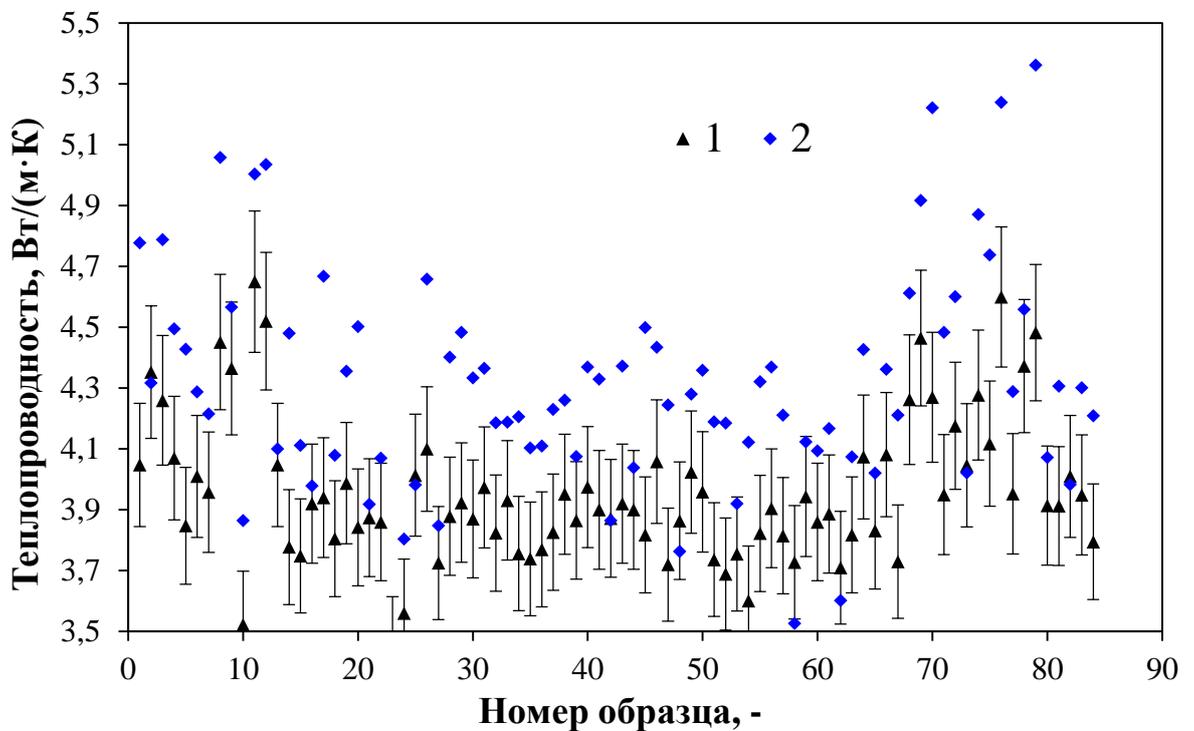


Рисунок 2.13 – Сравнение расчетной (2) и измеренной (1) теплопроводности водонасыщенных образцов терригенного типа коллектора коллекции 3. Разброс соответствует относительному 5%-ному отклонению.

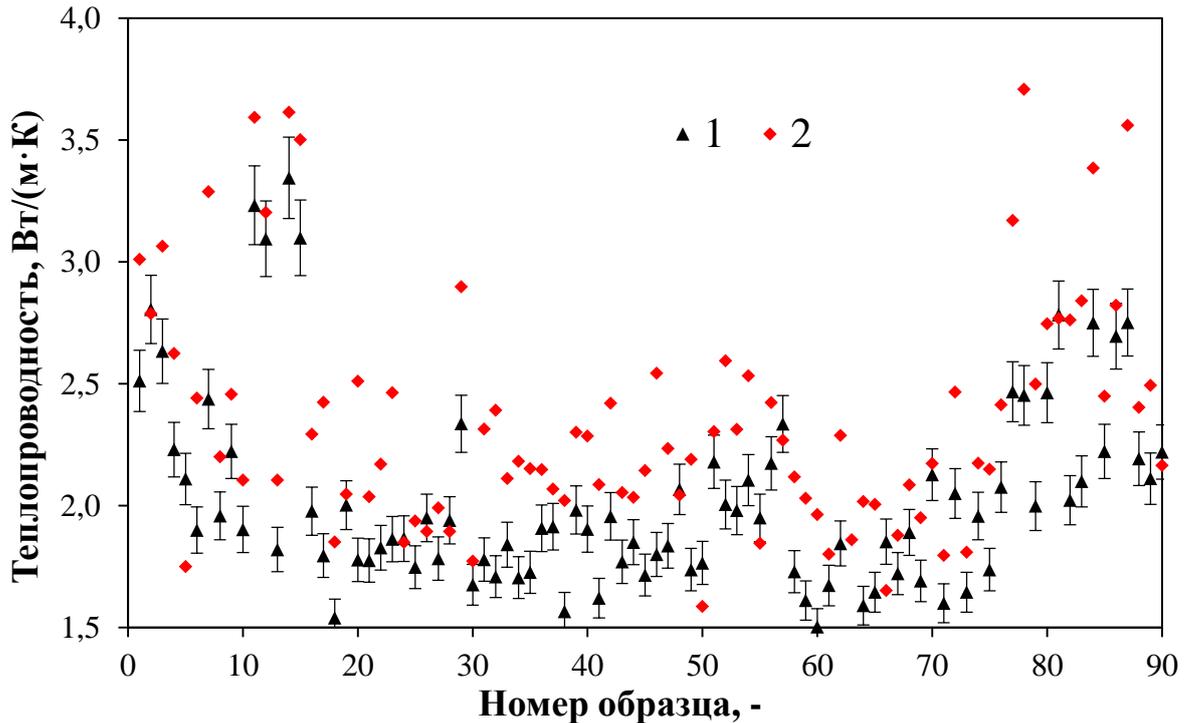


Рисунок 2.14 – Сравнение расчетной (2) и измеренной (1) теплопроводности сухих образцов терригенного типа коллектора коллекции 3. Разброс соответствует относительному 5%-ному отклонению

2.7 Выводы к главе 2

Во второй главе описаны основные принципы методики установления связи тепловых и упругих свойств горных пород. Детально описаны этапы построения единой модели эффективных физических свойств среды, основанной на комплексном анализе ее структуры и различных свойств. Предложенные принципы использованы для построения моделей теплопроводности карбонатных и терригенных типов пород. Эти модели реализованы в виде программ на языке Fortran-90 с компилятором Intel Visual Fortran Composer XE 2011 с использованием стандартной библиотеки IMSL для решения задач оптимизации с ограничениями на искомые параметры. Предложен алгоритм по решению задачи флюидозамещения для теплопроводности. Предложенные модели были верифицированы на экспериментальных данных. С этой целью были использованы данные о физических свойствах трех коллекций терригенного и карбонатного типов коллекторов. Проведено сравнение результатов прогноза

теплопроводности методом обобщенного сингулярного приближения теории эффективных сред с другими широко используемыми методами Лихтенеккера и Рой-Адлера.

Глава 3. Связь теплопроводности и упругих свойств на примере песчаника Бентхаймер

В данной главе рассматривает вопрос об установлении связи упругих свойств и теплопроводности при атмосферных условиях, а также в условиях напряженного состояния на примере песчаника Бентхаймер.

Были проведены измерения упругих и тепловых свойств на коллекции песчаника Бентхаймер при атмосферных условиях и при приложенном напряжении до 30 МПа. Для установления связи этих свойств была использована модель, предложенная автором в главе 2. Это позволило получить прогноз теплопроводности при атмосферных условиях, а также смоделировать зависимость теплопроводности от приложенной нагрузки по данным об упругих свойствах образца в этих условиях.

3.1 Геологическо-физическое описание песчаника Бентхаймер

Основные отложения нижнемелового песчаника Бентхаймер залегают на границе между Нидерландами и Германией на приблизительно девятикилометровом участке горного хребта, простирающегося от города Гилдехауз (Gildehaus) на западе через Бад-Бентхайм (Bad Bentheim) до Саддендорфа на востоке с приблизительной шириной 400 м [Dubelaar, Nijland, 2016]. Песчаник Бентхаймер является объектом различных лабораторных исследований в связи с тем, что он имеет однородную структуру и состав, регулярное распределение форм и размера квазисферических минеральных зерен, стабильные значения емкостных (пористость 23–25 %) и фильтрационных свойств (проницаемость 2–4 Да, песчаник высокопроницаемый), а также за счет его доступности и дешевизны.

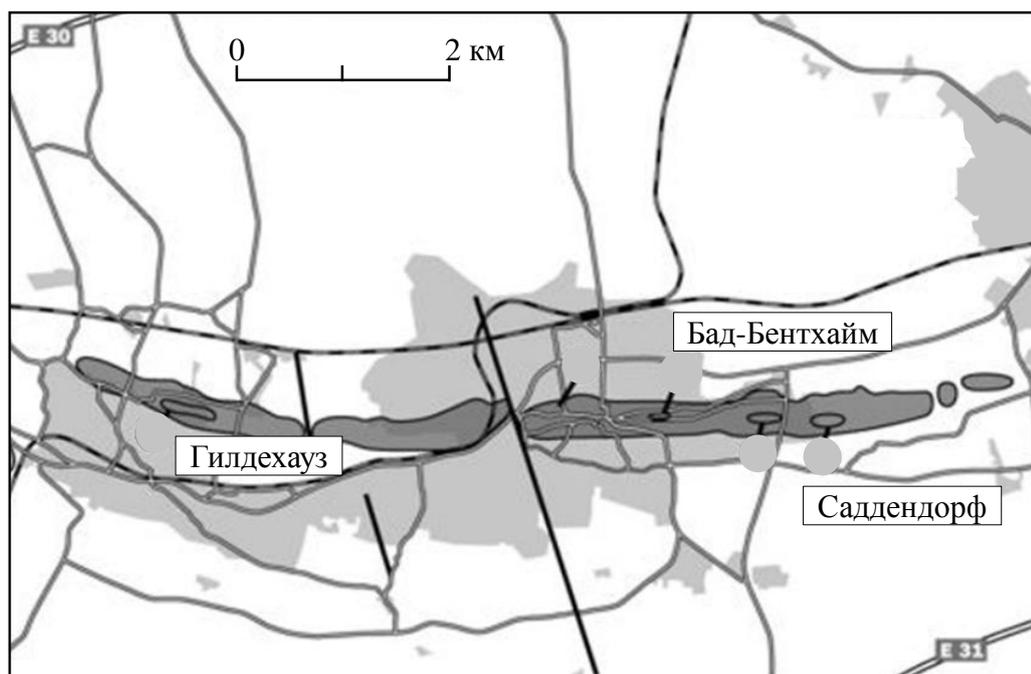


Рисунок 3.1 – Области залегания песчаника Бентхаймер обозначены темно-серым цветом (отредактированная версия рисунка из статьи [Dubelaar, Nijland, 2016]).

3.2 Измерения физических свойств и характеристик песчаника Бентхаймер при комнатной температуре и атмосферном давлении

Были отобраны 20 образцов диаметром 30 мм и длиной 50 мм (рисунок 3.2) для исследований при атмосферных условиях [Yalaev et al., 2015], а также два цилиндрических образца диаметром 50 мм и длиной 30 мм для испытаний в условиях приложенной осевой нагрузки до 30 МПа [Ялаев и др., 2016]. На этих образцах были проведены измерения фильтрационно-емкостных свойств, упругих свойств и теплопроводности.



Рисунок 3.2 – Фотография образцов песчаника Бентхаймер.

Результаты измерений физических свойств и других характеристик представлены в таблицах 3.1 и 3.2. Физические свойства песчаника Бентхаймер изотропны, не зависят от направления измерений. Пористость и проницаемость определили с помощью автоматического порозиметра-пермеаметра AP-608, основанного на методе падения давления инертного газа. Давление при измерениях составило 3,5 МПа, в качестве инертного газа использовался гелий. Для измерения упругих свойств песчаника Бентхаймер как в сухом, так и в водонасыщенном состоянии при комнатной температуре и атмосферном давлении был использован метод ультразвукового просвечивания [ASTM D2845-00, 2000] между точечными пьезоэлектрическими датчиками с частотой 1 МГц с приложенным напряжением 0,12 МПа. При этом поверхность образца, контактирующая с датчиками была предварительно обработана вязким полисахаридным раствором. Приложенное давление и смазка позволили обеспечить плотный контакт между датчиками и образцами и соответственно пренебречь поверхностными эффектами проведенных измерений. Для насыщения песчаника была использована модель пластовой воды в виде водного раствора NaCl с концентрацией соли 15 г/л. При такой концентрации соли тепловые и упругие свойства раствора отличаются от свойств дистиллированной воды не более, чем на 0,5%. Упругие свойства насыщающих флюидов приведены в таблице 3.3. Теплопроводность образцов была определена методом оптического сканирования, краткое описание которого представлено в главе 1.

Таблица 3.1 – Результаты измерения фильтрационно-емкостных характеристик и теплопроводности в двух состояниях флюидонасыщения 20 образцов песчаника Бентхаймер. Индекс «d» обозначает сухой образец, «w» – образец, насыщенный моделью пластовой воды.

Образец	Пористость, %	Проницаемость, мДа	Плотн.сух.обр., г/см ³	ТС _d , Вт/(м·К)	ТС _w , Вт/(м·К)
BTN-1	23,1	1970	1,99	3,06	4,61
BTN-2	23,3	1760	1,99	2,86	4,52
BTN-3	23,3	1940	1,99	3,00	4,69
BTN-4	23,0	3380	2,02	2,84	4,63
BTN-5	23,1	3330	2,01	2,85	4,65
BTN-6	22,7	3290	2,02	2,86	4,64
BTN-7	23,2	3530	2,02	2,87	4,69
BTN-8	22,9	3270	2,02	2,80	4,64
BTN-9	22,9	3310	2,03	2,94	4,67
BTN-10	23,3	3500	2,02	2,92	4,63
BTN-11	23,3	3500	2,01	2,80	4,61
BTN-12	23,4	3530	2,02	2,77	4,56
BTN-13	23,1	3430	2,01	2,72	4,53
BTN-14	22,9	3290	2,02	2,92	4,63
BTN-15	23,3	3530	2,01	2,83	4,64
BTN-16	23,1	3250	2,02	2,83	4,57
BTN-17	23,2	3420	2,02	2,74	4,66
BTN-18	23,2	3450	2,01	2,76	4,57
BTN-19	23,2	3490	2,02	2,79	4,53
BTN-20	23,3	3570	2,01	2,91	4,71

Таблица 3.2 – Результаты измерения упругих динамических характеристик 20 образцов песчаника Бентхаймер.

Образец	V_{p_d} , км/с	V_{s_d} , км/с	V_{p_w} , км/с	V_{s_w} , км/с	Модуль Юнга (сухие образцы), ГПа	Коэффициент Пуассона, (сухие образцы) ГПа
BTN-1	2,74	1,84	3,22	1,65	18,48	6,74
BTN-2	2,47	1,67	3,20	1,66	15,21	5,55
BTN-3	2,70	1,78	3,30	1,68	17,33	6,31
BTN-4	2,88	1,71	3,37	1,62	16,41	5,91
BTN-5	2,89	1,77	3,35	1,62	17,44	6,30
BTN-6	2,82	1,63	3,39	1,58	14,95	5,37
BTN-7	2,75	1,71	3,34	1,65	16,33	5,91
BTN-8	2,86	1,64	3,36	1,55	15,14	5,43
BTN-9	2,73	1,74	3,38	1,63	16,95	6,15
BTN-10	2,74	1,74	3,31	1,64	16,87	6,12
BTN-11	2,75	1,74	3,32	1,65	16,80	6,09
BTN-12	2,83	1,73	3,37	1,61	16,74	6,05
BTN-13	2,78	1,63	3,34	1,60	14,85	5,34
BTN-14	2,78	1,80	3,34	1,64	18,02	6,54
BTN-15	2,85	1,75	3,35	1,58	17,04	6,16
BTN-16	2,82	1,71	3,39	1,68	16,37	5,91
BTN-17	2,71	1,65	3,39	1,66	15,24	5,50
BTN-18	2,76	1,68	3,33	1,62	15,72	5,67
BTN-19	2,77	1,61	3,37	1,55	14,58	5,24
BTN-20	2,84	1,71	3,37	1,65	16,30	5,88

Таблица 3.3 – Свойства насыщающих флюидов при комнатной температуре.

Флюид	Плотность, г/см ³	V _p , км/с	V _s , км/с	Теплопроводность, Вт/(м·К)
Воздух	0,00184	0,346	0	0,024
Водный раствор NaCl, 15г/л	1,025	1,495	0	0,6

3.3 Измерения физических свойств и характеристик песчаника Бентхаймер в условиях приложенной нагрузки

Для измерения упругих динамических свойств в условиях контроля приложенной осевой нагрузки была использована стандартная ячейка кернодержателя согласно действующим стандартам измерений [ASTM D7012-04, 2004]. Другая ячейка, разработанная для проведения измерений на цилиндрических образцах диаметром 50 мм, была дополнена линейным источником постоянного тепла с постоянной мощностью. Данная ячейка позволяет проводить измерения теплопроводности в зависимости от создаваемой нагрузки. Описание подобной схемы можно найти в работе [Миклашевский и др., 2006].

Мы провели измерения теплопроводности на двух цилиндрических образцах диаметром 30 мм и высотой 50 мм под контролем осевой нагрузки на торцевые поверхности цилиндров, установив линейный источник между этими двумя образцами. Постоянный ток мощностью 0,2 Вт подавался через сенсор, изготовленный из платиновой проволоки диаметром 0,1 мм. Падение напряжения измеряли вдоль 20-ти мм секции сенсора в течении 180 с, используя четырехпроводную мостовую схему. Повышение температуры линейного источника определяли по изменению сопротивления сенсора, используя температурную зависимость удельного сопротивления платины. Во всех измерениях повышение температуры не превышало 3 °С.

На рисунке 3.3 представлена зависимость теплопроводности образцов песчаника Бентхаймер от осевой нагрузки. Каждая точка представляет собой усреднение по серии измерений. Для усреднения использовалось не менее пяти значений теплопроводности для фиксированной осевой нагрузки. Между измерениями проходил один час для того, чтобы тепло, выделенное источником, успевало рассеяться, и условия проведения измерений оставались постоянными. После каждой серии измерений образец разгружали перед проведением следующей серии измерений. Аппроксимация точек ведется по красным точкам, так как сенсор деградировал в результате нагружения образца после ряда серий измерений.

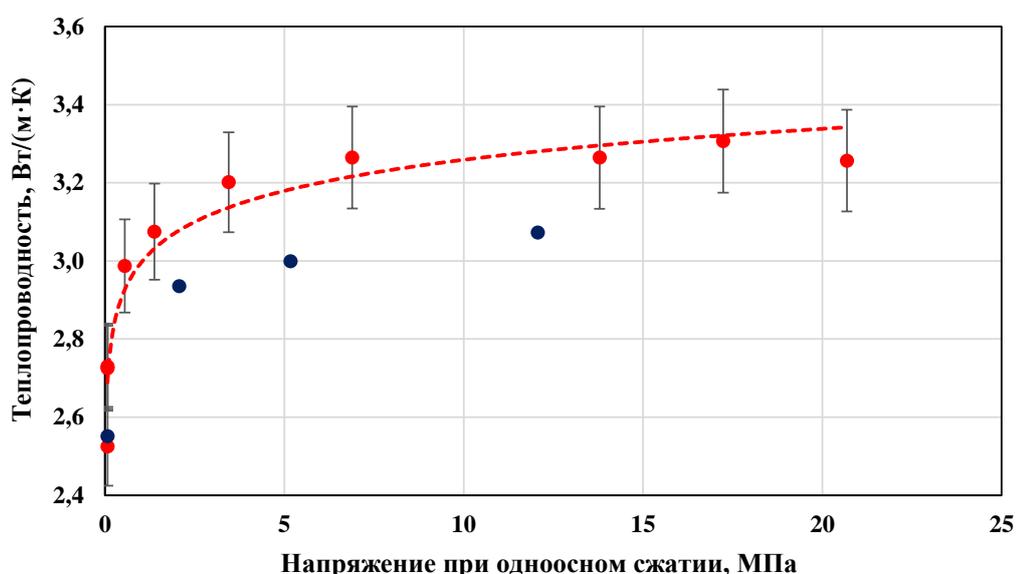


Рисунок 3.3 – Изменение теплопроводности песчаника Бентхаймер при осевом сжатии до 21 МПа. Красные точки – серии измерений, принятые в качестве исходных данных, синие точки – серии, исключенные из рассмотрения из-за деградации сенсора в последнем этапе испытаний.

Ошибка измерений составила 4% при доверительной вероятности 95%. Тестирование методики проводилось на эталонных образцах из керамики Ругосегам ($TC = 4.06 (\pm 0.24)$ Вт/(м К)) и кварцевого стекла ($TC = 1.35 (\pm 0.02)$ Вт/(м К)), сертифицированных производителями.

Измерения скоростей упругих волн образцов песчаника Бентхаймер при осевой нагрузке проводились последовательно двумя способами в диапазонах

осевой нагрузки 0,1– 0,5 МПа и 2,3– 26,0 МПа. Измерения скоростей упругих волн при низких значениях осевой нагрузки были проведены с помощью пьезоэлектрических датчиков с частотой 1 МГц с использованием чувствительного датчика силы, позволяющего нагружать образец с небольшим шагом 0,05 МПа. Измерения скоростей при высоких значениях нагрузки проводились в специальной ячейке с пьезоэлектрическими датчиками с частотой 1 МГц, защищенными титановыми корпусами, в процессе проведения теста на неограниченное одноосное сжатие [ГОСТ 21153.7-75, 1975; ASTM D2845-00, 2000]. Скорость осевой деформации при проведении измерений составляла $6 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$. Волновые формы записывались каждые 30 с при помощи электронного осциллографа.

Калибровка измерительных приборов для измерения скоростей упругих волн была проведена на эталоне алюминиевого сплава Д-16 ($V_p = 6.38 \text{ км/с}$ и $V_s = 3.22 \text{ км/с}$, согласно данным производителя). Случайная ошибка измерений скоростей продольных и поперечных упругих волн составила 2% и 4% соответственно при доверительной вероятности 95%.

На рисунке ниже представлены результаты измерений скоростей упругих волн на образцах песчаника Бентхаймер в зависимости от приложенной осевой нагрузки (рисунок 3.4).

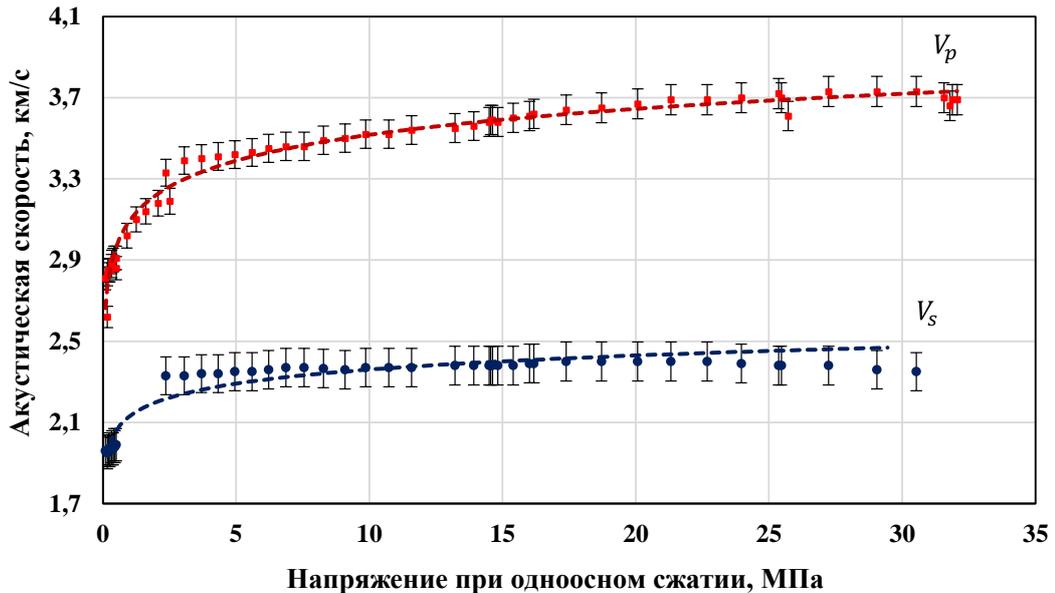


Рисунок 3.4 – Изменение скоростей упругих волн песчаника Бентхаймер при осевом сжатии до 32 МПа. Точками обозначены исходные данные измерений, линиями – аппроксимирующие кривые.

3.4 Моделирование физических свойств песчаника Бентхаймер

Для описания структуры песчаника Бентхаймер был проведен визуальный анализ стандартного керна, подготовлены и изучены шлифы (рисунок 3.5). В связи с однородностью песчаника Бентхаймер, литолого-петрографический анализ был проведен лишь по двум покрашенным прозрачным шлифам. Макроскопически песчаник Бентхаймер имеет массивную структуру, то есть определение направления напластования в образце не представлялось возможным, поэтому из образца песчаника для изготовления шлифов были выпилены две пластины перпендикулярные друг другу. Условно одно направление мы назвали параллельным, второе перпендикулярным. Песчаник Бентхаймер не обладает выраженными особенностями строения в ни в одном из этих направлений, поэтому в данной работе описаны результаты, полученные только в условно параллельном направлении.

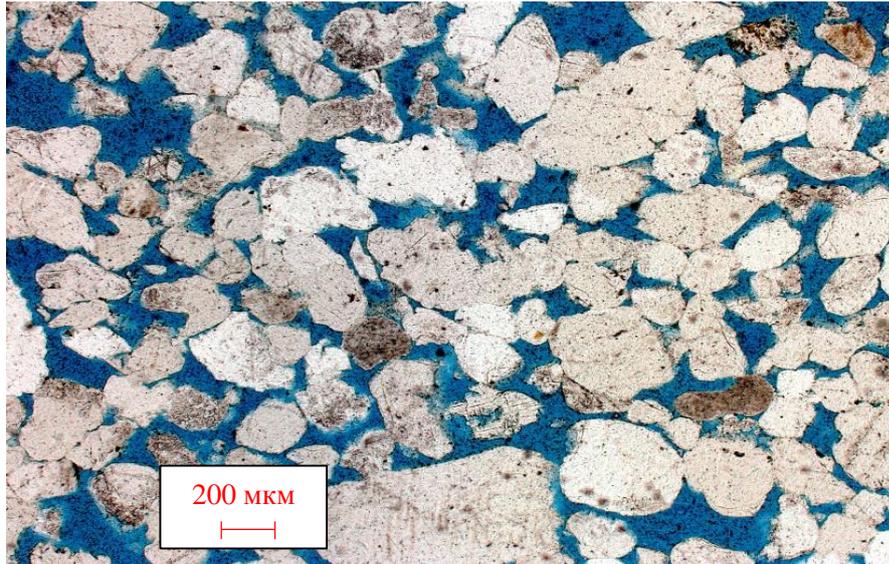


Рисунок 3.5 – Фотография шлифа, изготовленного из образца песчаника Бентхаймер, под оптическим микроскопом (прокрашенный прозрачный шлиф).

Литолого-петрографический анализ прокрашенных прозрачных шлифов песчаника Бентхаймер проведен с помощью микроскопа Imager M1m и программного обеспечения AxioVision 4.8.1. Структура песчаника однородная, преобладает мелкозернистая фракция (61%) с небольшим содержанием крупнозернистой фракции – 1%, содержание среднезернистого материала составляет 22%, алевроитового – 15%.

Обломочный материал представлен кристаллокластами кварца (94%), калиевого полевого шпата (2%) и литокластами кварцитов и сланцев (3%). Форма обломков удлиненная (эллипсоидная), изометричная, таблитчатая. Преобладают полуокатанные обломки.

По результатам литолого-петрографического анализа мы установили следующие факты:

- обломочный материал, представленный в песчанике, имеет квазиэллипсоидальную форму, с фиксированным аспектным отношением;
- аспектное отношение обломочного материала составляет 0,6; это значение было рассчитано с помощью программы AxioVision 4.8.1 по фотографиям шлифов;

- форма элементов порового пространства имеет унимодальное распределение (рисунок 3.6);

Установить закон распределения по полученным данным (рисунок 3.6) не представляется возможным по двум причинам. Во-первых, не хватает разрешения микрофотографий для обнаружения мельчайших каналов, зон между зернами, которые можно обнаружить, например, с помощью сканирующего электронного микроскопа SEM (рисунок 3.7). Таким образом, мы теряем часть участка распределения аспектного отношения элементов пустотного пространства, близкий к малым значениям аспектного отношения. Во-вторых, при обработке фотографий шлифа мы получаем данные в плоскости, а не пространстве. Именно по этим причинам мы используем эти данные на качественном, а не количественном уровне.

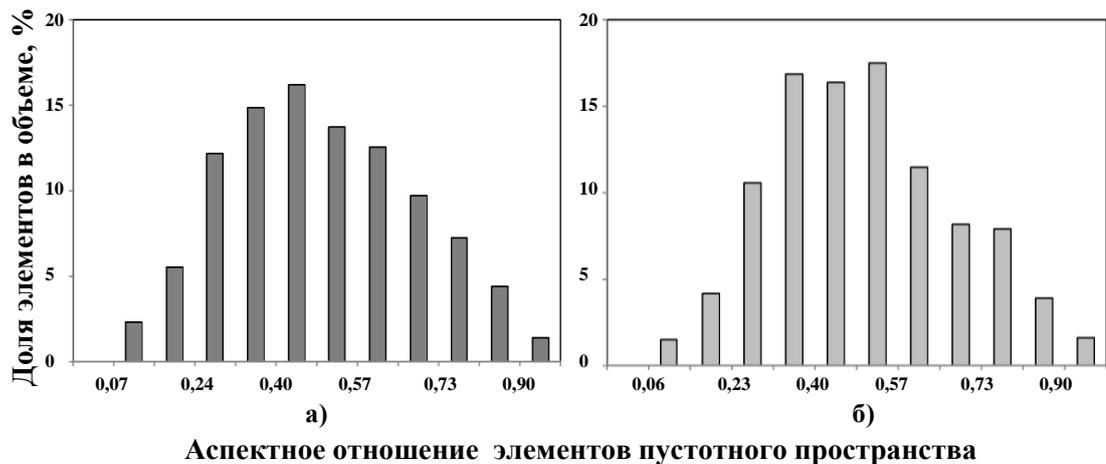


Рисунок 3.6 – Распределение аспектного отношения элементов пустотного пространства, полученное для песчаника Бентхаймер с помощью программы AxioVision 4.8.1 (а – изображение для условно параллельного направления, б – изображение для условно перпендикулярного направления).

Для моделирования физических свойств терригенного типа коллектора предлагается использовать модель которая была использована для коллекции терригенного типа пород во второй главе. Это подтверждается тем, что структура пустотного пространства имеет множество межзерновых каналов, а значит необходимо учитывать связность между элементами порового пространства.

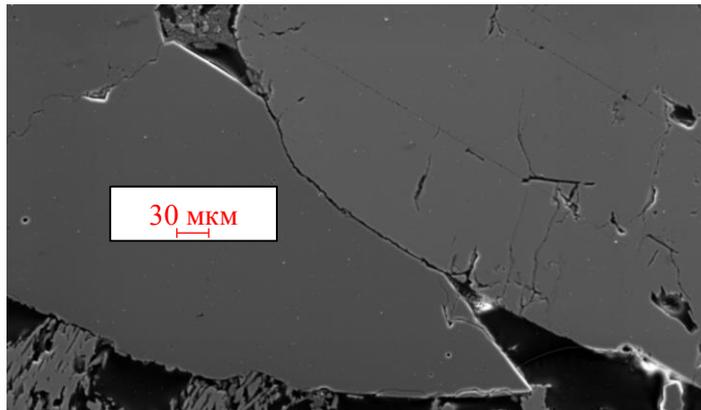


Рисунок 3.7 – Изображение контакта между кварцевыми зёрнами песчаника Бентхаймер. Было получено с помощью сканирующего электронного микроскопа.

Для описания математической модели физических свойств песчаника Бентхаймер мы использовали следующие параметры: пористость, плотность, теплопроводность матрицы (обломочного материала и минералов) и насыщающего флюида, тензор упругости матрицы (два независимых параметра) и насыщающего флюида, параметры бета-распределения формы элементов пустотного пространства (два независимых параметра) и параметр связности.

Неизвестные параметры (параметры бета распределения α и β и теплопроводность матрицы) были определены в результате решения нелинейной оптимизационной задачи с ограничениями на параметры модели (обратная задача). Ограничения были наложены для регуляризации задачи, в противном случае задача имеет множество решений и является некорректно поставленной, α и β изменяются, а теплопроводность матрицы – от 4,5 до 7,0 Вт/(м·К), судя по минеральному составу породы.

3.5 Параметрические исследования модели физических свойств песчаника Бентхаймер

В качестве примера рассмотрим образец под номером 5 (BTN-5), который является характерным образцом изучаемой выборки с точки зрения его

физических свойств. Они близки по значению к средним значениям всей коллекции образцов.

Определим параметры модели исключительно по данным упругих характеристик породы, без учета данных о теплопроводности. Для этого решим задачу минимизации функционала $F_{V_{p,s}}$, построенного следующим образом

$$\min (F_{V_{p,s}}) = \min \left(\frac{1}{2} \sqrt{\sum \left(\frac{V_p^{eff} - V_p^{exp}}{V_p^{exp}} \right)^2 + \left(\frac{V_s^{eff} - V_s^{exp}}{V_s^{exp}} \right)^2} \right), \quad (3.1)$$

где суммирование ведется по двум состояниям флюидонасыщения, а $F_{V_{p,s}}$ представляет собой полное отклонение расчетных данных от экспериментальных. На рисунке 3.8 представлена зависимость $F_{V_{p,s}}$ от параметров бета-распределения (α, β) формы элементов пустотного пространства. Отклонение более 30% исключено.

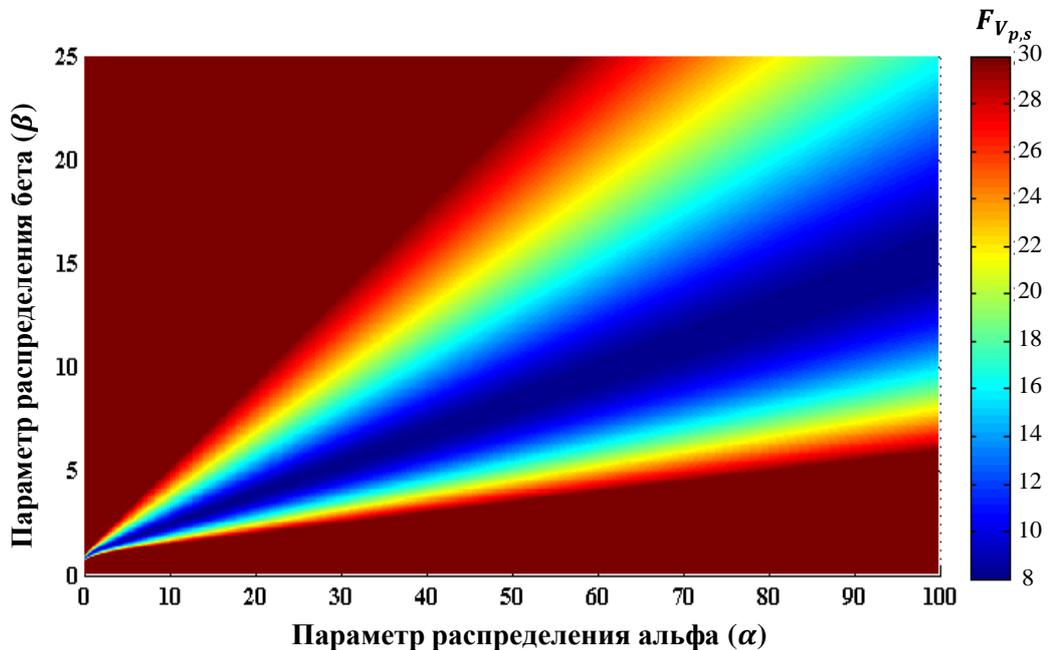


Рисунок 3.8 – Полное отклонение $F_{V_{p,s}}$ расчетных данных от экспериментальных в зависимости от параметров модели α, β для решения обратной задачи модели упругих свойств песчаника Бентхаймер.

Из рисунка 3.8 следует, что обратная задача имеет множество эквивалентных решений в области параметров α .

Рассмотрим далее решение обратной задачи, полученное исключительно на данных о теплопроводности песчаника Бентхаймер. По аналогии мы формируем нелинейный функционал F_{TC} :

$$\min(F_{TC}) = \min \left(\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1,2} \left(\frac{TC_k^{eff} - TC_k^{exp}}{TC_k^{exp}} \right)^2} \right), \quad (3.2)$$

где суммирование ведется по двум состояниям флюидонасыщения, F_{TC} представляет собой полное отклонение расчетных данных от экспериментальных. На рисунке 3.9 представлены значения функционала F_{TC} для различных значений параметров α . Значения более 10% показаны одним цветом. Видно, что обратная задача, решаемая по данным о тепловых свойствах, также имеет множество эквивалентных решений. Однако это множество отлично от множества эквивалентности для задачи, решаемой по данным об упругих свойствах.

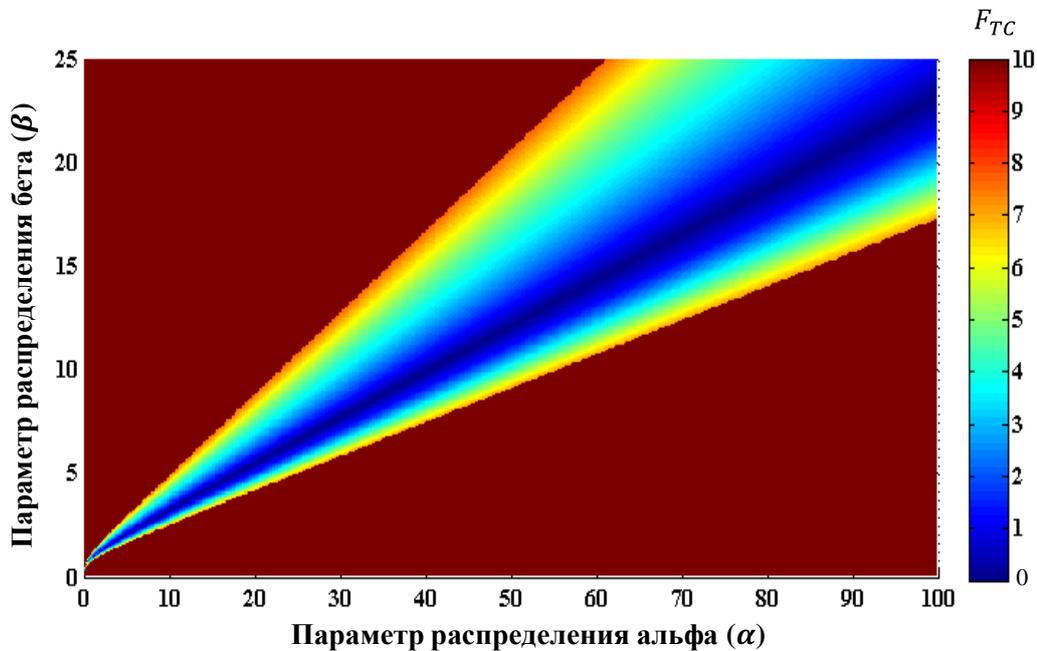


Рисунок 3.9 – Полное отклонение F_{TC} расчетных данных от экспериментальных в зависимости от параметров модели α, β для решения обратной задачи модели тепловых свойств песчаника Бентхаймер.

Сопоставление областей эквивалентных решений для первого и второго случая позволяет определить область значений параметров α , β , в которой следует искать решение задачи. На рисунке 3.10 приведены эквивалентные решения обратной задачи модели тепловых и упругих свойств песчаника Бентхаймер. Определенная область значений составила для α от 1,7 до 2,1, а для β от 1,1 до 1,4 около точки пересечения М на графике.

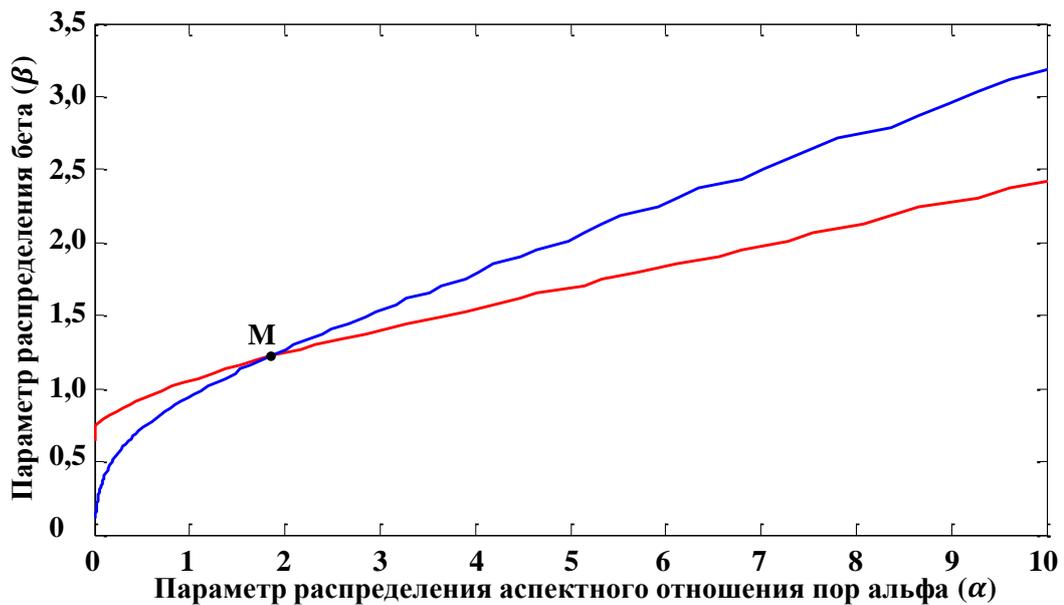


Рисунок 3.10 – Эквивалентные решения обратной задачи для моделей тепловых (синий цвет) и упругих (красный цвет) свойств песчаника Бентхаймер для разных параметров структуры породы α и β . Точка М – точка пересечения этих решений.

3.6 Сравнение расчетных и экспериментальных данных в условиях комнатной температуры и атмосферного давления

Перейдем к решению конкретных задач. Построенная модель песчаника Бентхаймер может быть использована для нахождения теплопроводности образцов по данным о ее упругих свойствах [Yalaev et al., 2016].

Для определения неизвестных параметров модели (решение обратной задачи): параметров бета-распределения и параметра связности – были использованы данные о V_p и V_s для сухих и водонасыщенных образцов. При решении обратной задачи приемлемым расхождением между теоретическими и

экспериментальными скоростями продольных и поперечных волн было принято $\pm 2,0\%$ и $\pm 3,0\%$.

Сравнение экспериментальных и расчетных данных по скоростям упругих волн представлено на рисунке 3.11. Среднее отклонение расчетной теплопроводности сухих и водонасыщенных образцов составило 11% и 5% соответственно, и оно не превышает 16% и 7% соответственно.

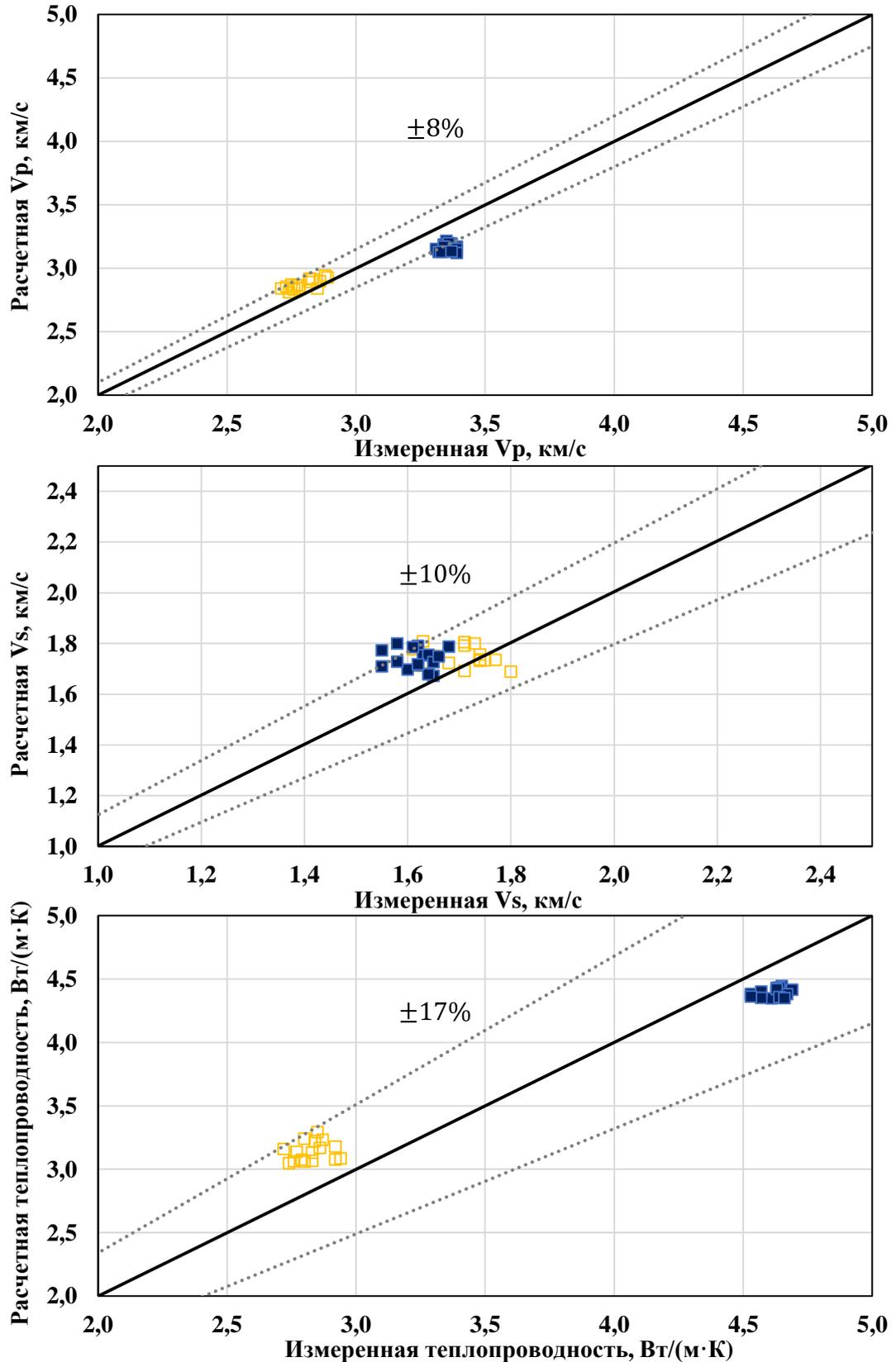


Рисунок 3.11 – Сравнение расчетных и экспериментальных данных для задачи определения теплопроводности сухих (зеленого цвета) и водонасыщенных (синего цвета) образцов песчаника Бентхаймер по данным об упругости.

В качестве дополнительной задачи была решена также обратная задача по определению скоростей продольных и поперечных волн образца по данным о его теплопроводности.

Для определения неизвестных параметров модели (решение обратной задачи): параметров бета-распределения и параметра связности – были использованы данные о теплопроводности сухих и водонасыщенных образцов. При решении обратной задачи приемлемым расхождением между теоретической и экспериментальной теплопроводностью считалось $\pm 2,5\%$. Затем мы использовали найденные параметры для расчета скоростей продольных и поперечных волн сухих и водонасыщенных образцов и (решение прямой задачи). Для решения прямой и обратной задач были использованы данные, найденные в открытых источниках для минерального кварца: теплопроводность – $7,6 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$, продольная скорость волн – $5,9 \text{ км/с}$, поперечная скорость волн – $3,94 \text{ км/с}$ и плотность – $2,65 \text{ г/см}^3$.

Расхождение между расчетными и измеренными скоростями упругих волн для всех образцов в сухом и водонасыщенном состоянии составило не более 12% и 15% для скоростей продольных и поперечных волн соответственно (рис. 5). Интересно отметить, что для сухих образцов расчетные значения транспортных свойств, как правило, занижены, а для водонасыщенных – завышены. Указанный разброс учитывает ошибку, с которой были определены входные данные задачи – $2,5\%$ [Ялаев и др., 2015].

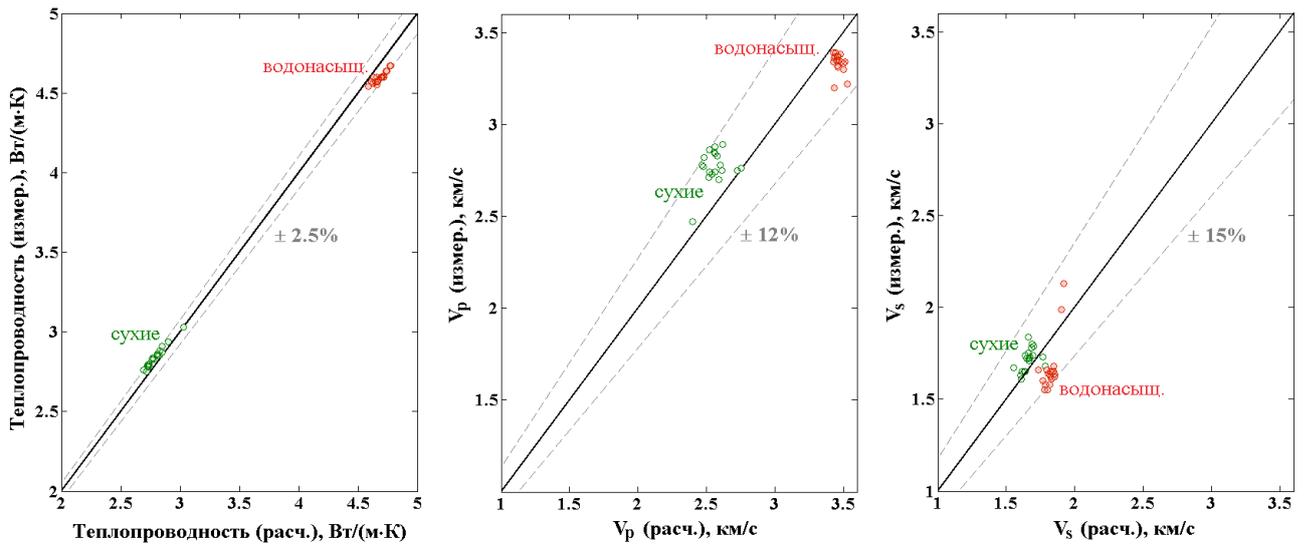


Рисунок 3.12 – Сравнение расчетных и экспериментальных данных по теплопроводности (а), скоростям продольных (б) и поперечных (в) упругих волн для сухих и водонасыщенных образцов песчаника Бентхаймер при комнатной температуре и атмосферном давлении.

3.7 Сравнение расчетных и экспериментальных данных в условиях приложенной осевой нагрузки образцов

Для прогноза зависимости теплопроводности от осевого напряжения мы использовали результаты измерения скоростей распространения продольных и поперечных волн в различных напряженных состояниях. Для этого мы оценили степень изменения структуры пустотного пространства: закрытие части трещин, изменение формы отдельных пор и трещин и т.д. В результате были рассчитаны параметры бета-распределения формы элементов порового пространства для нескольких значений осевого напряжения. При расчетах учитывалось изменение свойств насыщаемого флюида, то есть воздуха в нашем случае, в зависимости от напряжения. Данные были найдены в работе Стефана и Лаезек [Stephan, Laesecke, 1985]. Отметим, что пористость образца в процессе нагрузки изменилась незначительно (менее 0,01%). Эта оценка была проведена на основании изменения объема образца при его нагружении. Следовательно, изменение свойств образца определяется именно изменением параметров структуры. На рисунке ниже приведены гистограммы распределения аспектного отношения

элементов пустотного пространства для давлений 0,1 МПа и 20 МПа (рисунок 3.13). Трещинная часть соответствует аспектному отношению с меньшим значением, а поры сферической формы имеют аспектное отношение, равное единице. Как видно из рисунка, часть трещин закрылась или приобрела более сферическую форму.

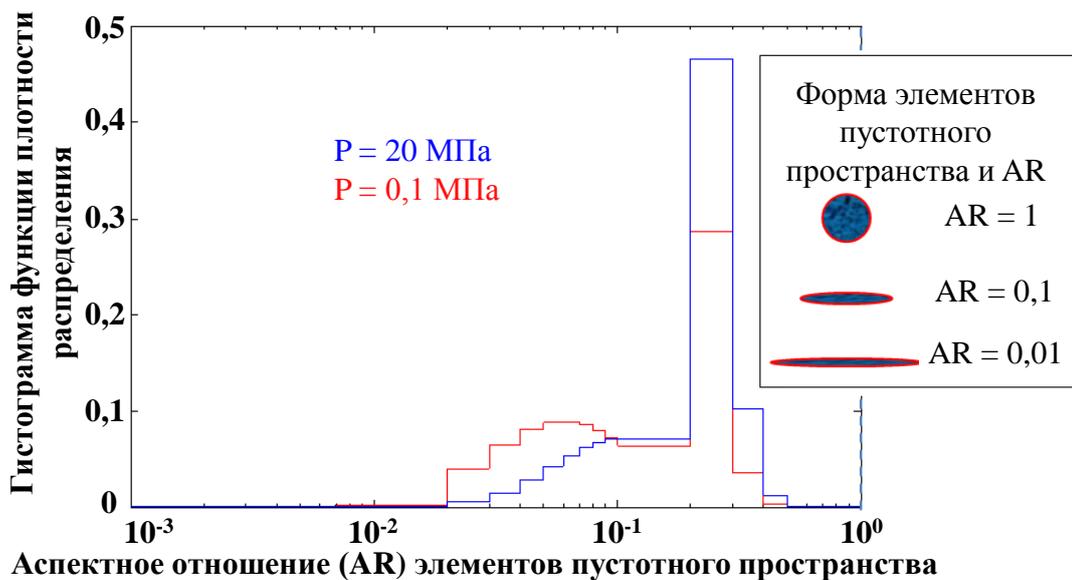


Рисунок 3.13 – Сравнение структуры порового пространства (распределения аспектного отношения элементов порового пространства) при различных осевых нагрузках 0,1 МПа и 20 МПа.

Для всего диапазона нагрузки 0,1 – 20 МПа, на основании решения обратной задачи по данным о скоростях упругих волн, были рассчитаны параметры пустотного пространства. Затем эти параметры были использованы для расчета теплопроводности для разных значений нагрузки внутри этого диапазона (рисунок 3.14) [Ялаев, 2016]. Результаты расчетов лежат в пределах погрешности измерений. Предложенный подход дал возможность получить прогнозную оценку теплопроводности при больших значениях приложенной нагрузки до 30 МПа.

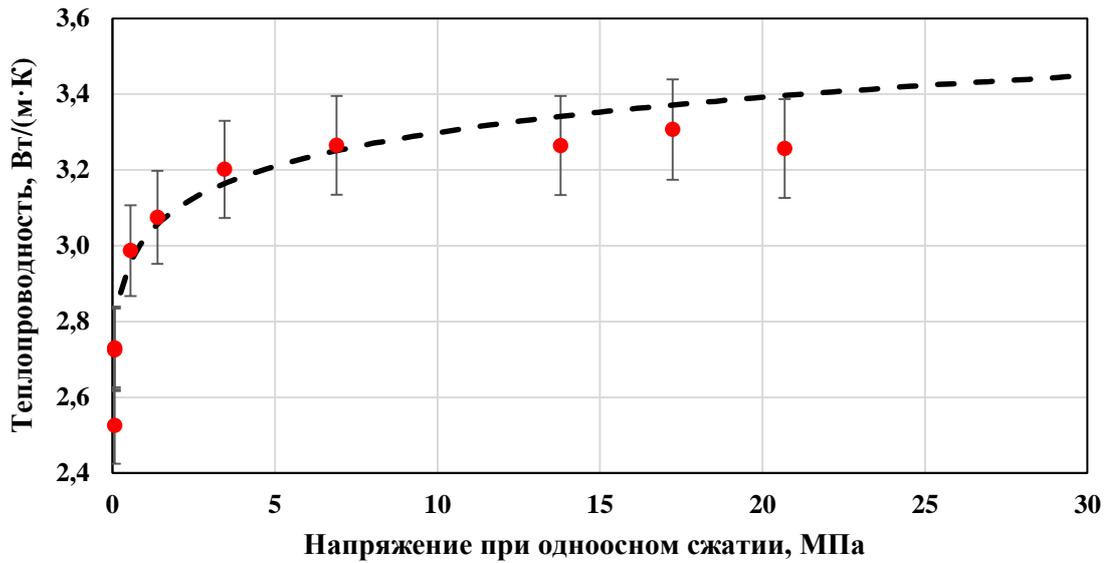


Рисунок 3.14 – Сравнение зависимости расчетной (обозначено пунктирной линией) и экспериментальной (обозначено точками) теплопроводности песчаника Бентхаймер от приложенной осевой нагрузки.

3.8 Выводы к главе 3

Проведено комплексное исследование физических свойств и структуры песчаника Бентхаймер - определены теплопроводность, скорости продольных и поперечных волн для сухих и водонасыщенных образцов как при комнатной температуре и атмосферном давлении, так и в зависимости от приложенной осевой нагрузки; изучена геология и строение породы на оптическом и сканирующем-электронном микроскопе. Полученные экспериментальные данные о физических свойствах песчаника Бентхаймер и его структуре дали возможность построить параметрическую математическую модель для определения его физических свойств с использованием теории эффективных сред. На основании построенной модели установлена связь между теплопроводностью породы и скоростями продольных и поперечных волн. Эта связь была использована для прогноза теплопроводности песчаника Бентхаймер по данным об упругих свойствах породы. Среднее относительное отклонение для сухих и водонасыщенных образцов по теплопроводности составило 11% и 5% соответственно. Также было продемонстрировано, что можно определить

продольные и акустические скорости образцов песчаника Бентхаймер по данным о ее теплопроводности.

Построенная математическая модель использована для количественной оценки изменения внутренней структуры исследуемого песчаника в зависимости от приложенной осевой нагрузки. Это позволило определить зависимость теплопроводности от приложенной осевой нагрузки по соответствующим данным об упругих свойствах.

Глава 4. Восстановление теплопроводности и упругих свойств горных пород по свойствам, определенных на их фрагментах

В связи с отсутствием возможности проведения прямых измерений физических свойств непосредственно на шламе, необходимо было изготовить искусственные образцы с использованием фрагментов горных пород. На основе обобщенного сингулярного приближения была построена математическая модель физических свойств композитной среды, позволяющая связать упругие и тепловые свойства этой среды через параметры, описывающую ее структуру. Размеры изготовленных образцов композитного материала позволяют провести измерения на них указанных свойств. С использованием этих данных на основе построенной модели была предложена методика по восстановлению упругих и тепловых свойств горных пород по данным о физических свойствах композитов.

4.1 Описание и свойства искусственных образцов и горных пород

Были изготовлены искусственные образцы, которые представляют собой композит – спрессованную смесь мелкозернистого парафина и фрагментов материала (рисунок 4.1). Для их изготовления были раздроблены и просеяны через сито с размером ячейки не более 1 мм образцы различных материалов: кварцевое стекло, белый мрамор, низкопористый песчаник и песчаник Бентхаймер. При размерах зерна материала больше 5 мм на результаты измерений может начать влиять неоднородность композита. Это может проявляться в повышении тепловой неоднородности. Свойства и минеральный состав этих материалов были определены заранее (таблица 4.1). Парафин и материал с искомыми свойствами были смешаны в пропорции приблизительно 40:60 с большей долей самого материала. Применение парафина именно в твердой фазе позволило избежать конвекции в образце, что позволило применить теорию без дополнительных поправок. Для получения образцов композитного материала полученную смесь нагружали до 25 тонн с помощью гидравлического пресса.

Размеры образцов композитного материала составили 32 мм в диаметре и от 6 мм до 9 мм в высоту в зависимости от массы насыпки.

Свойства парафина были определены на нескольких образцах композитного материала, приготовленных без добавления исследуемого материала (таблица 4.1).

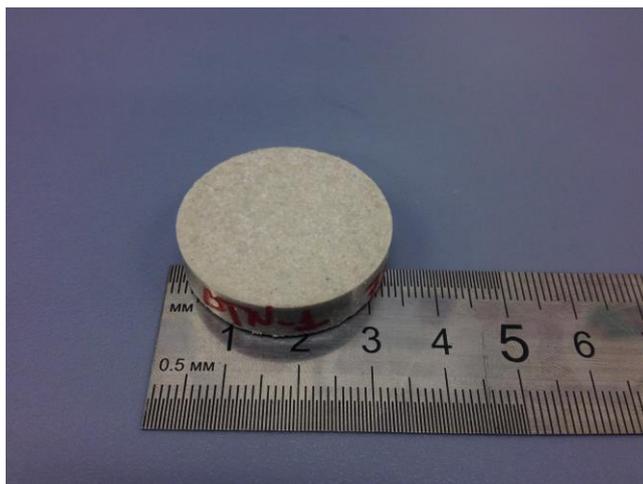


Рисунок 4.1 – Фотография образца композитного материала VTN-1, изготовленного из песчаника Бентхаймер

Таблица 4.1 – Физические свойства материалов, использованных для изготовления образцов композитного материала.

Материал	V_p , км/с	V_s , км/с	Теплопроводность, Вт/(м·К)	Плотность, г/см ³
Белый мрамор	4,74	2,95	2,70	2,50
Кварцевое стекло	5,68	3,71	1,35	2,21
Песчаник Бентхаймер	2,80	1,70	2,83	2,01
Низкопористый песчаник 8442	4,46	2,94	3,25	2,70
Низкопористый песчаник 6238	3,75	2,59	3,37	2,67
Низкопористый песчаник 6417	4,97	3,18	3,65	2,73
Низкопористый песчаник 5005	4,14	2,53	3,19	2,66
Парафин	2,11	0,95	0,246	0,933

Для измерения физических свойств образцов композитного материала и материалов были использованы стандартные методы. Так для измерения скорости распространения продольных и поперечных волн – импульсный метод сквозного прозвучивания при частоте 2,5 МГц [ASTM D2845-00, 2000]. Выбор частоты связан с условием необходимости уложить не менее трех длин волн по высоте образца. А для измерения теплопроводности образцов композитного материала был использован метод оптического сканирования, описанный кратко в главе 1. Результаты измерений физических свойств образцов представлены в таблице 4.2. Приняты условные обозначения для их наименования MR – мрамор, KV – кварцевое стекло, VTN – Бентхаймер.

Анализ структуры образцов композитного материала (рисунок 4.2) и полученных данных позволяет утверждать, что при данном способе изготовления этих образцов мы не избавились от воздуха. Это учитывалось при построении модели физических свойств композитных сред.

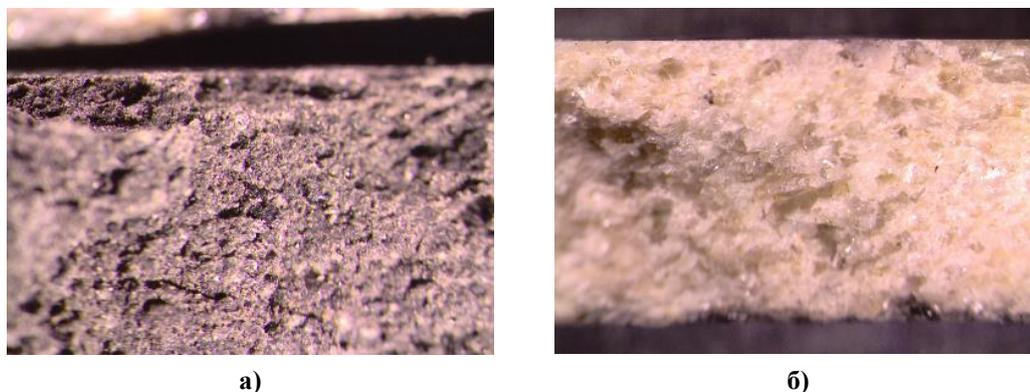


Рисунок 4.2 – Фотографии структуры образцов композитного материала а) 8442-1 и б) KV-1. Они были получены с помощью оптического микроскопа.

Таблица 4.2 – Физические свойства и характеристики образцов композитного материала.

Образец	Высота, мм	Плотность, г/см ³	V _p , км/с	V _s , км/с	Теплопроводность, Вт/(м·К)	Объемное содержание парафина, %
MR-1	9,10	1,846	1,921	1,190	0,866	45,8
MR-3	7,15	1,920	1,986	1,206	0,939	41,6
KV-1	7,90	1,667	1,06	0,653	0,582	38,9
KV-2	7,61	1,670	1,034	0,584	0,548	38,6
BTN-1	7,60	1,854	1,28	0,650	0,917	41,6
BTN-2	8,46	1,740	1,333	0,684	0,805	48,5
BTN-3	7,18	1,829	1,23	0,690	0,910	43,1
8442-1	7,71	1,801	1,888	1,063	0,966	47,8
8442-2	7,57	1,836	1,735	0,996	0,967	45,8
6238-1	7,36	1,843	1,783	1,077	1,096	44,5
6238-2	6,97	1,807	1,569	1,031	1,044	46,6
6417-1	6,49	1,862	1,689	1,072	1,063	45,2
6417-2	8,31	1,984	1,634	1,063	1,290	38,5
5005-1	7,78	1,919	1,675	1,072	1,149	38,4
5005-2	8,28	1,961	1,699	0,941	1,186	37,4

Для определения связи физических свойств изучаемого материала композитов, в состав которых входил этот материал в виде фрагментов, была построена математическая модель физических свойств композита на основе теории эффективных сред в обобщенном сингулярном приближении, подробное описание которой приводится в главе 2.

Математическая модель отражает особенности структуры изготовленных образцов композитного материала. Предполагается, что моделируемая среда состоит из трех компонент: парафин, материал и воздух. Все компоненты среды

имеют эллипсоидальную форму, в частности, они представлены в виде эллипсоидов вращения, форма которых описывается аспектным отношением – соотношение длин осей эллипсоида вращения. Форма элементов материала и парафина (для горных пород – это минеральные зерна) была установлена в результате анализа микрофотографий, механизмов генезиса горных пород и технологии изготовления материала.

4.2 Моделирование физических свойств искусственных образцов.

Параметрические исследования

Моделирование производится поэтапно и состоит из двух стадий (рисунок 4.3).

На первой стадии были определены свойства среды, не включающей воздушные прослойки. Минеральные зерна представляют собой хаотические включения, а парафин является включающей средой. Для этого была использована модель нижней границы Хашина-Штрикмана, так как воск имеет более мягкие упругие свойства по сравнению с минеральными зёрнами. При этом предполагается, что форма элементов материала имеет сферическую форму.

На второй стадии в среду, эффективные свойства которой совпадают со свойствами среды, определенных на первой стадии, были добавлены воздушные прослойки. Согласно нашим наблюдениям они возникают на границе между обломками материала и спрессованного парафина и расположены в образцах композитного материала также хаотично без какого-либо выделенного направления. Эффективные свойства среды были рассчитаны методом самосогласования. В результате мы получили среду, которая моделирует композит.

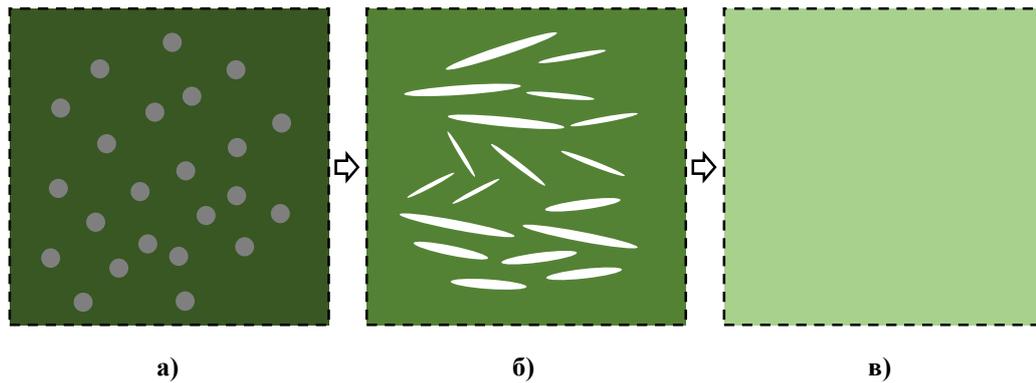


Рисунок 4.3 – Три стадии расчета математической модели искусственных образцов: а) воск и материал б) добавление воздушных прослоек в) эффективная среда. Темно-зеленым цветом обозначен воск, серым – материал, белым – воздушные прослойки, светло-зеленым цветом – эффективная среда композита.

Перед тем как решать практические задачи с использованием построенной модели, мы провели параметрическое исследование данной модели. В таблице 4.3 приведены условные обозначения параметров модели, которые были разбиты на четыре группы, соответствующие компонентам композита. Напоминаем, что V_p – продольная скорость, V_s – поперечная скорость, TC – это теплопроводность, AR – аспектное отношение (форма), V – объемная доля соответствующего элемента, ρ – плотность.

Таблица 4.3 – Параметры модели физических свойств композита. Поделены по компонентам слагающие композиты.

	Материал	Воск	Воздух	Композит
Физ. свойства	$V_{p,mat}, V_{s,mat},$ TC_{mat}, ρ_{mat}	$V_{p,wax}, V_{s,wax},$ TC_{wax}, ρ_{wax}	$V_{p,cr}, V_{s,cr},$ TC_{cr}, ρ_{cr}	$V_{p,pel}, V_{s,pel},$ TC_{pel}, ρ_{pel}
Объемная доля	V_{mat}	V_{wax}	V_{cr}	V_{pel}
Форма элементов	AR_{mat}	AR_{wax}	AR_{cr}	-

На рисунках 4.4 – 4.6 приведены результаты расчетов по определению зависимости скоростей V_p, V_s и теплопроводности изготовленных композитов от степени раскрытия воздушных прослоек (аспектного отношения). Расчеты

приведены для композита, изготовленного на основе песчаника Бентхаймер. Аспектное отношение зерен песчаника принято равным 1.0 (сфера), а для воска это значение принято равным 0.5 из-за приложенного давления зерна воска были деформированы. Мы видим, что в диапазоне аспектного отношения от 0,005 до 0,1 происходит преимущественное изменение свойств композита. При этом решение обратной задачи (ниже это описано более подробно) мы будем искать в еще более узком диапазоне от 0,005 до 0,05. Это связано в первую очередь с тем, что скорости V_p и V_s , измеренные в композитах, лежат в диапазоне от 1,0 до 2,0 км/с, а доля воздушных прослоек по данным плотности не должна превосходить 6% от общего объема образца композитного материала. В предельных случаях, когда раскрытие минимальна и/или максимальна, акустические свойства образцов композитного материала практически не зависят от объемной составляющей воздушных прослоек. Скорости V_p и V_s с уменьшением раскрытия прослоек, то есть увеличением трещиноватости среды, приближаются к скорости воздуха, так как фактически они перекрывают путь прохождения акустической волны. При этом мы видим, что соотношение скоростей V_p/V_s резко растет. С увеличением раскрытия скорости V_p и V_s приближаются к некоторому значению, которое практически не отличается для разных объемных долей прослоек. Это связано с тем, что включения, имеющие сферическую форму в меньшей степени влияют на скорость прохождения волн.

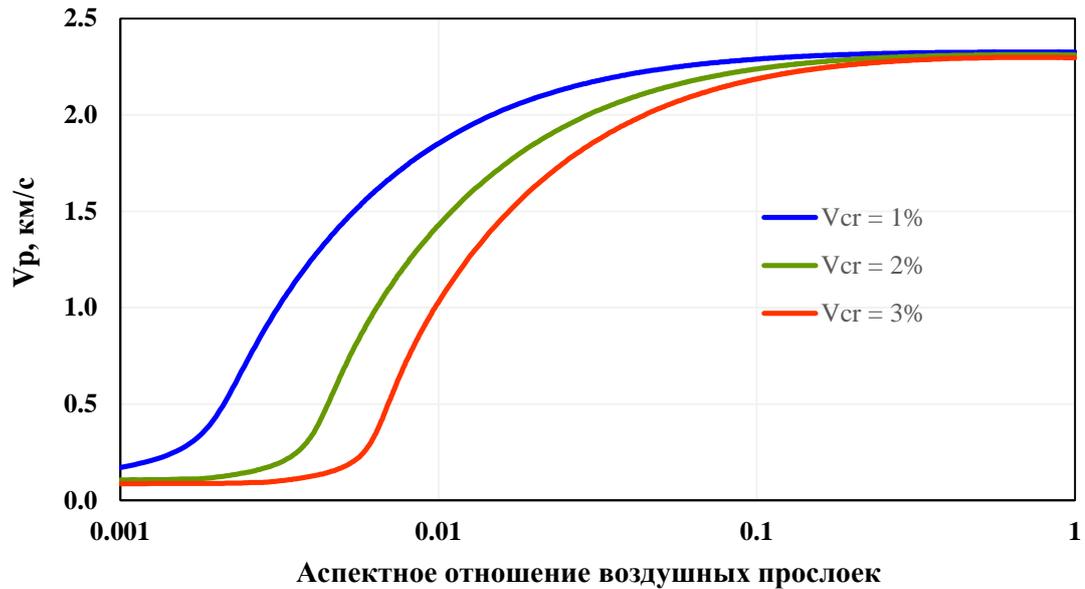


Рисунок 4.4 – Зависимость скорости продольных волн V_p композита от степени раскрытия воздушных прослоек для разных объемных долей. Доля воздуха (V_{cr}) составляет 1%, 2% и 3% для линии синего, зеленого и красного цвета соответственно.

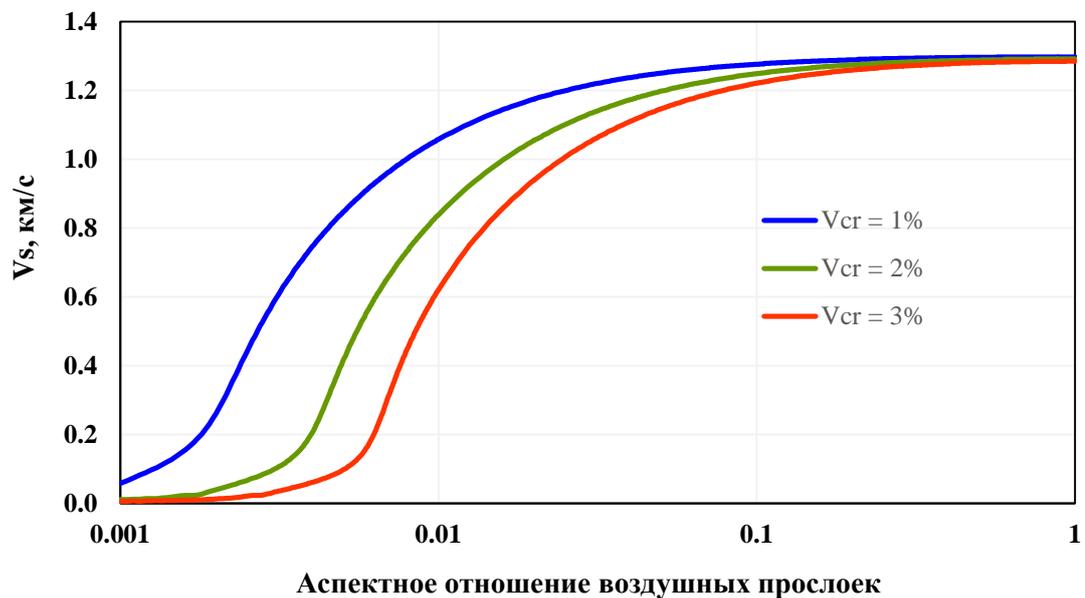


Рисунок 4.5 – Зависимость скорости поперечных волн V_s композита от степени раскрытия воздушных прослоек для разных объемных долей. Доля воздуха (V_{cr}) составляет 1%, 2% и 3% для линии синего, зеленого и красного цвета соответственно.

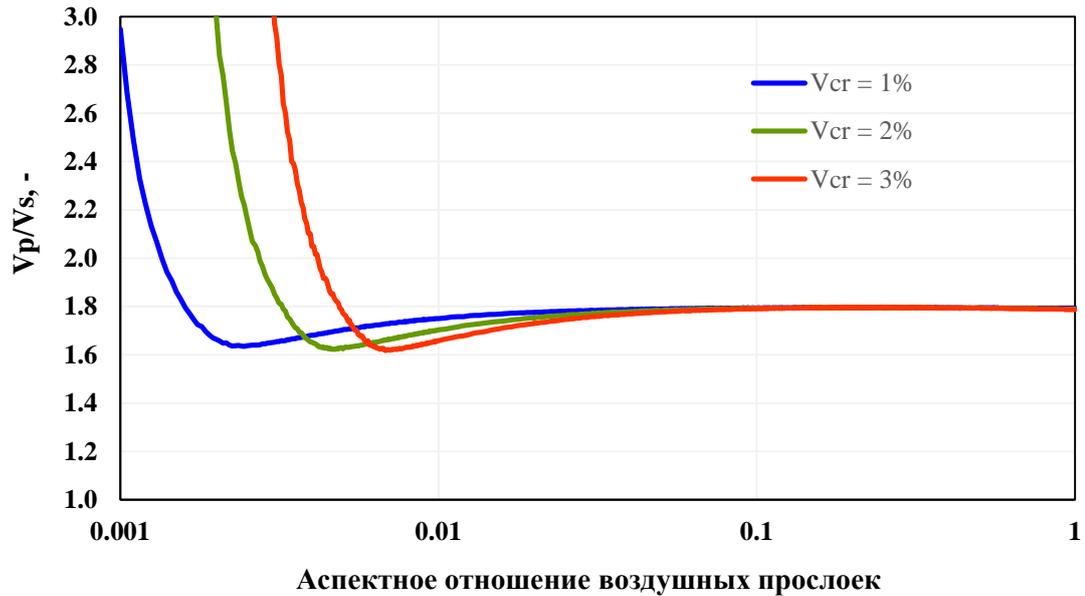


Рисунок 4.6 – Зависимость соотношения V_p/V_s композита от степени раскрытия воздушных прослоек для разных объемных долей. Доля воздуха (V_{cr}) составляет 1%, 2% и 3% для линии синего, зеленого и красного цвета соответственно.

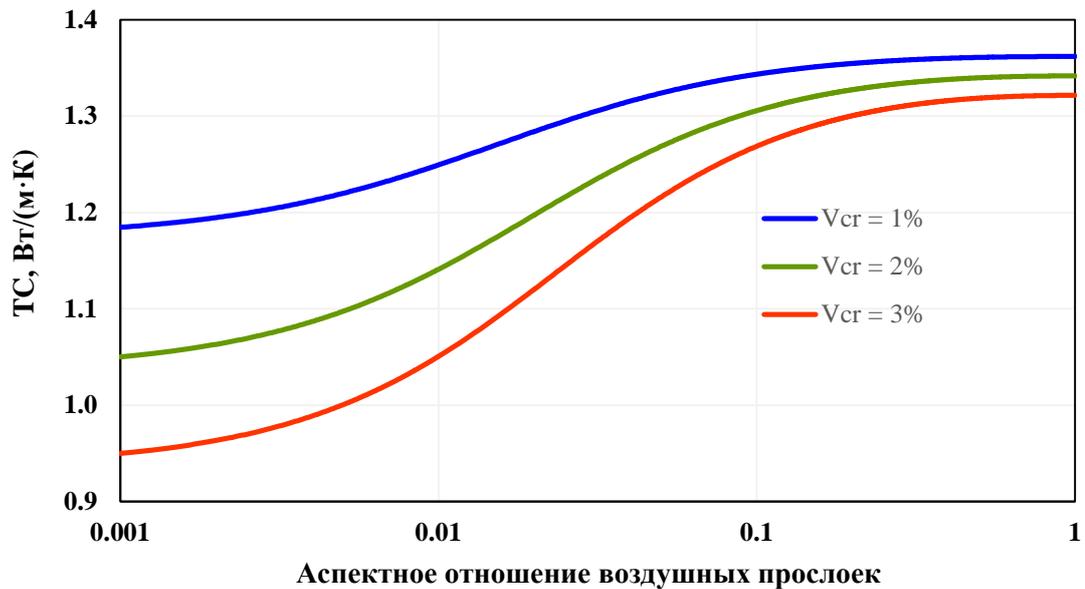


Рисунок 4.7 – Зависимость теплопроводности TC композита от степени раскрытия воздушных прослоек для разных объемных долей. Доля воздуха (V_{cr}) составляет 1%, 2% и 3% для линии синего, зеленого и красного цвета соответственно.

При построении модели мы определили аспектное отношение зерен воска (аналогично для минеральных) зерен равным 0,5, что позволило нам уменьшить число неизвестных параметров. Выбор этого значения продиктован следующими соображениями. Если к образцу композита не приложены внешние силы, зерна

воска имеют правильную сферическую форму. Приложенное давление несколько деформирует их, но степень деформации незначительно влияет на эффективные свойства образца: на рисунках 4.8–4.9 показано изменение скоростей ΔV_p , ΔV_s при изменении аспектного отношения зерен от 0,5 до 1,0 при объемной доле воздушных прослоек 2%.

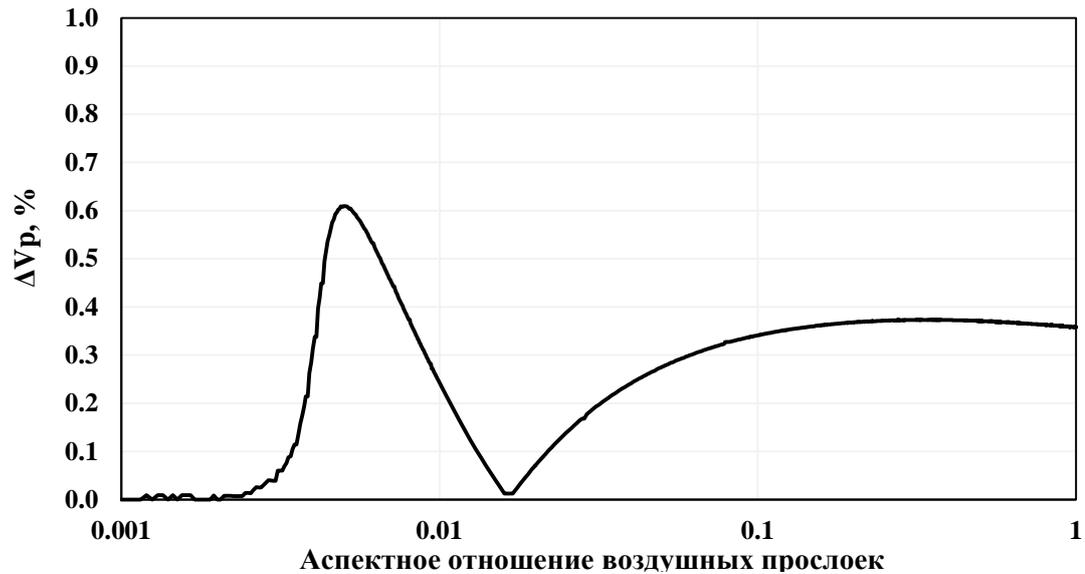


Рисунок 4.8 – Относительное изменение скорости продольной волны ΔV_p композита при изменении аспектного отношения зерен воска от 0,5 до 1,0.

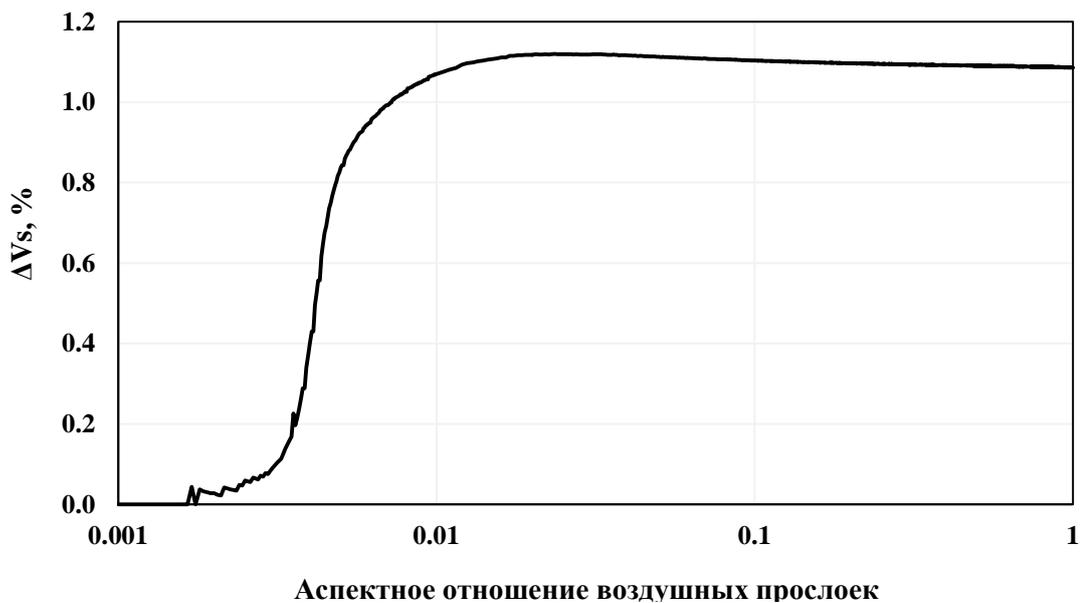


Рисунок 4.9 – Относительное изменение скорости поперечной волны ΔV_s композита при изменении аспектного отношения зерен воска от 0,5 до 1,0.

Изменение по V_p не превышает 0,6%, по V_s – 1,2%. Значит в качестве аспектного отношения зерен воска можно выбрать любое из значений из диапазона 0,5 – 1,0. Такое незначительное изменение эффективных свойств связано с тем, что объемная доля воска в изготавливаемых образцах композитного материала значительна и составляет приблизительно 40%, а также в связи со структурными особенностями образцов композитного материала. Отметим, что значительное уменьшение аспектного отношения зерен воска от 0,5 до 0,05 соответствует изменению V_p до 6% (рис. 4.10 - 4.11). Однако мы видим на рисунке 4.2, что форма зерен не сильно отличается от сферы.

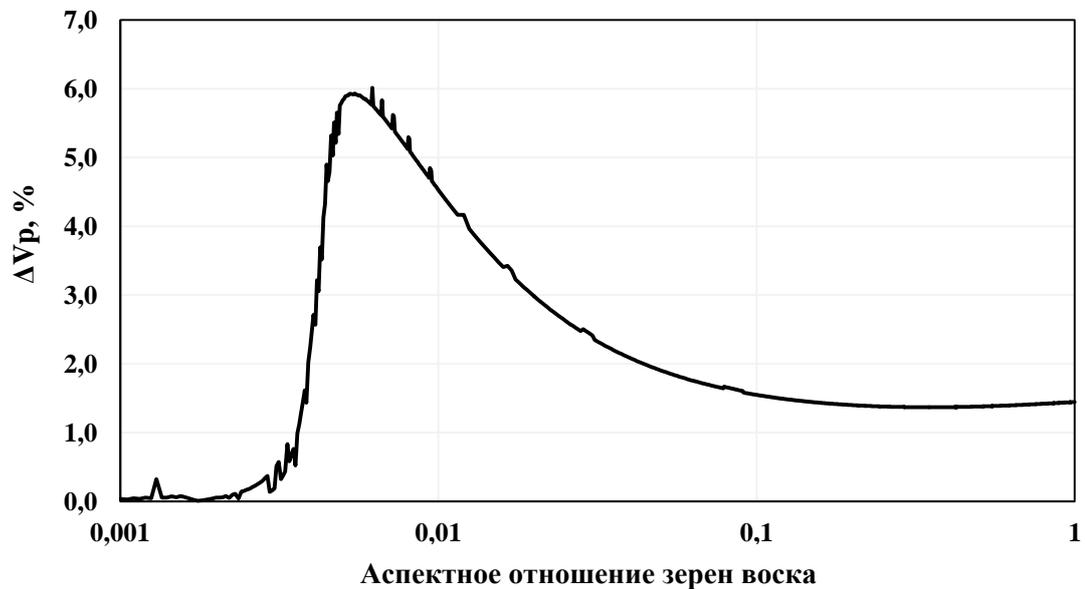


Рисунок 4.10 – Относительное изменение скорости продольной волны ΔV_p композита при изменении аспектного отношения зерен воска от 0,5 до 0,05.

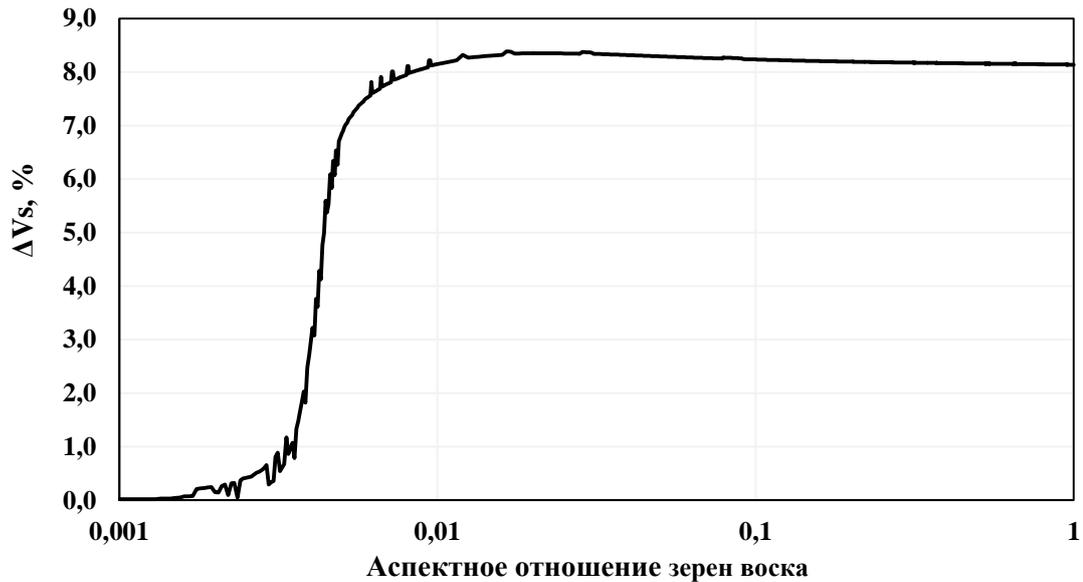


Рисунок 4.11 – Относительное изменение скорости поперечной волны ΔV_s композита при изменении аспектного отношения зерен воска от 0,5 до 0,05.

4.3 Решение обратной задачи по определению параметров модели физических свойств образцов композитного материала

С помощью построенной математической модели упругих и тепловых свойств была решена следующая задача. Допустим, что у нас есть данные об упругих свойствах и теплопроводности искусственных образцов. Необходимо определить физические свойства материала, из фрагментов которого они изготовлены. Построенная математическая модель содержит 22 параметра. Из них только 5 параметров (таблица 4.4) не могут быть определены прямыми или косвенными методами оценки параметров. Непрямыми методами, например, в результате простых соотношений получены выражения для оценки объема и плотности шлама в образце композитного материала

$$\begin{aligned}
 V_{mat} &= V_{pel} - V_{wax} - V_{cr}, \\
 \rho_{mat} &= \frac{m_{pel} - m_{wax}}{V_{pel} - V_{wax} - V_{cr}}.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Таблица 4.4 – Параметры модели физических свойств композита. Неизвестные параметры модели выделены жирным шрифтом.

	Материал	Воск	Воздух	Композит
Физ. свойства	$V_{p,mat}, V_{s,mat},$ TC_{mat}, ρ_{mat}	$V_{p,wax}, V_{s,wax},$ TC_{wax}, ρ_{wax}	$V_{p,cr}, V_{s,cr},$ TC_{cr}, ρ_{cr}	$V_{p,pel}, V_{s,pel},$ TC_{pel}, ρ_{pel}
Объемная доля	V_{mat}	V_{wax}	V_{cr}	V_{pel}
Форма элементов	AR_{mat}	AR_{wax}	AR_{cr}	-

Аспектное отношение фрагментов материала и воска были приняты равными 1 и 0,5 согласно приведенным выше рассуждениям. Для регуляризации некорректно поставленной по Адамару обратной задачи были введены ограничения на область определения неизвестных параметров. Так как свойства материалов значительно отличаются друг от друга, например, разница составляет более 150% между теплопроводностью кварцевого стекла и низкопористого песчаника и более 100% между скоростью продольной и поперечной волн кварцевого стекла и песчаника Бентхаймер, область определения неизвестных параметров зависит от типа материала. Из общих соображений область определения каждого из параметров представлена в таблице 4.5.

Таблица 4.5 – Диапазон определения неизвестных параметров модели физических свойств композитов.

Материал	Теплопроводность материала, Вт/(м·К)	Скорость продольной волны материала, км/с	Скорость поперечной волны материала, км/с	Объем воздушных прослоек, %	Аспектное отношение (раскрытие) прослоек
Белый мрамор	1,0-4,0	3,0-7,0	2,0-3,9	0-8	0,005-0,05
Кварцевое стекло	0,5-3,0	3,0-7,0	2,6 -6,0	0-8	0,005-0,05
Песчаник Бентхаймер	1,0 -4,0	1,5-6,0	1,0-2,5	0-8	0,005-0,05
Низкопористый песчаник	1,0-5,5	3,0-6,0	1,9-3,8	0-8	0,005-0,05

Для нахождения неизвестных параметров математической модели была сформулирована оптимизационная задача (обратная задача). Если обозначить индексом «эфф» расчетные значения эффективных свойств, а «эксп» – экспериментальные, тогда задача сводится к поиску минимума следующего функционала $F = F(V_p^{mat}, V_s^{mat}, TC^{mat}, AR_{cr}, V_{cr}, V_p^{exp}, V_s^{exp}, TC^{exp})$

$$\min(F) = \min \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{V_p^{эфф} - V_p^{эксп}}{V_p^{эксп}} \right)^2 + \left(\frac{V_s^{эфф} - V_s^{эксп}}{V_s^{эксп}} \right)^2 + \left(\frac{TC^{эфф} - TC^{эксп}}{TC^{эксп}} \right)^2} \right). \quad (4.2)$$

При допустимой 5%-ной ошибке в экспериментальных данных физических свойств композитов для образца 8442-1, эквивалентными решениями обратной задачи для объемной доли и аспектного отношения воздушных прослоек (рисунок 4.12) и для скоростей продольных и поперечных волн материала (рисунок 4.13) будет практически половина области, ограниченная начальными условиями.

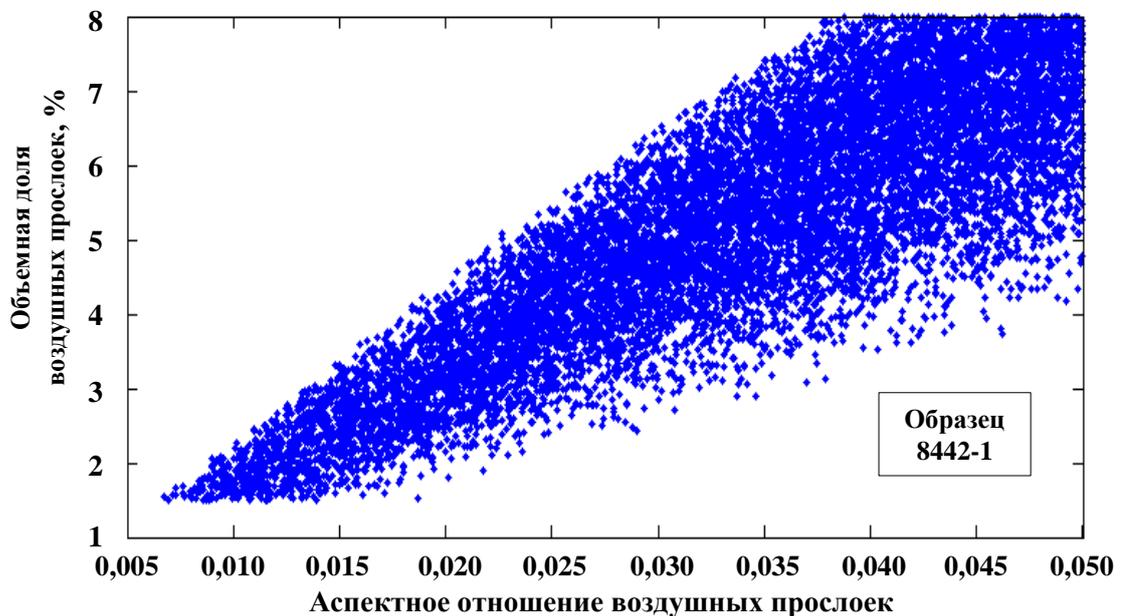


Рисунок 4.12 – Область эквивалентных решений обратной задачи для аспектного отношения и объемной доли воздушных прослоек для образца 8442-1 при условии наличия 5%-ной ошибки в экспериментальных данных, полученных для композита.

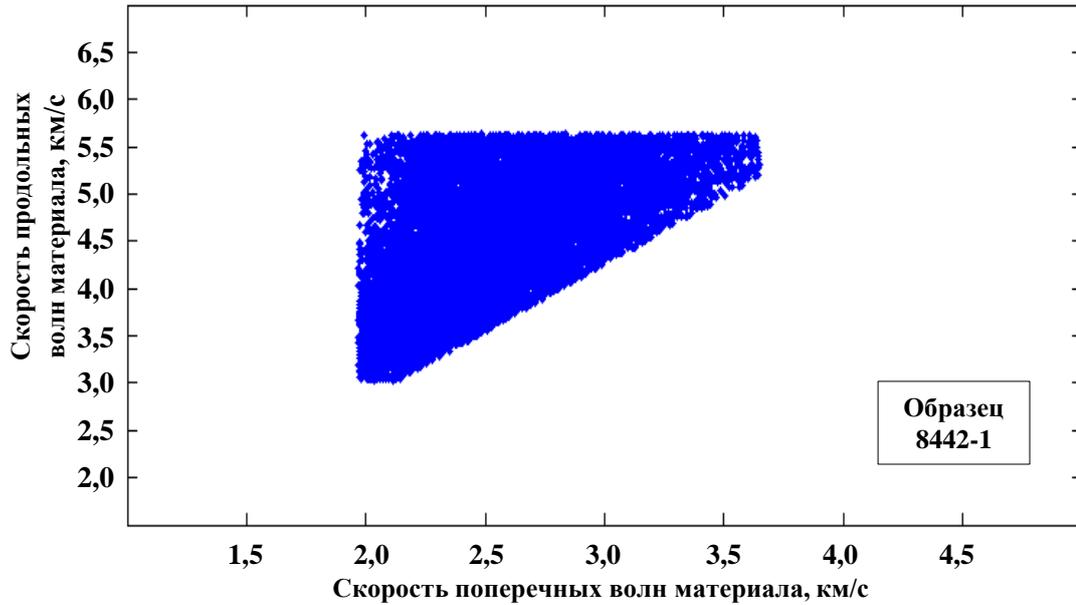


Рисунок 4.13 – Область эквивалентных решений обратной задачи для скоростей продольной и поперечной волн (V_p , V_s) материала для образца 8442-1 при условии наличия 5%-ной ошибки экспериментальных данных, полученных для композита.

Для нахождения более узкой области решения обратной задачи были использованы экспериментальные данные о физических свойствах мрамора с точностью до 5%. На рисунке 4.14 представлена область эквивалентных решений для параметров обратной задачи - объемной доли воздушных прослоек и их аспектного отношения, полученная с помощью метода Монте-Карло для образцов MR-1 и MR-2, изготовленных из мрамора, в предположении 5%-ной ошибки экспериментальных данных о физических свойствах, полученных на образцах композитного материала. Решения обратной задачи для остальных образцов мы искали в найденной области параметров обратной задачи (рисунок 4.14). Область ограничивается значениями объемной доли воздушных прослоек (V_{cr}) от 2,5 до 8 %, их аспектного отношения (AR_{cr}) от 0,010 до 0,05 и прямыми y_1 и y_2 , которые исключают области, где нет решения обратной задачи. Прямые задаются уравнениями

$$y_1: V_{cr} = 153AR_{cr} + 2, y_2: V_{cr} = 153AR_{cr}. \quad (4.3)$$

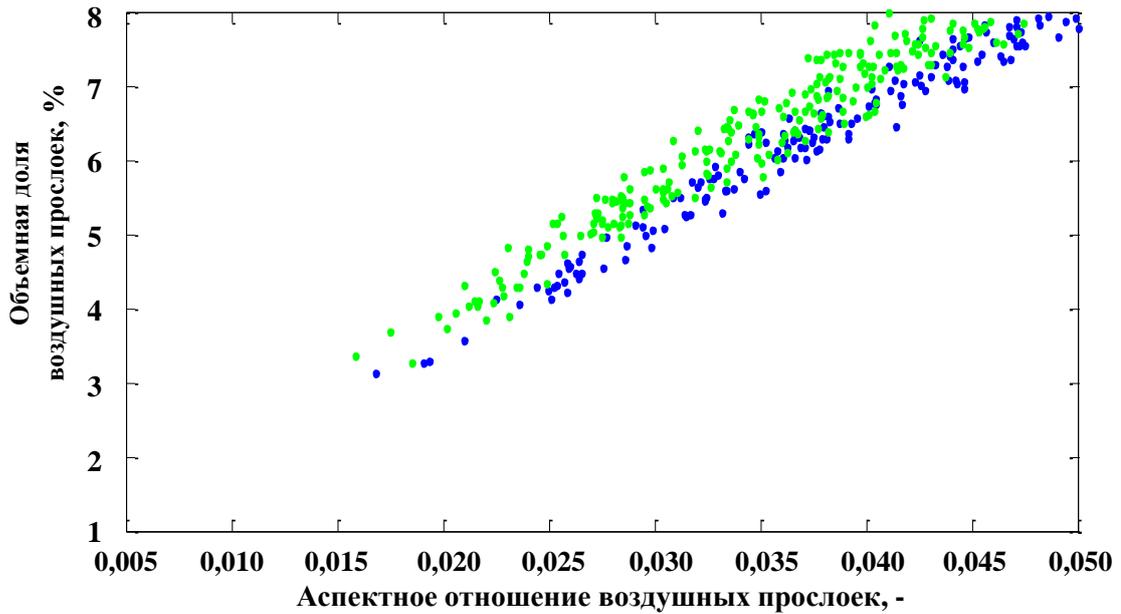


Рисунок 4.14 – Область эквивалентных решений обратной задачи для аспектного отношения и объемной доли воздушных прослоек для образцов KV-1 обозначена точками зеленого цвета, KV-2 – точками синего цвета. Использовались экспериментальные данные о тепловых и упругих свойствах материала.

С учетом этих ограничений были найдены физические свойства остальных образцов композитного материала. На рисунках 4.15 и 4.16 представлены области эквивалентных решений обратной задачи. В качестве окончательного решения предлагается выбирать наиболее вероятное значение с точки зрения применяемого метода Монте-Карло. В таблице 4.6 приведены результаты расчетов по скоростям продольных и поперечных волн и теплопроводности материала, из которого изготовлены композиты. Помимо этого, представлены параметры, характеризующую структуру композита, полученные в результате решения обратной задачи.

Таблица 4.6 – Результаты расчета упругих свойств и теплопроводности материалов, из которых изготовлены образцы композитного материала.

Образец	V_p материала, км/с	V_s материала, км/с	λ материала, Вт/(м·К)	Доля объема воздушных прослоек, %	Аспектное отношение воздушных прослоек, -
MR-1	5,13	3,23	2,62	4,5	0,024
MR-3	4,96	2,98	2,56	4,3	0,022
KV-1	5,49	3,68	1,35	5,6	0,015
KV-2	5,51	5,51	3,54	5,6	0,014
BTN-1	3,20	1,27	2,33	2,9	0,013
BTN-2	3,02	1,28	2,58	4,9	0,026
BTN-3	2,70	1,36	2,31	2,2	0,010
8442-1	5,02	2,90	3,36	5,5	0,030
8442-2	4,55	2,45	3,07	4,7	0,025
6238-1	4,47	2,70	3,47	4,4	0,023
6238-2	4,26	2,89	3,29	2,8	0,013
6417-1	4,28	2,79	3,31	3,6	0,017
6417-2	3,70	2,48	3,43	3,0	0,014
5005-1	3,82	2,50	2,94	3,1	0,015
5005-2	4,44	2,14	2,94	2,8	0,013

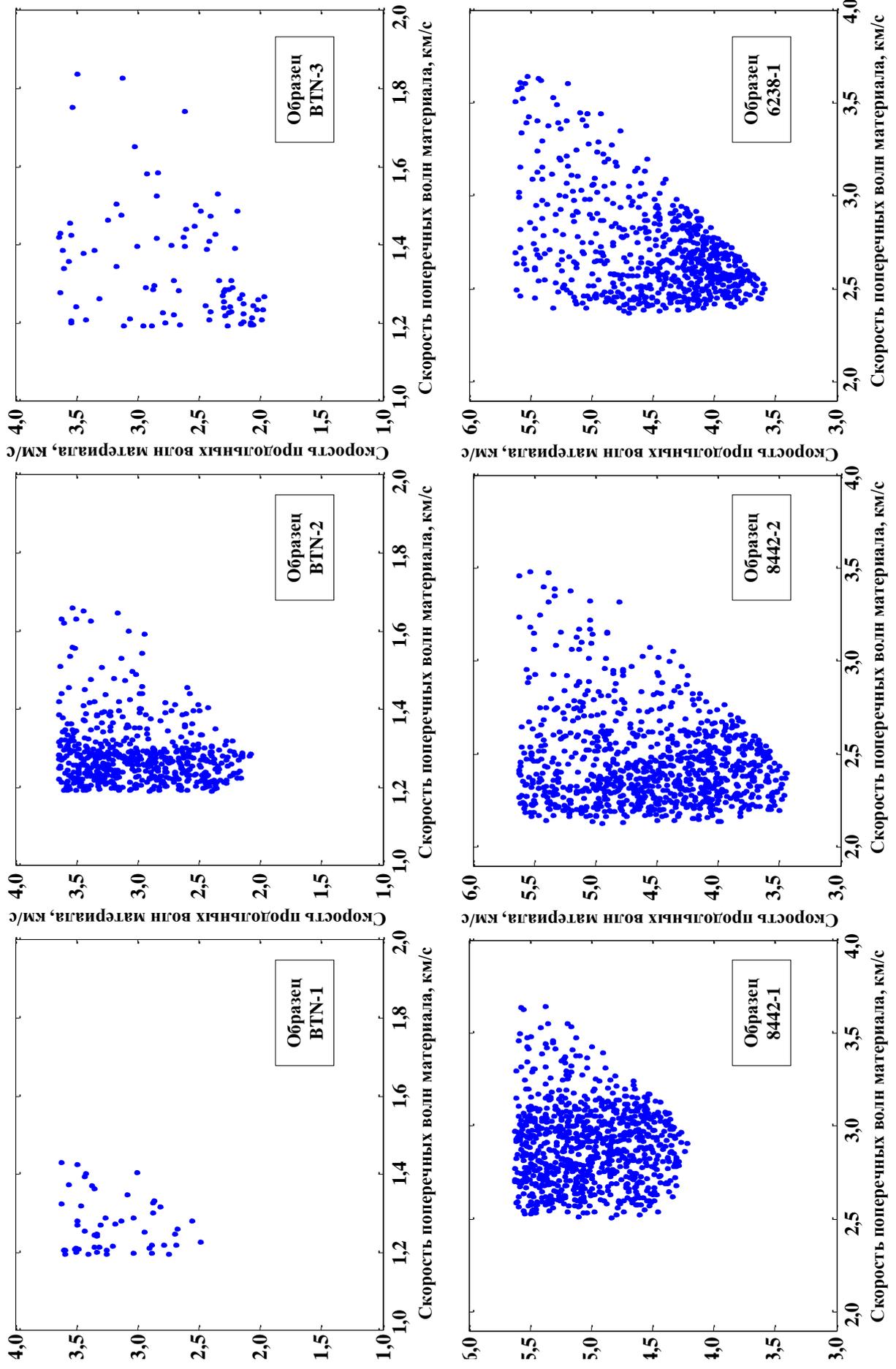


Рисунок 4.15 – Области решения обратной задачи для каждого композита.

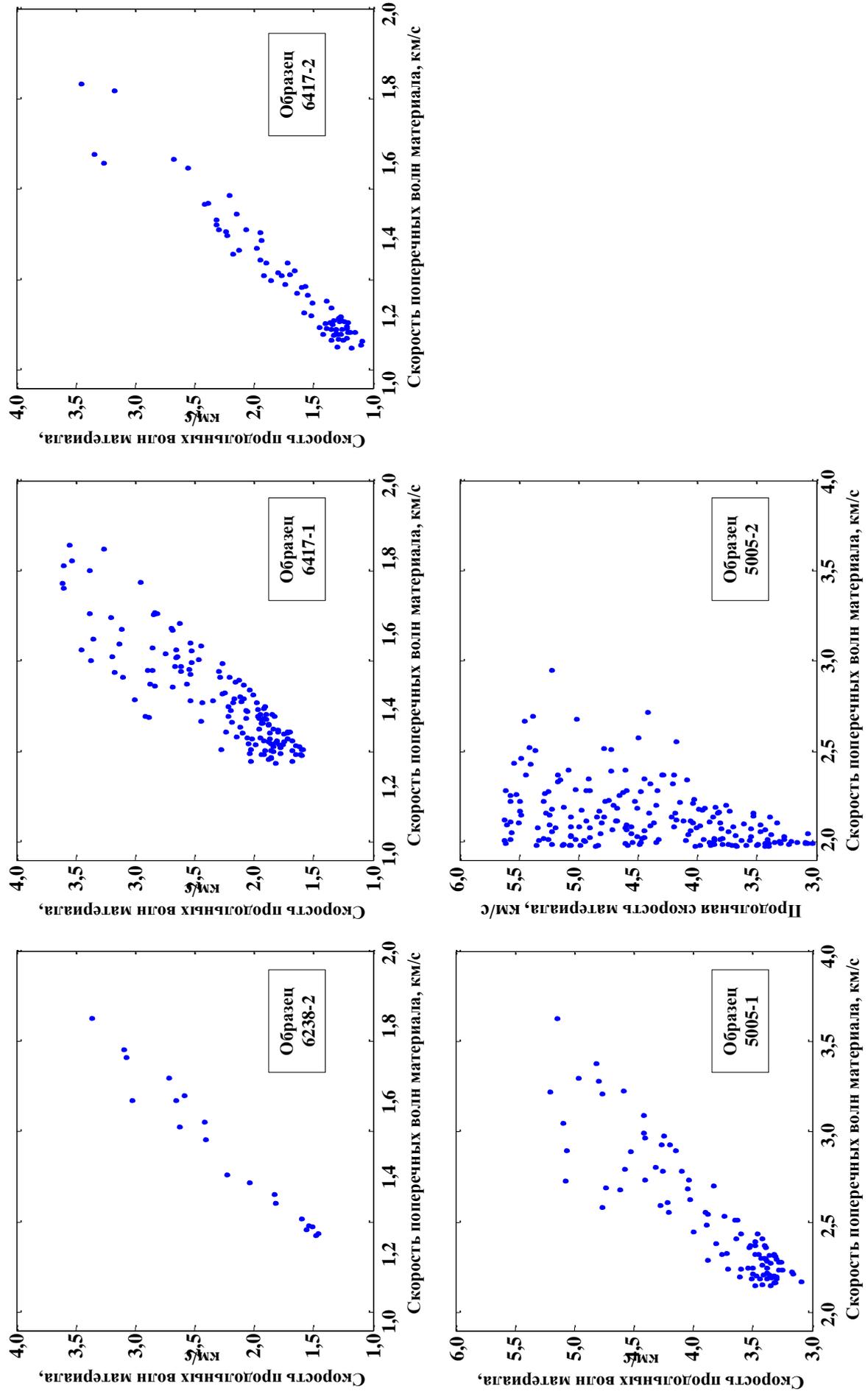


Рисунок 4.16 – Области решения обратной задачи для каждого композита.

В итоге отклонение экспериментальных и расчетных данных для скоростей продольной и поперечной волн и теплопроводности составило не более 23%, 14% и 17% соответственно, а в среднем 9%, 7% и 6% соответственно (рисунки 4.17, 4.18, 4.19).

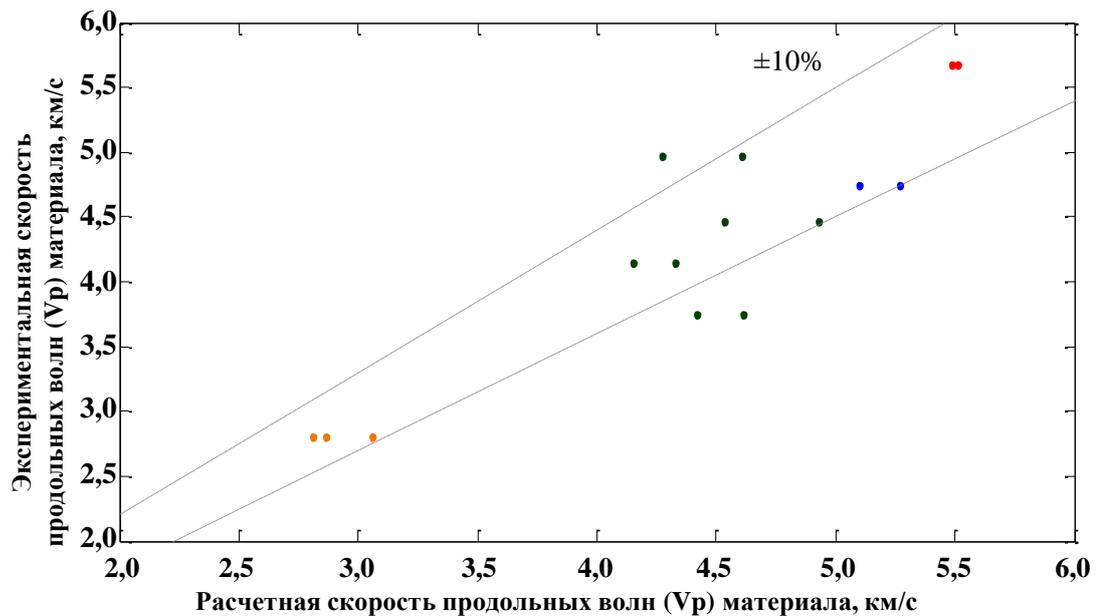


Рисунок 4.17 – Сравнение экспериментальных и расчетных данных для скоростей продольных волн (V_p) материала.

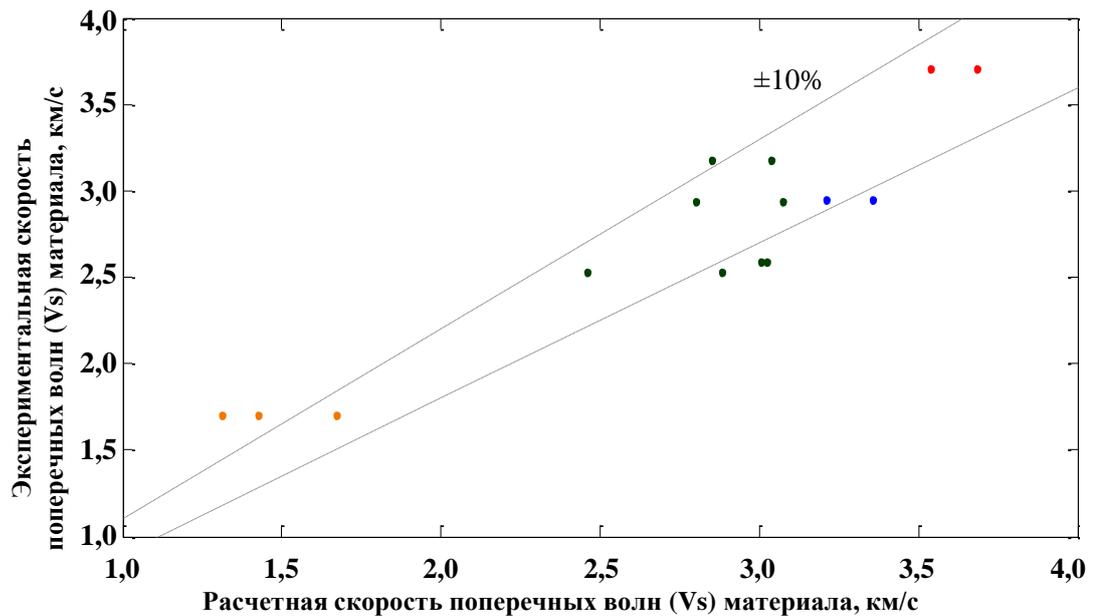


Рисунок 4.18 – Сравнение экспериментальных и расчетных данных для скоростей поперечных волн (V_s) материала.

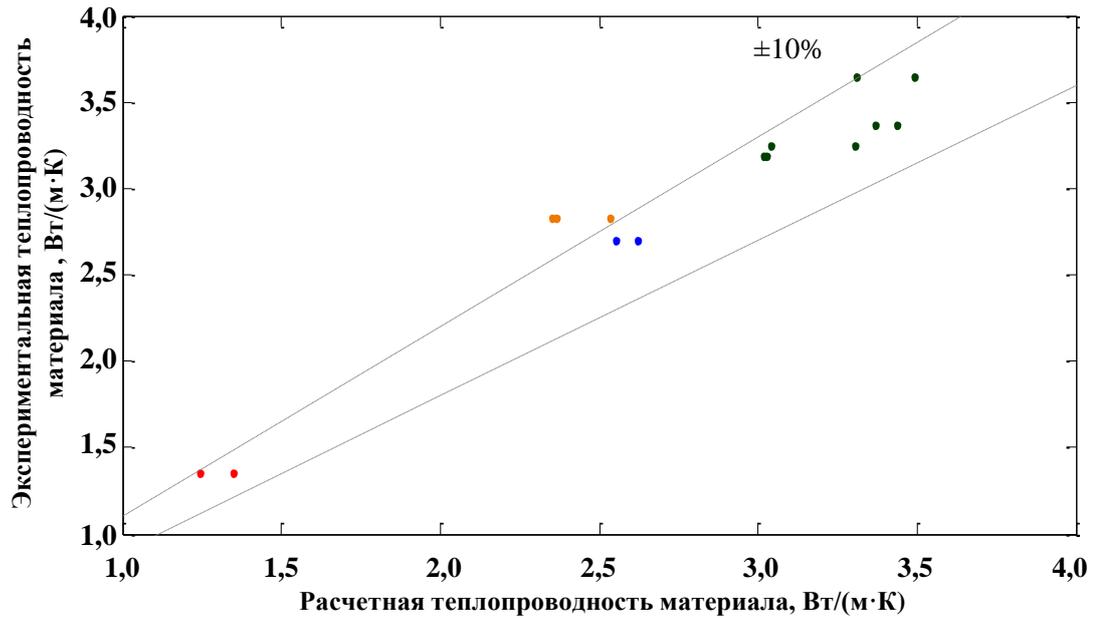


Рисунок 4.19 – Сравнение экспериментальных и расчетных данных для теплопроводности материала.

4.4 Выводы к главе 4

Предложена методика по определению эффективных упругих свойств и теплопроводности горных пород по соответствующим свойствам образцов композитного материала, изготовленного из фрагментов этой породы. Описан способ изготовления этих образцов. Предложена двухстадийная математическая модель физических свойств искусственного образца (композита) на основе теории эффективных сред в приближении обобщенного сингулярного приближения. На основании предложенной модели были проведены расчеты эффективных свойств породы по данным о физических свойствах, измеренных на образцах композитного материала. Среднее отклонение по скоростям продольных и поперечных волн и теплопроводности не превосходит 10% при допущении 5%-ой погрешности экспериментальных данных. Максимальное отклонение при тех же условиях составляет не более 23%, 14% и 17% соответственно. Проведен параметрический анализ модели, позволяющий установить ее наиболее чувствительные параметры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. В первой главе рассмотрены и сгруппированы наиболее распространенные теоретические подходы для расчета эффективных свойств пород. Описаны сильные и слабые стороны каждой из групп. Рассмотрены методы измерения теплопроводности. Получена формула для расчета эффективной теплопроводности микронеоднородной среды на основе метода Т-матрицы. Показано, что формула известного метода самосогласования теории эффективных сред является частным случаем этой формулы.
2. Во второй главе описаны основные принципы методики установления связи тепловых и упругих свойств горных пород. Детально описаны этапы комплексного анализа пород и построения модели эффективной среды. Предложенные принципы были использованы для построения моделей физических свойств карбонатных и терригенных типов пород.
3. Предложен алгоритм решения задачи флюидозамещения для теплопроводности. Были использованы модели физических свойств карбонатных и терригенных типов пород, построенные в главе 2 для реализации предложенного алгоритма. Проведено сравнение результатов прогноза теплопроводности, полученных методом обобщенного сингулярного приближения теории эффективных сред, с другими методами.
4. Проведено комплексное исследование физических свойств и структуры песчаника Бентхаймер. Полученные экспериментальные данные о физических свойствах песчаника Бентхаймер и его структуре дали возможность использовать для моделирования его физических свойств модель, построенную в главе 2 для терригенного типа коллектора. На основании построенной модели установлена связь между теплопроводностью породы и скоростями продольных и поперечных волн. Построенная модель была успешно использована для прогноза

теплопроводности песчаника Бентхаймер по данным об упругих свойствах породы и наоборот, - для прогноза упругих свойств по данным о теплопроводности этой породы.

5. Построенная параметрическая математическая модель физических свойств песчаника Бентхаймер была использована для количественной оценки изменения параметров структуры модели в зависимости от приложенной осевой нагрузки. Это позволило определить зависимость эффективной теплопроводности от приложенной осевой нагрузки по соответствующим данным о ее упругих свойствах.
6. Предложена методика по определению эффективных упругих свойств и теплопроводности горных пород по соответствующим свойствам композита, изготовленного из фрагментов этой породы. Описан способ изготовления образцов композитного материала для измерений соответствующих физических свойств. Предложена двухстадийная математическая модель физических свойств искусственного образца на основе теории эффективных сред в приближении обобщенного сингулярного приближения. Проведен параметрический анализ модели, позволяющий установить ее наиболее чувствительные параметры. На основании предложенной модели были проведены расчеты эффективных свойств породы по данным о физических свойствах, измеренных на образцах композитного материала.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\lambda^{\text{эфф}}$ – эффективная теплопроводность

$\lambda_{\text{мат}}$ – теплопроводность матрицы

$\lambda_{\text{возд}}$ – теплопроводность воздуха

AR – аспектное отношение

ТЭС – теория эффективных сред

$\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ – плотность теплового потока в точке \mathbf{r}

$\mathbf{Z}(\mathbf{r})$ – градиент поля температуры в точке \mathbf{r}

ТС – теплопроводность

ТС_d – теплопроводность сухих образцов

ТС_w – теплопроводность водонасыщенных образцов

$V_{p,d}$ – скорость продольных волн для сухого образца

$V_{s,d}$ – скорость поперечных волн для сухого образца

$V_{p,w}$ – скорость продольных волн для водонасыщенного образца

$V_{s,w}$ – скорость поперечных волн для водонасыщенного образца

v – объемная доля компоненты

MR – образцы композита, изготовленного на основе мрамора

KV – образцы композита, изготовленного на основе кварцевого стекла

BTN – образцы композита, изготовленного на основе песчаника Бентхаймер

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баяк И.О. Теоретические основы определения эффективных физических свойств коллекторов углеводородов // Акустика неоднородных сред. 2011. Т. 12. С. 107–120.
2. Баяк И.О. Междисциплинарный подход к прогнозированию макроскопических и фильтрационно-емкостных свойств коллекторов углеводородов. Москва: Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, 2013. 168 с.
3. Богданчиков С.М. Роль научно-технического прогресса в развитии мировой нефтяной промышленности // Научно-технический вестник ОАО «НК»Роснефть». 2006. Т. 1. С. 3–7.
4. Боксерман А.А. России нужна эффективная стратегия развития нефтяной отрасли // Бурение и нефть. 2011. Т. 2. С. 15–16.
5. ГОСТ 21153.7-75. Метод определения скоростей распространения упругих продольных и поперечных волн. Москва: Изд-во стандартов, 1975. С. 29–36.
6. Дахнов В.Н., Дьяконов Д.И. Термические исследования скважин. Москва: Гостоптехиздат, 1952. 252 с.
7. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
8. Коробков Д.А. Исследования тепловых свойств осадочных пород методом оптического сканирования. Москва: Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, 2006. 184 с.
9. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика т. VIII. Электродинамика сплошных сред. Москва: Наука, 2005. С. 656.
10. Миклашевский Д.Е. и др. Измерения компонент тензоров теплопроводности и температуропроводности горных пород при пластовых термобарических условиях // Известия высших учебных заведений. Геология и разведка. 2006. Т. 6. С. 38–42.
11. Новиков В.В., Wojciechowski K.W. Отрицательный коэффициент Пуассона

- фрактальных структур // Физика твердого тела. 1999. Т. 41. С. 2147–2153.
12. Новиков С.В. Тепловые свойства терригенных коллекторов и насыщающих флюидов. Москва: Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, 2009.
13. Новиков С.В., Горобцов Д.Н., Черепанов А.О. Особенности применения модели Лихтенеккера-Асаада для оценки теплопроводности флюидонасыщенных кварцевых песчаников // Geophysics. 2009. 2009.
14. Патентная заявка N2016120852. Способ определения механических свойств горных пород. Подана 27.05.2016.
15. Попов Ю.А. Теоретические модели для определения тепловых свойств горных пород на основе подвижных источников тепловой энергии (статья 1) // Известия высших учебных заведений. Геология и разведка. 1983. Т. 9. С. 97–103.
16. Тертычный В.В. Математические модели упругих и тепловых свойств микронеоднородных и анизотропных сред. Москва: Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2001. 166 с.
17. Патент РФ №2287677. Способ разработки нефтебитумной залежи. Авторы Хисамов Р.С., Абдулмазитов Р.Г., Ибатуллин Р.Р., Валовский В.М., Зарипов А.Т. Патентообладатель открытое акционерное общество "Татнефть" им. В.Д. Шашина. Заявлено 16.12.2005. Опубликовано 20.11.2006.
18. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. Москва: Наука, 1977. 400 с.
19. Ялаев Т.Р., Баяк И.О., Горобцов Д.Н., Попов Е.Ю. Экспериментальный анализ надежности современных подходов к теоретическому моделированию теплопроводности осадочных пород // Доклады. XI Международная конференция «Новые идеи в науках о Земле», 09-12 апреля 2013, Москва, Россия. Т. 3. 2013а. С. 396–398.
20. Ялаев Т.Р., Баяк И.О., Горобцов Д.Н., Попов Е.Ю. Экспериментальный анализ применимости современных подходов к теоретическому моделированию теплопроводности осадочных пород // Известия высших учебных заведений.

Геология и разведка. 2013b. Т. 2. С. 63–68.

21. Ялаев Т.Р., Баяк И.О., Горобцов Д.Н., Попов Е.Ю. Математическое моделирование теплопроводности терригенных пород с учетом особенностей их структуры // Материалы конференции. VII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодые – наукам о Земле», 15-17 апреля 2014, Москва, Россия. 2014. С. 206–207.

22. Ялаев Т.Р., Баяк И.О., Тарелко Н.Ф., Абашкин В.В. Связь тепловых и упругих свойств песчаника // Технологии сейсморазведки. 2016. Т. 2. С. 76–82.

23. Ялаев Т.Р. Прогноз теплопроводности терригенной породы в условиях напряженного состояния по данным об ее упругих свойствах // Тезисы докладов. Научная конференция молодых ученых и аспирантов ИФЗ РАН тезисы докладов и программа конференции. Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук. Москва. 2016. С. 78.

24. Ялаев Т.Р., Баяк И.О. Особенности и критерии использования теории эффективных сред для моделирования эффективной теплопроводности карбонатных и терригенных пород // Труды Российского государственного университета нефти и газа имени И.М. Губкина. 2016a. Т. 2. С. 35–41.

25. Ялаев Т.Р., Баяк И.О. Особенности и критерии использования теории эффективных сред для моделирования эффективной теплопроводности карбонатных и терригенных пород // XXI Губкинские чтения «Фундаментальный базис инновационных технологий поисков, разведки и разработки месторождений нефти и газа и приоритетные направления развития ресурсной базы ТЭК России» Тезисы докладов. РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина. 2016b. С. 154–158.

26. Adler D., Flora L.P., Senturia S.D. Electrical conductivity in disordered systems // Solid State Communications. 1973. Vol. 12. P. 9–12.

27. Alvarado V., Manrique E. Enhanced oil recovery: an update review // Energies. 2010. Vol. 3. P. 1529–1575.

28. Anand J., Somerton W.H., Goma E. Predicting thermal conductivities of formations from other known properties // Society of Petroleum Engineers Journal.

1973. Vol. 13. P. 267–273.

29. Andrä H. и др. Digital rock physics benchmarks-Part I: imaging and segmentation // Computers and Geosciences. 2013a. Vol. 50. P. 25–32.

30. Andrä H. и др. Digital rock physics benchmarks-part II: computing effective properties // Computers and Geosciences. 2013b. Vol. 50. P. 33–43.

31. Asaad Y. A study of the thermal conductivity of fluid-bearing porous rocks Yousri Asaad. Berkeley: University of California, 1955. 142 p.

32. ASTM D2845 - 00. Standard test method for laboratory determination of pulse velocities and ultrasonic elastic constants of rock. 2000. C. 1–7.

33. ASTM D7012 - 04. Standard test method for compressive strength and elastic moduli of intact rock core specimens under varying states of stress and temperatures. 2004. P. 1–8.

34. ASTM D4611-08. Standard test method for specific heat of rock and soil. 2008. P. 1–4.

35. Bayuk I., Popov Y., Parshin A. A new powerful tool for interpreting and predicting in reservoir geophysics : theoretical modeling as applied to laboratory measurements of thermal properties // SCA2011_39. International Symposium of the Society of Core Analysts held in Austin, Texas, USA, September 18th – 21st. 2011. P. 1–12.

36. Beck A.E. An improved method of computing the thermal conductivity of fluid-filled sedimentary rocks // Geophysics. 1976. Vol. 41. P. 133–144.

37. Blackwell D.D., Spafford R.E. Experimental methods in continental heat flow // Methods of experimental physics. 1987. Vol. 24, part B. P. 189–226.

38. Buntebarth G., Schopper J.R. Experimental and theoretical investigations on the influence of fluids, solids and interactions between them on thermal properties of porous rocks // Physics and Chemistry of the Earth. 1998. Vol. 23. P. 1141–1146.

39. Castaneda P.P., Willis J.R. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1995. Vol. 43. P. 1919-1951

40. Chekhonin E. и др. When Rocks Get Hot: Thermal Properties of Reservoir Rocks //

Oilfield Review Autumn. 2012. Vol. 3. P. 20–37.

41. Churcher P.L. и др. Rock Properties of Berea Sandstone, Baker Dolomite, and Indiana Limestone // SPE International Symposium on Oilfield Chemistry. Society of Petroleum Engineers, 1991. P. 431–466.

42. Demianov A., Korobkov D. Numerical simulation of rock thermal properties // Proceedings of the International Conference on Heat Transfer and Fluid Flow. 2014. P. 69-1-69–4.

43. Donaldson E.C., Chilingarian G.V., Yen T.F. Microbial enhanced oil recovery. Vol. 22. Netherlands: Newnes, 1989. 227 p.

44. Dubelaar C.W., Nijland T.G. Early Cretaceous Obernkirchen and Bentheim Sandstones from Germany used as dimension stone in the Netherlands: geology, physical properties, architectural use and comparative weathering // Geological Society, London, Special Publications. 2016. T. 416. № 1. P. 163–181.

45. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1957. Vol. 241. P. 376–396.

46. Freifeld B.M. и др. Ground surface temperature reconstructions: using in situ estimates for thermal conductivity acquired with a fiber-optic distributed thermal perturbation sensor // Geophysical Research Letters. 2008. Vol. 35.

47. Fuchs S. и др. Evaluation of common mixing models for calculating bulk thermal conductivity of sedimentary rocks: Correction charts and new conversion equations // Geothermics. 2013a. Vol. 47. P. 40–52.

48. Fuchs S. и др. From dry to saturated thermal conductivity : mixing-model correction charts and new conversion equations for sedimentary rocks // EGU General Assembly Conference Abstracts. 2013b.

49. Gary M., Mukerji T., Dvorkin J. Rock physics handbook. New York: Cambridge University Press, 2009. 169-229 P.

50. Gegenhuber N., Schoen J. New approaches for the relationship between compressional wave velocity and thermal conductivity // Journal of Applied

Geophysics. 2012. Vol. 76. P. 50–55.

51. Gelb J. et al. Macro To Nano : Correlative X-Ray and Electron Microscopy for Multi-Length Scale Characterization of Geomaterials Electron Microscopy for Multi-Length Scale // International Symposium of the Society of Core Analysts held in Avignon, France, 8-11 September 2014. Avignon, France. 2014. P. SCA2014-061.

52. Goss R., Combs J., Timur A. Prediction of thermal conductivity in rocks from other physical parameters and from standard geophysical well logs // SPWLA 16th Annual Logging Symposium, June 4-7. 1975. P. 1–21.

53. Goutorbe B., Lucazeau F., Bonneville A. Using neural networks to predict thermal conductivity from geophysical well logs // Geophysical Journal International. 2006. Vol. 166. P. 115–125.

54. Han M. et al. Development of chemical EOR formulations for a high temperature and high salinity carbonate reservoir // IPTC 2013: International Petroleum Technology Conference. 2013.

55. Hartmann A., Rath V., Clauser C. Thermal conductivity from core and well log data // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2005. Vol. 42. P. 1042–1055.

56. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials // Journal of Applied Physics. 1962. Vol. 33. P. 3125–3131.

57. Horai K. Thermal conductivity of rock-forming minerals // Journal of Geophysical Research. 1971. Vol. 76. P. 1278–1308.

58. Horai K., Simmons G. Thermal conductivity of rock-forming minerals // Earth and Planetary Science Letters. 1969. Vol. 6. P. 359–368.

59. Jacobsen O.H., Schjønning P. Comparison of TDR calibration functions for soil water determination // Proceedings of the symposium: Time-Domain Reflectometry: Applications in Soil Science. Aarhus, Denmark: L W Peterson; O H Jacobsen, 1995. P. 25–33.

60. Jaeger J.C. The measurement of thermal conductivity and diffusivity with

- cylindrical probes // Transactions, American Geophysical Union. 1958. Vol. 39. P. 708–710.
61. Jakobsen M. Effective hydraulic properties of fractured reservoirs and composite porous media // Journal of Seismic Exploration. 2007. Vol. 16. P. 199–224.
62. Khandelwal M. Prediction of thermal conductivity of rocks by soft computing // International Journal of Earth Sciences. 2010. Vol. 100. P. 1383–1389.
63. Leoni L., Saitta M. X-ray fluorescen analysis of 29 trace elements in rock and mineral standards // Rend. Soc. It. Mineral. Petrog. 1976. Vol. 32. P. 497–510.
64. Lichtenecker K. Von, Rother K. Die Herleitung des logarithmischen Mischungsgesetzes aus allgemeinen Prinzipien der stationären Strömung // Physikalische Zeitschrift. 1931. Vol. 32. P. 255–260.
65. Madden T.R. Random networks and mixing laws // Geophysics. 1976. Vol. 41. № 6a. P. 1104–1125.
66. Maqsood A., Kamran K., Gul I.H. Prediction of thermal conductivity of granite rocks from porosity and density data at normal temperature and pressure: in situ thermal conductivity measurements // Journal of Physics D-Applied Physics. 2004. Vol. 37. P. 3396–3401.
67. Maxwell J.C. A treatise on electricity and magnetism. London: Oxford : Clarendon Press. Chapter IX, 1873. 504 p.
68. Moulinec H., Suquet P. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1998. Vol. 157. P. 69–94.
69. Nelder J.A., Mead R. A simplex method for function minimization // The computer journal. 1965. Vol. 7. P. 308-313.
70. Özkahraman H.T., Selver R., Işık E.C. Determination of the thermal conductivity of rock from P-wave velocity // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2004. Vol. 41. P. 703–708.
71. Pashchenko A.F., Ageev N.P. Increased oil recovery by application of plasma pulse treatment // Abu Dhabi International Petroleum Exhibition & Conference. : Society of

Petroleum Engineers, 2016.

72. Popov Y. et al. ISRM suggested methods for determining thermal properties of rocks from laboratory tests at atmospheric pressure // *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2016. Vol. 49. P. 4179–4207.

73. Popov Y.A. et al. Characterization of rock thermal conductivity by high-resolution optical scanning // *Geothermics*. 1999. Vol. 28. P. 253–276.

74. Popov Y., Romushkevich R. Thermal conductivity of sedimentary rocks of oil-gas fields // *The Earth's Thermal Field and Related Research Methods*. Moscow, Russia: , 2002. P. 214–217.

75. Pozdniakov S., Tsang C.-F. A self-consistent approach for calculating the effective hydraulic conductivity of a binary, heterogeneous medium // *Water Resources Research*. 2004. Vol. 40. № 5. P. 1–13.

76. Robertson E.C. Thermal properties of rocks. Report 88-441. , 1988. 106 p.

77. Ruessink B.H., Harville D.G. Quantitative Analysis of bulk mineralogy: the applicability and performance of XRD and FTIR // *SPE Formation Damage Control Symposium*, 26-27 February, Lafayette, Louisiana. , 1992. P. 533–546.

78. Sævik P.N. и др. Anisotropic effective conductivity in fractured rocks by explicit effective medium methods // *Geophysical Prospecting*. 2014. Vol. 62. № 6. P. 1297–1314.

79. Shukuno H. Quantitative analysis of rock-forming minerals and volcanic glasses by electron probe microanalyzer // *Frontier Research on Earth Evolution*. 1995. Vol. 1. P. 129–136.

80. Simpkin R. Derivation of Lichtenecker's logarithmic mixture formula from Maxwell's equations // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2010. Vol. 58. P. 545–550.

81. Singh T.N. et al. Prediction of p-wave velocity and anisotropic property of rock using artificial neural network technique // *Journal of Scientific & Industrial Research*. 2004. Vol. 63. P. 32–38.

82. Somerton W.H., Keese J.A., Chu S.L. Thermal behavior of unconsolidated oil sands

// Society of Petroleum Engineers Journal. 1974. Vol. 14. P. 513–521.

83. Sonmez H. et al. Estimation of rock modulus: For intact rocks with an artificial neural network and for rock masses with a new empirical equation // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2006. Vol. 43. P. 224–235.

84. Stephan K., Laesecke A. The thermal conductivity of fluid air // Journal of Physical and Chemical Reference Data. 1985. Vol. 14. P. 227–234.

85. Sugawara A., Yoshizawa Y. An investigation on the thermal conductivity of porous materials and its application to porous Rock // Australian Journal of Physics. 1961. Vol. 14. № 4. P. 469–480.

86. Sugawara A., Yoshizawa Y. An experimental investigation on the thermal conductivity of consolidated porous materials // Journal of Applied Physics. 1962. Vol. 33. P. 3135–3138.

87. Talbot D.R.S., Willis J.R. Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of nonlinear composites // IMA Journal of Applied Mathematics. 1987. Vol. 39. P. 215–240.

88. Vasseur G., Brigaud F., Demongodin L. Thermal conductivity estimation in sedimentary basins // Tectonophysics. 1995. Vol. 244. № 1–3. P. 167–174.

89. Waite W.F. et al. Estimating thermal diffusivity and specific heat from needle probe thermal conductivity data // Review of Scientific Instruments. 2006. Vol. 77. P. 44904-1-44904-5.

90. Wang M., Pan N. Predictions of effective physical properties of complex multiphase materials // Materials Science and Engineering R: Reports. 2008. Vol. 63. № 1. P. 1–30.

91. Wiegmann A., Bube K.P. The explicit-jump immersed interface method: finite difference methods for PDES with piecewise smooth solutions // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2000. Vol. 37. P. 827–862.

92. Woodside W., Messmer J.H. Thermal conductivity of porous media. II. Consolidated rocks // Journal of Applied Physics. 1961. Vol. 32. P. 1699–1706.

93. Yalaev T.R. et al. Application of effective medium theory to reconstruction of elasticity tensor of bentheimer sandstone // Proceedings of the 17th Scientific-Practical

Conference on Oil and Gas Geological Exploration and Development «Geomodel 2015» held in Gelendzhik 12-17 September 2015. P. 310–314.

94. Yalaev T.R. et al. Connection of elastic and thermal properties of Bentheimer sandstone using effective medium theory (rock physics) // ARMA-2016-128. 50th U.S. Rock Mechanics/Geomechanics Symposium, 26-29 June, Houston, Texas. , 2016. P. 1–7.

95. Yalaev T.R., Bayuk I.O., Popov E.Y. Fluid substitution problem for thermal conductivity of hydrocarbon reservoirs based on rock physics methods // 7th EAGE Saint Petersburg International Conference and Exhibition «Understanding the Harmony of the Earth's Resources through Integration of Geosciences», Saint Petersburg, Russia, 11-14 April 2016. , 2016. P. 11–14.

96. Yilmaz I., Yuksek A.G. An example of artificial neural network (ANN) application for indirect estimation of rock parameters // Rock Mechanics and Rock Engineering. 2008. Vol. 41. P. 781–795.

97. Zakri T., Laurent J.-P., Vauclin M. Theoretical evidence for «Lichtenecker» mixture formulae' based on the effective medium theory // Journal of Physics D: Applied Physics. 1998. Vol. 31. P. 1589–1594.

98. Zeller R., Dederichs P.H. Elastic constants of polycrystals // Physica status solidi (b). 1973. Vol. 55. P. 831–842.

99. Zhang Z., Friedrich K. Artificial neural networks applied to polymer composites: a review // Composites Science and Technology. 2003. Vol. 63. P. 2029–2044.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Определим два оператора $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ * и $\mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ * следующим образом

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \mathbf{d}\mathbf{r}' \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}'),$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \mathbf{d}\mathbf{r}' \mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}'),$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ – произвольный тензор ранга 2.

Для кусочно-постоянной среды справедливо выражение согласно (1.59)

$$\mathbf{T}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) = \delta \mathbf{L}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) + \delta \mathbf{L}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \sum_{l=1}^N \sum_{\beta=1}^{n^k} \mathbf{T}_{\beta}^l(\mathbf{r}'),$$

$$\Rightarrow \left(\mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \delta \mathbf{L}_{\alpha}^k \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) * \mathbf{T}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) = \delta \mathbf{L}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) + \delta \mathbf{L}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \left(\sum_{l=1}^N \sum_{\beta=1}^{n^k} \mathbf{T}_{\beta}^l(\mathbf{r}') - \mathbf{T}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) \right).$$

Поддействуем слева обратным оператором $\left(\mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \delta \mathbf{L}_{\alpha}^k \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right)^{-1}$,
получаем искомое выражение

$$\mathbf{T}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) = \mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) + \mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \left(\sum_{l=1}^N \sum_{\beta=1}^{n^k} \mathbf{T}_{\beta}^l(\mathbf{r}') - \mathbf{T}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) \right),$$

где оператор $\mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r})$ – решение уравнения

$$\mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) = \delta \mathbf{L}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) + \delta \mathbf{L}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r}').$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Покажем, что в первом приближении можно представить T-матрицу в виде

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{T}_2(\mathbf{r}).$$

Точное выражение для T-матрицы (1.57):

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=1}^{n^k} \mathbf{T}_{\alpha}^k(\mathbf{r}).$$

В первом приближении (1.63):

$$\mathbf{T}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) = \mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) + \mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r})\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \sum_{l=1}^N \sum_{\beta=1}^{n^k} \mathbf{t}_{\beta}^l(\mathbf{r}') - \mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r})\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r}'),$$

при этом (1.68)

$$\mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r}) = \mathbf{t}^k \boldsymbol{\theta}_{\alpha}^k(\mathbf{r}).$$

Из последних выражений следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{r}) &= \sum_k \left(\mathbf{t}^k \tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}) + \mathbf{t}^k \tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r})\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \sum_{l,\beta} \mathbf{t}_{\beta}^l(\mathbf{r}') \right) \\ &\quad - \sum_{k,\alpha} \mathbf{t}_{\alpha}^k(\mathbf{r})\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{t}^k \boldsymbol{\theta}_{\alpha}^k(\mathbf{r}') = \\ &= \sum_k \left(\mathbf{t}^k \tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}) + \mathbf{t}^k \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}) \sum_l \mathbf{t}^l \tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}') \right) \\ &\quad - \sum_{k,\alpha} \mathbf{t}^k \boldsymbol{\theta}_{\alpha}^k(\mathbf{r})\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{t}^k \boldsymbol{\theta}_{\alpha}^k(\mathbf{r}'), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \boldsymbol{\theta}_{\alpha}^k(\mathbf{r}).$$

Обозначим

$$\mathbf{T}_1(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \mathbf{t}^k \tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{T}_2(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k,l} \mathbf{t}^k \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}) \tilde{\boldsymbol{\theta}}^k(\mathbf{r}') \mathbf{t}^l \\ - \sum_{k,\alpha} \mathbf{t}^k \boldsymbol{\theta}_\alpha^k(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') * \mathbf{t}^k \boldsymbol{\theta}_\alpha^k(\mathbf{r}').$$

Тогда

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{T}_2(\mathbf{r}),$$