

**Федеральное Государственное бюджетное учреждение науки Институт  
физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН**

На правах рукописи



**Гасеми Мохаммадфарид**

**Влияние микроструктуры карбонатных пород на их физико-  
механические свойства**

25.00.10 – Геофизика, геофизические методы поисков полезных ископаемых

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физ.- мат. наук И.О. Баюк

Москва

2018

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1.ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЭФФЕКТИВНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОРОВО-ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ ИХ МИКРОСТРУКТУРЫ .....	15
1.1 ВВЕДЕНИЕ.....	15
1.2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОРИСТО-ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ ИХ МИКРОСТРУКТУРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК. ....	21
1.2.1 Численное моделирование на основе метода дискретного элемента	21
1.2.2 Цифровой керн: .....	22
1.3 ТЕОРИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ СРЕД:.....	23
1.3.1 Фундаментальные уравнения: .....	24
1.3.2 Вариационные методы: .....	31
1.3.3 Оценка эффективных модулей упругости:.....	34
1.4 ФУНКЦИЯ ГРИНА:.....	48
1.5 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ЭФФЕКТИВНЫХ СРЕД В ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИИ.....	54
1.6 ВЫВОДЫ: .....	61
ГЛАВА 2.ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ КАРБОНАТНЫХ ОБРАЗЦОВ.....	66
2.1 ВВЕДЕНИЕ:.....	66
2.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕТРОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИССЛЕДУЕМЫХ ОБРАЗЦОВ.....	70
2.2.1 Образец С1 .....	72
2.2.2 Образец С2.....	72
2.2.3 Образец С3 .....	72
2.2.4 Образец С4.....	73

2.2.5	Образец С5 .....	74
2.2.6	Образец С6: .....	74
2.3	УЛЬТРАЗВУКОВАЯ ТОМОГРАФИЯ.....	75
2.4	ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ – ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРУГИХ СВОЙСТВ: .....	79
2.4.1	Анализ чувствительности Модели I к параметрам.....	82
2.4.2	Анализ чувствительности модели II .....	89
2.5	Выводы: .....	99
ГЛАВА 3. АНАЛИЗ ДАННЫХ ВСЕСТОРОННИХ ИСПЫТАНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИЧЕСКОГО МОДУЛЯ ЮНГА И ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕЩИНОВАТОСТИ ИССЛЕДУЕМЫХ ОБРАЗЦОВ.....		101
3.1.	ВВЕДЕНИЕ: .....	101
3.2.	ПРОВЕДЕНИЕ СЕРИИ ИСПЫТАНИЙ ПРИ ВЫБРАННЫХ РЕЖИМАХ НАГРУЖЕНИЯ. .....	106
3.3.	РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ:.....	107
3.3.1.	Образец С1-1:.....	107
3.3.2.	Образец С1-2:.....	114
3.3.3.	Образец С2-2:.....	115
3.3.4.	Образец С3-2:.....	117
3.3.5.	Образец С4-3:.....	118
3.3.6.	Образец С5-3:.....	120
3.3.7.	Образец С6-2-2: .....	121
3.3.8.	Образец С6-2-3: .....	123
3.4.	ОЦЕНКА ПОРИСТОСТИ И ФОРМЫ ТРЕЩИН .....	126
3.5.	Выводы: .....	128
ГЛАВА 4. ПОСТРОЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПЕТРОУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПУСТОТНОГО ПРОСТРАНСТВА ПОРОД И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ .....		130

4.1 ОБЩИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ПУСТОТНОГО ПРОСТРАНСТВА .....	130
4.1.1 Ограничение параметра связности порового пространства (f-параметр).....	131
4.2 СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ПУСТОТНОГО ПРОСТРАНСТВА И УПРУГИХ МОДУЛЕЙ: .....	142
4.2.1 Упругие свойства: .....	142
4.3 ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОБЩЕЙ ПОРИСТОСТИ .....	151
4.4 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНИ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ МИКРОСТРУКТУРЫ ПОРОД НА ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОРОД .....	160
4.4.1 Цель применения факторного анализа .....	160
4.4.2 Метод главных компонент (МГК):.....	163
4.4.3 Метод максимального правдоподобия (ММП): .....	164
4.4.4 Критерий Бартлетта для проверки адекватности факторной модели	165
4.4.5 Оценка значений общих факторов .....	166
4.4.6 Проверка применимости факторного анализа для анализа параметров микроструктуры изученных пород.....	168
4.4.7 Применение бутстреп метода для анализа малой выборки.....	179
4.5 АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ, КОТОРЫЕ ВЫХОДЯТ ЗА РАМКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ЭФФЕКТИВНЫХ СРЕД:.....	187
4.5.1 Динамический коэффициент Пуассона .....	192
4.5.2 Механические свойства:.....	193
4.6 ВЫВОДЫ .....	196
ЗАКЛЮЧЕНИЕ: .....	200
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	203
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ: .....	209

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность темы исследования:**

Геомеханическое моделирование представляется современным и эффективным подходом к разработке месторождений углеводородов. Эта методика используется на всех этапах разработки коллектора, включая бурение и заканчивание скважин, эксплуатацию и гидродинамическое моделирование коллекторов и т.д.

Геомеханические модели для любых целей (разведка, эксплуатация или бурение) требуют стандартный набор входных данных. Основными параметрами, характеризующие механические и прочностные свойства породы, необходимыми для построения любой геомеханической модели, являются статические модули упругости (модуль Юнга и коэффициент Пуассона) и параметры, характеризующие прочностные свойства горных пород (прочность на одноосное сжатие и угол внутреннего трения). Эти физико-механические свойства пород, как правило, называют геомеханическими свойствами. Поровое давление и региональное напряженное состояние являются зависимыми параметрами, определяемыми только после оценки упругих и механических свойств горных пород. Независимо от того, насколько сложна прикладная модель, ненадежные входные данные приведут к ошибочным результатам геомеханического моделирования.

Динамические и статические модули упругости, как правило, различаются. Динамические модули измеряют мгновенно, при малых деформациях породы порядка  $10^{-6}$  -  $10^{-5}$  (например, скорости упругих волн). Статические модули измеряют при гораздо больших (на несколько порядков) деформациях и медленных воздействиях. При таких воздействиях происходят различные процессы, которые не успевают развиваться при мгновенном воздействии на породу. К таким процессам относятся закрытие трещин,

скольжение по границам зерен и т.д. Это является основной причиной различия динамических и статических модулей.

Геомеханические свойства горных пород можно оценить либо в результате прямых измерений, либо косвенными методами. Прямые измерения предполагают трехосные испытания представительных образцов пород с помощью сервогидравлических нагружающих устройств (прессов) в лабораториях. Однако эти исследования довольно затратны и трудоемки. Кроме того, условия лабораторного эксперимента не всегда могут полностью воспроизвести пластовые условия.

Получить полный набор геомеханических параметров пород по данным геофизических исследований скважин (ГИС), геолого-технологических исследований (ГТИ), сейсмических работ невозможно. Эти исследования дают возможность определить лишь динамические модули упругости по скоростям упругих волн и плотности пород, которые могут в несколько раз отличаться от статических модулей. Вследствие этого используют косвенные методы, основанные на построении корреляционных зависимостей между измеренными скоростями упругих волн или динамическими модулями упругости, рассчитанными по ним, и геомеханическими параметрами, измеренным в лаборатории. Корреляционные зависимости, построенные для пород одного типа и одного горизонта, могут отличаться от таковых для пород даже такого же типа, но другого горизонта. Эти корреляционные зависимости определяются спецификой состава и микроструктуры конкретных пород.

В настоящее время не существует теоретических методов, позволяющих оценить геомеханические параметры, и, в частности, статические модули упругости по параметрам состава и микроструктуры пород, как это возможно в теории эффективных сред для динамических модулей. К микроструктурным параметрам можно отнести общую и трещинную пористость, степень связности пустотного пространства, форму и ориентацию пор и трещин. Установление таких зависимостей позволит оценить степень влияния различных параметров, характеризующих состав пород и микроструктуру, на

их геомеханические свойства. Помимо этого, такие зависимости дают возможность прогноза изменения геомеханических параметров при изменении одного или нескольких параметров микроструктуры (в частности, параметров трещиноватости в карбонатных коллекторах) в процессах, связанных с бурением скважин или разработкой месторождений.

### **Цель работы:**

Установление связей между физико-механическими (геомеханическими) свойствами пород и их микроструктурными параметрами, обеспечивающих повышение достоверности прогноза геомеханических параметров горных пород при анализе процессов, связанных с бурением скважин и разработкой месторождений полезных ископаемых.

### **Основные задачи исследования:**

1. Анализ результатов трехосных испытаний образцов карбонатных пород с помощью нагружающего сервогидравлического устройства (пресса) для оценки:

- напряжения закрытия трещин;
- интервала напряжений, в котором происходит развитие трещиноватости (дилатация порового пространства);
- величин статических модулей упругости.

2. Установление границ возможного изменения параметров трещиноватости (аспектного отношения трещин, трещинной пористости) и параметра связности пустотного пространства карбонатных и карбонатно-терригенных пород (в дальнейшем изложении карбонатных пород) на основе анализа результатов измерений фильтрационно-ёмкостных свойств пород и трехосных испытаний образцов.

3. Построение петроупругих параметрических моделей карбонатных пород в масштабе керна с использованием методов теории эффективных сред

на основе результатов анализа данных акустической и ультразвуковой томографии представительных образцов керна с учетом микроструктуры пород, изученной с помощью рентгеновской томографии, оптического и растрового (сканирующего) электронного микроскопов.

4. Построение корреляционных зависимостей, позволяющих определять статический модуль Юнга по его динамическому аналогу и коэффициенту общей пористости для изученных пород.

5. Построение бинарных и многопараметрических корреляционных зависимостей между статическим модулем Юнга и параметрами микроструктуры моделей пород. Построение аналогичных зависимостей для отношения динамического модуля Юнга к статическому.

#### **Научная новизна работы:**

1. Показано, что обратная задача по определению неизмеряемых параметров математических моделей карбонатных пород (микритовых, биоспаритовых и оолитовых известняков, карбонатно-терригенной породы) по скоростям упругих волн в ультразвуковом диапазоне частот, характеризующих строение их пустотного пространства в масштабе керна (трещинная пористость, форма трещин и пор, степень связности пустот), является некорректной и требует регуляризации.

2. Разработаны методы для оценки ограничений на неизмеряемые параметры математических моделей карбонатных пород в масштабе керна, сужающих область неопределенности решений обратной задачи, в частности:

- метод оценки ограничений на значения трещинной пористости и формы трещин на основе анализа данных трехосных испытаний образцов на прессе;

- метод оценки ограничений на значения коэффициента связности пустот на основе измеренных в лаборатории фильтрационно-ёмкостных свойств пород с использованием уравнения Козени - Кармана.



3. На основе результатов факторного анализа, проведенного для микроструктурных параметров моделей карбонатных пород, установлено два латентных фактора, определяющих влияние микроструктуры пород на их физико-механические свойства, а именно: 1) фактор объема и связности пустот и 2) фактор формы пустот. Показано, что первый латентный фактор имеет доминирующее влияние.
4. На основе результатов факторного анализа построены бинарные и многопараметрические корреляционные зависимости между параметрами микроструктуры моделей эффективных упругих свойств изученных карбонатных пород и величинами модулей Юнга (статического и динамического) и их отношения.
5. Проведен анализ степени влияния различных параметров микроструктуры построенных математических моделей эффективных упругих свойств изученных пород на динамический и статический модули Юнга, а также их отношение.
6. Установлено влияние дополнительных, не включенных в петроупругую модель, текстурных параметров изученных пород включая объем микрита, размер крупных кристаллов и макропор (диаметр которых больше 30  $\mu\text{м}$ ), характеризующих размеры неоднородностей, на величины динамических, статических модулей Юнга и их отношения.

#### **Защищаемые положения:**

1. Обратная задача определения неизмеряемых параметров микроструктуры пустотного пространства (трещинная пористость, аспектное отношение пор и трещин, параметр связности пустот) порово-трещинных карбонатных коллекторов по данным об эффективных скоростях упругих волн ультразвукового диапазона частот, основанная на математических моделях теории эффективных сред, является некорректной и требует применения регуляризации.

2. Зависимости «напряжения – деформации», полученные в результате испытаний образцов на сервогидравлическом нагружающем устройстве (прессе), и данные о фильтрационно-емкостных свойствах позволяют сузить диапазоны поиска параметров моделей эффективных упругих свойств карбонатных пород и, следовательно, снизить неопределенность оценки значений неизмеряемых параметров микроструктуры пустотного пространства этих пород.
3. Ключевое влияние на значения динамических и статических модулей упругости и их отношение оказывает общая пористость и степень связности пустот, меньшее влияние также оказывает форма пустот (пор и трещин).

#### **Практическая значимость полученных результатов и их ценность:**

Созданные параметрические математические модели эффективных упругих свойств изученных порово-трещиноватых карбонатных горных пород при атмосферных условиях могут применяться для теоретической оценки динамических модулей упругости пород аналогичного типа при изменении параметров моделей, включая тип порозаполняющего флюида.

Построенные бинарные и многопараметрические корреляционные зависимости между микроструктурными параметрами моделей и физико-механическими свойствами изученных пород могут быть использованы для прогноза статического модуля Юнга для пород аналогичного типа по их параметрам микроструктуры, полученным с помощью моделирования, основанного на применении теории эффективных сред. Благодаря этому, становится возможным сократить время и затраты на построение моделей механических свойств (ММС) пород, что является необходимым этапом построения геомеханической модели месторождения.

#### **Личный вклад автора:**

Основные результаты работы, полученные лично диссертантом в ходе проведения исследований, включают: построение математических петроупругих моделей для имеющихся образцов карбонатных пород (микритовых, биоспаритовых, оолитовых известняков, карбонатно-терригенной породы), основанных на методе обобщённого сингулярного приближения теории эффективных сред; реализацию этих моделей в виде программного кода на языке Fortran 90; проведение параметрических исследований моделей (анализа чувствительности); активное участие в проведении измерений упругих свойств пород, относящихся к третьей главе данной работы, и обработку результатов экспериментов; разработку методик для ограничения искомых параметров моделей на основе результатов трехосных испытаний образцов на прессе и данных о фильтрационно-ёмкостных свойствах пород, с целью повышения достоверности решения обратных недоопределённых задач; проведение факторного анализа полученных микроструктурных параметров физико-математических моделей пород и построение бинарных и многопараметрических регрессионных моделей поведения упругих модулей в зависимости от параметров моделей.

#### **Апробация работы:**

Результаты диссертационной работы представлены на следующих конференциях:

1. 7th EAGE Saint Petersburg International Conference and Exhibition, Rock Physics and Geomechanics - Theory and Practice, 11 April 2016.
2. Пятая научно-практическая конференция суперкомпьютерные технологии в нефтегазовой отрасли, математические методы, программное аппаратное обеспечение, 2015.
3. Научная конференция молодых ученых и аспирантов ИФЗ РАН 2015.
4. Научная конференция молодых учёных и аспирантов, 25-26 апреля 2016 г., ИФЗ РАН, Москва.

5. Научная конференция молодых ученых и аспирантов ИФЗ РАН, 24-26 апреля 2017 г.

6. Научная конференция молодых ученых и аспирантов, 23 и 24 апреля 2018 г.

### **Публикации:**

Основные научные результаты и положения диссертации опубликованы в 10 научных работах, включая 2 статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ, и публикацию, индексируемую в базе SCOPUS. Две статьи, содержащие результаты по направлению, имеющему отношение к теме диссертации, опубликованы в журнале базы Web of Science.

#### *Из списка ВАК*

1. Гасеми М.Ф., Баяк И.О. Петроупругая модель оолитового известняка в масштабе зерна // Экспозиция Нефть Газ. 2018. Май 3 (63). С. 36 - 40.

2. Гасеми М.Ф., Баяк И.О. Петроупругое моделирование карбонатных пород-коллекторов с использованием модели двойной пористости // Экспозиция Нефть Газ. 2018. Сентябрь 5 (65) 21-25.

#### *Из базы SCOPUS*

Ghasemi M.F., Bayuk I.O., Alkhimenkov Yu.A. A new approach for relating dynamic elastic properties and geomechanical parameters based on rock physics modeling, // Материалы 7th EAGE Saint Petersburg International Conference and Exhibition Rock Physics and Geomechanics - Theory and Practice, 11 – 14 April 2016. [https:// doi: 10.3997/2214-4609.201600214](https://doi.org/10.3997/2214-4609.201600214).

#### *Из базы Web of Science*

1. Ghasemi M.F., Ghiasi M.M., Mohammadi A.H., Zendehboudi S. Regional tectonic state and poro-thermo-elasticity analysis of near wellbore zone in field development plan: Utilization of an uncoupled approach // Journal of Natural Gas

Science and Engineering. 2017. Vol. 46. P. 615-636. ISSN 1875-5100.  
<https://doi.org/10.1016/j.jngse.2017.06.021>.

2. Ghasemi M.F., Ghiasi M.M., Mohammadi A.H., Garavand A., Noorollahi Y. Coupled Thermo-Poro-Elastic modeling of near wellbore zone with stress dependent porous material properties // Journal of Natural Gas Science and Engineering. 2018. Volume. 52. P. 559-574. ISSN 1875-5100.  
<https://doi.org/10.1016/j.jngse.2018.01.039> .

### *Прочие публикации*

1. Гасеми М. Построение 3D модели механических свойств для гидро-геомеханического моделирования с использованием высокопроизводительных вычислений и результатов лабораторных анализов керна // Материалы V научно-практической конференции суперкомпьютерные технологии в нефтегазовой отрасли, математические методы, программное аппаратное обеспечение, 2015.
2. Гасеми М., Алхименков Ю.А., Баяк И.О. «Построение 3D модели механических свойств для гидро-геомеханического моделирования с использованием высокопроизводительных вычислений и результатов лабораторных анализов керна» // Тезисы научной конференции молодых ученых и аспирантов ИФЗ РАН 2015.
3. Гасеми М. Изучение влияния состава и микроструктуры на геомеханические свойства горных пород // Тезисы научной конференции молодых учёных и аспирантов, 25-26 апреля 2016 г., ИФЗ РАН, Москва.
4. Гасеми М. Использование многопараметрических регрессионных зависимостей для оценки модулей упругости и проницаемости карбонатных пород // Тезисы научной конференции молодых учёных и аспирантов ИФЗ РАН, 24-26 апреля 2017 г.

5. Гасеми М. Теоретические и экспериментальные исследования карбонатных пород для оценки статических модулей упругости // Тезисы научной конференции молодых учёных и аспирантов, 23-24 апреля 2018 г.

### **Объем и структура работы:**

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения. Содержит 228 страниц текста, 48 рисунков, 26 таблиц и список литературы из 213 наименований.

### **Благодарности:**

Автор искренне благодарит научного руководителя д.ф.-м.н. И.О. Баяк за постоянную помощь в работе, полезные советы, поддержку и за предоставленный керновый материал на протяжении всех этапов исследования. Хочется особо поблагодарить д.ф.-м.н. С.А. Тихоцкого за неоценимую помощь при проведении статистических анализов и обсуждение полученных результатов. Автор благодарен Ю.А. Алхименкову за научно-техническую помощь и вдумчивый анализ результатов данной работы. Автор искренне признателен д.ф.-м.н. Е.И. Суетновой и д.ф.-м.н. Ю.А. Кузьмину за обсуждения и дискуссии, позволившие улучшить качество полученных результатов. Выражаю глубокую признательность компании НПО СНГС и в том числе, к.т.н. И.Г. Мельникову и А.Л. Шайбакову за проявленную поддержку и предоставленные для исследования данные. Самые теплые чувства связывают автора с друзьями И.В. Фокиным и Н.В. Дубиней, которым хочется выразить признательность за помощь, внимание и теплую атмосферу, сложившуюся в нашей группе. Особую благодарность автор выражает своей жене Сатари Ш. за личную поддержку.

# **Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЭФФЕКТИВНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОРОВО-ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ ИХ МИКРОСТРУКТУРЫ**

## **1.1 ВВЕДЕНИЕ**

Геомеханическое моделирование представляется современным и эффективным подходом к разработке месторождений углеводородов. Эта методика используется на всех этапах разработки коллектора, включая анализ сейсмических данных, бурение, заканчивание и эксплуатацию скважин, гидродинамическое моделирование коллекторов и т.д.

Геомеханические модели для любых целей (разведка, эксплуатация или бурение) требуют стандартного набора входных данных, включая упругие и прочностные свойства горных пород, региональное напряженное состояние и поровое давление. Основными свойствами породы, необходимыми для построения произвольной геомеханической модели, являются модули упругости (модуль Юнга и коэффициент Пуассона) и механические свойства горных пород (прочность на одноосное сжатие и угол внутреннего трения). Поровое давление и региональное напряженное состояние являются зависимыми параметрами, определяемыми только после оценки упругих и механических свойств горных пород. Независимо от того, насколько сложна прикладная модель, использование некачественных входных данных приведет к ошибочным результатам. Упругие и механические свойства горных пород можно оценить двумя способами: прямым и косвенным методами. Классический способ оценки этих характеристик представляет собой комбинацию прямых и косвенных методов. Большинство данных, используемых для описания петрофизических характеристик горных пород, находящихся на сотни или тысячи метров ниже земной поверхности, являются результатами применения косвенных методов, таких как геофизические исследования скважин (ГИС) или данные по геолого-технологическим исследованиям (ГТИ). Единственный способ непосредственного измерения

подповерхностного слоя земли - это анализ образцов, выбуренных из породы с помощью специальных приборов и долот. Данные, полученные по лабораторным анализам, применяются для калибровки данных ГИС и также для расчета физических свойств, которые нельзя оценить на основе методов ГИС. Однако следует иметь в виду, что свойства, полученные на образцах, должны быть масштабированы на другие масштабы – ГИС и сеймики. Для этого применяют разные подходы [99]; [165] Такая процедура называется апскейлингом.

Прямые методы оценки упругих и механических свойств горных пород классифицируются на две основных категории: 1) метод испытаний с разрушением образца, 2) метод неразрушающих испытаний. При оценке упругих модулей исследуемого образца разрушением образца в одноосном или трехосном режиме испытания строится график зависимости осевой деформации от осевого напряжения. Наклон прямой части (линейного поведения) этого графика определяет модуль Юнга. Поскольку наблюдается положительная корреляция между модулем Юнга и пределом прочности, то модуль Юнга иногда называют модулем прочности. Отношение радиальной деформации к осевой при линейном поведении образца определяет коэффициент Пуассона. Деформация исследуемого образца при испытании измеряется с помощью тензодатчиков или аналогичных систем (например, измерение относительного линейного перемещения между горизонтальными плоскостями пресса с помощью линейного переменного дифференциального трансформатора (LVDT)).

Неразрушающая процедура является наиболее распространенным методом оценки упругих модулей образца породы. В этом методе скорость распространения упругих волн (волны сжатия и сдвига) измеряется вдоль выбранного направления на образце. В случае деструктивного метода измерения упругих модулей нет единого стандартного подхода для измерения модулей упругости. В работе [1], определены три формы модулей упругости, определяемых по кривой зависимости деформации от напряжения:



1. Тангенциальный модуль, который определяется отношением малого приращения напряжения к малому приращению деформации для фиксированного значения времени, деформации или напряжения в процессе нагружения образца. Часто в качестве тангенциального модуля Юнга берут это значение на уровне напряжений, который представляет собой некоторый фиксированный процент от максимальной прочности образца.
2. Средний наклон прямого участка кривой зависимости деформации от напряжения.
3. Секущий модуль, который определяет наклон линии, проведенный от нулевого напряжения до некоторого фиксированного значения напряжения.

Упругие модули, полученные из неразрушающего метода, терминологически называются динамическими модулями, а статический модуль относится к измеренным модулям упругости посредством деструктивных методов. Значения динамических и статических модулей упругости различаются. Динамические модули измеряют мгновенно, при малых деформациях породы порядка  $10^{-6}$  -  $10^{-5}$  (например, скорости упругих волн). Вследствие этого сравнение статических и динамических модулей упругости имеет смысл только тогда, когда статические модули упругости вычисляются по начальным точкам линейного участка кривой зависимости деформации от напряжения. Статические модули измеряют при гораздо больших (на несколько порядков) деформациях и медленных воздействиях. При таких воздействиях происходят различные процессы, которые не успевают развиваться при мгновенном воздействии на породу. К таким процессам относятся закрытие трещин, скольжение по границам зерен и т.п. Это является основной причиной различия динамических и статических модулей.

Динамические модули упругости, полученные по акустическим измерениям, обычно превышают статические модули, полученные по лабораторным исследованиям. Однако бывает и наоборот, когда динамические модули меньше статических [209].

Экспериментальные данные, полученные для коэффициента Пуассона, показывают, что бывают случаи, когда динамическое значение коэффициента Пуассона выше статических значений и наоборот [103]. Исследование соотношения между статическими и динамическими модулями упругости вызвало интерес с начала 1930 - х годов, когда применение неразрушающих методов было распространено в нефтяной, горной и геотехнической промышленности. Акустические измерения часто используются для оценки упругих модулей, благодаря простоте, и вследствие того, что эта методика является неразрушающей. [Ciccotti M., Mulargia F. \[39\]](#) рассмотрели отношение динамического и статического модулей упругости ( $K$ -значение) как параметр, зависящий от частоты акустических волн. Они предположили, что различные  $K$ -значения, полученные на основе лабораторных и сейсмических измерений, связаны с различиями в шкале измерения. Динамические модули упругости, полученные по сейсмическим частотам (от 1 до 100 Гц), усредняют свойства горных пород на длинной длине, включая большие трещины и уплотненные зоны, в то время как лабораторные измерения проводятся на мелкомасштабных неповрежденных образцах с высокой частотой (от 1 МГц до 75 кГц). [Martínez-Martínez J., Benavente D. et al. \[125\]](#) предложили использовать параметр затухания волны ( $\alpha_s$ ) как более чувствительный параметр к присутствию микротрещин, их форме и ориентации по сравнению со скоростями продольных и поперечных волн. В упомянутой работе использовались 10 известняковых образцов с различными микроструктурными характеристиками для измерения динамических и статических модулей упругости и их соотношения. Они пришли к выводу, что  $K$ -значение обратно пропорционально зависит от скорости продольных волн с достаточно высоким коэффициентом корреляции, лишь когда динамические

модули упругости достаточно велики. Однако, при низких значениях скорости замещение скорости продольных волн с использованием затухания волны в качестве параметра, который более чувствителен к апертурам (форме) и ориентации трещин и пор, приводит к более высокому коэффициенту корреляции. [Kolesnikov Y. I. \[103\]](#) изучал возможность того, что дисперсия скоростей упругих волн влияет на наблюдаемые различия между значениями модуля упругости. Он рассмотрел влияние собственной дисперсии скоростей продольных волн на измерения параметров упругого материала в разных диапазонах частот волн в рамках модели Кьяртансона [\[102\]](#) для частотно-независимой абсорбции. Когда декременты абсорбции достигают значений, характеризующих кристаллические породы, внутренняя дисперсия скорости может вызывать изменения упругих параметров в десятки процентов при переходе от мегагерц к миллигерцовым (квазистатическим) частотным диапазонам. В связи с уменьшением частоты такие модули упругости, как модуль сдвига, модуль Юнга и модуль объемного сжатия, как правило, снижаются. Однако коэффициент Пуассона либо снижается, либо растет. Это зависит от того, какое из значений абсорбции продольных или поперечных волн выше. Температура и давление также являются значимыми параметрами, как показали авторы работ [\[100\]](#), [\[139\]](#), [\[97\]](#), [\[145\]](#). При извлечении образца с глубины отбора керна проявляются микротрещины в текстуре образца из-за изменения температуры и давления, вследствие чего выбуренный образец никогда не будет полностью представлять собой исходный материал (Orlander, [\[145\]](#)). Повышение температуры может привести к увеличению модуля прочности в результате расширения пористого материала и закрытия трещин (на маленьких глубинах, где напряжения, действующие на горные породы, невысокие) или уменьшению модуля прочности в результате образованию новых микротрещин (на больших глубинах, где напряжения, действующие на горные породы, высокие) [\[145\]](#).

Для построения геомеханических моделей используются именно статические модули упругости. Выбуривание образцов является

дорогостоящим и трудоемким процессом, поэтому часто образцов недостаточно, или их получение слишком затратно. Применение эмпирических корреляционных зависимостей является рутинным и классическим способом для оценки статических модулей упругости на основе измеренных в лаборатории или в поле динамических модулей упругости или других петрофизических свойств (например, пористости). Несколько доступных в научных публикациях эмпирических корреляционных зависимостей для оценки статического модуля Юнга на основе динамического модуля Юнга или других петрофизических параметров, измеренных в лаборатории, приведены в таблице 1 Приложения.

Все параметры и факторы, рассмотренные выше, зависят от микроструктурных свойств. Фактически, авторы цитируемых выше работ пытались найти параметр, который более эффективно объясняет эффект микроструктуры. Поэтому прямое моделирование микроструктуры может дать нам полезную информацию о механизмах распространения упругих волн и затухания, и также о процессах разрушения горных пород.

Различие в величинах динамического и статического модулей упругости определяется микроморфологическими, текстурными и минералогическими параметрами породы (внутренние параметры) и внешними параметрами (такие, как деформация, температура, всестороннее давление). Описание влияния этих параметров на статические и динамические модули упругости требует, чтобы сотни образцов тестировались при разных условиях и сценариях, что является невыполнимым.

Эмпирические корреляции широко использовались как предварительное решение для проблемы оценки статических модулей упругости по динамическим модулям. Однако этот подход не следует применять в общем случае из-за текстурного и минералогического разнообразия пород даже той же литологии, для которой получена эмпирическая корреляция. Кроме того, эмпирические корреляции не учитывают влияние масштаба измерения на величины статических и

динамических модулей упругости. Следовательно, построение модельных сред, описывающих основные текстурные, микроморфологические и минералогические свойства исследуемой породы, является эффективным подходом для оценки различных физических свойств.

## 1.2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОРИСТО-ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ ИХ МИКРОСТРУКТУРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК.

Существующие подходы для моделирования эффективных физических свойств горных пород на основе их микроструктурных свойств можно классифицировать на три основных категории:

- 1) Численное моделирование на основе метода дискретного элемента.
- 2) Цифровое керн.
- 3) Теория эффективных сред

### 1.2.1 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНОГО ЭЛЕМЕНТА

Численное моделирование на основе метода дискретного элемента (метод ограниченных частиц - МОЧ) был впервые предложен [Potyondy D. O.](#), [Cundall P. A.](#) [151]. При моделировании с помощью этого метода реальная порода заменяется случайным образом упакованными сферическими зёрнами с различными размерами. Моделирование проводится на основе решения уравнений о взаимодействии зёрен в точках их соприкосновения. Модель воспроизводит многие особенности поведения горных пород, в том числе упругое поведение, образование трещин, акустическую эмиссию, деформационную анизотропию, гистерезис, дилатацию, постпиковое «размягчение» и уплотнение, а также увеличение прочности с повышением всестороннего давления в зависимости от формы [159] и размера [105] составляющихся зёрен. С помощью этого метода также можно моделировать распространение упругих волн и, следовательно, оценить динамические

модули упругости [115]. Моделирования горных пористых пород с помощью метода МОЧ применимый лишь для зернистых пород. Результаты сканирующего электронного микроскопа шлифов показывают, что замена системы «зерна-поры-трещины» сферическими частицами или сфероидами не является адекватным приближением из-за присутствия чрезвычайно тонких микротрещин, органических включений с чрезвычайно неопределенной формой, анизотропных по форме и физическим свойствам глинистых минералов и т.п..

### 1.2.2 ЦИФРОВОЙ КЕРН:

Современным методом получения изображений геометрии пор является микромасштабная рентгеновская компьютерная томография ( $\mu$ x-СТ). Метод позволяет измерять локальную рентгеновскую абсорбцию в небольшом цилиндрическом образце породы с типичным диаметром в несколько миллиметров или менее. Трехмерные изображения восстанавливаются из большого числа рентгенограмм, то есть проекций изображенного объекта, полученные при разных углах проецирования. Результатом реконструкции является изображение с серой шкалой, где яркость пропорциональна СТ-числу материала внутри объекта [129].

Концептуально вышеупомянутый метод МОЧ можно рассматривать как идеализированную ветвь цифрового керна, однако при моделирование пористых сред с помощью цифрового керна используются более сложные и современные методы, чтобы учесть реальную форму частиц в разных масштабах. Эти подходы могут в некоторой степени заменить прямые измерения физических параметров. Этой цели они, в основном, и служат. Однако для использования этих подходов для решения задачи о сопоставлении статических и динамических модулей необходимо иметь обобщенные характеристики микроструктуры породы. Поэтому необходима разработка целого цикла статистической обработки микроструктурных параметров и установления их качественного и количественно влияния на статические и

динамические модули. Для этого нужны специальные программные средства типа Abacus, Avizo Fire. Однако таковые не всегда доступны, поскольку являются довольно дорогостоящими продуктами. Данные исследования, однако, являются также основой для построения моделей эффективных сред.

Теория эффективных сред (ТЭС) - это отрасль микромеханики, посвященная изучению средних (эффективных) физических свойств композитов сложной структуры. Форма включений в ТЭС рассматривается как эллипсоиды, в общем случае, с тремя разными полуосями. Хотя проблема идеализации формы по-прежнему стоит в данном подходе, замена частиц реальных горных пород включениями эллипсоидной формы позволяет моделировать форму пор, трещин или зерен, реконструкция которых невыполнима при применении численных методов МОЧ или цифрового керна.

### 1.3 ТЕОРИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ СРЕД:

Геологические формации можно рассматривать как неоднородный композит, состоящий из вмещающего материала (матрицы), содержащего включения различных минералогических и морфологических свойств. Нашей целью является оценка физических свойств анизотропного однородного композита, содержащего включения с различными известными физическими свойствами, как единый материал со средними, по терминологии микромеханики, эффективными физическими свойствами. Процесс унификации композита как единого однородного материала с эффективными физическими свойствами называется гомогенизацией. В противном случае, оценка физических свойств включений на основе эффективных характеристик целого материала содержащего включения называется локализацией. Предполагается, что включения полностью ограничены матрицей. Это предположение позволяет упростить наши подходы и дальнейшие вычисления без заметной ошибки в результатах. Несмотря на то, что обычно наблюдаются микротрещины и несовершенства по всем границам включений, предполагается идеальное сцепление, поскольку граничные характеристики

включений связаны, скорее, с разрушением горных пород. Включение - это термин, который относится к выделенным частям среды, свойства которых отличаются от вмещающей матрицы. Анизотропия, неоднородность или оба из этих явления объясняются присутствием включений и особенностями их расположения. В данной работе понятия включение, фаза и неоднородность - это одни и те же понятия, относящиеся к выделенным частям вмещающей матрицы которые приводят к неоднородности, анизотропии или к тому и другому.

### 1.3.1 ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ:

Рассмотрим композит, содержащий включения различной формы, ориентации и минералогическими свойствами, подверженный любой обобщенной внешней силе (механическая сила или смещение, температура поверхности, электрический ток, электромагнитный заряд, гидравлическое давление и т. д.). Локальное уравнение для физических полей в рассматриваемой среде можно сформулировать как:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{X}(\mathbf{r}) : \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  - это локальные физические поля внутри среды, а  $\mathbf{X}(\mathbf{r})$  – это локальный тензор их связи. Далее мы применяем тензорные операции, чтобы отличить математические выражения для тензоров от математических выражений для векторов:

$\otimes$  - это прямое диадное произведение

$:$  - это свертка тензоров по повторяющимся индексам согласно правилу Эйнштейна-Риччи.

Для более полного введения в тензорную алгебру можно обратиться к [83], [52] и [82]. Для упругих свойств величины  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , входящие в формулу (1.1), – локальные тензоры напряжений и деформаций,  $\mathbf{X}(\mathbf{r})$  – локальный тензор упругости, а выражение (1.1) – закон Гука. В случае



тепловых свойств физическими полями  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  являются локальные векторы плотности теплового потока и градиента температуры;  $\mathbf{X}(\mathbf{r})$  – локальный тензор теплопроводности, а выражение (1.1) – закон Фурье. Для электрических свойств  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  – локальные векторы плотности тока и градиента напряженности электрического поля,  $\mathbf{X}(\mathbf{r})$  – локальный тензор электропроводности, а выражение (1.1) – закон Ома. При рассмотрении гидравлической проницаемости физическими полями являются локальные векторы плотности потока жидкости ( $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ) и градиента давления ( $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ );  $\mathbf{X}(\mathbf{r})$  – локальный тензор гидравлической проводимости, а выражение (1.1) – закон Дарси. Локальный тензор гидравлической проводимости равен тензору гидравлической проницаемости, умноженному на коэффициент, который вычисляется как произведение плотности жидкости и ускорения свободного падения, деленное на динамическую вязкость жидкости. Согласно (1.1) эффективные физические свойства  $\mathbf{X}^*$  определяющие связь соответствующих физических полей  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , выражается следующим уравнением:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \mathbf{X}^* : \langle \mathbf{B} \rangle, \quad (1.2)$$

где, треугольные скобки означают усреднение по объему, как показано ниже:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} . \quad (1.3)$$

Пусть локальное физическое свойство  $\mathbf{X}(\mathbf{r})$  является суммой физических свойств известной однородной среды ( $\mathbf{X}^0$ ) и флуктуационного члена  $\delta\mathbf{X}(\mathbf{r})$ , как показано ниже:

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}) = \mathbf{X}^0 + \delta\mathbf{X}(\mathbf{r}) . \quad (1.4)$$

Локальные физические поля в среде могут быть представлены следующим образом:

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{Q}^i : \langle \mathbf{A} \rangle, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B}^i = \mathbf{P}^i : \langle \mathbf{B} \rangle, \quad (1.6)$$

где  $\mathbf{A}^i$  и  $\mathbf{B}^i$  - постоянные поля в  $i$ -ом компоненте композита. Подставив (1.5) в (1.1) и усреднив, получим:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \mathbf{X}^0 : \langle \mathbf{B} \rangle + \langle \delta \mathbf{X} : \mathbf{B} \rangle. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в (1.2) и применив (1.6), можно получить следующее выражение для тензора эффективных физических свойств ( $\mathbf{X}^*$ ):

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^0 + \langle \delta \mathbf{X} : \mathbf{P} \rangle. \quad (1.8)$$

Тензоры  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  называются тензорами концентрации [25]. Следовательно, задача оценки эффективного физического свойства  $\mathbf{X}^*$  сводится к нахождению явного вида величин  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  в зависимости от типа желаемого физического свойства;  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  могут иметь разные ранги. В случае упругости  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  являются тензорами четвертого ранга, а когда целью является оценка эффективной теплопроводности ( $\alpha$ ), эффективной электропроводности ( $\sigma$ ), эффективной гидравлической проводимости ( $\kappa$ ), то  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  являются тензорами второго ранга.

В этой работе мы концентрируемся на тензоре четвертого ранга модулей упругости. Это свойство является более сложным в вычислительном плане по сравнению с другими свойствами, такими как электрическая, тепловая и гидравлическая проводимость, которые являются тензорами второго ранга.

В случае теории линейной упругости уравнение (1.1) будет законом Гука, которое можно переписать как:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}(\mathbf{r}) : \mathbf{e}(\mathbf{r}), \quad (1.9)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \mathbf{S}(\mathbf{r}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}), \quad (1.10)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{e}(\mathbf{r})$  - локальные тензоры напряжений и деформаций второго ранга,  $\mathbf{C}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$  - локальные тензоры упругости и податливости (тензоры четвертого ранга). Вместе с приведенными выше уравнениями решение уравнения равновесия дает распределение напряжений и деформаций по всему композиту (в случае упругости):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) + \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (1.11)$$

где  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  - это плотность объемных сил, приложенных к объему образца (V). Точное рассмотрение указанной локальной задачи требует полных статистических знаний о геометрии, ориентации и местонахождении всех составляющих композита (см. (1.1)), что практически невозможно. Чтобы сделать описанную выше проблему разрешимой, предполагается, что композит является статистически однородным, то есть достаточно большие субрегионы (большие по отношению к размеру включений), на микроуровне композита, статистически идентичны всему образцу (Макро-уровень) [183]. Эти субрегионы называются представительным объемным элементом (которое соответствует английскому термину **Representative Volume Element** или **RVE**). RVE должен содержать очень большое количество включений, так что он может быть статистически репрезентативным для свойств локального континуума или статистически стабилен. На макроуровне свойства материала всегда считаются однородными, но НЕИЗВЕСТНЫМИ (всего композита).

Однако, на микроуровне, то есть внутри RVE, свойства материала являются неоднородными, но известными. Для макроуровня, уравнение (1.2) можно записать как:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{C}^* : \langle \mathbf{e} \rangle, \quad (1.12)$$

$$\langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{S}^* : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle. \quad (1.13)$$

Предположение о статистической однородности позволяет определить общие поля, определенные на микроуровне (здесь напряжение и деформация) для RVE. Однако, несмотря на сокращение изучаемого композита на микромасштаб, проблема локальной зависимости поля от среды или ее соответствующего RVE еще не решена (эргодическое состояние все еще не установлено). Здесь мы предполагаем, что макроскопические свойства не зависят от ориентации или смещения системы координат, к которой относятся свойства. Это означает, что среда является статистически однородной [183]. Последнее предположение приводит к инвариантности полей в среде (на макроуровне) и RVE (на микроуровне), так что объемное усреднение в уравнениях (1.12) и (1.13) можно заменить на усреднение по ансамблю. При предположении о том, что изучаемая среда является статистически однородной, можно сказать, что среднее напряжение внутри RVE на микроуровне равно приложенной силе на внешней границе композита на макроуровне, а средняя деформация внутри RVE равна растягивающему усилию на внешней границе композита. Аналогично уравнению (1.4) локальные модули упругости могут быть выражены как:

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}^o + \delta \mathbf{C}(\mathbf{r}), \quad (1.14)$$

где  $\mathbf{C}^o$  - тензор упругости некоторой произвольной однородной исходной среды (или, эквивалентно, тела сравнения). Поле тензора деформаций связано с вектором перемещения следующим образом:

$$e_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} u_{(i,j)}, \quad (1.15)$$

где запятая обозначает частную производную по соответствующей координате, и  $(i,j)$  обозначает симметризацию по соответствующим индексам. Используя (1.11) и (1.14) для замены тензора напряжений в уравнении равновесия, получаем:

$$\nabla \cdot [\mathbf{C}^o(\mathbf{r}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})] = -\nabla \cdot [\boldsymbol{\delta}\mathbf{C}(\mathbf{r}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})]. \quad (1.16)$$

Правая часть представляет собой поляризацию деформации, и в приведенном выше уравнении равновесия эквивалентна величине силы, действующей на объем исследуемой среды (здесь RVE). Вышеупомянутое уравнение равновесия можно записать в терминах вектора смещения как:

$$\nabla \cdot [\mathbf{C}^o(\mathbf{r}) : (\nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{r}))] = -\nabla \cdot [\boldsymbol{\delta}\mathbf{C}(\mathbf{r}) : (\nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{r}))]. \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) можно решить, выбрав наиболее простое граничное условие [187]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^o, \text{ на } \mathbf{r} \in \partial V. \quad (1.18)$$

Решение для приведенное выше уравнения с заданными граничными условиями можно выразить в виде интегрального уравнения, введя функцию

Грина  $G(x, x')$ , являющуюся тензором второго ранга, для однородного тела сравнения [187]:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^0 \cdot \nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in V, \\ \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Компоненты  $G_{ik}(r, r')$  определяют компоненты поля смещения  $u_i$ , в точке  $\mathbf{r}$  упругого тела, когда единичная объемная сила (правая часть (1.17)) действует в точке  $\mathbf{r}'$ . Теперь, если граничное условие (1.18) генерирует поле смещения  $\mathbf{u}^0$  в теле сравнения, поле смещения в реальной среде будет:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{r}) + \int_V \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \nabla \otimes (\delta \mathbf{C}(\mathbf{r}) : \nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{r})) d\mathbf{r}. \quad (1.20)$$

Используя граничное условие уравнения (1.19) и интегрирование по частям, приведенное выше уравнение упрощается в более знакомую форму:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}^0 + \int_V \mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') : \delta \mathbf{C}(\mathbf{r}) : \mathbf{e}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (1.21)$$

где  $\mathbf{G}^{(0)}$  – это тензор четвертого ранга второй производной функции Грина, для которой компоненты задаются следующим образом:

$$\mathbf{G}_{ijkl}^{(0)}(r) = -\frac{1}{4} \left[ \frac{\partial G_{ik}(r)}{\partial r_j \partial r_l} + \frac{\partial G_{jk}(r)}{\partial r_i \partial r_l} + \frac{\partial G_{il}(r)}{\partial r_j \partial r_k} + \frac{\partial G_{jl}(r)}{\partial r_i \partial r_k} \right] \quad (1.22)$$

Уравнение (1.22) можно упростить следующим образом:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}^0 + \mathbf{\Gamma} : \delta \mathbf{C} : \mathbf{e}(\mathbf{r}), \quad (1.23)$$

где  $\Gamma$  – это интегральный оператор:

$$\Gamma f = \int_V \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (1.24)$$

Уравнение (1.23) является краеугольным камнем всех стохастических методов оценки эффективных модулей упругости и описывает все взаимодействия между составляющими композита. Поэтому решение (1.23) является решением квантовой задачи описания взаимодействия многих тел, решение которой приближенно и практически возможно только путем введения специальных упрощений и предположений. Поскольку различные методы получены с использованием различных предположений для решения указанной проблемы многих тел, уравнение (1.23) считается точкой расхождения для разработанных методов гомогенизации. Далее при описании различных методов определения эффективных упругих свойств мы начинаем с вариационных принципов как процедуры оценки предельных значений для модулей упругости. Затем, наиболее практические методы с их ограничениями по применению будут введены поэтапно в соответствии с их историческим развитием. Далее мы представляем подходы к оценке эффективных физических свойств, поскольку на практике мы предпочитаем работать с единой оценкой, а не с пределами.

### 1.3.2 ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ:

Среднее арифметическое усреднение модулей сжатия и сдвига составляющих включений исследуемого изотропного композита считается первой оценкой эффективных модулей упругости, которую предложил [Voigt W. \[179\]](#) на основе предположения об однородности поля деформации внутри неоднородной изотропной среды. На основе предположения об однородности поля напряжения внутри неоднородной изотропной среды [Reuss A. \[156\]](#) предложил гармоническое усреднение модулей сжатия и сдвига

составляющих включений исследуемого композита для оценки эффективных значений модулей сжатия и сдвига изотропного композита. Позже Hill R. [72] доказал, что предложенные оценки Фойгта и Рейсса представляют соответственно верхнюю и нижнюю границы для оценки эффективных модулей сжатия и сдвига изотропного композита на основе вариационных теорем теории упругости и принципа минимальной энергии деформации. Он также предположил, что арифметическое усреднение полученных значений по методам Фойгта и Рейуса может быть приемлемой оценкой для эффективных модулей упругости композитов. Вышеупомянутые методы были предложены для композитов, состоящих из изотропной матрицы и изотропных включений. Применение этих методов ограничено для порово-трещиноватых материалов, насыщенных флюидом (газ, нефть, вода, и другие) или для композитов, содержащих компоненты с высокой контрастностью модулей упругости. Наличие жидкости или включений с высоким контрастом в модулях упругости сильно расширяет границы Фойгта-Рейсса и, следовательно, приближение Хилла приведет к ошибочным результатам.

Более узкие границы были предложены в работе [71]. Авторы использовали вариационную теорему и принцип минимальной энергии деформации для общего случая композита с  $N$  различными включениями, имеющими различные упругими свойствами. Выражение для границ Хашина-Штрихмана было получено для среды, содержащей сферические включения, покрытые коаксиальными сферами до такой степени, что оставшийся объем между коаксиальными сферами имеет постоянное напряжение и деформацию (предположение о смежности). Предполагаемая среда является ни полностью изотропной, ни полностью однородной, но квазиизотропной, квазиоднородной [71]. Границы Хашина-Штрихмана (ГХШ) отлично оценивают эффективные модули упругости композита со сферическими включениями и расширяются по мере того, как формы включения искажаются от сферичности. Несмотря на то, что контрастность в модулях составляющих включений расширяет ГХШ, они по-прежнему представляют ценные оценки



для эффективных модулей упругости порово-трещиноватой среды, где наличие флюидной фазы увеличивает контрастность в модулях упругости составляющих включений (особенно когда насыщающая жидкость — это газ). Аналогичные оценки были получены [Walpole L. J. \[180\]](#) путем применения понятия поляризации напряжений и деформаций для однородного изотропного композита с изотропными и однородными включениями. [Willis J. R. \[186\]](#) объединил (1.23) с принципом минимальной энергии деформации для получения модифицированных ГХШ следующим образом:

$$\mathbf{C}^* \leq (\geq) \left\langle \mathbf{C}(\mathbf{r}) : \left[ \mathbf{I} + \Gamma^\infty : (\mathbf{C}(\mathbf{r}) - \mathbf{C}^c) \right]^{-1} \right\rangle : \left\langle \left[ \mathbf{I} + \Gamma^\infty : (\mathbf{C}(\mathbf{r}) - \mathbf{C}^c) \right]^{-1} \right\rangle^{-1}, \quad (1.25)$$

где:

$$\Gamma_{ijkl}^\infty(\mathbf{r}) = - \int_V G_{ik,jl}^\infty(\mathbf{r}) |_{(i,j),(k,l)} d\mathbf{r}. \quad (1.26)$$

В уравнении (1.25)  $\mathbf{G}^\infty$  - это функция Грина однородного тела сравнения со свойствами  $\mathbf{C}^c$ , и  $(i, j)$ , как и ранее, означает симметризацию относительно индексов  $i, j$ . [Willis J. R. \[186\]](#) упростил задачу об оценке границ модулей упругости, рассмотрев включения произвольной формы, встроенные в матрицу тела сравнения и со слабой их концентрацией, чтобы пренебречь влиянием взаимодействия включений. Поэтому общий случай второй производной функции Грина упрощается до тензора Эшелби (см. следующий раздел для дополнительной информации). [Castañeda P. P., Willis J. R. \[33\]](#), разработал модифицированное уравнение для ГХШ, которое учитывает характеристики формы включения и их распределение в объеме среды, введя бинарную корреляционную функцию. Если в уравнении (1.25) свойства тела сравнения совпадают со свойствами «самого жесткого» компонента, то формула (1.25) соответствует верхней границе Хашина-Штрикмана для

упругих модулей. Однако, если свойства тела сравнения совпадают со свойствами «самого мягкого» компонента, то формула (1.25) дает нижнюю границу Хашина-Штрикмана для упругих модулей.

### 1.3.3 ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ:

Несмотря на ценную информацию, которую обеспечивают границы (Фойгта и Ройсса, Хашина-Штрикмана, Уиллиса), получить надежное приближение для эффективных модулей упругости для композитов, содержащих включения с произвольными упругими и морфологическими свойствами, имеет большую значимость с практической точки зрения. Для этого требуется метод, который учитывает следующие аспекты:

1. произвольная концентрация составляющих включений (взаимодействие между включениями);
2. произвольный контраст между модулями упругости составляющих включений;
3. произвольная форма и ориентация составляющих включений;
4. характеристики распределения составляющих включений;
5. произвольная анизотропия композита и включений.

Возвращаясь к проблеме гомогенизации, классическое решение Эшелби [53] можно прочно считать краеугольным камнем современной микромеханики. Эта проблема не была аналитически решена до тех пор, пока Эшелби не предложил метод «собственной деформации» для задачи определения распределения полей напряжения и деформации внутри среды, содержащей включения, упругие свойства которых отличаются от вмещающей среды (минеральный скелет). В подходе Эшелби предполагается, что бесконечная среда с модулями упругости  $C^M$  вмещает включения с модулями упругости  $C^i$ . Цель состоит в том, чтобы найти распределение деформации и напряжения внутри этого неоднородного материала из-за присутствия включений. Эшелби предложил заменить включение,

занимающее эллипсоидальную область  $\Omega_i$ , аналогичным, но с и модулями упругости  $\mathbf{C}^M$ , где в области  $\Omega_i$  задана свободная от напряжения собственная деформация  $\mathbf{e}^*$ , которая исчезает вне этой области. [Eshelby J. D. \[53\]](#) определил тензор четвертого ранга  $S_{ijkl}$ , который связывает собственное напряжение внутри замененного включения с деформацией внутри матрицы  $e_{kl}^M$

$$e_{kl}^M = S_{ijkl} e_{ij}^* . \quad (1.27)$$

Компоненты вышеуказанного тензора Эшелби были получены для включения с простыми формами, такой как бесконечный цилиндр, сферические и эллипсоидальные в оригинальной работе [Eshelby J. D. \[53\]](#). Для решения Эшелби свойственна однородность напряжений и деформаций внутри включения т.е.  $\boldsymbol{\sigma}^i = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^i$  и  $\mathbf{e}^i = \langle \mathbf{e} \rangle^i$ . Ясная визуализация этапов реализации метода Эшелби представлена на работе [184]. На основе работы Эшелби [Böhm H. J. \[25\]](#) получил формулу для интегрального оператора  $\Gamma$  в уравнении (1.23) и, следовательно, эффективного модули упругости, используя уравнение:

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{C}^i : (\mathbf{e}^M - \mathbf{e}^i) = \mathbf{C}^M : (\mathbf{e}^M - \mathbf{e}^*) . \quad (1.28)$$

Подставив уравнение (1.27) в (1.28), чтобы заменить деформацию в однородной вмещающей среде, получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^i &= \mathbf{C}^i : (\mathbf{S} : \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^i) = \mathbf{C}^M : (\mathbf{S} : \mathbf{e}^* - \mathbf{e}^*) \Rightarrow \\ \mathbf{C}^i : \mathbf{e}^i - \mathbf{C}^i : \mathbf{S} : \mathbf{e}^* &= \mathbf{C}^M : \mathbf{e}^* - \mathbf{C}^M : \mathbf{S} : \mathbf{e}^* \Rightarrow \\ \mathbf{C}^i : \mathbf{e}^i &= \left[ \mathbf{C}^M + (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^M) : \mathbf{S} \right] : \mathbf{e}^* \Rightarrow \quad . \\ \mathbf{e}^* &= \left[ \mathbf{C}^M + (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^M) : \mathbf{S} \right]^{-1} : \mathbf{C}^i : \mathbf{e}^i \end{aligned} \quad (1.29)$$

Исходя из правой части уравнения (1.29), можно написать:

$$\begin{aligned}\sigma^i &= C^M : [S - I] : e^* \Rightarrow \\ \sigma^i &= C^M : [S - I] : [C^M + (C^i - C^M) : S]^{-1} : C^i : e^i.\end{aligned}\quad (1.30)$$

Применяя граничное условие (1.18) в виде деформации ( $e^o$ ) и учитывая, что на основе теоремы Эшелби деформация, испытываемая включением, является суперпозицией приложенной деформации на внешнюю границу среды ( $e^o$ ) и деформации в матрице ( $e^M$ ), получим:

$$e_o^i = e^o + e^M = e^o + S : e^*, \quad (1.31)$$

где  $e_o^i$  - это деформация во включении “i” после действия деформации ( $e^o$ ) на границах среды. Эту деформацию не следует путать с деформацией включения перед применением граничного условия ( $e^i$ ). Соответствующее напряжение во включение “i” при действии упомянутых граничных условий выражается следующим образом:

$$\sigma_o^i = C^i : [e^o + e^M] = C^M : [e^o + e^M - e^*]. \quad (1.32)$$

Заменив деформацию в матрице  $e^M$  в уравнении (1.32) с помощью уравнения (1.27), и повторив операции, выполненные в уравнениях (1.29) и (1.30), получим:

$$e^i = [I + S : C^{M^{-1}} : (C^i - C^M)]^{-1} : e^o. \quad (1.33)$$

Сравнивая (1.33) с (1.23), получим следующее уравнение для интегрального оператора второй производной функции Грина ( $\Gamma$ ):

$$\Gamma = -\mathbf{S} : \mathbf{C}^{M^{-1}}. \quad (1.34)$$

Тензор концентрации (см. (1.5) или (1.6)) выражается в виде:

$$\mathbf{P}^i = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{S}^i : \mathbf{C}^{M^{-1}} : (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^M) \right]^{-1}. \quad (1.35)$$

Следовательно, выражение для тензора эффективных модулей упругости можно записать следующим образом [25]:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^M + \left\langle (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^M) : \left[ \mathbf{I} + \Gamma : (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^M) \right]^{-1} \right\rangle \equiv \mathbf{C}^M + \langle \delta \mathbf{C} : \mathbf{P}^i \rangle. \quad (1.36)$$

Вышеупомянутый подход, предложенный Эшелби, не учитывает взаимодействия между включениями, поэтому он применим к композитам лишь с малой концентрацией включений. В теореме Эшелби предполагается, что поля напряжений или деформаций, приложенные к границам, не меняются при наличии включений. Телом сравнения в подходе Эшелби является матрица. Mori T., Tanaka K. [137] модифицировали теорему Эшелби, чтобы в какой-то мере учесть взаимодействия включений, путем введения среднего напряжения матрицы (“image stress”, “background stress”). В этом случае поля напряжений и деформаций, действующие на неоднородностях, представляют собой возмущенные поля напряжений и деформаций, наложенные на границах среды вмещающей матрицей. Модифицированные тензоры концентрации для метода Мори-Танака выражается следующим образом [25]:

$$\mathbf{e}^i = \mathbf{P}_e^i : \langle \mathbf{e} \rangle^M, \quad (1.37)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{Q}_e^i : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^M, \quad (1.38)$$

где  $\mathbf{P}_e^i$  и  $\mathbf{Q}_e^i$  - это тензоры концентрации теоремы Эшелби (см. уравнение (1.35)). После некоторых простых математических манипуляций, можно получить модифицированные тензоры концентрации для подхода Мори-Танака как [19]:

$$\mathbf{P}_{\text{MT}}^M = \mathbf{P}^i : \langle \mathbf{P}^i \rangle^{-1}. \quad (1.39)$$

Следовательно, эффективные модули упругости по методу Мори-Танака выражается так [25]:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^M + \langle \delta \mathbf{C}^i : \mathbf{P}^i \rangle : \langle \mathbf{P}^i \rangle^{-1}. \quad (1.40)$$

Nishizawa O. [142], применил теорему Эшелби для более общего случая. Компоненты производной второго порядка от функции Грина для этого случая были получены по работе [117], которая представляет модифицированный тензор концентрации  $\mathbf{P}^i$  (см. уравнение (1.37)). Новый модифицированный тензор концентрации можно применить в уравнении, полученном по методу Мори-Танаки (см. (1.40)). Чтобы применить метод Нишизавы, включения необходимо постепенно добавлять в матрицу в малых концентрациях, что приводит к гомогенизированной матрице для следующего шага.

В работе [153] предложена модификация метода Эшелби с целью учета взаимодействия между включениями, предполагая, что включения вмещены в матрицу с неизвестными свойствами эффективной среды. Метод Хилла по терминологии называется методом самосогласования и является более

стабильным для среды с относительно высокой концентрацией включений [138]. Формула метода самосогласования выражается следующим образом [138]:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^* + \left\langle (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^*) : [\mathbf{I} + \mathbf{\Gamma}^i : (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^*)]^{-1} \right\rangle. \quad (1.41)$$

Чтобы преодолеть достаточно грубое предположение об отсутствии взаимодействий между включениями, которое ограничивает применимость методов, основанных на теореме Эшелби случаем низких концентраций включений, аналогично работе Нишизавы [142], Norris A. N., Callegari A. J. et al. [143] объединили концепцию теории дифференциальных эффективных сред [160] и [74] с описанными выше методами, основанными на теореме Эшелби. Процесс поэтапного добавления включений в матрицу на самом деле представляет собой мысленный эксперимент и не должен быть использован для точного описания истинной эволюции пористости породы в природе [126].

Аналогично подходу Эшелби, который решает задачу распределения упругого поля с малой концентрацией включений, вложенных в бесконечную среду, на основе уравнения равновесия, Kuster G., Toksöz M. [106], [107] на основе волнового уравнения получили аналитическое решение для рассеянного поля перемещения, вызванного присутствием изолированного включения в бесконечной матрице, вследствие воздействия монохроматического длинноволнового излучения. Предположение о пренебрежимом рассеянии ограничивает метод Кастера и Токсоза средой с малой концентрацией включений, как и в подходе Эшелби. В оригинальной работе Кастера и Токсоза упоминается, что их метод является гибким для включений произвольной формы что достигается путем введения тензора  $\mathbf{T}$ , подобного тензору Эшелби. Аналитическое выражение для тензора  $\mathbf{T}$ , представленного в методе Кастера и Токсоза, было получено в работе Berryman J. G. [22].

Hudson J. A. [79], [80, 81] применил теорию рассеяния для решения волнового уравнения. По методу Хадсона предполагается, что разложение второго порядка эффективных модулей упругости трещиноватой среды, имеющей трансверсально-изотропную систему анизотропии, учитывает парные взаимодействия трещин. Трещины в подходе Хадсона считались бесконечно тонкими, а их концентрация малой. Более того, модули сжатия среды не зависят от насыщающей жидкости, что справедливо только для бесконечно тонких трещин. Метод Хадсона подробно исследован в работе Cheng C. H. [36]. На основании результатов, полученных Ченгом для сред, содержащих трещины с малыми аспектными отношениями, величины эффективных модулей упругости, полученные по приближению первого порядка Хадсона такие же, как в результате применения метода Эшелби. Ченг также заметил, что увеличение аспектного отношения за пределом, указанным Хадсоном, вызывает расхождение результатов, полученных по приближению первого порядка Хадсона с результатами, рассчитанными по методу Эшелби, и также повышение второго поправочного члена приближения второго порядка Хадсона. Чтобы исправить вышеупомянутые недостатки метода Хадсона, Ченг применил приближение Паде [61] для исправления поправочных членов метода Хадсона и получил более подходящий метод для сред с более высокими концентрациями трещин относительно метода Хадсона.

#### 1.3.3.1 АППРОКСИМАЦИЯ T-МАТРИЦА (OPTICAL POTENTIAL APPROXIMATION (OPA))

Основное интегральное уравнение для поля деформации (1.23) аналогично известному уравнению Липпмана-Швингера в теории рассеяния квантовой механики [24], решение которого неустойчивое и приводит к следующим бесконечному итерационному ряду Дайсона (или ряду Борна) [187]:



$$\mathbf{e}^{(n)} = \mathbf{e}^o + (-\Gamma : \delta\mathbf{C} + \Gamma : \delta\mathbf{C} : \Gamma : \delta\mathbf{C} - \Gamma : \delta\mathbf{C} : \Gamma : \delta\mathbf{C} : \Gamma : \delta\mathbf{C} + \dots) : \mathbf{e}^o, \quad (1.42)$$

где  $\mathbf{e}^{(n)}$  - это итерационное решение n-го порядка основного интегрального уравнения (1.23). Второе слагаемое в правой части вышеописанного ряда Дайсона называется членом рассеяния поля деформации и выражается следующим образом [134]:

$$\mathbf{e}^s = \Gamma : (-\delta\mathbf{C} + \delta\mathbf{C} : \Gamma : \delta\mathbf{C} - \delta\mathbf{C} : \Gamma : \delta\mathbf{C} : \Gamma : \delta\mathbf{C} + \dots) : \mathbf{e}^o \quad (1.43)$$

По терминологии квантовой механики сумма элементов в скобках в уравнении (1.43) называется T-матрицей и представляет собой все рассеяния волн деформации от границы ( $\partial V$ ) среды, где действует граничная деформация  $\mathbf{e}^o$ , до точки конечного рассеяния в среде [134].

Используя T-матрицу, можно записать:

$$\mathbf{e}^s(\mathbf{r}) = \Gamma : \mathbf{T}(\mathbf{r}) : \mathbf{e}^o. \quad (1.44)$$

Для поля смещения и члена рассеяния имеем следующее соотношение:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}^o + \mathbf{e}^s(\mathbf{r}). \quad (1.45)$$

Сравнив (1.45) с (1.23), имеем:

$$\mathbf{e}^s(\mathbf{r}) = \Gamma : \delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) : \mathbf{e}(\mathbf{r}). \quad (1.46)$$

Сравнив (1.46) с (1.44), получаем:

$$\delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) : \mathbf{e}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}(\mathbf{r}) : \mathbf{e}^o \quad (1.47)$$

Заменяв выражение для  $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ , используя интегральное уравнение, получим:

$$\delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) : \left[ \mathbf{e}^o + \mathbf{\Gamma} : \delta\mathbf{C} : \mathbf{e} \right] = \mathbf{T}(\mathbf{r}) : \mathbf{e}^o. \quad (1.48)$$

Используем уравнение (1.47), чтобы заменить слагаемое  $\delta\mathbf{C} : \mathbf{e}$  в уравнении (1.48):

$$\delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) : \left[ \mathbf{e}^o + \mathbf{\Gamma} : \mathbf{T}(\mathbf{r}) : \mathbf{e}^o \right] = \mathbf{T}(\mathbf{r}) : \mathbf{e}^o. \quad (1.49)$$

Из уравнения (1.49) имеем:

$$\delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) + \delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) : \mathbf{\Gamma} : \mathbf{T}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}(\mathbf{r}). \quad (1.50)$$

Следовательно, получаем следующее выражение для определения тензора  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \left[ \mathbf{I} - \delta\mathbf{C}(\mathbf{r}) : \mathbf{\Gamma} \right]^{-1} : \delta\mathbf{C}(\mathbf{r}). \quad (1.51)$$

Исходя из основного интегрального уравнения (1.23) и уравнения (1.47), имеем:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}^o + \mathbf{\Gamma} : \mathbf{T} : \mathbf{e}^o. \quad (1.52)$$

Усреднив уравнение (1.52) по представительному объему, получаем среднее поле деформации через тензор  $\mathbf{T}$  как:

$$\langle \mathbf{e}(\mathbf{r}) \rangle = \mathbf{e}^o + \langle \mathbf{\Gamma} : \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle : \mathbf{e}^o \quad (1.53)$$

Среднее поле напряжения определим, усреднив уравнение (1.9) по представительному объему и используя уравнение (1.14):

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \rangle = \mathbf{C}^0 : \langle \mathbf{e} \rangle + \langle \boldsymbol{\Gamma} \rangle : \mathbf{e}^0. \quad (1.54)$$

Преобразованием уравнения (1.54) получаем связь между полем деформации, действующей на границах исследуемой среды, и средним полем деформации:

$$\mathbf{e}^0 = [\mathbf{I} + \langle \boldsymbol{\Gamma} : \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle] : \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (1.55)$$

Заменяя  $\mathbf{e}^0$  в (1.54) выражением (1.55) и сравнив с (1.12), выражение для определения эффективного модуля упругости выглядит следующим образом:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^0 + \langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle : [\mathbf{I} + \langle \boldsymbol{\Gamma} : \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle]^{-1} \quad (1.56)$$

Вышеуказанная аппроксимация для расчета эффективного модуля упругости называется методом Т-матрицы. Метод применим для среды с произвольной системой анизотропии, содержащей включения произвольной концентрации и формы [194]. Позже, [Jakobsen M., A. Hudson J. et al. \[86\]](#) более подробно модифицировал приближение Т-матрицы, чтобы ввести эффект распределения включения и сохранить симметрию эффективных модулей упругости. Разложение Маклорена приближения Т-матрицы (1.57) выражается как:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^0 + \langle \mathbf{T} \rangle - \langle \mathbf{T} : \boldsymbol{\Gamma} : \mathbf{T} \rangle + O(v^3) \quad (1.57)$$

Основываясь на представленном выше разложении и учитывая концепцию бинарной корреляционной функции, представленную в работе [33], можно видеть, что первое слагаемое разложения (1.57) зависит от формы и ориентации включений. Однако, второй член касается взаимодействия парных включений (предполагая, что присутствуют включения типа (p) и типа (s) в совместной корреляционной области  $V^{(ps)}$ ), степень которого определяется предположениями для оценки интегрального оператора  $\Gamma$  (радиус корреляционной функции). Поэтому уравнение (1.57) можно переписать в виде бинарных взаимодействующих включений в области корреляции  $V^{(ps)}$ , следующим образом [86]:

$$C^* = C^0 + \sum_r t^{(p)} v^{(p)} - \sum_r \sum_s t^{(p)} v^{(p)} \Gamma^{(ps)} t^{(s)} v^{(s)} + O\left[\left(v^{(p)}\right)^3\right]. \quad (1.58)$$

Где  $\langle T^{(p)} \rangle = \sum_t t^{(p)} v^{(p)}$ , и  $t^{(p)}$ , это тензоры  $\mathbf{T}$  для среды, флуктуация тензора упругости, которая равна  $\delta C(\mathbf{r}) = \delta C^{(p)}(\mathbf{r})$ . Предположение о бесконечном радиусе корреляционной функции (бесконечная корреляционная область  $V^{(ps)}$ ), приводит к приближению невзаимодействующих включений теоремы Эшелби, Интегральный оператор  $\Gamma$  можно заменить интегральным оператором  $\Gamma^\infty$ , аналитическое выражение для которого получено в работе [186], Willis J. R. [187] на основе известного тензора Эшелби (см. (1.27)). Применяя тензор Эшелби (1.27) для расчета тензора  $\mathbf{T}$  и интегрального оператора  $\Gamma$ , с использованием матрицы в качестве тела сравнения, получаем уравнение (1.56), эквивалентное известному уравнению Мори-Танаки [33].

### 1.3.3.2 МЕТОД ОБОБЩЕННОГО СИНГУЛЯРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ (ОСП)

Уравнение Липпмана-Швингера (1.23) можно решить, не используя метод возмущений, следующим образом:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = [\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma} : \delta\mathbf{C}(\mathbf{r})]^{-1} : \mathbf{e}^0. \quad (1.59)$$

Усреднив приведенное выше уравнение по представительному объему, получаем:

$$\langle \mathbf{e}(\mathbf{r}) \rangle = \langle [\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma} : \delta\mathbf{C}(\mathbf{r})]^{-1} \rangle : \mathbf{e}^0. \quad (1.60)$$

Подставив уравнение (1.59) в (1.9), получим:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}(\mathbf{r}) : [\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma} : \delta\mathbf{C}(\mathbf{r})]^{-1} : \mathbf{e}^0. \quad (1.61)$$

Усреднив уравнение (1.61) по представительному объему, получаем:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{C}(\mathbf{r}) : [\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma} : \delta\mathbf{C}(\mathbf{r})]^{-1} \rangle : \mathbf{e}^0. \quad (1.62)$$

Используя уравнение (1.60), заменяем  $\mathbf{e}^0$  в (1.62).

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{C}(\mathbf{r}) : [\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma} : \delta\mathbf{C}(\mathbf{r})]^{-1} \rangle : \langle [\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma} : \delta\mathbf{C}(\mathbf{r})]^{-1} \rangle^{-1} : \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (1.63)$$

Сравнивая уравнения (1.63) с (1.12), можно получить следующее выражение для оценки эффективных модулей упругости [211]:

$$\mathbf{C}^* = \langle \mathbf{C} : [\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma} : \delta\mathbf{C}]^{-1} \rangle : \langle [\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma} : \delta\mathbf{C}]^{-1} \rangle^{-1}. \quad (1.64)$$

Можно подучить уравнение (1.64) иным образом. Учитывая уравнение (1.4) и применяя уравнение (1.59) преобразуем уравнение (1.9) следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) = (\mathbf{C}^o + \delta\mathbf{C}(\mathbf{r})) : [\mathbf{I} - \boldsymbol{\Gamma} : \delta\mathbf{C}(\mathbf{r})]^{-1} : \mathbf{e}^o. \quad (1.65)$$

Усреднив уравнение (1.65) по представительному объему и заменив  $\mathbf{e}^o$  с использованием уравнения (1.60), получаем:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \rangle = \left\langle (\mathbf{C}^o + \delta\mathbf{C}(\mathbf{r})) : [\mathbf{I} - \boldsymbol{\Gamma} : \delta\mathbf{C}(\mathbf{r})]^{-1} \right\rangle : \left\langle [\mathbf{I} - \boldsymbol{\Gamma} : \delta\mathbf{C}(\mathbf{r})]^{-1} \right\rangle^{-1} : \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}) \rangle \quad (1.66)$$

Сравнив уравнение (1.66) с (1.12), получаем следующее выражение для оценки эффективных модулей упругости:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^o + \left\langle \delta\mathbf{C} : [\mathbf{I} - \boldsymbol{\Gamma} : \delta\mathbf{C}]^{-1} \right\rangle : \left\langle [\mathbf{I} - \boldsymbol{\Gamma} : \delta\mathbf{C}]^{-1} \right\rangle^{-1}. \quad (1.67)$$

Также, как и для метода аппроксимации Т-матрицы, при использовании уравнений (1.64) и (1.67), полагая что среда, содержащая неоднородности неограничена, интегральный оператор  $\boldsymbol{\Gamma}$  можно заменить интегральным оператором  $\boldsymbol{\Gamma}^\infty$ , аналитическое выражение для которого получено в работе [186] на основе известного тензора Эшелби. Итак, уравнения (1.64) и (1.67) будут относиться к методам теоремы Эшелби.

Представленные уравнения (1.64) и (1.67) аналогичны модифицированным границам Хашина-Штрихмана, представленным в работах Willis J. R. [186] и Castañeda P. P., Willis J. R. [33] (см. уравнение (1.25)).

Следовательно, выбор тела сравнения в уравнениях (1.64) и (1.67) является крайне важной задачей для надежной оценки эффективных модулей упругости. Тело сравнения должно отражать основные особенности внутреннего строения. Введение вмещающей матрицы в качестве тела

сравнения, и полагая что среда, содержащая неоднородности неограниченна, уравнения (1.64) и (1.67) преобразуется в виде уравнения типа Мори-Танака (см. уравнение (1.40)). Если свойства тела сравнения совпадают с неизвестными эффективными свойствами исследуемой среды, то мы получим известный классический метод самосогласования [186, 187]. Если исследуемая среда является порово-трещиноватой средой, тело сравнения с упругими свойствами совпадающими с неизвестными эффективными упругими свойствами, практически, когда поры и трещины изолированы во вмещающей матрице [16], на Рис. 1.1 (а) приведен пример для этого случая. Когда включения не изолированы и взаимосвязаны, что является наиболее распространенным случаем в геофизических исследованиях, мы должны выбрать тело сравнения так, чтобы оно включало в себя свойства и матрицы, и насыщенных флюидом пор, и трещин (см. Рис. 1.1 (б)). Следовательно, имеет смысл брать в качестве свойств тела сравнения линейную комбинацию свойств вмещающей матрицы (самого “жесткого”) и насыщенных флюидом пор, и трещин (самого “мягкого” вещества), т. е. в виде [16]:

$$\mathbf{X}^o = (1-f)\mathbf{X}^M + f\mathbf{X}^f, \quad (1.68)$$

где  $\mathbf{X}^M$  и  $\mathbf{X}^f$  – это тензоры физических свойств вмещающей матрицы и пор/трещин. В случае расчета упругих модулей,  $\mathbf{X}$  – это тензор упругих модулей. Параметр  $f$  показывает степень связности порового пространства и меняется между 0 и 1. Значение  $f=1$  соответствует структуре, в которой поле давления выравнено во вмещающей матрице (флюиде), поскольку все пустотное пространство связано. По мере стремления параметра  $f$  к нулю степень выравнивания поля давления уменьшается. А при  $f = 0$  (верхняя граница Хашина–Штрикмана) все пустоты становятся изолированными [203].

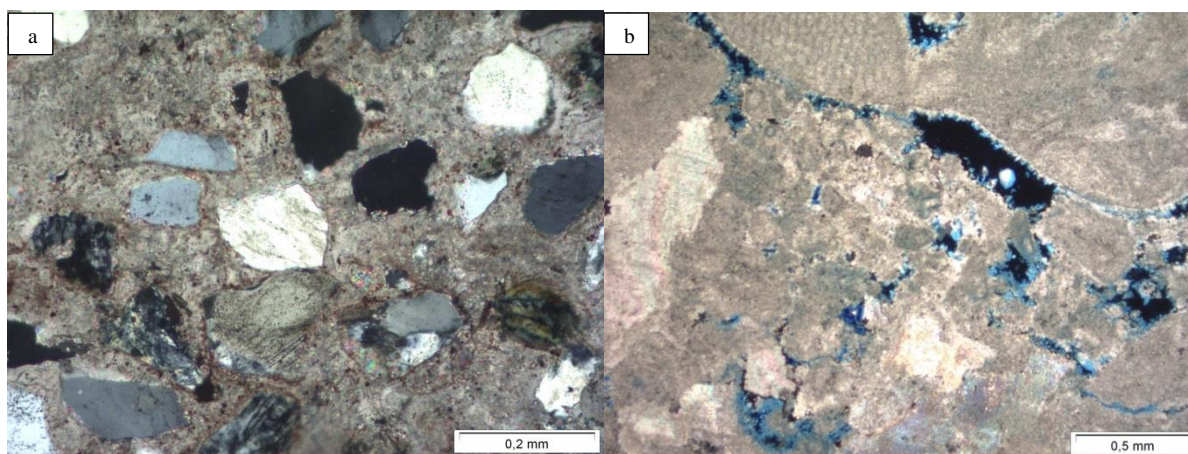


Рис. 1.1. Внутреннее строение двух типов пород (а) порода с изолированными порами, (б) порода со связанными между собой системами пор и трещин.

#### 1.4 Функция Грина:

Как упоминалось ранее, интегральный оператор  $\Gamma$  играет важную роль в уравнении для эффективных свойств, поскольку определяет степень взаимодействий включений. Применяя теорию возмущений, Willis J. R. [187] показал, что так как определение интегрального оператора  $\Gamma$  для ограниченной среды приводит к расходящемуся ряду Борна, аналитическое решение для этого оператора получается лишь в предположении, что исследуемая среда неограничена, и концентрация включений мала. Таким образом, среда удовлетворяет условию применения теоремы Эшелби. Для определения интегрального оператора  $\Gamma$ , необходимо сначала вычислить функцию Грина. Polyzos D., Tsepoura K. G. et al. [150] определил аналитическое выражение для функции Грина, применяя разложение Гельмгольца и потенциальные функции для неограниченной изотропной среды, удовлетворяющей условию теоремы Эшелби. Ma H., Hu G. [120] получили аналитическое выражение для функции Грина, зависящее от размера включений на основе упрощенной теории градиента деформации (simplified strain gradient elasticity theory) также для бесконечной изотропной среды, удовлетворяющей условию теоремы Эшелби. В данной работе, чтобы не



ограничить себя в рамках грубых предположений о слабых взаимодействиях между включениями, для вычисления функции Грина и ее второй производной (интегральный оператор  $\Gamma^\infty$ ) применим подход, представленный Шермергором [211]. Так как, в работе Шермергора также, как и в других работах, исследуемая среда неограничена, мы применяем обозначение  $\Gamma^\infty$  вместо  $\Gamma$ .

Вычисление тензора Грина удобно провести, используя интегральное преобразование Фурье. Проводя преобразование Фурье над уравнением (1.19) с заданными граничными условиями, получаем:

$$C_{ijmn}^o k_n k_l G_{mk}(\mathbf{k}) = \delta_{ik}, \quad (1.69)$$

где,  $G_{kn}(\mathbf{k})$  это преобразование Фурье функции Грина (тензор второго ранга) и выражается как:

$$\mathbf{G}(\mathbf{k}) = \int \mathbf{G}(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (1.70)$$

Исходя из уравнения (1.70), видно, что задача вычисления Фурье-образа тензора Грина сводится к построению тензора, обратного некоторому тензору второго ранга  $\mathbf{t}$ :

$$t_{ik} = C_{ijkl}^o k_j k_l. \quad (1.71)$$

Согласно работе Шермергор Т. Д. [211], вторая производная функции Грина, представляет собой обобщенную функцию, которая может быть выражена через ее сингулярную и формальную составляющие:

$$\Gamma^\infty f = \int_V \Gamma^\infty(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_{V^o} \Gamma^s \cdot f(0) d\mathbf{x}' + \int_{V-V^o} \Gamma^f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (1.72)$$

Формальная часть приведенного выше уравнения (второе слагаемое правой части уравнения (1.72)) является локальным оператором и его интегрирование обращается в нуль по области вне включений. Однако сингулярная часть является постоянным тензором и выражается следующим образом:

$$\Gamma_{ijkl}^{\infty} = \Gamma^s = \int_{V^o} G_{k(i,j)l} dr = \oint_{S^o} G_{ik,l} dS_j, \quad (1.73)$$

где  $V_o$  – это объем включений и  $S_o$  – это поверхность включений, по которой проводится интегрирование. Исходя из уравнения (1.70), преобразование Фурье функции Грина можно записать в следующем виде:

$$G_{ij}(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^{-2} A_{ij}^{-1}, \quad (1.74)$$

где  $A_{ij} = C_{ijn}^o v_{mn}$ ,  $v_{mn} = v_m v_n$ ,  $v_m = k_m / |\mathbf{k}|$ .  $A_{ij}^{-1}$  являются элементами матрицы, обратной к матрице  $\mathbf{A}$ . Вторая производная уравнения имеет вид:

$$G_{ij,mn}(\mathbf{k}) = -v_{mn} A_{ij}^{-1}. \quad (1.75)$$

Сингулярная часть второй производной тензора Грина, представленной в уравнении (1.75), получается путем определения обратного преобразования Фурье уравнения (1.75) следующим образом:

$$\Gamma_{ijmn}^{\infty} = \frac{1}{8\pi^2} \iint G_{ij,mn}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r} d\mathbf{k}. \quad (1.76)$$

Выбор поверхности интегрирования  $S^o$  для определения сингулярной составляющей второй производной тензора Грина зависит от формы

неоднородностей. Для включения с эллипсоидной формы, поверхность которого задается следующим уравнением:

$$\sum_k \frac{x_k^2}{a_k^2} = 1, \quad (1.77)$$

где  $a_k$ —это полуоси эллипсоидального включения. На основе уравнений (1.76) и предполагая, что включения имеют форму общего эллипсоида, Шермергор Т. Д. [211] получил следующее уравнение для вычисления сингулярной составляющей второй производной тензора Грина:

$$\Gamma_{ijmn}^\infty = -\frac{1}{4\pi} \int n_{mn} \Lambda_{ij}^{-1} d\Omega, \quad (1.78)$$

где  $\Lambda_{ij} = C_{ijn}^o n_{mn}$ ,  $\Lambda_{ij}^{-1}$  - элементы обратной матрицы  $\Lambda$ ,  $n_{mn} = n_m n_n$ ,  $n_n$  это единичные векторы эллипсоидного координата и выражаются следующим образом:

$$n_1 = \frac{1}{a_1} \sin \theta \cos \varphi, \quad (1.79)$$

$$n_2 = \frac{1}{a_2} \sin \theta \sin \varphi, \quad (1.80)$$

$$n_3 = \frac{1}{a_3} \sin \theta, \quad (1.81)$$

$d\Omega$  - это область интегрирования. Для нашего случая она является поверхностью эллипсоида:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (1.82)$$

Так как интегральный оператор  $\Gamma^\infty$  является несимметричным тензором, Шермергор [211] симметризовал его следующим образом:

$$\Gamma_{k)(l,n)(n}^\infty = \frac{1}{4} \left( \Gamma_{klmn}^\infty + \Gamma_{mlnk}^\infty + \Gamma_{knlm}^\infty + \Gamma_{mnlk}^\infty \right). \quad (1.83)$$

С помощью уравнения (1.83) тензор  $\Gamma^\infty$  симметризуется по индексам внутри скобок, т.е.:

$$\Gamma_{kmln}^\infty = \Gamma_{k)(l,n)(m}^\infty \quad (1.84)$$

Как показано в работе [211], применение представленного выше уравнения для вычисления второй производной тензора Грина приводит к тому, что в решениях (1.64) и (1.67) учитываются взаимодействия всех порядков, но только непосредственно в окрестности неоднородности. Вследствие этого решения (1.64) и (1.67) не учитывают дальний порядок в среде. Так как, в расчете тензора второй производной функции Грина учитывается сингулярная часть обобщённой формы функции Грина, решения (1.64) и (1.67) называются обобщенным сингулярным приближением. Концепцию сингулярного приближения можно расширить до концепции бинарного взаимодействия, путем определения интегрального оператора  $\Gamma^\infty$  по поверхности гипотетического эллипсоида форма, которого определяет степень бинарной корреляционной функции как [33]:

$$\alpha^{zi} = \left( \sqrt{\frac{v^i}{R^i}} \right) \alpha^i, \quad (1.85)$$

где  $\alpha^{zi}$ , -это аспектное отношение гипотетического эллипсоида, определяющего зону бинарного взаимодействия включений типа (i).  $\alpha^i$ ,  $v^i$  и  $R^i$

–это аспектное отношение, объемная концентрация и фактор взаимодействия включений типа (i) соответственно.

Чтобы избежать перекрытия включений, максимально возможное значение для  $R^i$  равно единице, и минимальное значение  $R^i$  составляет объемную концентрацию включений типа (i),  $v^i$ , которое приведёт к тому, что зона бинарного взаимодействия - это периферия неоднородностей (концепция, примененная в решениях (1.64) и (1.67)). Концепция бинарного взаимодействия и характеристического эллипсоида (characteristic ellipsoid) применены в работах [86] для учета влияния распределения включений (вторая слагаемая уравнения (1.58)) во объеме порово-трещиноватой среды. Следовательно, тензор  $\Gamma^{(ps)}$  можно вычислить так же, как тензор  $\Gamma^\infty$  уравнения (1.78), выбирая аспектное отношение, равное радиусу бинарной корреляционной функции [2].

Тело сравнения (синий и желтый фон) и диаграмма взаимодействия включений (стрелки) для методов Эшелби, Мори-Танака, самосогласование, T-матрица и обобщенного сингулярного приближения представлены на Рис. 1.2. Для метода Эшелби тело сравнения является матрицей (синий фон) и приложенная деформация на границе среды передается на включения (красные зоны) без изменения (нулевое возмущение поля деформация в среде,  $e^i=e^0$ ,  $e^i$  и  $e^0$ -это деформации во включениях и на границы среды). В методе Мори-Танаки матрица является возмущающим барьером деформации, а деформация, испытываемая включениями, является матричной деформацией. Для метода Мори-Танка тело сравнения - это матрица, как в предыдущем случае (метод Эшелби). Телом сравнения для подхода самосогласования является среда с неизвестными эффективными характеристиками. Этот метод позволяет эффективно учитывать среднее значение всех взаимодействий. В методе самосогласования деформация, испытываемая включениями, равна средней деформации среды. В приближении T-матрицы степень взаимодействия зависит от выбора радиуса бинарной корреляционной функции, используемой для вычисления интегрального оператора  $\Gamma^\infty$ , как

указано зелеными стрелками. В методе обобщённого сингулярного приближения вычисление интегрального оператора через сингулярную слагаемую обобщённого формы функции Грина приводит к тому, что учитываются взаимодействия всех порядков, но только непосредственно в окрестности неоднородности. Тело сравнения в методе обобщённого сингулярного приближения может выбираться на основе свойств самого мягкого и самого жесткого компонента (в виде их линейной комбинации), что приводит к результатам, в соответствии с границами Хашина-Штрикмана.

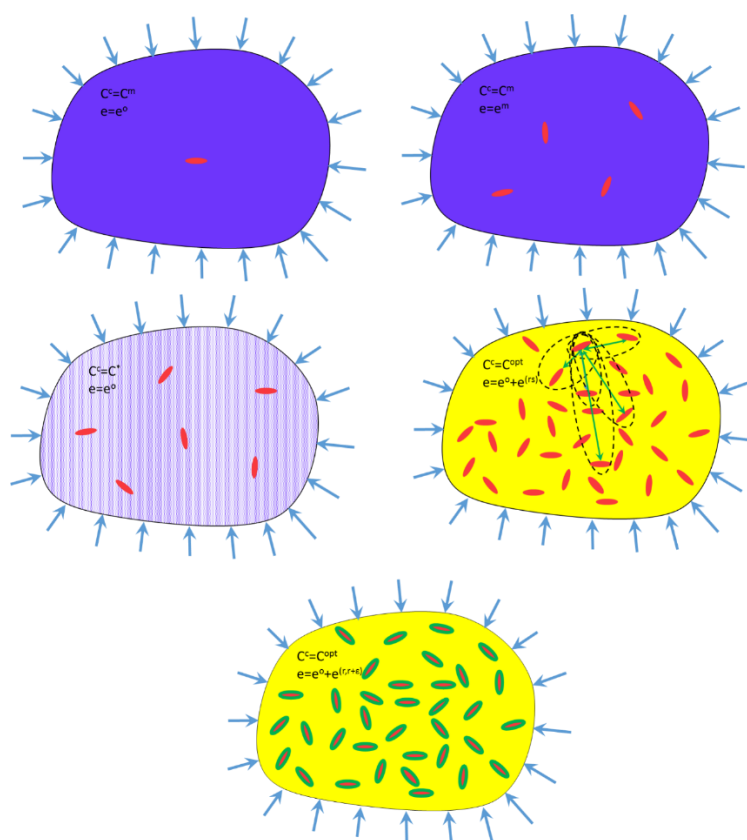


Рис. 1.2. Схема взаимодействий включений в методах: (а) Эшелби, (б) Мори-Танака, (в) самосогласование, (г) Т-матрикс, (д) ОСП.

## 1.5 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ЭФФЕКТИВНЫХ СРЕД В ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИИ

При построении математических моделей физических свойств пород следует учитывать, что для различных типов пород вид модели определяется

особенностями внутреннего строения породы. Эти особенности различны для разных пород и являются в общем случае разномасштабными, отражая особенности строения породы в разных масштабах. Модели строятся по принципу «от мелкого масштаба к большему». При построении модели реальная порода заменяется модельной средой. Форма пор, трещин, минеральных зерен и других включений (неоднородностей) аппроксимируется эллипсоидами. Аппроксимация формы эллипсоидами дает возможность получить решение в аналитическом виде. В общем случае эллипсоиды являются трехосными. Свойства тела сравнения рассчитываются по формуле (1.68), где  $f$ -параметр определяет степень связности включений. Этот параметр имеет непосредственную связь с транспортными свойствами исследуемой среды, в частности – с гидравлической проницаемостью. На основе построенной модели могут быть рассчитаны эффективные физические свойства разного типа, что определяется имеющимися экспериментальными данными. В частности, модели строятся для оценки скоростей упругих волн в порово-трещиноватой среде. Тензор упругости рассчитывается на основе построенной модели породы. Затем определяются скорости упругих волн с использованием уравнения Кристоффеля [7]. Уравнение Кристоффеля имеет вид [116]:

$$\left(\Gamma_{ik} - \rho c^2 \delta_{ik}\right) U_k = 0, \quad (1.86)$$

где  $\Gamma_{ik} = C_{ijkl} l_j l_l$ , - так называемый тензор Кристоффеля, который является симметричным тензором второго ранга;  $\mathbf{l}$  - единичный вектор направления распространения волны. В работе [17] авторы применили метод ОСП для оценки тензора электрической проводимости поровой среды. В таком случае  $\Gamma^\infty$  (вторая производная тензора Грина) в уравнениях (1.64) и (1.67) является тензором второго ранга. С использованием имеющихся экспериментальных данных для соответствующих физических величин (скоростей упругих волн,

тепло- и электропроводности, диэлектрической и гидравлической проницаемости), можно решить обратную задачу по восстановлению характеристик микроморфологических и микротекстурных параметров, включая: аспектное отношение пор и трещин, трещинную пористость (или плотность трещин), уровень связности пустотного пространства, содержание органических веществ, и т.д. Экспериментальные данные могут быть получены в результате лабораторных измерений на образцах или же в результате работ ГИС или сейсмических работ. Построенная модель физических свойств породы должна соответствовать масштабу их измерения. Искомые параметры модели должны обеспечить приемлемое расхождение между экспериментальными и теоретическими значениями соответствующих физических свойств (например, скоростей упругих волн).

Определение неизвестных параметров модели является обратной задачей. Для ее решения, в частности, можно использовать методы нелинейной оптимизации с ограничениями на искомые параметры. Как правило, в результате применения какого-либо метода нелинейной оптимизации будет получен один набор неизвестных параметров. В том случае, когда число неизвестных параметров больше, чем число измерений (а это наиболее частый случай при решении подобных задач), ограничения играют важную роль, поскольку позволяют найти более приемлемое решение по сравнению с тем, которое может быть получено формально, без ввода ограничений. В последнем случае (в отсутствии ограничений) решение с истинными параметрами модели тоже будет давать приемлемое (но не наименьшее) расхождение теоретических и экспериментальных значений физических величин. В результате решение, содержащее истинные параметры модели, будет «пропущено». Вследствие этого необходимо использовать любую априорную информацию о неизвестных параметрах, что дает возможность сузить область возможных решений. Методы нелинейной оптимизации позволяют получить решение за короткий период времени. Однако вследствие неоднозначности решения обратных задач эти методы



следует использовать, если область изменения параметров модели достаточно хорошо известна и не является слишком широкой. Схема определения параметров микроструктуры на основе данных о реальной среде показана на **Рис. 1.3**. При решении обратной задачи минимизируется функция  $\Psi$  которая является отклонением оценочных значений, полученных на основе предлагаемой модели среды, от измеренных значений.

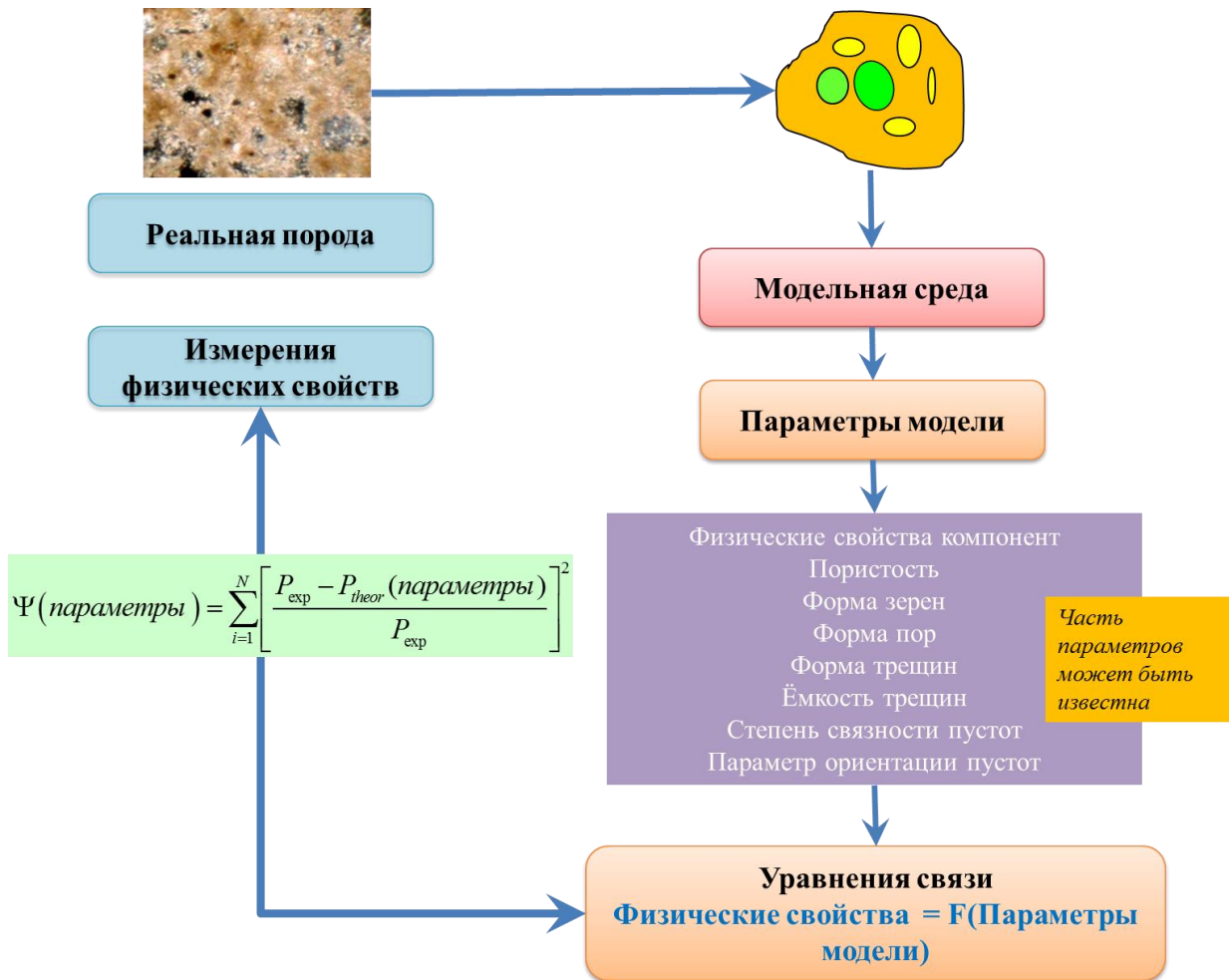


Рис. 1.3. Схема определения характеристик микроструктуры горных пород путем замены реальной породы модельной среды.

Иным способом решения обратной задачи является метод N-мерных сеток, где N – число параметров модели породы. Суть метода состоит в том, что в каждом узле сетки решена прямая задача. Узлы сетки являются набором параметров модели и рассчитываются с определенным шагом. В этом методе

решение прямой задачи на сетке получено один единственный раз для построенной модели среды. Затем, по измеренным значениям физических величин определяют узлы, параметры модели которых дают возможность получить приемлемое расхождение с экспериментальными данными. Такой способ решения обратной задачи имеет смысл использовать, когда отсутствует априорная информация о параметрах модели или она недостаточна для применения нелинейной оптимизации с ограничениями.

Для решения обратной задачи используют метод нейронных сетей. Этот метод требует представительной базы данных связей «физические свойства – микроструктура породы». При использовании этого подхода в имеющейся базе данных находят значения свойств, близкие к измеренным. Затем по совокупности этих значений, используя соответствующие связи, определяют возможную внутреннюю структуру породы.

В данной работе для решения обратной задачи применяется метод прямого поиска, который был предложен [Nelder J. A., Mead R. \[140\]](#). Согласно этому методу сначала задаются граничные значения для  $N$  искомым параметров (где  $N$  - это число неизвестных). Эти граничные значения ограничивают диапазон поиска алгоритма для минимизации функции  $F$ . Расчеты начинаются с  $2N$  точек (две группы значений искомым параметров). Определяется максимальное и минимальное значения функции,  $F_h$  и  $F_l$  соответственно. Точки, соответствующие максимальным и минимальным рассчитанным значениям функции, обозначаются  $x_h$  и  $x_l$  соответственно. Новая группа точек задается следующим образом:

$$x^* = (1 + \alpha)x - \alpha x_h, \quad \alpha > 0 \quad (1.87)$$

где  $\alpha$  это коэффициент отражения (reflection coefficient);  $\bar{x}$  и  $x^*$ , это среднее значение заданных точек на предыдущем этапе и новая группа точек соответственно. Если рассчитанное значение функции  $F^*$  ниже минимального

значения функции, найденного при выборе предыдущей группы точек ( $F^* < F_1$ ), то отражение привело к новой минимальной точке, и мы перейдем от  $x^*$  к  $x^{**}$  следующим образом (операция перехода называется «расширением»):

$$x^{**} = \gamma x^* + (1 - \gamma)x, \quad \gamma > 1, \quad (1.88)$$

где  $\gamma$  - это «коэффициент расширения». Рассчитаем функцию для новых точек. Если рассчитанное значение меньше минимального значения функции, рассчитанного в первом этапе ( $F^{**} < F_1$ ), то заменяем  $x_1$  новой группы точек  $x^{**}$  и повторим расчеты. Однако, если  $F^{**} > F_1$  значит расширение неудачное и заменяем  $x_h$  группой точек  $x^*$ .

Если на этапе отражения  $x$  на  $x^*$  получено  $F^* > F_1$ , то вычислим новую группу значений  $x$  как  $x_h$  или  $x^*$  в зависимости от того, какое значение приведет к более низкому значению функции  $F$  по следующему уравнению:

$$x^{**} = \beta x_h + (1 - \beta)x^*, \quad 0 < \beta < 1, \quad (1.89)$$

где  $\beta$ , это коэффициент сжатия. Затем мы заменяем  $x_h$  на  $x^{**}$  и повторяем алгоритм. Если  $F^{**} > \min(F_h, F^*)$ , то есть  $x^{**}$  приведет к результатам хуже, чем когда выбираем  $x_h$  или  $x^*$  в зависимости от того, какое из них приведет к более низкому значению функции  $F$ , сжатие неудачное. Следовательно, заменяем все  $x$  на  $(x_1 + x_h) / 2$  и повторяем процесс. Данный алгоритм показан на схеме **Рис. 1.4**. В исходной работе [Nelder J. A., Mead R. \[140\]](#) проводилось исследование для оптимизации трех параметров поиска: 1) коэффициент отражения, 2) коэффициент расширения, и 3) коэффициент сжатия. Было получено, что  $\alpha=1$ ,  $\beta=0.5$  и  $\gamma=2.0$ , являются оптимальным выбором.



## 1.6 Выводы:

В данной главе рассмотрены различные факторы, определяющие разницу между величинами динамических и статических модулей упругости.

На основе анализа публикаций можно обобщить основные причины разницы между величинами статических и динамических модулей упругости следующим образом: статические модули измеряются при больших деформациях и длительных воздействиях, а динамические – при быстрых воздействиях и малых деформациях. При измерении статических модулей развиваются процессы, которые не успевают развиться во время прохождения волн.

Помимо этого, рассмотрены разные методы оценки эффективных физических свойств композитов, среди которых основное внимание уделено методам теории эффективных сред. Рассмотрены самые распространенные методы теории эффективных сред, которые используются в геофизических приложениях.

Среди методов теории эффективных сред, наиболее подробно рассмотрены наиболее часто применяемые методы, основанные на теореме Эшелби. Рассмотренные в этой работе методы, можно классифицировать на три группы:

1. Методы, основанные на вариационных принципах.
2. Методы микромеханики композитов, основанные на локальной линейной теории упругости.
3. Методы, основанные на волновом уравнении.

### 1. Методы, основанные на вариационных принципах

Методы, основанные на вариационных принципах, позволяют определить верхние и нижние границы для модулей упругости, зная концентрации составляющих включений. Это методы Фойгта, Ройсса, метод Фойгта-Ройсса-Хилла и метод Хашина-Штрихмана. Как указано в работе

[126], для определения верхних и нижних границ величин модулей упругости по упомянутым методам, не требуется детальное знание микроструктурных характеристик исследуемой среды.

## 2. Методы микромеханики композитов

Методы механики композитов, связывают микроструктурные характеристики горных пород, такие как: минеральный состав, микроморфологические свойства включений, и т.д., с эффективными физическими свойствами. Эти методы, основанные на локальной линейной теории упругости, можно классифицировать согласно степени учета взаимодействий между неоднородностями.

Определение эффективных физических свойств многокомпонентных композитов (в частности, горных пород) приводит к необходимости решения уравнения Липпмана-Швингера (или суммирования ряда Дайсона) в теории квантового рассеяния. Решением указанной задачи является бесконечный ряд возмущений (ряд Дайсона), содержащий средние значения соответствующего тензора с последующим добавлением пространственных моментов различных порядков. Следовательно, предложенные теоретические модели основаны на грубых предположениях о форме и концентрации неоднородностей реальных композитов. Главной формой упрощения бесконечной серии Дайсона является не взаимодействующее приближение (**Non-Interacting Approximation, NIA**), впервые предложенное Эшелби (1957). Так как метод Эшелби не учитывает взаимодействий между неоднородностями, его применение ограничено лишь для сред содержащих малую концентрацию включений. Позже на основе теоремы Эшелби предложены методы Мори-Танака и Нишизавы, чтобы в каком-то приближении учесть влияние взаимодействий между включениями в явном виде. На основе аналогичного предположения и исходя из того, что функция Грина и ее первая и вторая производные являются обобщенными функциями, в работе [211] получено аналитическое выражение для второй производной функции Грина (интегральный оператор  $\Gamma^\infty$ ). Поскольку, формальное слагаемое обобщенной формы второй производной функции

Грина равняется нулю, метод Шермергора для вычисления тензора эффективной модули упругости называется методом обобщённого сингулярного приближения (ОСП). Метод ОСП является следствием суммирования всего ряда Дайсона, но в окрестности каждой неоднородности.

Концепция T-матрицы –это история всех возможных рассеяний физического поля, наблюдаемая в выбранной точке объема среды. На основе концепции T-матрицы и предполагая, что неоднородности взаимодействуют со средой, непосредственно примыкающей к ним, как и в методе обобщенного сингулярного приближения, [86] предложили поправки первого порядка и второго порядка (Hudson consistent corrections) для оценки эффективных физических свойств (метод аппроксимации оптического потенциала, ОРА).

### 3. Методы, основанные на волновом уравнении

Методы, основанные на волновом уравнении, также, как и предыдущие методы можно классифицировать на основе способа учета взаимодействий включений. Метод Хадсона первого и второго порядка получен для среды, содержащей чрезвычайно низкую концентрацию тонких трещин ( $<0.001$ ). Метод Эшелби-Ченга является модификацией метода Хадсона второго порядка на основе теоремы Эшелби и аппроксимации Паде, и приводит к более приемлемым и устойчивым результатам по сравнению с методом Хадсона второго порядка [36]. Применяя длинноволновую теорию рассеяния первого порядка, Кастер и Токсоз вычислили эффективные модули для случайно ориентированных включений. Так как в этом методе не учитываются эффекты множественного рассеяния волн, он применим лишь для сред, содержащих слабые концентрации включений. Все упомянутые методы, основанные на волновом уравнении, можно применить лишь для изотропной среды (определить  $\mathbf{K}$  и  $\mu$ ).

К вышеупомянутым методам, с помощью которых можно вычислить эффективные физические свойств в явном виде, можно добавить еще группу схем, предложенных для учета влияний взаимодействий и пространственного

распределения включений в неявном виде. К этой группе относятся методы самосогласования (SCA) и дифференциальной эффективной средой (DEM). Эти методы можно применить с произвольным методом теории эффективных сред. Например, метод самосогласования применяется с методом ОСП или с методом Т-матрицы для вычисления эффективных упругих модулей среды с изолированными включениями (в предположении отсутствия гидравлической проводимости в микро или макромасштабе между включениями). Стоит упомянуть, что применение метода самосогласования с методом Т-матрицы называется аппроксимацией когерентного потенциала (CPA) по терминологии квантовой механики.

Моделирование физических свойств горных пород методами ТЭС позволяет более достоверно определять динамические упругие модули по сравнению с эмпирическими зависимостями. Вследствие этого такое моделирование даст более надежную связь динамических и статических модулей упругости и позволит построить более достоверную геомеханическую модель среды для конкретных пород разрабатываемого месторождения.

Среди представленных методов метод ОСП и Т-матрикс являются более приемлемыми методами моделирования для горных пород, что было подтверждено ранее специальными тестами на искусственных средах с заданной микроструктурой и результатами их успешного применения в случае реальных горных пород. Эти методы учитывают взаимодействия всех порядков для каждого включения с периферией соседних включений.

Часть параметров модели может быть известна (например, параметры физических свойств компонент, их объемная концентрация). Число неизвестных параметров произвольное и зависит от построенной модели, и оно может быть больше измеренных значений физических полей (скорость упругих волн, электропроводность). Решение такой обратной задачи по определению неизвестных параметров модели требует использования ограничений на искомые параметры. Ограничения играют критическую роль



в поиске достоверного решения, поскольку неограниченный диапазон поиска решений с помощью формальных алгоритмов минимизации невязки между теоретическими и экспериментальными значениями физических величин может привести к нефизичному (артефактному) решению.

## Глава 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ КАРБОНАТНЫХ ОБРАЗЦОВ

### 2.1 ВВЕДЕНИЕ:

Определение физических свойств порово-трещиноватых углеводородоносных пластов является весьма сложной проблемой в отрасли разведочной нефтепромысловой геофизики. Хотя многочисленные работы были посвящены этому вопросу, неопределенность по-прежнему высока даже в предлагаемых современных методах.

Одним из подходов для решения вышеуказанной проблемы является применение методов, основанных на взаимосвязи структурно-микроморфологических параметров пористых сред с их физическими свойствами. В последнее время это направление в геофизике за рубежом называют Rock Physics [126], и этот термин стал уже практически международным [203]. Эти методы позволяют определить разные физические свойства такие, как скорости распространения упругих волн, гидравлические, тепловые, электрические и электромагнитные транспортные свойства на основе структурных или микроструктурных свойств горных пород (в зависимости от масштаба моделирования среды). Микро, мезо и макро являются относительными масштабно-зависящими понятиями. В данной работе микромасштаб и соответствующие параметры относятся к измерениям и наблюдениям, получаемым по снимкам сканирующего растрового электронного микроскопа (РЭМ) шлифов пород в масштабе микрометров или нанометров. В состав этих параметров входят микроморфологические характеристики зерен, кристаллов и порового пространства (размер, форма и ориентация). В лаборатории проводятся эксперименты для определения разных механических и петрофизических свойств (упругие модули, пористость, абсолютные и фазовые проницаемости, смачиваемость, капиллярное давление, и т.д.) по образцам размером порядка нескольких сантиметров, выбуренных из исследуемого пласта. Параметры, полученные в

упомянутом масштабе, относятся к мезопараметрам. Никие из указанных механических и петрофизических свойств нельзя определить по каротажным и сейсмическим данным, полученным в скважине и по всему пласту с шагом измерения порядка метра и десятки метров соответственно. Измеренные параметры по каротажным и сейсмическим данным относятся к макромасштабу и их значения является отмасштабированными значениями соответствующих параметров, измеренных в мелких масштабах.

Эмпирические корреляционные зависимости, полученные экспериментальным путем, являются распространённым способом для прогнозирования физических свойств на основе измеренных микро или мезоструктурных параметров пористых пород.

В работе [26] лабораторные исследования проводились для выяснения зависимости гидравлической проницаемости с минералогическими свойствами и пористостью для 240 образцов песчаников. [Han D., Nur A. et al. \[69\]](#) описывают линейную корреляцию между значениями коэффициента общей пористости и содержанием глины со скоростями продольных и поперечных упругих волн. [Orsi T. H., Dunn D. A. \[146\]](#) на основе статистических анализов скоростей продольных волн в лабораторных условиях предложили, что содержание глины и средний размер зерна являются определяющими параметрами для скорости продольных волн. Указанные выше работы, а также такие работы как [167], [44], [152], [56], [109], [41], являются образцами экспериментальных работ, проведенных для описания взаимосвязи между микро и мезоструктурными параметрами пористых пород с их физическими характеристиками.

Ко второй группе методов, применимых для описания физических свойств горных пород на основе их структурных параметров, относятся полуэмпирические методы. Полуэмпирические методы основаны на анализе экспериментальных данных с применением имеющихся физических законов. Выдающимся примером является полуэмпирическая зависимость Козени-Кармана [32], которая применяется в разных областях, таких как петрофизика,

медицина, гидрологии, биохимии и т.д.,. Помимо работы Козени-Кармана существуют иные полуэмпирические методы для моделирования петрофизических свойств, предложенные разными авторами [128], [104], [40], [158], [43].

Вышеуказанные эмпирические и полуэмпирические зависимости ограничены конечным количеством произвольных параметров и не включают в себя все возможные параметры, определяющие то или иное физическое свойство. Большинство из этих методов позволяют решать прямые задачи, то есть прогнозировать физические свойства горных пород по исследованным микро или мезоструктурным параметрам. Однако, эти методы не могут решать обратную задачу: по замерам физических свойств однозначно спрогнозировать текстурные параметры трещинно-пористой среды в произвольном масштабе. Кроме того, каждый из этих методов позволяет определять лишь конкретное свойство, не давая возможности использовать одни свойства для оценки других.

К третьей группе относятся методы теории эффективных сред, основы которых представлены в главе 1. Методы теории эффективных сред позволяют решать прямую и также обратную задачу для среды, содержащей произвольное количество компонентов с произвольными контрастными свойствами и произвольными концентрациями. Методы теории эффективных сред позволяют учесть систему анизотропии компонентов среды и систему анизотропии результирующей среды. На основе этих методов можно определить одни физические свойства через другие, что имеет важное значение в случае невозможности экспериментального измерения каких-либо свойств. [Berryman James G. \[21\]](#) проводил теоретические исследования по анализу влияния объемной концентрации глины и формы пор на модули объемного сжатия на основе разных методов теории эффективных сред, включая следующие методы: приближения когерентного потенциала, Костера-Токсоза, Т-матрица и Мори-Танака. [Chesnokov E. M., Bayuk I. O. et al. \[37\]](#) на основе метода ОСП предложили модель двойной пористости для

определения морфологических и упругих свойств плоских листов глины на основании измерения проницаемости трех глинистых образцов. Теоретическое влияние ориентированных трещин на данные акустического каротажа и способы их корректировки при разных наклонах скважин смоделировано в работе [206]. Метод ОСП применялся в работе [12] для определения тензора упругости глинистой слоистой водонасыщенной анизотропной среды. Компоненты тензора упругости и микроструктурные свойства глины определились по методу ОСП на основе данных дипольного акустического каротажа в работе [16]. В упомянутой работе также представлены четкие стратегии моделирования трех основных типов осадочных пород, песчаников, карбонатов и сланцев. Методы теории эффективных сред применялись в работе [38] для исследования влияния ориентации глинистых частиц и заполненных жидкостью трещин на скорости упругих волн в породах, содержащих глинистый минерал иллит. Методы теории эффективных сред также применялись для оценки транспортных свойств, в том числе гидравлической проницаемости [17] [18] [66] [13] [199] [164] [15], [193] [191] [192] [15].

Целью настоящей работы является построение петроупругой модели породы-коллектора в сантиметровом масштабе, т.е. в масштабе образцов, которые обычно испытывают в лабораторных условиях. Эффективные упругие свойства определяются по характеристикам составляющих, которые имеют размер несколько миллиметров и микрон. Характеристиками этих составляющих являются: объемные концентрации компонентов, параметры, характеризующие упругие свойства составляющих (модули упругости), их морфологические характеристики (форму, ориентацию, степень связности). В качестве уравнений, которые связывают параметры модели и эффективные упругие свойства, использованы формулы метода ОСП [211], [205]. Данный метод хорошо зарекомендовал себя при применении к породам, которые являются коллекторами углеводородов, поскольку позволяет учитывать степень связности компонент, в том числе, пор и трещин. Как и большинство

методов теории эффективных сред, данный метод основан на классическом решении, полученном Эшелби для упругих полей напряжений и деформаций в системе, состоящей из произвольной анизотропной матрицы и содержащей эллипсоидальное включение произвольной формы и ориентации. Включение имеет, в общем случае, анизотропные упругие свойства, но отличные от свойств матрицы [53]. Именно эллипсоидальность формы включения позволяет получить решение в аналитической форме.

## 2.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕТРОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИССЛЕДУЕМЫХ ОБРАЗЦОВ

Исследования образцов проводились в рамках единого экспериментально-теоретического комплекса петрофизических работ разработанного в ИФЗ РАН [202]. Для исследований были отобраны 5 полноразмерных куски керна карбонатных пород различного генезиса, и один полноразмерный керн песчаник с большой долей карбонатного цемента (>40%) которые характеризуются различными упругими свойствами. Для дальнейших исследований из кусков керна были выбурены 20 цилиндрических образцов диаметром 30 мм и максимальной длиной до 75 мм (стандартные образцы). Для цилиндрических образцов определялись фильтрационно-ёмкостные свойства (ФЭС) - пористость и проницаемость (по газу) с помощью стандартных методик. Результаты измерений ФЭС и характеристики микроструктуры образцов представлены в **Табл. 2.1**. Литологическое изучение пород проводилось на оптическом лабораторном микроскопе Leica DM EP и микронзондовом комплексе на базе растрового (сканирующего) электронного микроскопа (РЭМ) «Jeol JSM-6480LV» с комбинированной системой рентгеноспектрального микроанализа. Для определения минерального состава изучаемых образцов применялся метод рентгено-фазового анализа (**Табл. 2.2**). Определение фильтрационно-ёмкостных свойств, минерального состава, изображения микроструктуры, а

также литологическое описание образцов выполнены группой Д. Короста (МГУ).

Табл. 2.1. Общие физические и петрофизические характеристики исследуемых образцов, измеренные в лабораторных условиях.

Лаб. номер образца	Длина образца, (см)	Диаметр образца, (см)	Объем образца, (см <sup>3</sup> )	Давление обжима, psi	Объем пор, (см <sup>3</sup> )	КП* (%)	Кпр** (мД)	ККпр***, (мД)	КСК****
C1-1	9.034	2.971	62.61	487.1	4.783	7.64	2.124	1.303	11.626
C1-2	9.499	2.97	65.792	480.5	4.013	6.099	0.833	0.431	16.701
C2-1	7.202	2.97	49.895	491.6	1.964	3.936	0.107	0.038	32.841
C2-2	6.97	2.97	48.307	487.9	1.493	3.09	0.004	0.001	83.296
C3-1	7.74	2.975	53.788	482.8	1.034	1.923	0.09	0.031	33.698
C3-2	7.962	2.975	55.343	477.7	1.606	2.902	0.005	0.001	79.659
C3-3	7.221	2.975	50.192	481.4	0.759	1.512	0.063	0.011	88.37
C4-1	6.907	2.097	47.859	460.6	1.4	2.925	0.01	0.002	69.413
C4-2	7.136	2.972	49.506	487.8	0.932	1.882	0.004	0.001	84.748
C4-3	9.179	2.97	63.611	469.2	1.692	2.661	0.004	0.001	87.366
C4-4	9.256	2.972	64.233	471.9	1.486	2.314	0.007	0.001	70.748
C5-1	Нет данных по измерению								
C5-2	7.661	2.966	52.921	482.6	6.108	11.542	0.114	0.037	37.068
C5-3	7.73	2.966	53.409	467.5	7.46	13.968	0.156	0.054	33.681
C5-4	9.989	2.964	68.905	484.1	8.697	12.621	0.125	0.038	41.353
C6-1-1	7.568	2.964	52.208	478.8	11.85	22.698	9.478	7.564	4.516
C6-1-2	6.191	2.965	42.739	476.8	9.3	21.761	8.114	6.364	4.9
C6-2-1	7.167	2.964	49.444	489	11.352	22.959	9.965	7.966	4.481
C6-2-2	6.952	2.964	47.97	497.5	10.891	22.704	9.746	7.8	4.457
C6-2-3	7.284	2.964	50.259	488.9	11.102	22.088	6.794	5.225	5.363

\* Коэффициент пористости

\*\* Коэффициент проницаемости

\*\*\* Коэффициент проницаемости с поправкой Клинкенберга

\*\*\*\* Коэффициент скольжения по Клинкенбергу

Табл. 2.2. Минеральный состав исследуемых образцов.

Образец	C1-1	C1-2	C2-1	C3-3	C4-2	C4-2-1	C5-2	C5-3	C6-1-2
Кальцит (%)	52	59.5	97.6	100	следы	следы	82.4	52	99.5
Доломит (%)	47.5	40.1	1.3	0	37	33.6	14.5	34.6	0
Иллит (%)	0	0	0.5	0	5.5	4.8	0.7	4	0
Хлорит (%)	0	0	0	0	1.9	3.4	0	2.3	0
Кварц (%)	0.5	0.4	0.6	0	49.9	48.1	2.4	7.1	0.5
КПШ (%)									
(Ортоклаз, Санидин)	0	0	0	0	5.8	10	0	0	0

### 2.2.1 ОБРАЗЕЦ C1

Известняк с фрагментами доломитизированных водорослей (**Рис. 2.1**). Образец состоит из двух основных породообразующих элементов одинаковых по содержанию в породе: водорослевые комки (50%) и полнокристаллический кальцит (50%). Основная масса породы представлена бесцветным полнокристаллическим кальцитом, в серый цвет окрашены отдельные комковатые водорослевые сгустки. Структура породы разномасштабная, текстура комковатая.

### 2.2.2 ОБРАЗЕЦ C2

Известняк микрокристаллический неравномерно раскристаллизованный. Основным породообразующим элементом является микритовый материал (90%), серого цвета. Подчиненную роль играют участки, выполненные средне-крупнокристаллическим кальцитом (9%), в шлифе имеющие белую окраску, и отдельные редкие растительные остатки красных, багряных водорослей (1%). Структура породы разномасштабная, текстура массивная (**Рис. 2.1**).

### 2.2.3 ОБРАЗЕЦ C3

Известняк микритовый неравномерно раскристаллизованный до 0,3 мм (**Рис. 2.1**). Основным породообразующим элементом является микритовый



материал (80%), серого цвета. Также выделяются участки, выполненные средне-крупнокристаллическим бесцветным кальцитом (20%). Структура породы разномасштабная, текстура пятнистая, за счет неравномерно распределенных участков, выполненных средне-крупнокристаллическим кальцитом.

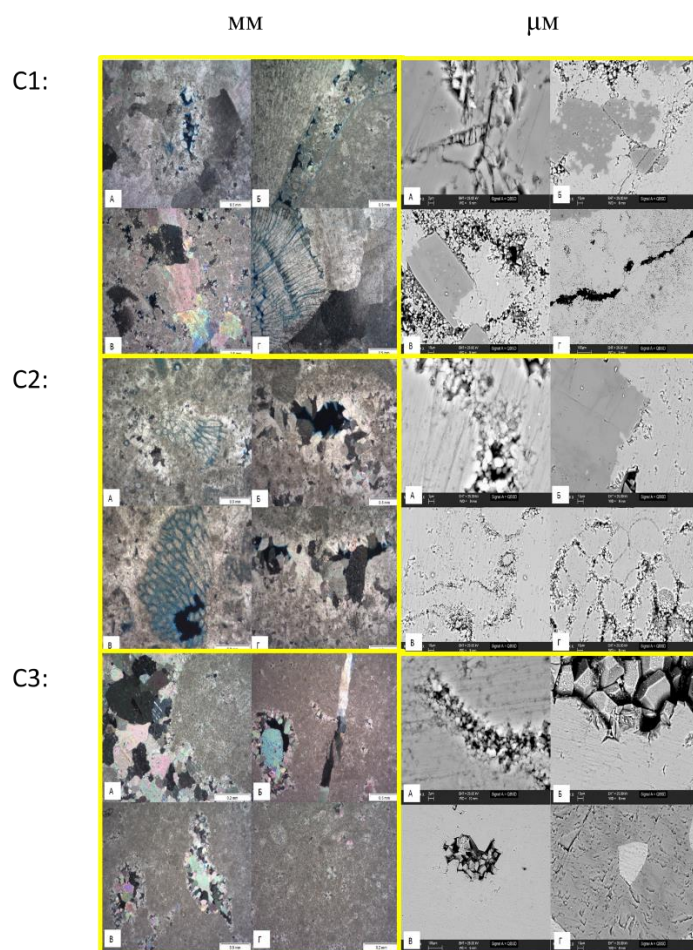


Рис. 2.1. Фото шлифов с1, с2 и с3 в миллиметровом (левые изображения, оптический микроскоп) и микрометровом (правые изображения, электронный сканирующий микроскоп) масштабах.

#### 2.2.4 ОБРАЗЕЦ С4

Песчаник кварцевый. Порода доломит-глинисто-песчаного состава. Структура характеризуется преобладанием угловатых, редко полуокатанных зерен диаметром 0,1-0,25 мм (85%), хорошей сортировки. Обломочная часть

песчаника представлена кварцем 70%, полевыми шпатами 10% и обломками пород 20%. Состав цемента карбонатный, доломитовый, однородный (см. **Рис. 2.2**).

#### 2.2.5 ОБРАЗЕЦ С5

Известняк органогенно-обломочный (**Рис. 2.2**). В породе выделяется два основных породообразующих элемента: тонко-среднекристаллический кальцит в качестве заполнителя (70%), и органогенные обломки (30%). Структура породы разномерная, текстура беспорядочная. Содержание обломочной части 60%, количество цемента не превышает 40%.

#### 2.2.6 ОБРАЗЕЦ С6:

Известняк микритовый оолитовый (**Рис. 2.2**). Основная масса породы - бесцветная, оолиты. Структурный тип зерен породы представлен: оолитами (82% от общей площади зерен), тонкокристаллическим кальцитом (18%), Зерна составляют 70 % от площади шлифа, цемент - 15 %, поры - 15 %. Цемент породы - базальный, мелкокристаллический (с размером кристаллов 0,01 мм). По составу кальцитовый. Пустотное пространство представлено выщелаченными порами. Поры выщелачивания составляют около 15 % от площади шлифа, развиты в цементе породы и внутри оолитов. Поры имеют разнообразные размеры преимущественно от 0,06 мм до 0,25 мм.

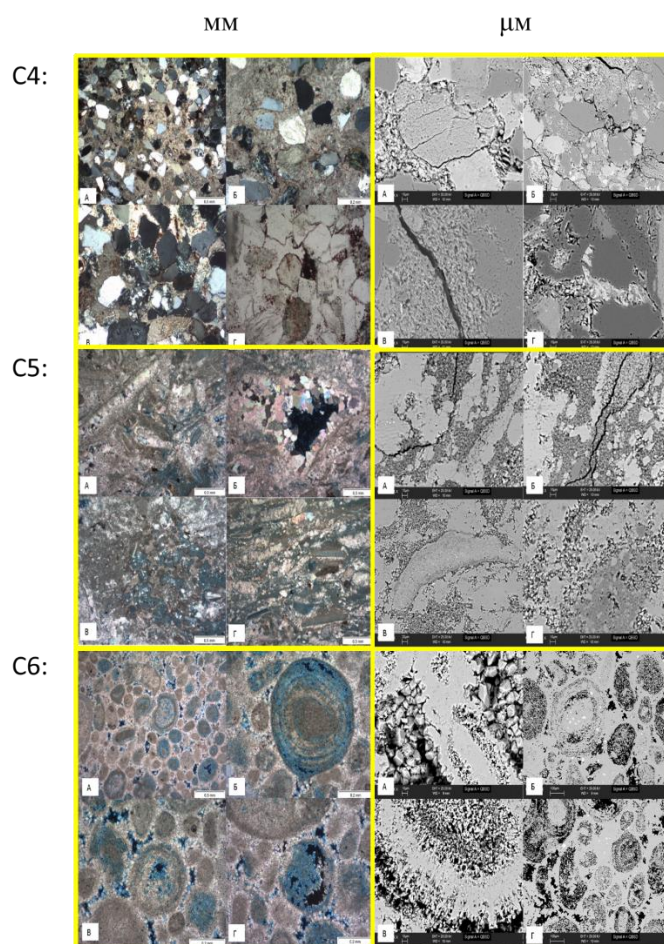


Рис. 2.2. Фото шлифов С4, С5 и С6 в миллиметровом (левые изображения, оптический микроскоп) и микрометровом (правые изображения, электронный сканирующий микроскоп) масштабах.

### 2.3 УЛЬТРАЗВУКОВАЯ ТОМОГРАФИЯ

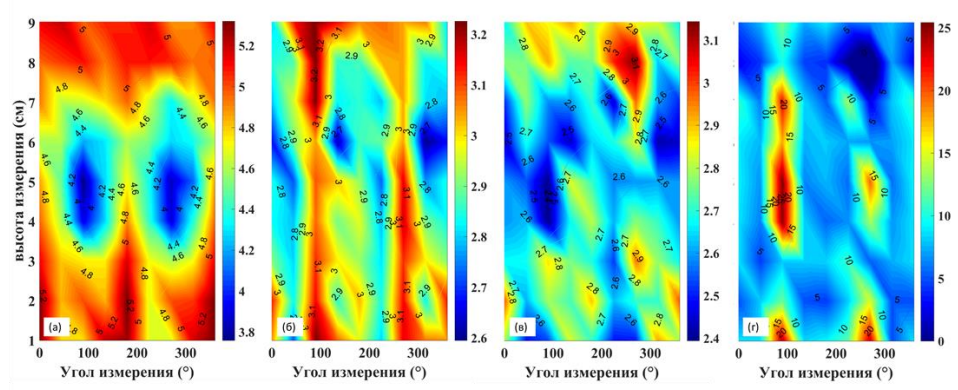
С целью изучения неоднородности внутреннего строения образцов полноразмерного керна проведена ультразвуковая томография (УЗТ) образцов в соответствии с методикой, предложенной в патенте В.А. Петрова и Р.М. Насимова «Способ определения неоднородностей упругих и фильтрационных свойств горных пород», RU 2515332. При проведении томографии использовалась УЗ-установка ИФЗ РАН, позволяющая получать волновые формы, на которых с помощью специального алгоритма выделялись вступления как продольных, так и поперечных волн. Согласно этой методике, образец прозвучивается вдоль вертикальной оси образца, а также в поперечном направлении, при постепенном перемещении линии «источник –

приемник» от основания образца к его верху. Прозвучивание в поперечном направлении производится для разных азимутов.

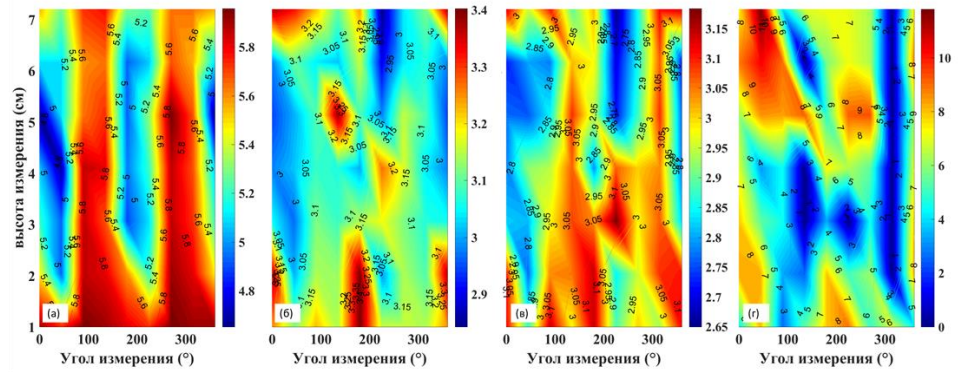
УЗТ позволяет определить степень неоднородности и тип анизотропии породы в масштабе образца. Тип анизотропии определяется путем сравнения характера поведения скоростей упругих волн с таковыми в кристаллах с известным типом анизотропии. Результаты УЗТ представлены на **Рис. 2.3** и **Рис. 2.4**.

Из анализа рисунков следует, что данные образцы являются неоднородными. Анализ поведения скоростей поперечных волн не позволяет отнести эти породы ни к одному из известных типов анизотропии. Следовательно, в масштабе образца породы являются неоднородными и изотропными. На основе результатов УЗТ рассчитаны значения скоростей упругих волн и их соответствующие стандартное квадратическое отклонение (СКО), результаты представлены в **Табл. 2.3**.

C1:



C2:



C3:

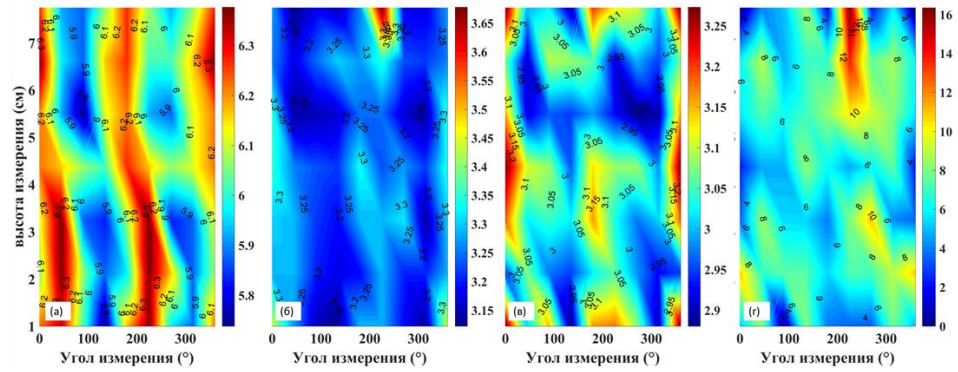


Рис. 2.3. Узт образцов с1, с2 и с3. (а) контуры скоростей продольных волн, (б) контуры скоростей быстрых поперечных волн, (в) контуры скоростей медленных поперечных волн, (г) степень неоднородности.

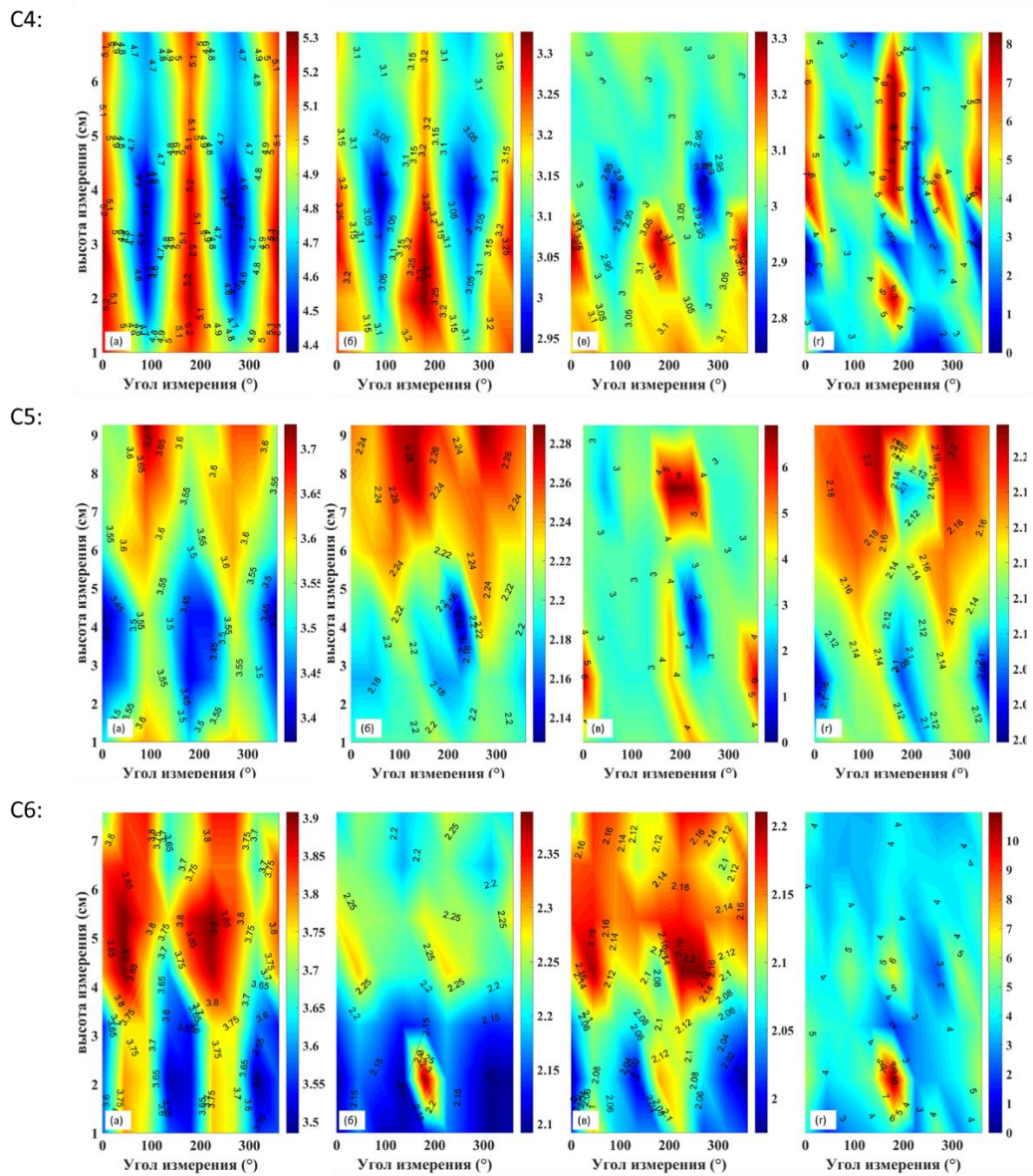


Рис. 2.4. Узт образцов с4, с5 и с6. (а) контуры скоростей продольных волн, (б) контуры скоростей быстрых поперечных волн, (с) контуры скоростей медленных поперечных волн, (д) степень неоднородности.

Табл. 2.3. Скорости упругих волн исследуемых образцов, измеренные в лабораторных условиях.

	$V_p$ (км/с)	$\sigma_{vp}^*$	$V_{s1}$ (км/с)	$\sigma_{vs1}$	$V_{s2}$ (км/с)	$\sigma_{vs2}$
C1-1	4.78	0.366	2.94	0.155	2.70	0.162
C1-2	5.09	0.321	2.97	0.134	2.82	0.145
C2-1	5.47	0.379	3.12	0.131	2.95	0.142
C2-2	6.04	0.078	3.18	0.042	3.02	0.098
C3-1	6.09	0.173	3.25	0.091	3.05	0.112
C3-2	6.27	0.069	3.26	0.059	3.13	0.097
C3-3	6.26	0.128	3.29	0.039	3.11	0.069
C4-1	4.90	0.254	3.14	0.086	3.03	0.095
C4-2	4.95	0.273	3.22	0.110	3.06	0.089
C4-3	4.43	0.259	2.99	0.091	2.83	0.059
C4-4	4.87	0.241	3.21	0.093	3.09	0.081
C5-1	3.54	0.078	2.22	0.033	2.15	0.039
C5-2	3.53	0.109	2.20	0.046	2.12	0.049
C5-3	3.33	0.080	2.08	0.049	2.01	0.057
C5-4	3.60	0.183	2.22	0.092	2.12	0.092
C6-1-1	3.72	0.118	2.19	0.062	2.11	0.060
C6-1-2	3.78	0.068	2.25	0.045	2.17	0.070
C6-2-1	3.78	0.135	2.20	0.046	2.12	0.046
C6-2-2	3.75	0.139	2.22	0.042	2.13	0.053
C6-2-3	3.81	0.131	2.24	0.063	2.16	0.058

#### 2.4 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ – ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРУГИХ СВОЙСТВ:

На основе анализа микроструктуры породы в разных масштабах были построены параметрические математические модели для исследуемых образцов. Основой такого моделирования является теория эффективных сред, которая позволяет в аналитической форме связать измеряемые физические свойства породы с параметрами ее микроструктуры (см. главу 1).

Параметрами микроструктуры могут быть форма пустот (пор и трещин) и других включений, степень их связности, характеристики ориентации трещин, пор и других включений, емкость трещин [Баюк И. О. \[203\]](#). Для построения моделей пород, представленных образцами керна C1, C2, C4, C5,

была использована модель двойной пористости (“Модель I”). Предполагалось, что пустотное пространство представлено пустотами двух видов – порами и трещинами. Форма пор и трещин аппроксимировалась эллипсоидами вращения, которые характеризуются аспектным отношением – аналогом относительного раскрытия пустот. Оба типа пустот имеют хаотическую ориентацию. Степень связности пустот описывается специальным параметром связности, который принимает значения от 0 до 1. Вследствие этого упругие свойства матрицы считались неизвестными, но изменяющимися в известных пределах относительно свойств, определенных по минеральному составу. Для выражения связи между эффективным тензором упругости и параметрами внутреннего строения среды использовался метод обобщенного сингулярного приближения [203]; [211], который представлен в **главе 1**, уравнения (1.64)-(1.67). Параметрами модели с двойной пористостью являлись: аспектное отношение пор, аспектное отношение трещин, параметр связности пустот, трещинная пористость. Под матрицей понимается вещество, не участвующее в возможном движении флюида, т. е. минеральные зерна, органическое вещество, кероген, связанная вода. Параметр связности в некоторой степени учитывает также извилистость пустотного пространства. **Рис. 2.5** (а) отображает модельную среду, предложенную для образцов С1, С2, С3, С4, и С5.

Для оолитового известняка, представленного керном С6, на основании анализа микроструктуры была построена математическая модель (“Модель II”), в основу которой положена иная модельная среда (**Рис. 2.5** (б)). Считалось, что модельная среда представлена двумя материалами: 1) трещиновато-пористой карбонатной вмещающей матрицей и 2) высокопористыми оолитами. Вторая среда (оолиты) в виде квази-изометричных включений находится в первой среде. Параметр связности двух сред аналогичен. Поры внутри оолитовой средой, поры и трещины карбонатной вмещающей матрицей хаотически ориентированы. На основе замеченной разницы между внутренней текстурой оолитовых зерен и



карбонатного межзернистого цемента, предполагается что прочностные свойства пористых зерен оолитов и карбонатного цемента разные. Это, в свою очередь, свидетельствует о возможном отличии микроморфологических свойств порового пространства внутри оолитов и межкристаллического порового пространства в карбонатном цементе.

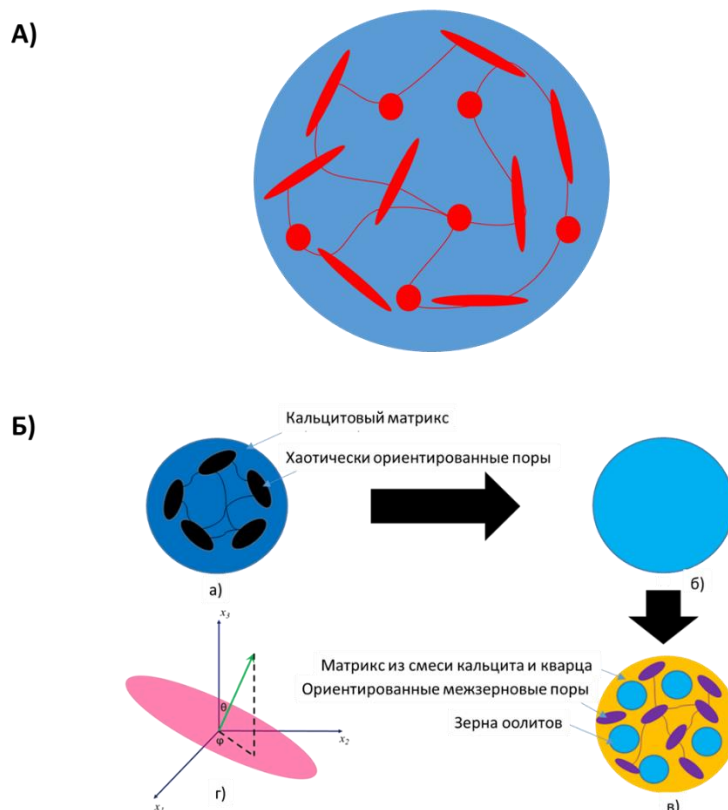


Рис. 2.5. Модельные среды, предложенные для образцов с1, с2, с3, с4 и с5 (а, модель двойной пористости) и с6 (б).

Параметры второй модели следующие: доля оолитовой пористости, аспектное отношение пор карбонатной вмещающей матрицей и оолитовых пор, аспектное отношение трещин карбонатной вмещающей матрицей и коэффициент связности пустотного пространства.

Параметры моделей определяются методами нелинейной оптимизации с ограничениями по скоростям упругих волн, полученными усреднением значений скоростей, измеренных на стандартных цилиндрических образцах

для каждой породы (обратная задача). В процессе работы программы нелинейной оптимизации наборы параметров, обеспечивающих приемлемое расхождение между усредненными экспериментальными значениями скоростей и их теоретическими значениями, запоминаются. В качестве приемлемого расхождения можно выбрать стандартное отклонение скоростей соответствующего типа волн (продольных или поперечных) (показаны в **Табл. 2.3**) для каждого образца.

В общем случае число неизвестных параметров модели больше, чем число измеренных физических величин, на основе которых решается обратная задача. Так как увеличение числа неизвестных параметров приводит к повышению неопределенности в полученных результатах, проводится анализ чувствительности, который заключается в оценке влияния изменения исходных параметров модели на его конечные характеристики. Анализ чувствительности позволяет оптимизировать число неизвестных путем исключения параметров, не оказывающих существенного влияния на моделируемые физические свойства.

#### 2.4.1 Анализ чувствительности Модели I к параметрам

Параметрами модели I являются: коэффициент связности порового пространства, трещинная пористость, аспектное отношение пор и аспектное отношение трещин. Исходя из минерального состава исследуемых образцов (см. Табл. 2.3), построим общую модель, содержащую все полученные минералы. Значения минерального состава модели выбираются как средние значения объемной доли соответствующих минералов по всем образцам. Для предложенной модели коэффициент связности, трещинная пористость, аспектные отношения пор и трещин меняются от 0 до 1, 0 до 1%, 0.1 до 1.0 и  $10^{-6}$  до 0.09 соответственно. Анализ чувствительности проводился для разных коэффициентов общей пористости, 1.51%, 4.63%, 5.36%, 10.85%, 13.97%. Значения подобраны случайно между минимальным и максимальным значениями коэффициентов общей пористости исследуемых образцов. Мы

рассчитали производные скоростей упругих волн (продольных и поперечных) относительно параметров микроструктур, представляющих модели 1, чтобы опередить чувствительность сейсмических скоростей относительно изменений этих параметров. Результаты, полученные при оценки чувствительности скоростей понадобятся для дальнейших этапов работы, когда решается обратная задача по определению искомым параметров. Результаты анализа чувствительности для модели 1 отображены на **Рис. 2.6 – 2.9**.

**Рис. 2.6** (а и б) показывает изменения значений упругих модулей  $C_{11}$  и  $C_{44}$  относительно коэффициента связности порового пространства для исследованных значений коэффициента общей пористости. Как видно из **Рис. 2.6**, для произвольного значения коэффициента пористости упругие модули  $C_{11}$  и  $C_{44}$  уменьшаются при увеличении связности порового пространства пород, представленных данной моделью. Ввиду того, что скорости упругих волн выражаются через упругие модули в виде  $V_p = \sqrt{C_{11}/\rho}$ ,  $V_s = \sqrt{C_{44}/\rho}$ , где  $\rho$ , это плотность среды, аналогичная зависимость от коэффициента связности существует и для скоростей продольных и поперечных волн. С точки зрения математической формулировки, на основе уравнения (1.68) главы 1 при увеличении коэффициент связности ( $f$ ) свойства тела сравнения близятся к свойствам самого мягкого компонента, и эффективные упругие свойства приближаются к нижней границе Хашина-Штрихмана. Наоборот, при уменьшении коэффициента связности свойства тела сравнения близятся к свойствам самого жесткого компонента, что приведет к приближению эффективных модулей упругости к верхней границе Хашина-Штрихмана. Представленные результаты анализа чувствительности модели показывают, что увеличение связности порового пространства снижает упругие модули горных пород, а это, в свою очередь, приводит к уменьшения скоростей упругих волн.

**Рис. 2.6** (в-г) отражает изменения значений скорости продольных и поперечных волн относительно коэффициента связности порового пространства для исследованных значений коэффициента общей пористости. Как видно из этого рисунка, для произвольного значения коэффициента пористости скорости продольных и поперечных волн уменьшаются при увеличении связности порового пространства пород, представленных данной моделью. Исходя из результатов, представленных на **Рис. 2.6** (д-е), чувствительность скорости упругих волн сильно зависит от значения коэффициента связности и коэффициента общей пористости. Для низкопористой среды с изолированным поровым пространством коэффициент связности слабо влияет на скорость упругих волн. Кривые чувствительности скорости волн для разных значений коэффициента общей пористости, представленные на **Рис. 2.6** (д-е), ведут себя относительно друг друга по-разному в зависимости от значений коэффициента связности порового пространства. Для среды с низкой или средней степенью связности ( $f < 0.8$ ) чувствительность скорости упругих волн пропорционально меняется с коэффициентом общей пористости. В тоже время для высокопористой среды с изолированными порами и трещинами, изменение параметра  $f$  больше влияет на скорость волн, чем в низкопористой среде с аналогичной структурой порового пространства. Однако, для среды с хорошо-взаимосвязанным ( $f > 0.8$ ) поровым пространством поведение кривых меняется противоположным образом. Значение 0.8 для данного анализа является точкой, где совместный эффект пористости и связности порового пространства на значение упругих волн качественно изменяется. Далее по тексту мы называем эту точку точкой критической связностью системы пор и трещин.

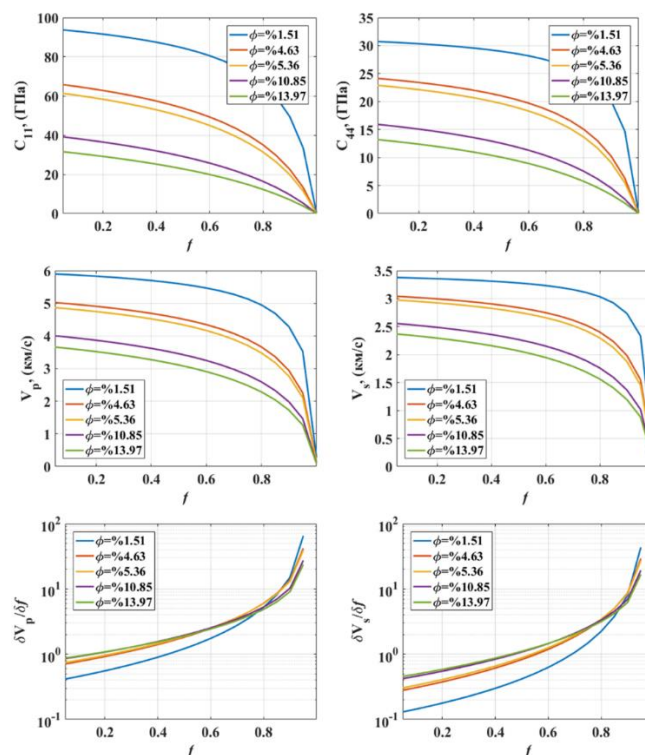


Рис. 2.6. Анализ чувствительности модели двойной пористости (модель i). Зависимость модулей упругости  $c_{11}$  и  $c_{44}$  (а-б) и скоростей упругих волн (в-г) от параметра связности порового пространства. Чувствительность скоростей упругих волн к параметру связности (д-е).

**Рис. 2.7** (а-б) показывает зависимость упругих модулей  $C_{11}$  и  $C_{44}$  от объемной доли трещин в поровом пространстве. Как видно из этого рисунка, уменьшение объемной доли трещин относительно объемной доли пор повышает модули упругости, т.е. трещиноватость среды снижает упругие модули. Изменение упругих модулей относительно изменения объемной доли трещин зависит от коэффициента общей пористости.

Результаты изменения значений скорости продольных и поперечных волн относительно объемной доли трещин для исследованных значений коэффициента общей пористости представлены на **Рис. 2.7** (в-г). Как видим, скорости продольных и поперечных волн уменьшаются с увеличением трещиноватости среды. Чувствительность значений скоростей высокая для всех рассмотренных значений коэффициента общей пористости. Как указано выше, чувствительность скоростей к трещинной пористости высокая даже при

относительно больших значениях объемной доли трещин и малых коэффициентах общей пористости.

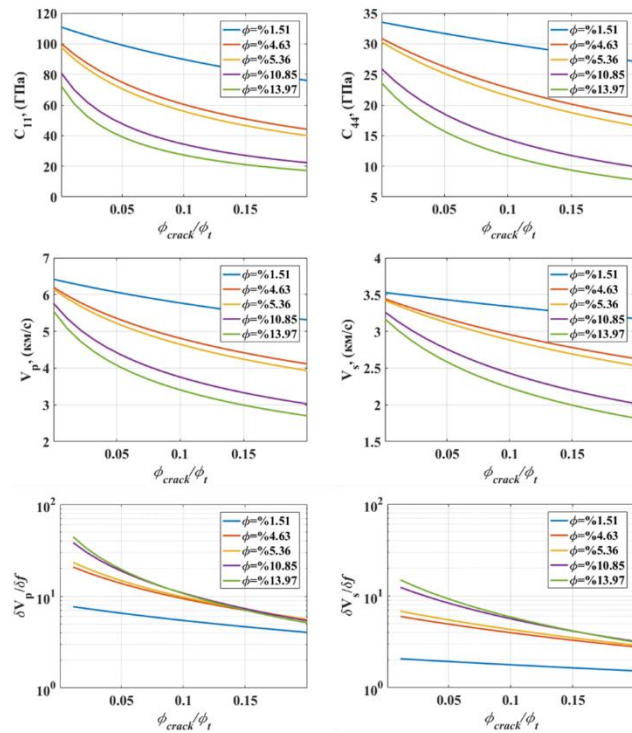


Рис. 2.7. Анализ чувствительности модели двойной пористости (модель i). Зависимость модулей упругости  $c_{11}$  и  $c_{44}$  (а-б) и скоростей упругих волн (в-г) от трещинной пористости. Чувствительность скоростей упругих волн к трещинной пористости (д-е).

Результаты анализа зависимости упругих свойств порово-трещиноватой среды от микроморфологических характеристик порового пространства представлены на [Рис. 2.8](#) и [Рис. 2.9](#). Как и указано выше, исследовалось влияние аспектного отношения пор и трещин, как параметр, описывающий форму пор и трещин.

Как видно из [Рис. 2.8](#) (а и б), упругие модули увеличиваются при увеличении аспектного отношения пор, т.е. среда со сферическими порами является более жесткой, чем среда с аналогичными петрофизическим свойствами, содержащая эллипсоидальные поры.

Ввиду того, что скорости упругих волн выражаются через упругие модули, как показано выше, подобное поведение очевидно для скоростей упругих волн (см. **Рис. 2.8** (в-г)).

**Рис. 2.8** (е-д) демонстрирует чувствительность значений скорости продольных и поперечных волн к аспектному отношению пор. Чувствительность значений скорости упругих волн к изменению формы пор снижается с увеличением аспектного отношения пор для всех рассмотренных значений коэффициента пористости. Чувствительность значений скорости упругих волн увеличивается с увеличением общей пористости среды. Изменение аспектного отношения пор не сильно меняет значение скорости продольных и поперечных волн особенно при больших аспектных отношениях ( $\alpha > 0.5$ ). Например, для среды с коэффициентом общей пористости равным 5% изменение аспектного отношения пор от 0.4 до 1.0 приведет к повышению значений скорости продольных волн равному всего 0.3% относительно начального значения скорости (!).

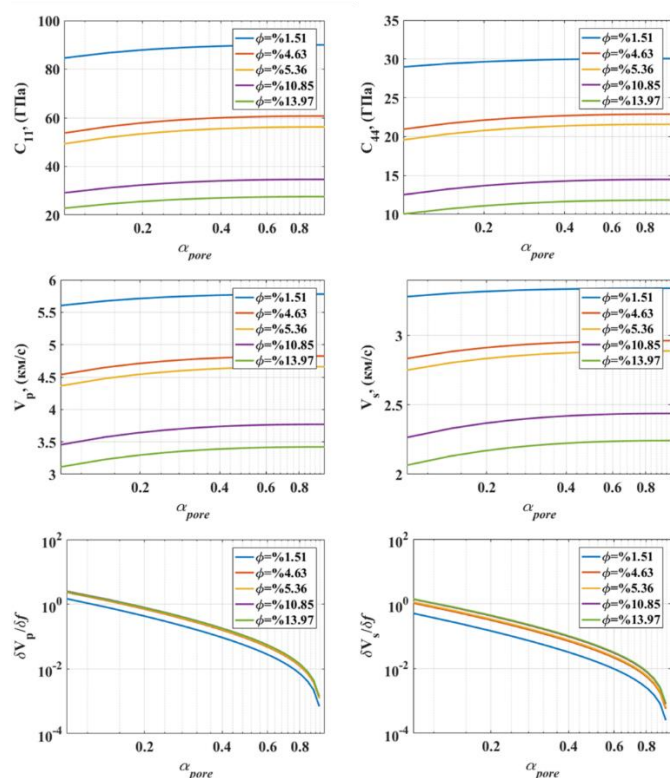


Рис. 2.8. Анализ чувствительности модели двойной пористости (модель i). Зависимость модулей упругости  $c_{11}$  и  $c_{44}$  (а-б) и скоростей упругих волн (в-г) от аспектного отношения пор. Чувствительность скоростей упругих волн к аспектному отношению пор (д-е).

**Рис. 2.9** (а и б) представляют зависимость упругих модулей  $C_{11}$  и  $C_{44}$  от аспектного отношения трещин. Упругие модули увеличиваются с увеличением аспектного отношения для всех рассмотренных значений коэффициента пористости.

**Рис. 2.9** (в-г) показывают зависимость скорости продольных и поперечных волн от аспектного отношения трещин. Значения скорости продольных и поперечных волн увеличиваются с повешением аспектного отношения трещин для всех рассмотренных значений коэффициента общей пористости. Исходя из анализа **Рис. 2.9** (д-е), чувствительность скорости упругих волн уменьшается с увеличением аспектного отношения трещин при исследованных значениях коэффициента общей пористости. Исходя из этого рисунка можно заключить, что скорости упругих волн являются более



зависимыми от формы трещин, чем формы пор. Чувствительность к изменению аспектного отношения трещин уменьшается со снижением общей пористости среды.

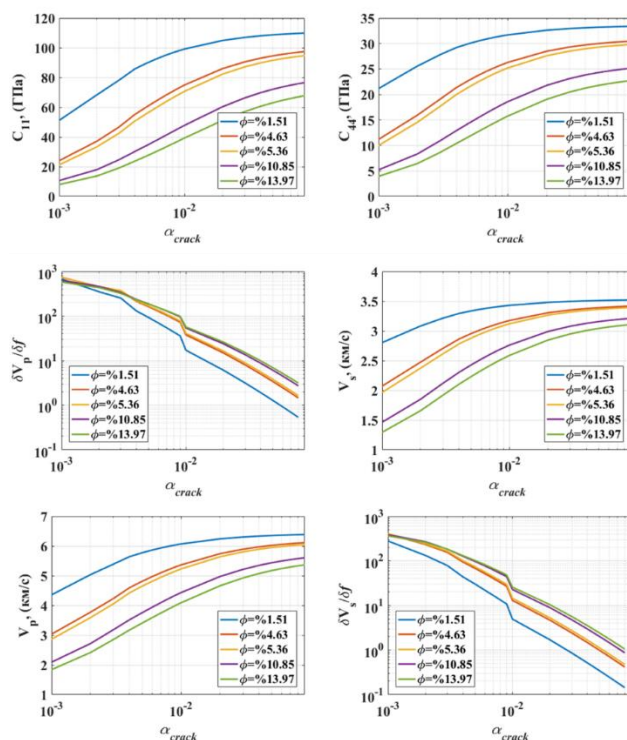


Рис. 2.9. Анализ чувствительности модели двойной пористости (модель i). Зависимость модулей упругости  $c_{11}$  и  $c_{44}$  (а-б) и скоростей упругих волн (в-г) от аспектного отношения трещин. Чувствительность скоростей упругих волн к аспектному отношению трещин (д-е).

#### 2.4.2 Анализ чувствительности модели II

Анализ фотографий, полученных с помощью сканирующего растрового электронного микроскопа (РЭМ) образцов, выбуренных из полноразмерного керна С6, показывают, что текстура данных образцов фундаментально отличается от исследуемых образцов, выбуренных из полноразмерных кернов С1, С2, С3, С4, и С5. Следовательно предложенная модель I может быть недостоверной для образцов, выбуренных из полноразмерного керна С6.

Таким образом, была предложена модель II для высокопористых образцов С6-1-1, С6-1-2, С6-2-1, С6-2-2 и С6-2-3 описание которой представлено выше.

Был проведен анализ чувствительности модели II к ее параметрам. Как упомянуто выше, параметрами этой модели являются: коэффициент связности порового пространства, пористость оолитовых зерен, аспектное отношение пор внутри оолитовых зерен, доля межкристаллической трещиноватости, аспектное отношение пор и трещин. В представленном анализе параметры модели изменялись в пределах, определяемых их физическим смыслом и результатами анализа микроструктуры. Коэффициент связности порового пространства меняется от 0 для порового пространства с изолированными порами и трещинами до 1 для сообщающегося порового пространства. Согласно анализу фотографии РЭМ, поры распределены по оолитовым зернам и между оолитовыми зернами в карбонатном цементе. Следовательно, можно разделить общую пористость на оолитовую и межкристаллическую. Исходя из результатов анализа снимков РЭМ, полагаем что, коэффициент оолитовой пористой меняется от 1 до 60% от коэффициента общей пористости. Аспектные отношения пор оолитовой среды и межкристаллических пор, находящихся в карбонатном цементе, меняются от 0.1 для тонких монетообразных трещин до 1.0 для сферических пор. Аспектное отношение межкристаллических трещин может меняться от 0.0001 для тонких микротрещин до 0.09 для открытых трещин. Трещинная пористость не может превышать 2%. Однако для данного анализа чувствительности доля трещиноватости зафиксирована и меняется от 0.01 до 20% от общей пористости чтобы унифицировать визуализацию полученных результатов для различных подобранных коэффициентов общей пористости. Это может привести к значениям трещиной пористости, превышающим указанное допустимое значение (2%). Анализ чувствительности проводился для разных коэффициентов общей пористости 1%, 5%, 11%, 15% и 22%. Значения подобраны случайно между предполагаемым значением 1% и максимальными

значениями коэффициентов общей пористости исследуемых образцов, выбуренных из полноразмерного керна С6.

Были рассчитаны производные скоростей упругих волн (продольных и поперечных) относительно параметров микроструктуры, представляющих модель II, с целью оценки чувствительности скоростей упругих волн к изменениям этих параметров.

**Рис. 2.10** представляет результаты анализа чувствительности упругих модулей и скоростей к изменению коэффициента связности порового пространства при подобранных значениях коэффициента общей пористости. Как видно из **Рис. 2.10** (а и б), модули упругости  $C_{11}$  и  $C_{44}$  уменьшаются при увеличении связности порового пространства исследуемой среды для произвольных значений коэффициента общей пористости. Эффект изменения связности системы пор и трещин среды усиливается при высоких значениях коэффициента общей пористости. Как упомянуто выше, при анализе чувствительности модели I, изменение коэффициента связности вызовет изменение свойств тела сравнения, которое в свою очередь приводит к изменению модулей упругости исследуемой среды и скоростей упругих волн соответственно.

Как и в предыдущих случаях, аналогичный эффект коэффициента связности порового пространства наблюдается для скоростей упругих волн (см. **Рис. 2.10** (в-г)). Производные скоростей продольных и поперечных упругих волн по параметру связности отражают чувствительность значения скоростей упругих волн к изменению связности порового пространства. Исходя из результатов, представленных на **Рис. 2.10** (д-е), влияние связности порового пространства повышается с увеличением пористости. Для данной модели критический коэффициент связности равен 0.96, который превышает критический коэффициент связности, определенный для модели I при аналогичном анализе чувствительности.

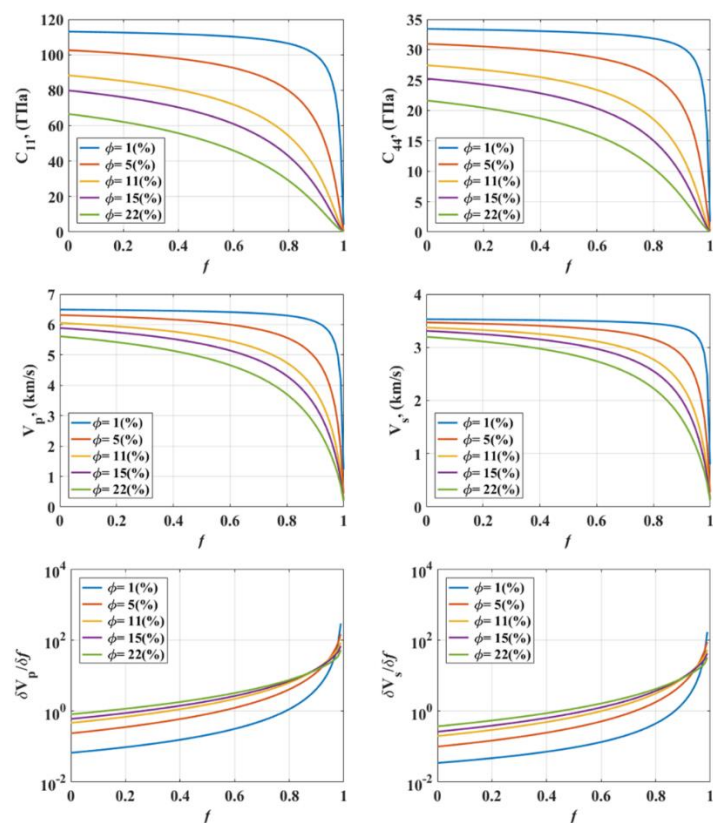


Рис. 2.10. Анализ чувствительности модели II. Зависимость модулей упругости  $c_{11}$  и  $c_{44}$  (а-б) и скоростей упругих волн (в-г) от параметра связности порового пространства. Чувствительность скоростей упругих волн к параметру связности порового пространства (д-е).

**Рис. 2.11** демонстрирует результаты анализа чувствительности модели II к изменению аспектного отношения пор (формы пор) внутри оолитовых зерен (сплошная линия) и межкристаллических пор (штриховая линия) при подобранных значениях коэффициента общей пористости.

На **Рис. 2.11** отражена зависимость упругих модулей  $C_{11}$  и  $C_{44}$  среды от аспектного отношения внутри-оолитовых и межкристаллических пор. Исходя из представленных результатов, можно заключить, что повышение аспектного отношения пустот приводит к повышению значений модулей упругости. Характер влияния формы пор внутри оолитовых зерен и межкристаллических пор на упругие модули аналогичны друг другу при произвольных значениях коэффициента общей пористости.

Среда со сферическими порами является жестче (имеет ббльшие модули упругости) по сравнению со средой с аналогичными петрофизическим и минералогическими свойствами, содержащей тонкие монетообразные поры. Увеличение пористости, как правило, уменьшает жесткость среды, однако влияние аспектного отношения на упруго-прочностные свойства среды усиливается с увеличением пористости. Аналогичное влияние аспектного отношения и коэффициента общей пористости наблюдается также для скоростей упругих волн (см. **Рис. 2.11**). Анализ поведения производных скоростей упругих волн относительно аспектного значения внутри-оолитовых пор и межкристаллических пор (**Рис. 2.11** (д-е)) демонстрирует, что влияние аспектного отношения на скорости упругих волн значительное для высокопористой среды с тонкими монетнообразными порами. Более того, характер влияния формы пор на скорости упругих волн не зависит от того, в какой среде поры находятся. Указанный эффект изменения аспектного отношения пор ослабляется с уменьшением коэффициента общей пористости и увеличением аспектного отношения.

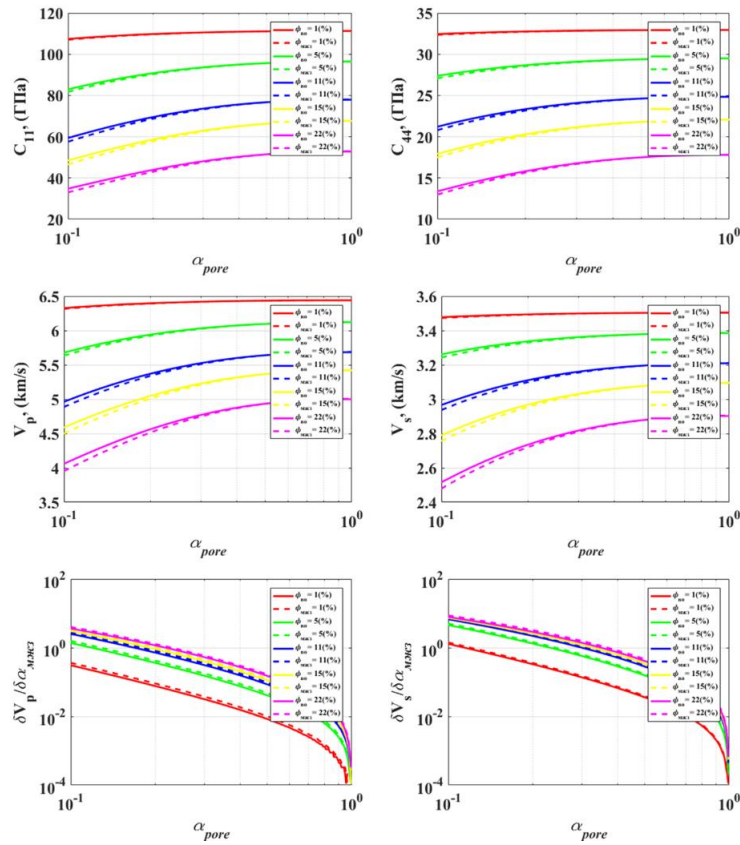


Рис. 2.11. Анализ чувствительности модели II. Зависимость модулей упругости  $c_{11}$  и  $c_{44}$  (а-б) и скоростей упругих волн (в-г) от аспектного отношения пор внутри оолитовых зерна (сплошные линии) и от аспектного отношения межзерновых пор (штриховые линии). Чувствительность скоростей упругих волн к аспектному отношения пор внутри оолитовых зерна (штрихи) и от аспектного отношения межзерновых пор (д-е).

Зависимость скоростей упругих волн модели II от аспектного отношения трещин аналогична таковой, определенной для модели I. Следовательно выводы, сделанные при анализе чувствительности модели, приведенные для **Рис. 2.9**, справедливы и для результатов, представленных на **Рис. 2.12**.

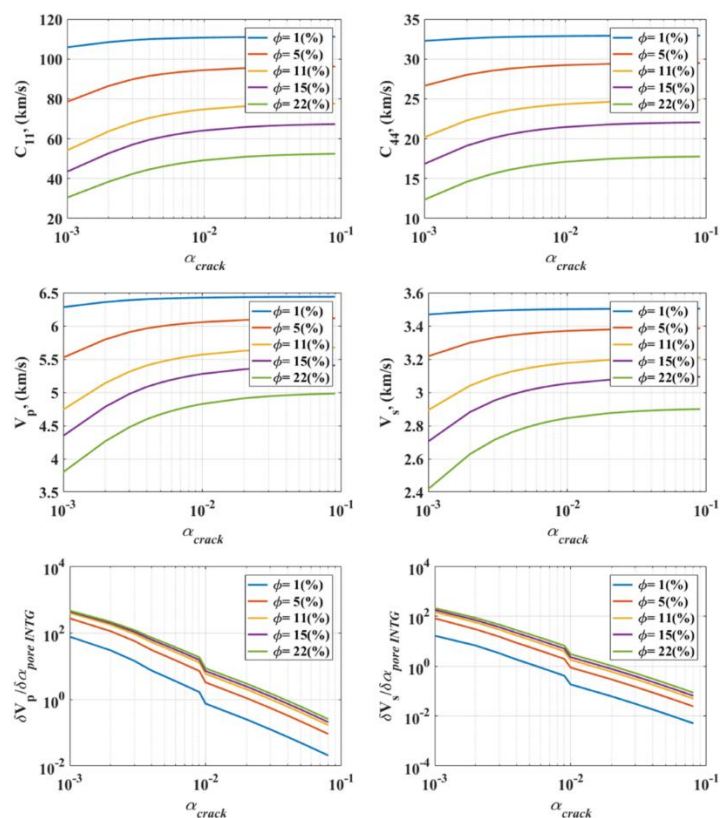


Рис. 2.12. Анализ чувствительности модели II. Зависимость модулей упругости  $c_{11}$  и  $c_{44}$  (а-б) и скоростей упругих волн (в-г) от аспектного отношения трещин. Чувствительность скоростей упругих волн к аспектному отношению трещин (д-е).

Результаты анализа чувствительности модели II к доле трещин во включающей матрице отображены на [Рис. 2.13](#).

Согласно ожиданиям, увеличение доли трещин в матрице снижает модули упругости и, следовательно, скорости упругих волн. Так как при повышении значений коэффициента общей пористости плотность трещин увеличивается, влияние доли трещин на упругие характеристики исследуемой породы увеличивается при высоких значениях коэффициента общей пористости (см. [Рис. 2.13](#) а, б, в и г). Здесь стоит отметить что, в природе трещинная пористость практически не выше 1-2%, и показанные высокие значения трещинной пористости в данной работе служат в качестве модельного примера.

Производные скоростей по трещинной пористости, представленные на **Рис. 2.13** (д-е) показывают, что чувствительность скоростей к изменению доли трещин в поровом пространстве увеличивается с повышением доли трещин при произвольном значении коэффициента общей пористости. Однако, как упомянуто выше, коэффициент общей пористости играет значительную роль в чувствительности скоростей к изменению доли трещин.

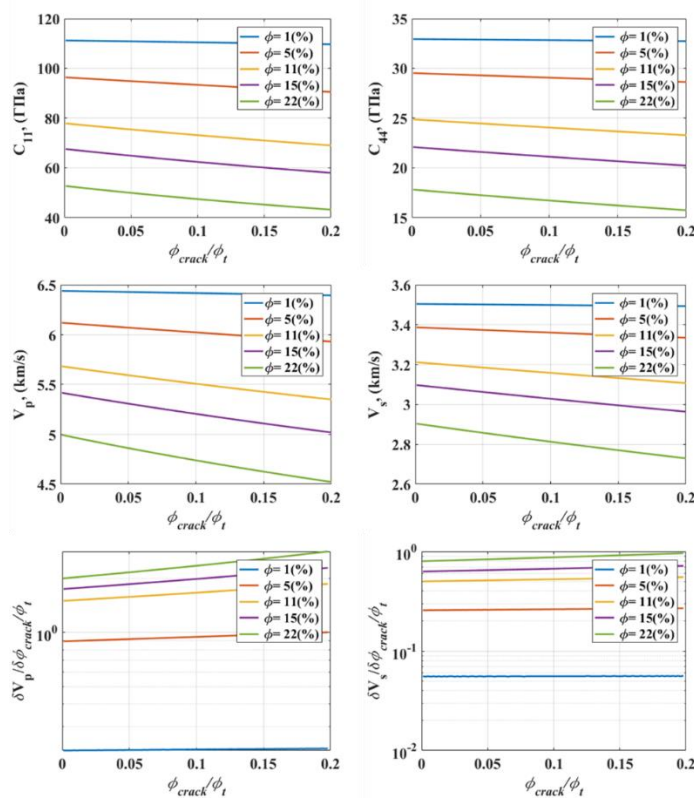


Рис. 2.13. Анализ чувствительности модели II. Зависимость модулей упругости  $c_{11}$  и  $c_{44}$  (а-б) и скоростей упругих волн (в-г) от трещинной пористости. Чувствительность скоростей упругих волн к трещинной пористости (д-е).

Анализ **Рис. 2.14** показывает, что для модели II наблюдается необычное поведение скоростей упругих волн при изменении пористости в оолитовых зернах породы. Общая пористость, объемная доля межкристаллических пор и объемная доля трещин имеют фиксированные значения. Затем межкристаллическая пористость уменьшается с ростом оолитовой



пористости. При низких значениях коэффициента общей пористости ( $<5\%$ ), упругие модули и скорости упругих волн снижаются с ростом оолитовой пористости. Для высокопористой среды ( $K_p > 10\%$ ), упругие модули и скорости упругих волн возрастают до определенного значения доли оолитовой пористости, после чего снижаются.

С увеличением доли оолитовой пористости (при фиксированном значении коэффициента общей пористости) межкристаллическая трещинная пористость уменьшается, что приводит к увеличению модулей упругости и скорости упругих волн в среде, представленной моделью II (см [Рис. 2.14](#) (д-е)).

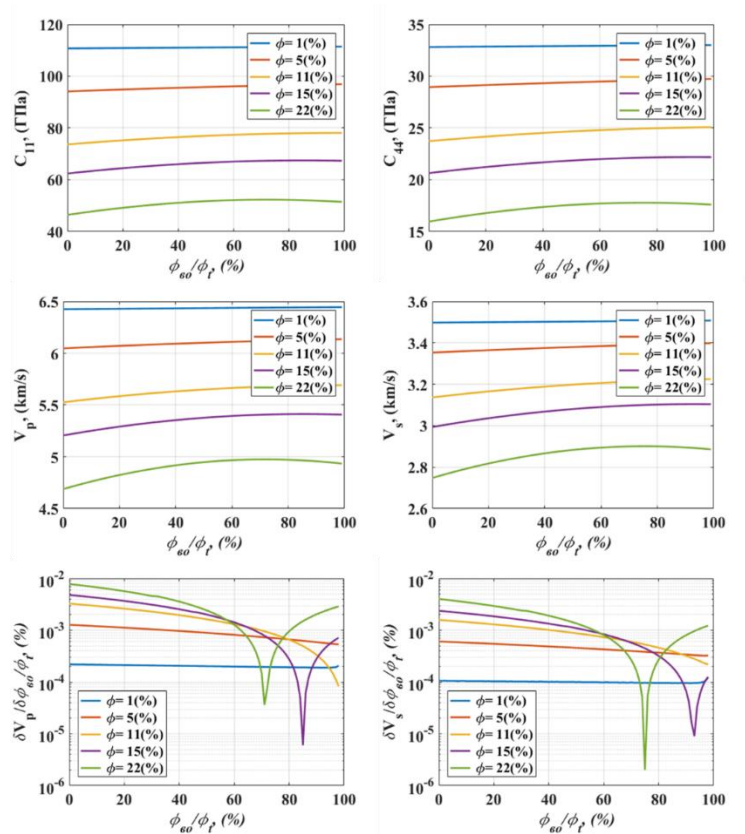


Рис. 2.14. Анализ чувствительности модели II. Зависимость модулей упругости  $c_{11}$  и  $c_{44}$  (а-б) и скоростей упругих волн (в-г) от пористости

оолитовых зерен. Чувствительность скоростей упругих волн к пористости оолитовых зерен (д-е).

Влияние пористости оолитовых зерен на упругие модули и скорости упругих волн в оолитовых известняках рассмотрено в работе [207]. По результатам, представленным авторами упомянутой статьи, увеличение пористости оолитовых зерен приводит к уменьшению жесткости зерен и уменьшению упругих модулей и скоростей упругих волн конечной среды. В петроупругой модели, представленной в указанной работе, трещины отсутствуют. Итак, при увеличении оолитовой пористости происходят следующие изменения:

1. Межкристаллическая трещинная пористость уменьшается;
2. Жесткость оолитовых зерен уменьшается.

Вышеуказанные параметры по-разному влияют на поведение эффективных упругих свойств петроупругой модели II.

При низком значении коэффициента общей пористости ( $<5\%$ ), межкристаллическая трещинная пористость не превышает значения  $0.05\%$ , которое приводит к тому, что влияние уменьшения жесткости оолитовых зерен становится доминирующим и более заметным. Для высокопористой среды влияние уменьшения трещиноватости доминирует в том случае, когда значение трещинной пористости не меньше  $0.025\%$ , а значение оолитовой пористости не больше  $12.6\%$  при  $K_p=15\%$ . Значение трещинной пористости и соответствующее значение оолитовой пористости, при которых снижающий упругие модули эффект увеличения оолитовой пористости подавляет увеличивающий их эффект уменьшения межкристаллической трещинной пористости, равны  $0.073\%$  и  $15.4\%$ .

## 2.5 Выводы:

Проанализированы результаты экспериментального изучения образцов шести различных пород - пяти карбонатных пород и одной терригенной породы с большим (до 40 %) содержанием карбонатного цемента. Экспериментальные работы с образцами пород включали в себя: исследование микроструктуры пород с помощью растрового и электронного микроскопов, измерения фильтрационно-ёмкостных свойств, определение минерального состава и многоуровневое ультразвуковое просвечивание. На основе результатов проведенного анализа с использованием метода обобщенного сингулярного приближения теории эффективных сред (Rock Physics) предложены две петроупругие модели пород в масштабе керна; модель I (или модель двойной пористости) и модель II (для оолитовых образцов). Методика измерения скоростей упругих волн на стандартном представительном образце породы, позволила оценить степень неоднородности породы в масштабе образца и классифицировать породу как изотропную с наличием отдельных неоднородностей. С целью исследования влияний параметров моделей на конечные результаты (теоретическая оценка скоростей упругих волн) проводился анализ чувствительности моделей к их параметрам. На основе результатов анализа чувствительности модели I можно сделать вывод, что увеличение коэффициента связности порового пространства ( $f$ -значения) приводит к уменьшению упругих модулей и, следовательно, скоростей упругих волн. Чувствительность скоростей упругих волн к изменению коэффициента связности усиливается, когда значение коэффициента связности составляет более 0,9. Значение коэффициента связности, при превышении которого чувствительность скоростей упругих волн к изменению коэффициента связности порового пространства резко увеличивается, является функцией значения трещинной пористости. Увеличение трещинной пористости усиливает влияние гидравлической связности порового пространства на упругие модули среды. Трещинная пористость также

оказывает понижающий эффект на скорости упругих волн. Интенсивность воздействия трещинной пористости на упругие модули выше, когда значение трещинной пористости невелико. Значения скоростей упругих волн пропорциональны аспектному отношению трещин. Чувствительность скоростей упругих волн к изменению аспектного отношения трещин увеличивается с увеличением аспектного отношения. Для пор чувствительность скоростей упругих волн к изменению аспектного отношения больше при низких значениях аспектного отношения пор и уменьшается при увеличении сферичности пор.

На основе результатов анализа чувствительности модели II можно заключить, что характер влияния коэффициента связности, трещинной пористости и аспектного отношения пор и трещин на упругие свойства аналогичен таковому, полученному для первой модели. Результаты, полученные для модели II, также показывают, что при фиксированной общей пористости перераспределение пористости между минеральной матрицей и оолитами может приводить к значительному изменению скоростей упругих волн.

### **Глава 3. АНАЛИЗ ДАННЫХ ВСЕСТОРОННИХ ИСПЫТАНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИЧЕСКОГО МОДУЛЯ ЮНГА И ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕЩИНОВАТОСТИ ИССЛЕДУЕМЫХ ОБРАЗЦОВ**

#### **3.1. ВВЕДЕНИЕ:**

Напряженно-деформационные механизмы чрезвычайно разнообразны в земной коре. Некоторые из этих процессов можно имитировать с помощью сложных геомеханических симуляторов или в лаборатории путем тестирования образцов горных пород, выбуренных с нужной глубины. Петрофизические анализы проводятся для калибровки геомеханических моделей или описания механизмов деформаций, наблюдаемых при приведении экспериментов [76]; [75]; [92]. При недостатке петрофизических данных знание деформационных механизмов может предоставить нам ценную информацию о петрофизических характеристиках исследуемого образца, способствуя таким образом решению обратной задачи об определении микроструктурных параметров породы.

Процесс деформации горных пород обычно можно разделить на 4 этапа на основе измерений осевого напряжения и деформации при лабораторных одноосных и всесторонних испытаниях на сжатие [85] [23] [119] [46]:

(1) этап нелинейного изменения размера (деформации) образца с постепенным стремлением к соответствию линейной деформации с увеличением нагрузки,

(2) этап линейного изменения размера (деформации) образца с увеличением нагрузки,

(3) второй этап нелинейного изменения размера (деформации) образца, наступающий постепенно из линейного режима деформации, при котором образец может или не может достигать пикового осевого напряжения,

(4) этап деформационного уплотнения и разуплотнения образца.

Эти стадии соответствуют: (1) закрытию трещин [182], (2) квазиупругой деформации, (3) инициированию пластической деформации, которая может

включать в себя появление микротрещин, кристаллическую пластичность или и то, и другое, и (4) разрушение и этап после разрушения. Вышеуказанные этапы отображены на **Рис. 3.1**.

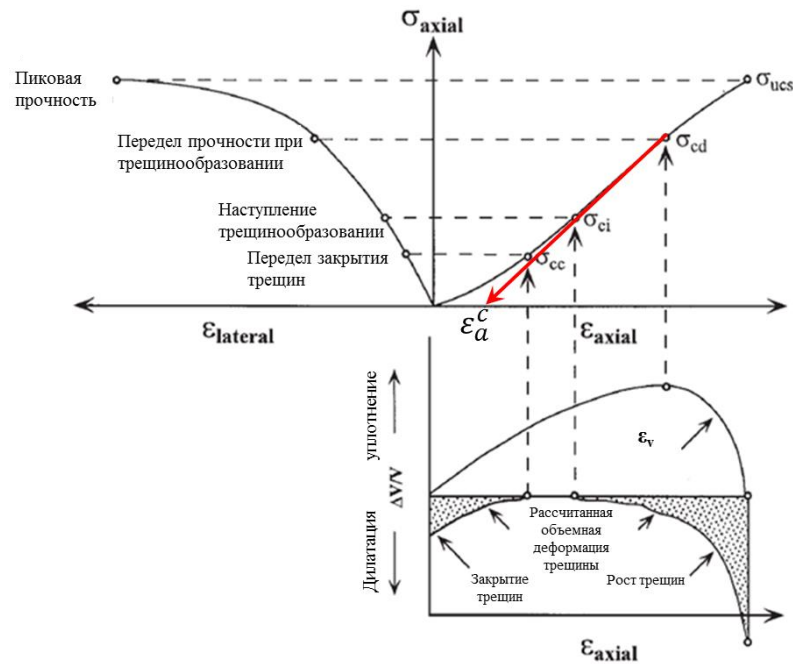


Рис. 3.1. Этапы деформации пористых материалов [124]. Красная линия начинается с точки наступления нелинейного поведения до деформации трещин, вектор нормали к поверхности которых параллелен вертикальной оси.

Согласно накопленному мировому опыту экспериментальных исследований, наблюдаются три основных режима разрушения (после 2-го этапа, на основе вышеуказанных этапов деформации) образцов горных пород, с произвольным литологическим составом: 1) индуцированная сдвиговым напряжением дилатация, 2) компакция при усилении сдвигового напряжения и 3) переходное состояние от компакций к дилатации.

С момента наступления дилатации индуцированной сдвиговым напряжением, концентрации локального сдвигового напряжения достаточно велики, чтобы заставить зерна перемещаться относительно друг друга путем вращения и скольжения [130]. Увеличение сдвигового напряжения в карбонатных породах или песчаниках с карбонатным цементом приводит к

процессам кристаллической пластичности, таких как дислокация<sup>1</sup> и двойникование<sup>2</sup> (twinning), которые способствуют образованию микротрещин на периферии пор или внутри зерен (Hertzian fractures) [10, 173, 174]. Такие относительные перемещения приводят к общему увеличению объема (уменьшение объемной деформации). Кроме упомянутых механизмов, увеличение сдвигового напряжения может привести к образованию так называемых крыловидных трещин (sliding wing cracks) [5]. На основе этой теории, трещины образуются, когда на концах, ранее существующих трещины, закрывшиеся при нагрузке образца, напряжения растяжения превышает предел прочности на растяжения пород. Механика разрушения такова, что увеличение напряжения приводит к тому, что крылообразные трещины распространяются вдоль изогнутой траектории и в конечном итоге достигает устойчивой ориентации, параллельной направлению максимального напряжения ( $\sigma_1$ ) [10]. Образование этих трещин также приводит к увеличению объема порового пространства и следовательно уменьшению объемной деформации.

Сдавливание зерен является доминирующим механизмом образования интрагранулярных микротрещин при компакции песчаников. Исходя из этого, среднее напряжение, при котором начинается компакция, называется давлением дробления зерен. Величина этого давления обратно пропорциональна размерам зерен и пористости [130] [189] [4] [172]. Высокая

---

<sup>1</sup> Дислокации в кристаллах представляют собой области, в которых атомы находятся вне положения кристаллической структуры. Дислокации генерируются и перемещаются при приложении напряжения. Движение дислокаций позволяет совершить пластическую сдвиговую деформацию.

<sup>2</sup> В двойниковании каждый атом движется только на небольшое расстояние относительно своего соседнего атома, но четко определенным образом. Деформации при двойниковании описывается плоскостью двойникования и направлением двойникования. Атомы движутся в направлении двойникования путем смещения, генерируя сдвиговую деформацию. Структура двойника является зеркальным отображением родительской структуры относительно плоскости двойникования.

пористость в песчаниках и карбонатах связана со слабой цементацией, что, в свою очередь, приводит к увеличению контактов между зернами или кристаллами (Hertzian contacts) и уменьшению напряжения на этих контактных точках [68].

Образование микротрещин при компакциии наблюдалось в оолитовых известняках в работе [174]. Причиной такого эффекта в карбонатных материалах является присутствие кальцита [10]. Кальцит требует относительно низкого сдвигового напряжения для инициирования механического двойникования и дислокации даже при комнатной температуре [93] [157] [29] [35].

Поскольку в данной работе не рассматривается компакция, мы не представляем ее детальные механизмы в песчаниках и карбонатных горных породах. Однако, соответствующим исследованиям посвящены следующие работы: [130], [10, 11, 171, 173, 174, 190].

Пористость и эффективное всестороннее напряжение являются важнейшими факторами, контролирующими режимы разрушения. Влияние пористости и обжимного давления на режим деформации и разрушения песчаников исследовалось в работах Wong T.-f., David C. [189] (шесть образцов песчаника с пористостью от 15% до 35% при обжимных давлениях 5, 20, 40, 60, 100 и 150 МПа), Menéndez B., Zhu W. [130] (3 образца песчаника Берия с пористостью 21% при обжимных давлениях 20, 50 и 260 МПа), Wu X. Y., Baud P. [190] (2 образца песчаника Дарли Дейл с пористостью 21% при обжимных давлениях 20, и 210 МПа), Baud P., Vajdova V. [11] (4 образца песчаника с 13-22% пористостью при обжимных давлениях 80-300 МПа), Tembe S., Baud P. [171] (5 образцов песчаника с пористостью от 20-25% при обжимных давлениях 10-165 МПа). Аналогичные исследования на карбонатных образцах представлены в работах Fredrich J. T., Evans B. et al. [59] (мраморы с низкой пористостью при обжимных давлениях 5 - 450 МПа) Baud P., Schubnel A. [10] (известняк с пористостью 3% при обжимных давлениях 50-435 МПа), Vajdova V., Baud P. [173] (известняк Индиана с пористостью 14.6



до 16.2% при обжимных давлениях 10-240 МПа) [Vajdova V., Zhu W. et al. \[175\]](#) (известняк Тавел с пористостью 13.5% при обжимных давлениях 0, 30, 150, 240 МПа), [Vajdova V., Baud P. \[174\]](#) (два оолитового известняка с пористостью 17.9 и 30% при обжимных давлениях 0, 5, 20, 25, 45, 175 МПа).

На основе этих экспериментальных исследований авторы делают вывод, что осевое напряжение, при котором наступает дилатация или компакция, прямо пропорционально всестороннему давлению и значению коэффициента общей пористости.

Механическое поведение горных пород может сильно измениться за счет присутствия жидкости в порах за счет герметизации и смазки [78]; [147], уменьшения поверхности и, следовательно, уменьшения энергии трещинообразования [112], растрескивания [6] и усиления диффузионных процессов, таких как растворение под давлением [113]; [197]; [198].

В пластовых условиях основными механизмами, способствующими деформации, являются механическое двойникование и растворение минералов под давлением. Изменения в поведении пород при разных температурах могут быть связаны с взаимодействием растворимости минералов, скорости растворения и продолжительности напряженно-деформационных процессов [118]. Авторы этой работы также наблюдали, что компакция усиливается с увеличением температуры. При пластовых условиях (высокое давление и температура) растворение минералов под давлением является доминирующим механизмом компакции за счет усиления удаления минералов из точек их соприкосновения и их трансформации в поры и трещины. Высокая химическая активность поровой жидкости усиливает механическое двойникование, что препятствует образованию микротрещин. Следовательно, для жидкостей, химически уравновешенных с вмещающей матрицей, изменения объема порового пространства обусловлены пластичностью кристалла [118].

В этой главе мы анализируем экспериментальные данные, полученные на карбонатных образцах, для оценки модуля Юнга и исследования эволюции микроструктуры при всестороннем сжатии. Экспериментальные данные также

использовались для оценки трещинной пористости и морфологических характеристик пород, которые являются чрезвычайно важными параметрами при решении обратных задач геофизики, в частности, инверсии сейсмических данных в терминах микроструктурных параметров, характеризующих фильтрационно-ёмкостные свойства пород.

Все эксперименты проводились при комнатной температуре на сухих образцах. Микроструктурные анализы после деформации образцов не проводились. Упомянутые недостатки не позволяет автору этой диссертационной работы провести исследования эволюции микроструктурных параметров в процессе всесторонних испытаний при разных этапах деформаций, идентификации давления перехода от дилатации в компакцию, давления образования зоны уплотнения и также влияние температуры, петрофизических свойств, флюдонасыщения и химические свойства насыщающего флюида на упомянутые процессы.

### 3.2. ПРОВЕДЕНИЕ СЕРИИ ИСПЫТАНИЙ ПРИ ВЫБРАННЫХ РЕЖИМАХ НАГРУЖЕНИЯ.

Были проведены испытания нескольких серий образцов горных пород в условиях трехосной деформации. В качестве основного режима испытания применялся режим с постоянной скоростью деформации  $2 \times 10^{-6}$  (1/с). Испытания проводились при различных значениях всестороннего давления. В каждой серии проводилось нагружение образца до 75-80 % от разрушающего значения с последующей плавной его разгрузкой. Кроме этого проводились циклическое нагружение и разгрузка образца при различных уровнях всестороннего давления. Шаг изменения давления составлял 10 МПа. Нагружение проводилось до начала этапа текучести. Начало этого этапа характеризуется повышением интенсивности потока акустической эмиссии и резким радиальным расширением образца. Эти параметры контролировались во время испытания. На последнем уровне всестороннего давления, равном 70 МПа, образец доводился до разрушения. Для некоторых серий образцов проводились циклические испытания при неизменном значении

всестороннего давления. Испытания проводились с целью определения окончания линейной зоны деформации и перехода к пластике. Для этого проводились периодическое нагружение и разгрузка образца. На каждой новой ступени нагружения предельная осевая нагрузка увеличивалась на 500 кг. Эксперимент прекращался, когда образец достигал начала пластического участка. Индикатором этого начала служило расширение петли гистерезиса очередного цикла. На основе первичных данных, полученных в результате серии экспериментов на прессе INOVA (ГО «Борок», ИФЗ РАН), были рассчитаны кривые осевого напряжения, осевой, радиальной и объемной деформаций.

Объемная деформации отражает изменение микроструктуры, связанное с деформацией пор и трещин во время нагружения. Поэтому по объемной деформации можно судить об изменении объема пустотного пространства после проведения эксперимента.

Используя кривые «напряжение - осевая деформация» для исследуемых пород, получены статические модуля Юнга пород в направлении, перпендикулярном напластованию. В силу того, что кривая напряжение-деформация не линейна, рассчитывались касательный  $E_{кас}$  и секущий модули прочности  $E_{сек}$  в зависимости от напряжения. В качестве «референтного значения» (наиболее устойчивая и воспроизводимая с точки зрения статистического анализа величина, характеризующая данную породу) было выбрано значение касательного модуля  $E_{tan50\%}$ , соответствующее 50 % пиковому напряжению.

### 3.3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ:

#### 3.3.1. ОБРАЗЕЦ С1-1:

Проводилось циклическое нагружение и разгрузка сухого образца С1-1 при различных всесторонних давлениях.  $P_c = 10\text{МПа}, 20\text{Мпа}, 30\text{Мпа}, 40\text{МПа}, 50\text{Мпа}, 60\text{МПа}$  и  $70\text{МПа}$ . Разгрузка проводилась до уровня осевой нагрузки

500 кг, затем всестороннее давление поднималось до следующего уровня. Нагружение проводилось примерно до 70% от разрушающего, до момента начала загиба графика осевой нагрузки. Последняя ступень при  $P_c = 70$  МПа была без разгрузки – до стадии пластичности. Значение коэффициента общей пористости для этого образца составляет 7.6 %.

**Рис. 3.2** показывает изменения значений скоростей продольных волн, определенных в трех ортогональных направлениях  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  ( $x_1$  и  $x_2$  располагаются в горизонтальной плоскости и  $x_3$  является вертикальной осью. Ось образца совпадает с направлением  $x_3$ ) с изменением среднего напряжения  $\sigma_{mean} = (\sigma_a + 2\sigma_r)/3$ , где,  $\sigma_a$  и  $\sigma_r$  это осевое и радиальное напряжение, соответственно). При обжимном давлении, равном 11 МПа (первый цикл испытания), значение скорости продольных волн вдоль образца увеличивается при увеличении осевого напряжения на 1.54% относительно среднего значения скоростей продольных волн, измеренного в атмосферных условиях. Однако значения скоростей в горизонтальной плоскости заметно не меняются. Различие в значениях скоростей упругих волн, измеренных в разных направлениях, показывает анизотропию, индуцированную напряжённым состоянием. Подобное поведение пород под действием напряжённого состояния наблюдалось в работе [56, 57, 91], Nur A. [144], [163]].

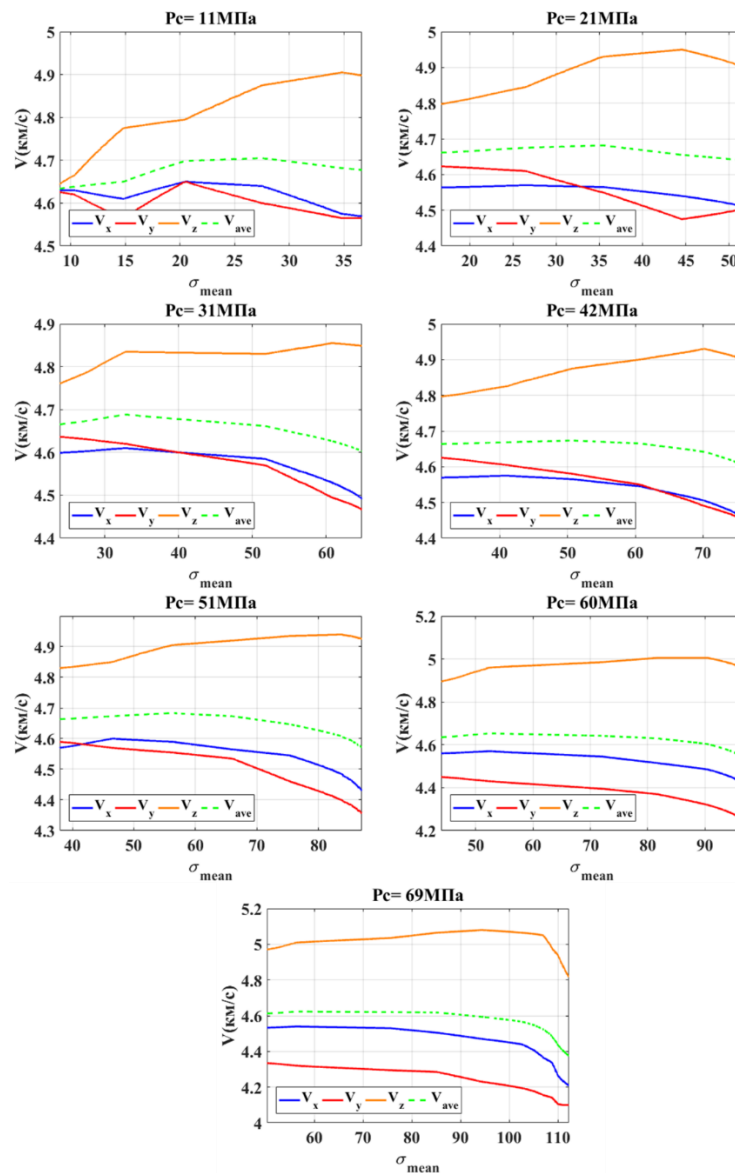


Рис. 3.2. Значения скоростей продольных волн измеренные по направлению оси z (желтая линия), оси x (синяя линия) и ось y (красная линия). Зеленая линия представляет среднее значение скоростей по трем ортогональным направлениям для образца С1-1 в разных циклах. Вертикальная ось образца расположена вдоль оси z.

**Рис. 3.3** отображает изменения объемной деформации с изменением среднего напряжения в разных циклах эксперимента. Согласно вышеупомянутым литературным источникам, при увеличении осевого напряжения объемная деформация увеличивается, что свидетельствует, в основном, о сжатии порового пространства. На этом этапе все трещины

закрываются. С увеличением сдвигового напряжения объем порового пространства начинает увеличиваться по одной или множествам причин, упомянутых ранее. Следовательно, график объемной деформации и среднего напряжения изгибается. Давление, при котором начинается изгиб графика показывает давление дилатации порового пространства. В данной работе чтобы учесть ошибки датчиков измерения деформации, давление дилатации берется как 95% от точки изгиба. Прямые штрихи показывают среднее напряжение и объемную деформацию, при котором проявляются микротрещины в текстуре породы (дилатация порового пространства). Заметная дилатация происходит лишь после пятого этапа, когда среднее напряжения достигает 80 МПа.

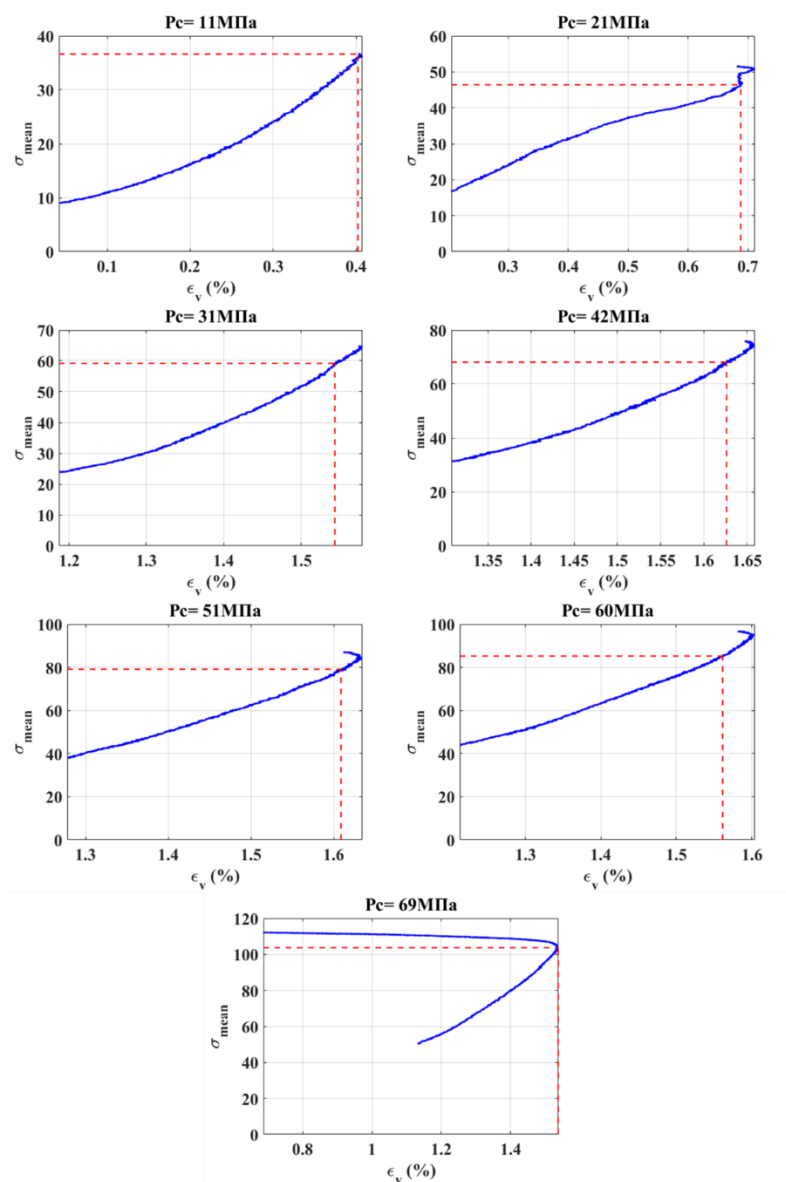


Рис. 3.3. Изменение объемной деформации относительно среднего напряжения в разных циклах испытания для образца С1-1. Штрихи представляют напряженно-деформационное состояние, при котором поровое пространство образца расширяется (наступление дилатации).

**Рис. 3.4** представляет график «осевого напряжения-осевой деформации» для данного образца в разных циклах эксперимента (при разных обжимных давлениях). Синяя линия показывает изменение осевой деформации относительно увеличения осевого напряжения при определенном обжимном давлении, в то время, как желтая линия отражает наклон этого графика (это

тангенциальный модуль Юнга). Прямой наклон демонстрирует, что порода находится в состоянии линейной упругости, а отклонения от линейного поведения означает неупругое состояние исследуемой породы. Теоретически в начале эксперимента наклон увеличивается с увеличением осевого (при негидростатической нагрузке) или среднего (при гидростатической нагрузке) напряжения до момента, когда трещины и микротрещины закрываются, и поведение породы переходит в зону линейной упругости (см. **Рис. 3.1**), где значения наклона не меняются (константа). Красные штрихи показывают осевое напряжение и осевую деформацию, при которых наступает дилатация. Черные штрихи, показывают осевые напряжение и деформацию при которых поведение породы выходит из зоны линейной упругости. На этом графике также показаны синие штрихи и красные шарики которые отображают метод оценки пористости трещиноватости исследуемого образца. Далее будем обсуждать данную методику более подробно. Как показано на рисунке, в первом цикле нагрузка не доводится до стадии дилатации, и она наблюдается незаметно лишь со второго цикла. После первого цикла в начале испытания наблюдается нестандартное уменьшение скорости деформации. Возможными причинами которого, являются неправильная установка образца или неисправность датчиков измерения деформации. Полагаем, что стадия нелинейного поведения породы наступает в начале уменьшения наклона графика зависимости осевого напряжения от осевой деформации (см. **Рис. 3.4**).



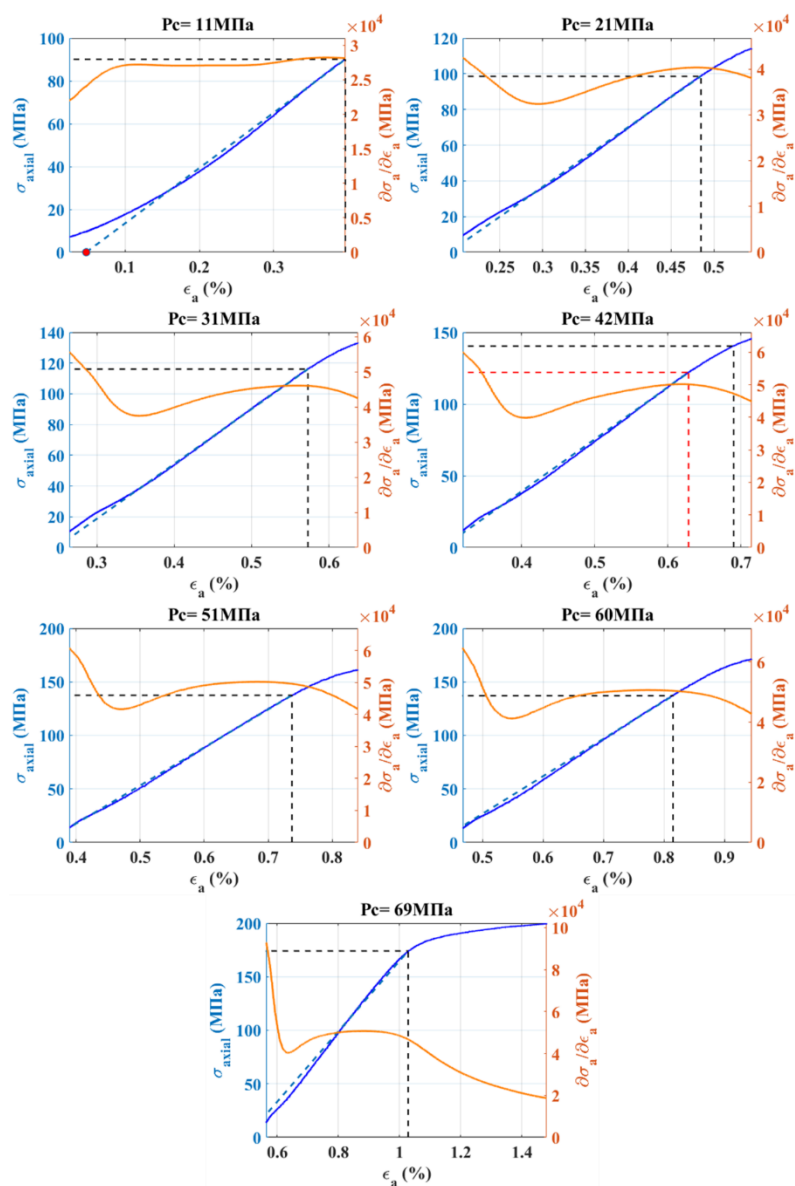


Рис. 3.4. Зависимость осевого напряжения от осевой деформации в разных циклах испытания для образца С1-1. Красный и черный штрихи представляют начало дилатации и нелинейного поведения породы соответственно.

Для каждого цикла с повышением обжимного давления величина модуля упругости и среднее значение скоростей продольных волн увеличиваются с повышением осевого напряжения до наступления дилатации, после чего снижаются.

Величина статического модуля Юнга при односторонней нагрузке вычисляется путем построения корреляционной зависимости статических величин модуля Юнга в зависимости от соответствующих значений

обжимного давления и потом экстраполяции в нулевое обжимное давление.

**Рис. 3.5** показывает, что статический модуль Юнга образца С1-1 примерно равняется 25 ГПа при односторонней нагрузке ( $P_c = 0$ ).

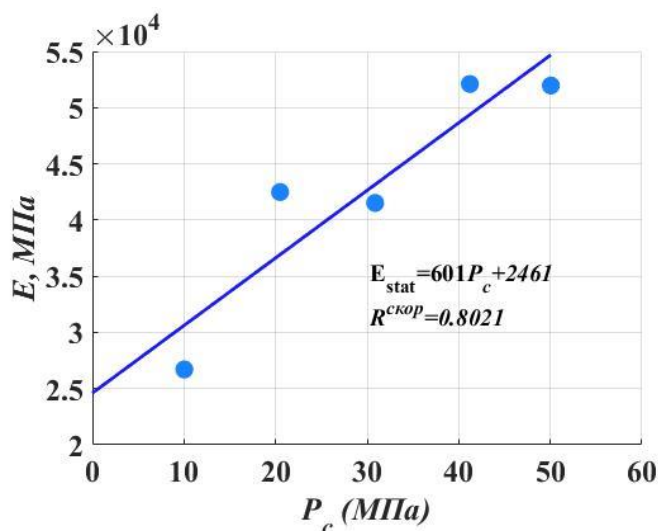


Рис. 3.5. Экстраполяция значений статических модулей упругости в зависимости от всестороннего давления.  $R^{\text{корр}}$ , скорректированный коэффициент детерминации (см. Глава 4).

### 3.3.2. ОБРАЗЕЦ С1-2:

Проводилось одностадийное трехосное испытание на сухом образце С1-2. Образец доводился до стадии текучести при обжимном напряжении, равном 30 МПа. Значение коэффициента общей пористости для данного образца составляет 6.1 %.

Анизотропия, вызванная напряженным состоянием, наблюдается и для этого образца. Исходя из **Рис. 3.6** (а) можно заключить, что с повышением осевого напряжения, среднее значение скоростей продольных волн, измеренных в трех ортогональных измерениях (зеленый штрих), увеличивается на 14% относительно среднего значения скоростей продольных волн, измеренных в атмосферных условиях, после чего снижается. На основе графика зависимости значения среднего напряжения от объемной деформации (**Рис. 3.6** (б)) можно сделать вывод, что дилатация

порового пространства происходит, когда значения среднего и осевого напряжений превышает 55 МПа и 105 МПа. Сравнивая Рис. 3.6 (а) и Рис. 3.6 (б), можно заметить, что с наступлением дилатации среднее значение скоростей упругих волн уменьшается с повышением осевого напряжения, что свидетельствует о чувствительности упругих волн к проявлению новообразованных трещин с незначительной объемной долей. Исходя из Рис. 3.6 (с), стадия нелинейного поведения исследуемого образца наступает, когда среднее и осевое напряжение достигают 65 и 135 МПа соответственно, при данном значении обжимного давления.

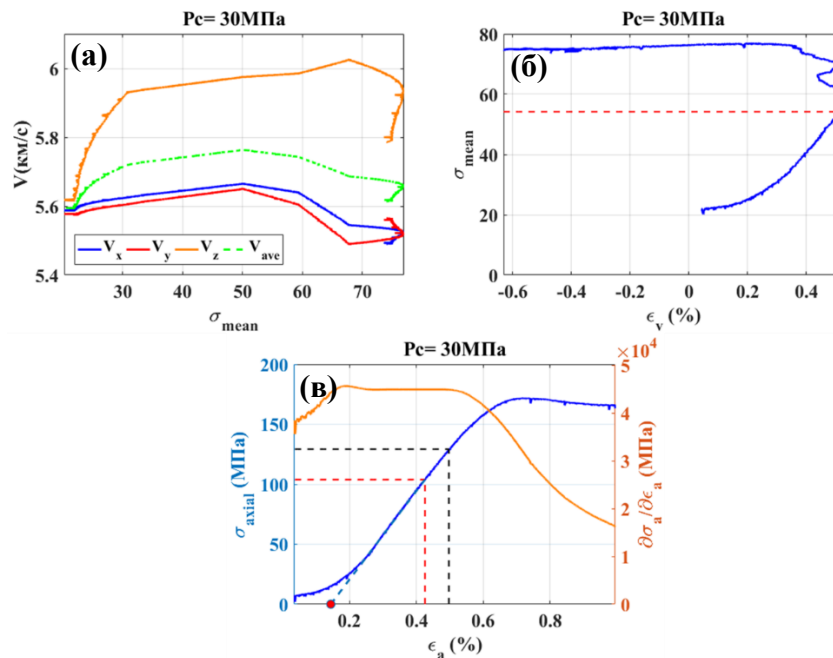


Рис. 3.6. Результаты одностадийного испытания образца С1-2 (а) Значения скоростей продольных волн, измеренные по направлению оси z (желтая линия), оси x (синяя линия) и ось y (красная линия). Зеленая линия представляет среднее значение скоростей по трем ортогональным направлениям. (б) Изменение объемной деформации относительно среднего напряжения. (в) Зависимость осевого напряжения от осевой деформации (синяя линия).

### 3.3.3. ОБРАЗЕЦ С2-2:

Проводился одностадийный эксперимент на сухом образце со значением коэффициента общей пористости равном 3.1%. Образец доводился до стадии после текучести (полной локализации зон разрушения при сдвиге) при обжимном напряжении равном 30 МПа.

**Рис. 3.7** (а) представляет значения скоростей продольных волн, измеренных в трех разных направлениях. Значения скоростей, измеренных в трех ортогональных измерениях, схожие и увеличиваются при увеличении среднего и осевого напряжений до 66 МПа и 139 МПа соответственно, после чего уменьшаются. Анизотропия, вызванная напряженным состоянием, незначительная. Как сказано выше по представленным результатам изменений объемной деформации относительно среднего напряжения можно определить среднее напряжение, при котором трещины проявляются в поровом пространстве. Исходя из **Рис. 3.7** (б), для данного образца дилатация происходит при среднем напряжении равном 80 МПа, которое соответствует значению осевого напряжения равному 180 МПа. График «осевого напряжения-осевой деформации» (**Рис. 3.7** (в)) показывает, что стадии нелинейного поведения исследуемого образца совпадает с наступлением стадии дилатации.

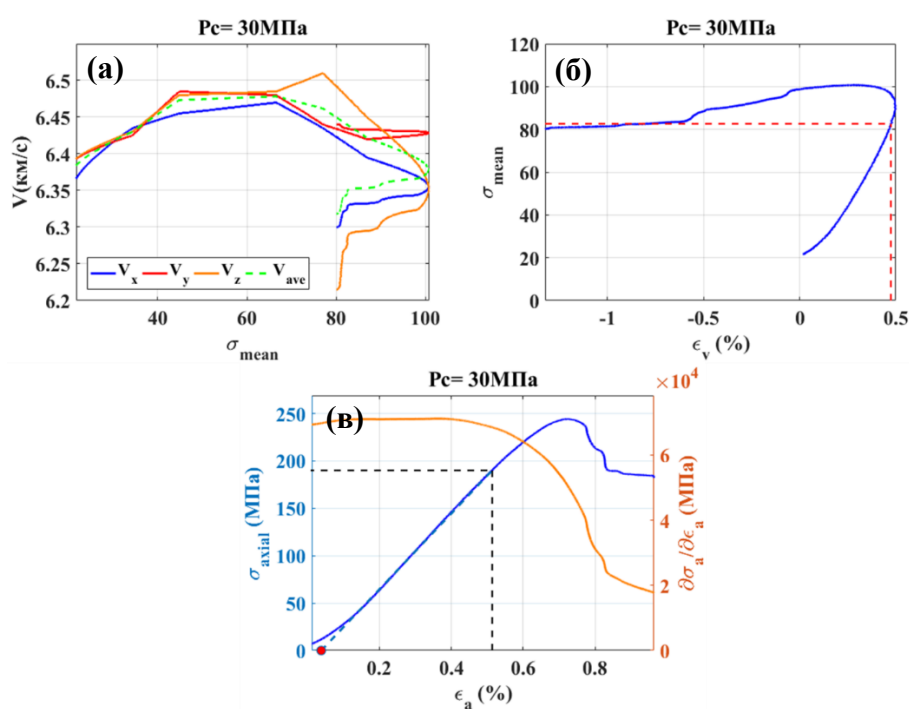


Рис. 3.7. Результаты одностадийного испытания образца С2-2 (а) Значения скоростей продольных волн, измеренные по направлению оси z (желтая линия), оси x (синяя линия) и ось y (красная линия). Зеленая линия представляет среднее значение скоростей по трем ортогональным направлениям. (б) Изменение объемной деформации относительно среднего напряжения. (в) Зависимость осевого напряжения от осевой деформации.

#### 3.3.4. ОБРАЗЕЦ С3-2:

Проводилось одностадийное трехосное испытание на сухом образце С3-2. Значение коэффициента общей пористости для данного образца равняется 2.9 %, которое было измерено в лабораторных условиях. Образец доводился до стадии после текучести (полной локализации зон разрушения при сдвиге) при обжимном напряжении равном 30 МПа.

Исходя из **Рис. 3.8** (а) можно заключить, что значения скорости продольных волн, измеренные в трех ортогональных измерениях, меняются при увеличении осевого напряжения весьма незначительно. Усредненное значение скоростей продольных волн по трем ортогональным направлениям увеличивается на 4% относительно усреднённого значения скорости продольных волн, измеренного в лабораторных условиях. Исходя из **Рис. 3.8** (б), можно сделать вывод, что дилатация происходит, когда усреднённое напряжение достигает 89 МПа, которое соответствует значению осевого напряжения равному 181 МПа. При повышении осевого напряжения до начала дилатации, изменение значения объемной деформации исследуемого образца составляет 0.6%. Нелинейное поведение для исследуемого образца начинается при дилатации порового пространства (см. **Рис. 3.8** (в)).

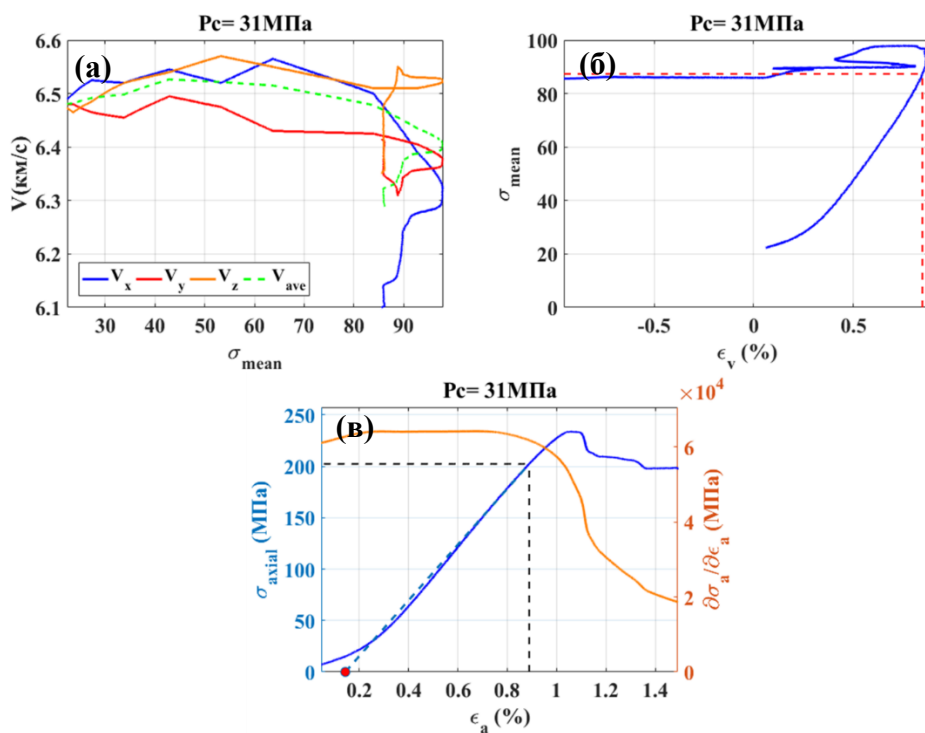


Рис. 3.8. Результаты одностадийного испытания образца С3-2 (а) Значения скоростей продольных волн, измеренные по направлению оси z (желтая линия), оси x (синяя линия) и ось y (красная линия). Зеленая линия представляет среднее значение скоростей по трем ортогональным направлениям. (б) Изменение объемной деформации относительно среднего напряжения. (в) Зависимость осевого напряжения от осевой деформации.

### 3.3.5. ОБРАЗЕЦ С4-3:

Проводилось одностадийное трехосное испытание на сухом образце С4-3. Значение коэффициента общей пористости для данного образца равняется 2.7 %, которое было измерено при атмосферных условиях. Образец доводился до стадии текучести при обжимном напряжении равном 10 МПа.

Исходя из анализа **Рис. 3.9** (а), можно сделать вывод, что изменение значений скоростей продольных волн, измеренных в трех ортогональных измерениях, показывает явную анизотропию (орторомбическую систему анизотропии), вызванную напряженным состоянием. Различие значений скоростей и среднее значение скоростей увеличиваются при нагрузке образца, которое свидетельствует об увеличении степени анизотропии с повышением

среднего напряжения. Среднее значение скоростей повышается на 8% относительно среднего значения скоростей продольных волн, измеренных при атмосферных условиях с повышением среднего и осевого напряжений до 42 МПа и 109 МПа соответственно. Исходя из Рис. 3.9 (б), можно заключить, что объем порового пространства исследуемого образца увеличивается при среднем напряжении равном 70 МПа, которое соответствует значению осевого напряжения равном 190 МПа (начало стадии дилатации). Объемная деформация при наступлении дилатации составляет 0.7%. Как отображено на Рис. 3.9 3.9 (в), переход поведения породы в стадию нелинейности, происходит с наступлением дилатации.

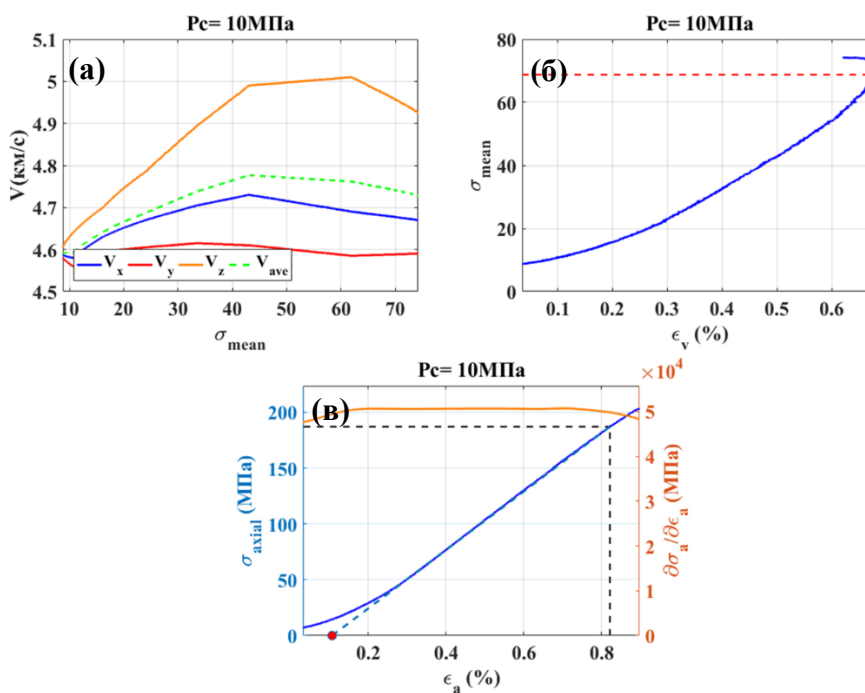


Рис. 3.9. Результаты одностадийного испытания образца С4-3 (а) Значения скоростей продольных волн, измеренные по направлению оси z (желтая линия), оси x (синяя линия) и ось y (красная линия). Зеленая линия представляет среднее значение скоростей по трем ортогональным направлениям. (б) Изменение объемной деформации относительно среднего напряжения. (в) Зависимость осевого напряжения от осевой деформации.

### 3.3.6. ОБРАЗЕЦ С5-3:

Для сухого образца со значением коэффициента общей пористости 14%, измеренным в лабораторных условиях, проводился одностадийный эксперимент при обжимном давлении равном 30 МПа. Образец доводился до 70 % от предела разрушения, затем был разгружен.

Как показано на **Рис. 3.10** (а), значения скоростей продольных волн, измеренные по вертикальной оси ( $x_3$ ), увеличиваются при повышении осевого напряжения незначительно до определенного значения, после чего снижаются. Однако, значения скоростей продольных волн, измеренные в горизонтальной плоскости, остаются постоянными, пока значение среднего напряжения не достигло 33 МПа (осевое напряжение равняется 39 МПа при упомянутой выше величине среднего напряжения). Различие в значениях скоростей увеличивается с повышением осевого напряжения вследствие повышения степени анизотропии, вызванной напряженным состоянием. Дилатация порового пространства наблюдается при значении среднего напряжения равном 53 МПа, которое соответствует значению осевого напряжения, равному 99 МПа (см. **Рис. 3.10** (б)). При нагрузке исследуемого образца до наступления дилатации, коэффициент общей пористости меняется на 0.6% вследствие обжима порового пространства. Нелинейное поведение исследуемого образца наступает при начале дилатации (см. **Рис. 3.10** (в)).



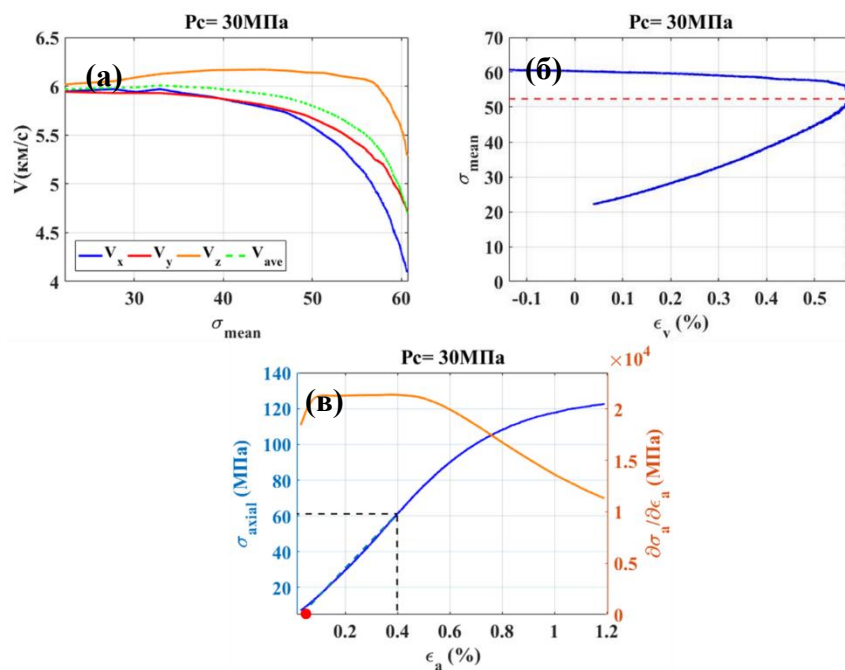


Рис. 3.10. Результаты одностадийного испытания образца С5-3 (а) Значения скоростей продольных волн, измеренные по направлению оси z (желтая линия), оси x (синяя линия) и ось y (красная линия). Зеленая линия представляет среднее значение скоростей по трем ортогональным направлениям. (б) Изменение объемной деформации относительно среднего напряжения. (в) Зависимость осевого напряжения от осевой деформации.

### 3.3.7. ОБРАЗЕЦ С6-2-2:

Проводилось одностадийное испытание на сухом образце со значением коэффициента общей пористости, измеренным в лабораторных условиях, равном 22.7%. Образец довелся до 70 % от разрушения затем разгружается.

Анализ **Рис. 3.11** (а) показывает, что значение скорости продольных волн, измеренное по оси  $x_3$ , увеличивается с повышением осевого напряжения на 60 % относительно среднего значения скоростей продольных волн, измеренных в лабораторных условиях. Значения скоростей продольных волн, измеренных в горизонтальной плоскости, незначительно уменьшаются с повышением осевого напряжения. Значение среднего напряжения, при котором усредненная скорость по трем измеренным скоростям в ортогональных направлениях, достигает своего максимума, составляет 22

МПа, которое соответствует значению осевому напряжению равно 28 МПа при данном всестороннем давлении. Исходя из графика зависимости среднего напряжения от объемной деформации (Рис. 3.11 (б)), можно заключить, что дилатация порового пространства наступает при среднем напряжении равном 40 МПа (соответствующее осевое напряжение составляет 78 МПа). На основе графика зависимости осевого напряжения от осевой деформации (Рис. 3.11 (в)) можно заключить, что наклон графика увеличивается с увеличением осевого напряжения (в отличии от других образцов). Причем, зона линейной упругости не наблюдается до определенного осевого напряжения (80 МПа), после чего наклон уменьшается. Данное поведение свидетельствует о недостатке всестороннего напряжения для закрытия трещин. Синяя штриховая линия в данном рисунке соответственно, не является надёжной оценкой для трещинной пористости.

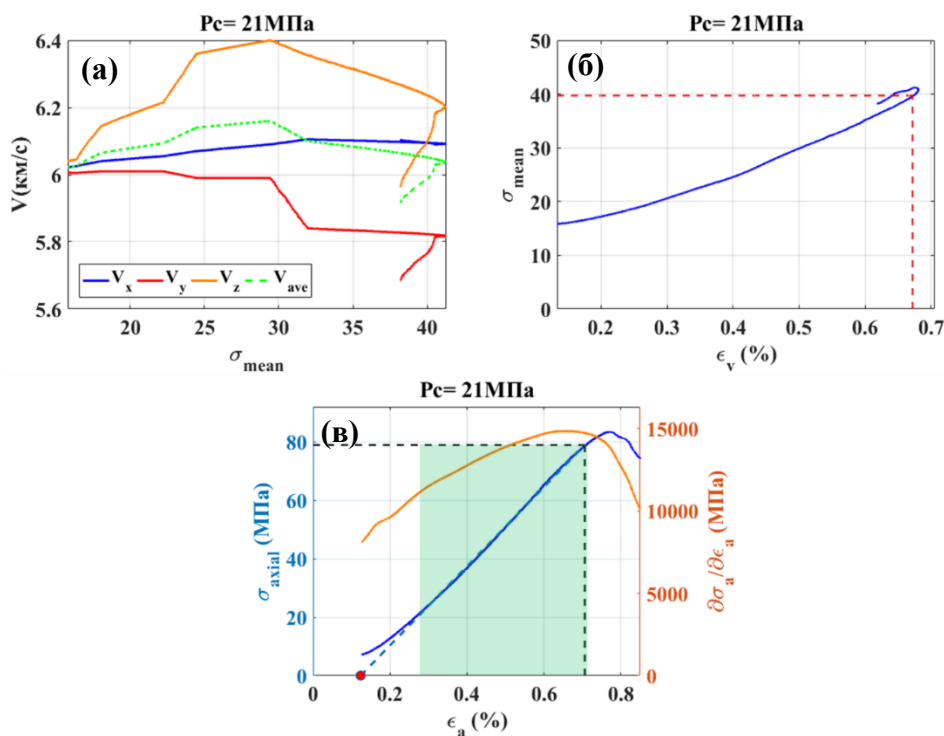


Рис. 3.11. Результаты одностадийного испытания образца С6-2-2 (а) Значения скоростей продольных волн, измеренные вдоль оси z (желтая линия), оси x (синяя линия) и оси y (красная линия). Зеленая линия представляет среднее значение скоростей по трем ортогональным направлениям. (б) Изменение

объемной деформации относительно среднего напряжения. (в) Зависимость осевого напряжения от осевой деформации.

### 3.3.8. ОБРАЗЕЦ С6-2-3:

Проводилось одностадийное испытание на сухом образце со значением коэффициента общей пористости равном 22.1 %. Образец доведён до стадии пластической текучести при всестороннем давлении равном 20 МПа.

График зависимости значений скоростей от среднего напряжения (

**Рис. 3.12 (а))** показывает, что значения скоростей продольных волн, измеренные в трех ортогональных измерениях, различаются и их различие увеличивается при нагрузке с повышением осевого напряжения до определенного значения. Значение скорости продольных волн, измеренное в горизонтальной плоскости по направлению оси  $x_2$ , незначительно увеличивается, затем снижается. По направлению оси  $x_1$  измеренное значение скорости продольных волн имеют тенденцию к понижению при нагрузке. Максимум значений скоростей продольных волн, измеренных вдоль направлений  $x_1$  и  $x_2$ , достигается при значении среднего напряжения равном 29 МПа, которое соответствует значению осевого напряжения равному 45 МПа. Исходя из

**Рис. 3.12 (б)**, нельзя сделать заключение о дилатации порового пространства данного образца. Нестандартные значения объемной деформации получились, по-видимому, за счет неправильной установки образца или неисправности датчиков измерения деформации. Для данного образца, как и для образца С6-2-2 из-за недостатка величины всестороннего давления, не наблюдается зона линейной упругости. Следовательно, трудно определить точку начала нелинейной упругости.

Для образцов С6-2-2 и С6-2-3, полагалось, что статический модуль Юнга является средней величиной по наклонам, рассчитанным из точки, где значения наклона начинают увеличиваться до точки, где значения наклона начинают уменьшаться (зеленая зона на

Рис. 3.12 (в) и

Рис. 3.12 (в)). Результаты оценки статических модулей упругости – модуля Юнга исследованных пород представлены в **пряжения от осевой деформации**.

Табл. 3.1.

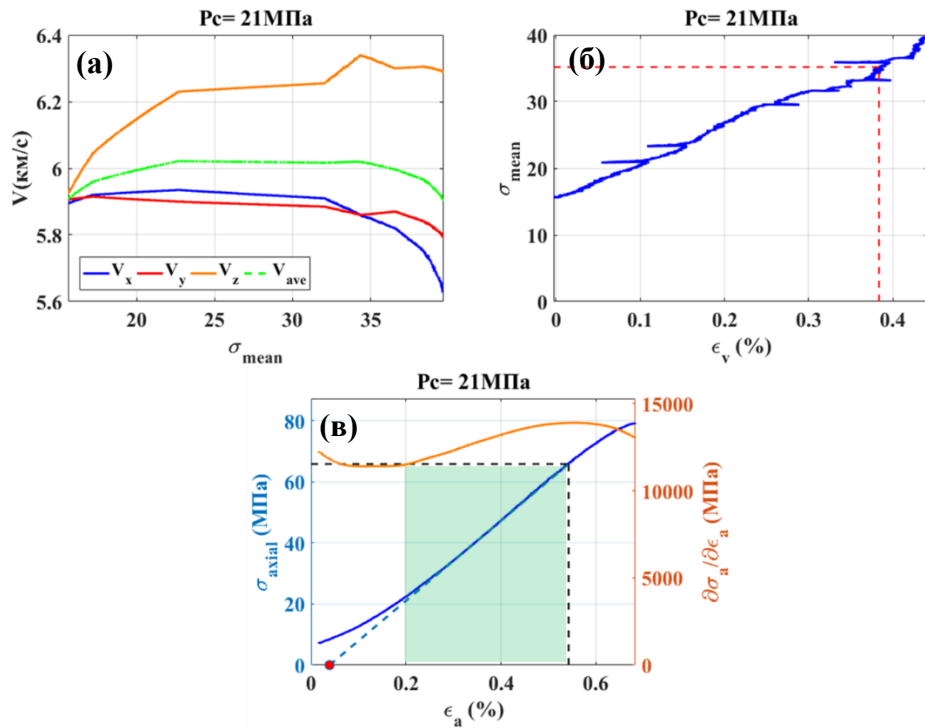


Рис. 3.12. Результаты одностадийного испытания образца С6-2-3 (а) Значения скоростей продольных волн, измеренные вдоль направления оси z (желтая линия), оси x (синяя линия) и ось y (красная линия). Зеленая линия представляет среднее значение скоростей по трем ортогональным направлениям. (б) Изменение объемной деформации относительно среднего напряжения. (в) Зависимость осевого напряжения от осевой деформации.

Табл. 3.1. Статические модули упругости исследуемых образцов, полученные по трехосным испытаниям, и оценки трещинной пористости и максимального аспектного отношения трещин

	$P_c$ (МПа)	$\sigma_{\text{осевое}}$ (МПа)	$\sigma_{\text{среднее}}$ (МПа)	$E_{\text{stat}}$ (ГПа)	$\phi_c^{\text{max}}$ (%)	$\alpha_c^{\text{max}}$ ( $\times 10^{-4}$ )	$E^{\circ}_{\text{stat}}$ (ГПа)
	10.04	94.61	38.45	26.71			
	20.49	115.96	52.57	42.49			
	30.87	134.38	65.22	41.52			
<b>C1-1</b>	41.22	151.12	77.86	52.10	0.15	4	24.61
	50.06	163.52	87.78	51.96			
	59.42	175.62	98.13	46.93			
	68.87	194.03	110.45	34.31			
<b>C1-2</b>	29.63	156.08	71.53	46.35	0.15	4	20
	8.43	131.03	48.53	46.98			
	21.49	160.3	67.69	68.26			
	32.14	171.91	78.21	62.69			
<b>C2-1</b>	42.31	191.97	91.85	65.62	0.1	2	32.5
	51.91	205.77	103.18	67.74			
	61.21	209.99	110.41	88.10			
	71.14	240.5	126.57	77.39			
<b>C2-2</b>	29.32	226.06	94.05	70.79	0.1	3	35.51
	9.45	103.48	40.24	42.46			
	21.46	125.87	56.52	46.98			
	32.3	160.03	74.76	58.62			
<b>C3-1</b>	42.91	185.01	90.24	60.33	0.15	3	36.00
	52.21	210.61	104.44	74.47			
	61.7	239.98	121.05	87.49			
	71.89	276.53	139.13	78.35			
<b>C3-2</b>	30.23	229.21	96.55	65.32	0.15	3	30.05
<b>C4-2</b>	29.78	276.28	110.89	51.62	0.15	6	34
<b>C4-3</b>	9.81	183.87	67.31	49.30	0.13	6	31.00
	10.13	210.03	76.47	58.90			
<b>C4-4</b>	20.12	276.14	105.41	67.68	0.13	2	32.000
	24.89	275.18	107.56	73.14			
	9.88	62.97	27.92	23.33			
	21.87	71.45	38.77	25.23			
<b>C5-1</b>	32.6	73.56	46.31	17.22	0.15	8	17.00
	41.97	73.66	52.71	16.04			
	52.59	79.82	61.4	16.26			
	9.15	89.37	36.06	20.32			
	20.5	102.92	48.1	24.05			
	31.35	117.55	60.21	20.06			
<b>C5-2</b>	41.47	123.12	68.17	25.67	0.15	8	17.00
	51.44	125.63	75.7	24.74			
	60.63	129.97	83.77	35.40			
	69.77	171.04	103.4	24.89			
<b>C5-3</b>	30.22	101.28	53.98	20.45	0.15	8	14.38
	8.97	60.16	25.77	10.55			
<b>C6-2-1</b>	20.44	69.64	36.69	22.26	0.22	5	9.37
	30.91	71.97	44.58	17.82			
	41.59	70.01	50.29	31.43			
<b>C6-2-2</b>	20.1	63.22	34.79	13.59	0.22	10	8.27
<b>C6-2-3</b>	20.28	83.29	41.08	13.11	0.2	10	6.8
	9.88	62.97	27.92	13.33			
	21.87	71.45	38.77	13.23			
<b>C6-2-4</b>	32.61	73.56	46.34	14.48	0.25	10	6.80
	41.97	73.7	52.71	12.05			
	52.6	79.65	61.4	18.32			

\*Статический модуль Юнга при атмосферном давлении.

### 3.4. ОЦЕНКА ПОРИСТОСТИ И ФОРМЫ ТРЕЩИН

Полагая, что поровое пространство пористых материалов состоит только из трещин, и частицы твердой фазы зафиксированы (зерна не скользят относительно друг от друга) Walsh J. B. [182] предположил, что начальная нелинейная деформация пористых материалов при гидростатическом или трехосном испытании происходит за счет закрытия трещин. Однако, твердая фаза вмещает сжимаемые минералы и зерна, которые могут быть прикрепленными слабо к вмещающей матрице. Таким образом, нелинейное поведение является результатом разнообразных процессов, таких как: деформация твердой фазы и пор [201], вращение и перемещение нестабильных зерен [188]; [195]; [45] и т.д. Следовательно, метод разработанный в работе [181, 182], даст максимальное значение трещинной пористости при гидростатической нагрузке изотропных пористых материалов, содержащих хаотически ориентированные трещины. Для негидростатической нагрузки линейное поведение наблюдается только по графикам зависимости осевого напряжения от осевой деформации, тогда аналогично работе [182] для трехосного напряжения можно написать [181]:

$$\phi_v^c \leq \varepsilon_v^c - \frac{S_{mean}}{K}, \quad (3.1)$$

где,  $\varepsilon_a^c$  и  $S_a$ , это осевая деформация и осевое напряжение, соответствующие закрытию трещин (см. Рис. 3.1).  $\phi_a^c$  это доля трещин, закрытых при нагрузке образца.  $K$  это эффективный модуль объемного сжатия образца (МПа), который определялся для исследуемых образцов по графикам «среднее напряжение -объемная деформация». Синие штрихи на Рис. 3.4, Рис. 3.6 (в), Рис. 3.7 (в), Рис. 3.8 (в), Рис. 3.9 (в), Рис. 3.10 (в), Рис. 3.11 (в),

Рис. 3.12 (в), это прямые линии, наклон которых является модулями Юнга исследуемых образцов, а точка пресечения с горизонтальной осью

(красные шарики) - это осевая деформация, соответствующая закрытию трещин при нагрузке образца. Объемная деформация в уравнении (3.1) является объемной деформацией соответствующей осевой деформации, показанной красными шариками.

Berg C. A. [20] и Walsh J. B. [182] показали, что при гидростатической нагрузке изотропных пористых материалов, содержащих хаотически ориентированные трещины, пористость закрытых трещин относится к трещинам определенного аспектного отношения. Согласно результатам этих авторов, максимальное возможное аспектное отношение трещин при гидростатическом испытании можно выразить следующим образом [20]; [182]:

$$\alpha_{crack}^{max} = \frac{4\sigma_n(1-\nu^2)}{\pi E}, \quad (3.2)$$

где  $\sigma_n$ ,  $\nu$  и  $E$  - это гидростатическое напряжение, коэффициент Пуассона, и модуль Юнга. Максимальное среднее аспектное отношение трещин, закрывшихся при трехосном или одноосном испытании для среды, содержащей трещины с функцией распределения ориентации и аспектного отношения  $P(\alpha; \theta, \varphi, \psi)$  выражается следующим уравнением Nur A. [144]:

$$\alpha_{crack}^{max} = \frac{4(1-\nu^2) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [(\sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta + \sigma_3 \cos^2 \theta] P(\alpha; \theta, \varphi, \psi) \sin \theta d\alpha d\varphi d\theta d\psi}{\pi E \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} P(\alpha; \theta, \varphi, \psi) \sin \theta d\alpha d\varphi d\theta d\psi}, \quad (3.3)$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  это напряжения, перпендикулярные вертикальной оси образца,  $\sigma_3$  это напряжение вдоль вертикальной оси образца.  $\theta, \varphi$  и  $\psi$ , - это углы Эйлера, как представлено в первой главе. Выражение в квадратной скобке показывает нормальное напряжение, действующее на плоскость

трещин с пространственной ориентацией  $\theta, \varphi$  и  $\psi$ , в результате действующих напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  на исследуемый образец.

В нашем случае, когда микроморфологические характеристики хаотически ориентированных монетообразных трещин описываются одним аспектным отношением и образец цилиндрический, уравнение (1.3) упрощается следующим образом:

$$\alpha_{crack}^{max} = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_0^\pi [P_c \sin^2 \theta + \sigma_{axial} \cos^2 \theta] \sin \theta d\theta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left( \frac{2P_c + \sigma_{axial}}{3} \right) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \sigma_{mean}, \quad (3.4)$$

где  $P_c$  и  $\sigma_{axial}$  - это обжимное давление и осевое напряжение, соответственно. Сравнивая уравнения (1.2) и (1.4), можно заключить, что для каждого образца гидростатическое напряжение, необходимое для закрытия трещин, составляет половину среднего напряжения, при котором такие же трещины закрываются:

$$\frac{\overbrace{\alpha_{crack}^{max}}^{hyd}}{\underbrace{\alpha_{crack}^{max}}^{nonhyd}} = 2 \frac{\sigma_{hyd}}{\sigma_{mean}}, \quad (3.5)$$

где  $\overbrace{\alpha_{crack}^{max}}^{hyd}$  и  $\underbrace{\alpha_{crack}^{max}}^{nonhyd}$  это аспектное отношение трещин при гидростатической и негидростатической всесторонних нагрузках.

Результаты оценки максимально возможных значений трещинной пористости и аспектных отношений трещин исследованных пород представлены в следующей главе.

### 3.5. ВЫВОДЫ:



Определены статические модули упругости четырех карбонатных пород и одной терригенной породы с большим содержанием карбонатного цемента по результатам одностадийных и многостадийных испытаний на прессе INOVA.

Проведенные испытания на прессе дали возможность оценить наведенную трещиноватость в процессе нагружения образца и связать изменения в скоростях продольных волн с эволюцией трещиноватости.

Оценены верхние границы аспектного отношения трещин, образовавшихся в процессе деформирования образцов.

На примере одной карбонатной породы показано, что «образцы – близнецы» в смысле сходства скоростей упругих волн могут таковыми не являться с точки зрения их поведения в процессе деформирования.

#### **Глава 4. ПОСТРОЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПЕТРОУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПУСТОТНОГО ПРОСТРАНСТВА ПОРОД И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ**

Результаты акустической томографии демонстрируют, что исследуемые в этой работе образцы являются неоднородными и изотропными. Величины динамических модулей упругости можно рассчитать по измеренным значениям скоростей продольных и поперечных волн [1]. Динамические модули упругости вычислены по арифметически усредненным значениям скоростей продольных и поперечных волн, измеренным вдоль образца с учетом их среднеквадратического отклонения.

##### **4.1 ОБЩИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ПУСТОТНОГО ПРОСТРАНСТВА**

Согласно моделированию упругих свойств образцов пород, которое описано в Главе 2, для исследованных в данной работе образцов из данных эксперимента инвертированы параметры микроструктуры, включая коэффициент связности порового пространства ( $f$ ), трещинную пористость ( $\phi_c$ ), аспектное отношение пор ( $\alpha_{\text{пор}}$ ) и аспектное отношение микротрещин ( $\alpha_{\text{трещин}}$ ). Затем были построены корреляционные зависимости статических и динамических модулей Юнга и их отношения от найденных параметров микроструктуры. Эти зависимости позволяют оценить влияние микроструктурных параметров на упомянутые упругие модули и их отношение.

Для оценки параметров, представляющих характеристики микроструктуры, мы применили метод оптимизации *прямого поиска* [140]. В нашем случае число неизвестных параметров, представляющих характеристики микроструктуры больше, чем число известных парамет

ров (измеренные скорости упругих волн при лабораторных условиях). Это означает, что задача является недоопределенной. Для недоопределенной задачи число решений бесконечно. Ограничение диапазона поиска для

каждого параметра может значительно повысить точность его оценки. В данной работе ограничения на искомые параметры вводились на основе их физического смысла и имеющихся измеренных физических характеристик.

В данной работе применено уравнение Козени - Кармана чтобы связать структурные характеристики, включая размер крупных кристаллов кальцита, объемную долю микрита (мелкозернистые кристаллы кальцита в качестве цемента в карбонатных горных породах) и размер макропор, полученные на основе анализа изображений РЭМ, с измеренными фильтрационно-емкостными свойствами (ФЕС). Определенные параметры уравнения Козени-Кармана использовались, чтобы ввести ограничение на параметр  $f$ , представляющий характеристику связности пустотного пространства.

#### 4.1.1 ОГРАНИЧЕНИЕ ПАРАМЕТРА СВЯЗНОСТИ ПОРОВОГО ПРОСТРАНСТВА ( $F$ -ПАРАМЕТР)

Параметр  $f$ , или параметр связности порового пространства, отражает связность пустотного пространства и является одним из доминирующих параметров предложенной модели при его высоких значениях ( $> 0.6$ ). Степень связности, в свою очередь, зависит от многочисленных параметров включая пористость, размер и форму пор, содержание глины, напряженное состояние, поровое давление, тип жидкости, флюидонасыщение и т.д. Этот параметр определяет связь между упругими и транспортными свойствами пористых сред [17] [37] [88]. В работе [87] показано, что увеличение значений параметра  $f$  приводит к росту гидравлической проницаемости. Большинство имеющихся публикаций, посвященных исследованию характеристик транспорта флюида в карбонатных породах, представляют описание и количественную оценку влияния текстурных и седиментологических параметров на зависимость проницаемости от пористости. Сложное строение и высокая степень неоднородности карбонатных пород, унаследованные от их комплексного пост-седиментационного диагенеза и метадиагенеза, приводит к значительным разбросам в эмпирических корреляционных зависимостях

петрофизических свойств, таких как корреляция пористости и проницаемости [49] - [65]. Поскольку для карбонатных пород, на основе представленного литературного обзора сложно найти связь между значением коэффициента общей пористости и проницаемости, мы предполагаем, что существует положительная корреляция коэффициента связности  $f$  и отношения проницаемости ( $k$ ) к пористости  $\phi$ . Отношение  $k/\phi$  характеризует степень связности порового пространства и включает в себя структурные и седиментологические параметры, влияющие на пористость и проницаемость.

Результаты измерений ФЕС и характеристики микроструктуры образцов представлены в **Табл. 4.1**.

Табл. 4.1. Текстуальные и микроморфологические характеристики исследуемых образцов, полученные на основе описаний изображений РЭМ.

Образец	Класс. Дунхама	$D_{\text{пор}}(\text{мм})$	$D_{\text{зерен}}(\text{мм})$	$V_{\text{мик}}(\%)$	$\phi(\%)$	$k(\text{мД})$	$k/\phi$
C1-1	разнозернистый биоспарит	0.125-2.0	1.25	1	7.6	1.30	0.171
C1-2	разнозернистый биоспарит	0.125-0.4	0.3-1.25	1	6.1	0.43	0.071
C2-1	ископаемый биомикрит	0.06-2.5	0.06-0.6	90	3.9	0.04	0.010
C3-3	рыхлый биомикрит	0.06-0.4	0.0025-0.02	80	1.5	0.01	0.010
C5-2	плотный биомикрит	0.06-0.5	0.06-0.125	70	11.5	0.04	0.003
C5-3	плотный биомикрит	0.05-0.1	0.06-0.126	50	14.0	0.05	0.004
C6-1-1	плотный оомикрит	0.06-0.25	0.125	18	23.0	7.56	0.330
C6-2-1	плотный оомикрит	0.06-0.26	0.125	20	23.0	7.96	0.350

Для дальнейшего изучения гидравлических транспортных свойств исследуемых образцов и их зависимости от структурных и седиментологических параметров применялось полуэмпирическое уравнение Козени-Кармана [31]. Mavko G., Nur A. [127] модифицировали уравнение Козени-Кармана с учетом пористости перколяции (percolation porosity). Это

уравнение для среды, содержащей сферические зерна диаметром  $d$ , можно выразить следующим образом [126]:

$$k = \frac{(\phi - \phi^{перк})^3 d^2}{36K_0\tau^2(1 - \phi + \phi^{перк})^2}, \quad (4.1)$$

где  $k$  – гидравлическая проницаемость;  $\phi$  и  $\phi^{перк}$  – коэффициент пористости и пористость перколяции; Пористость перколяции – это минимальное значение пористости, необходимое для того, чтобы существовали сквозные связные пути для движения флюида в поровом пространстве. Пористость перколяции зависит от геометрии пор и их взаимосвязи [127].  $K_0$  – фактор формы зерен и пор;  $\tau$  – извилистость поровых каналов. Извилистость поровых каналов определяется как длина среднего пути потока, деленная на длину образца. Извилистость затрудняет фильтрацию жидкостей и газов в коллекторе и тем самым понижает коэффициент проницаемости. Выражение  $36K_0\tau^2$  определяется, как геометрический фактор  $B$  [126], и отражает основные морфологические особенности твердой фазы и порового пространства, включая дефект формы и площадь поверхности зерен/пор.

Для изучаемых пород геометрический фактор и пористость перколяции были оценены с помощью метода  $N$ -мерных сеток ( $N$  – число параметров модели, который равняется 2 для данного случая; пористость перколяции и геометрический фактор), в узлах которых решена прямая задача, а узлы являются набором неизвестных параметров уравнения (4.1) ( $1 \leq K_0 \leq 3$  и  $0 \leq \phi^{перк} \leq \phi$  и  $\tau = f(\phi, \phi^{перк})$ ). С помощью этого метода можно получить довольно много решений для совокупностей неизвестных параметров уравнения, по которым затем вычисляют статистические характеристики (средние значения, матрицы ковариаций) параметров. Этот способ решения

обратной задачи применяют, когда нет априорной информации о неизвестных параметрах или объем ее недостаточен для применения методов оптимизации [204]. Результаты решения представлены в Табл. 4.2. На основе определений, представленных выше для геометрического фактора  $B$  и пористости перколяции  $\phi_c$ , оценка этих параметров может дать нам представление о морфологических характеристиках порового пространства и их степени связности.

Табл. 4.2. Параметры уравнения Козени-Кармана, полученные с помощью метода N-мерной сетки.

образец	$B$ (геом. Фактор)	$\sigma^B$	$\phi_{\text{перк}}, (\%)$	$\sigma_{\text{перк}}$
C1-1	52.84	27.88	5.28	0.51
C1-2	57.10	27.23	3.79	0.47
C2-1	5.69	2.72	3.08	0.17
C3-3	1.10	0.03	0.32	0.23
C5-2	17.28	8.21	8.72	0.57
C5-3	28.13	13.53	10.24	0.74
C6-1-1	52.14	20.45	4.91	2.45
C6-2-1	44.47	22.23	6.14	3.64

В настоящей работе данные о проницаемости и пористости были использованы для получения ограничений на параметр  $f$ . С точки зрения физической сути процесса фильтрации увеличение пористости должно приводить к увеличению проницаемости, поэтому отношение проницаемости к пористости в какой-то мере характеризует степень связности пустотного пространства. Основываясь на этой идее, отношение проницаемости к пористости было условно разделено на три общие категории: 0-10, 10-50 и более 50, которые в нашей терминологии представляют собой слабосвязанное, довольно связанное и хорошо связанное поровое пространство, соответственно. На основании результатов исследования чувствительности модели к параметру  $f$ , возможная область изменения этого параметра для каждого образца была классифицирована следующим образом на три группы:

1. Слабосвязанное поровое пространство,  $k/\phi < 10$ ,  $0.0 < f < 0.6$
2. Довольно связанное поровое пространство,  $10 < k/\phi < 50$ ,  $0.6 < f < 0.9$
3. Хорошо связанное поровое пространство,  $50 < k/\phi$ ,  $0.9 < f < 1.0$ .

Результаты классификации образцов представлены в **Табл. 4.3** Затем, на основании построенной петроупругой модели была решена обратная задача по определению ее микроструктурных параметров для исследуемых образцов с учетом вышеуказанной классификации и соответствующих ограничений на параметр  $f$ . Как указано ранее, для решения обратной недоопределённой задачи воспользуемся методом нелинейной оптимизации прямого поиска.

Табл. 4.3. Классификация исследуемых образцов для определения ограничений на параметр связности ( $f$ -параметра).

	$\phi$ , (%)	$k$ (мД)	$k/\phi$	Категория	$f$ -параметр
<b>C1-1</b>	7.64	2.12	27.80	Дов.связ	$0.6 < f < 0.8$
<b>C1-2</b>	6.10	0.83	13.66	Дов.связ	$0.6 < f < 0.8$
<b>C2-1</b>	3.94	0.11	2.72	Слаб.связ	$f < 0.6$
<b>C2-2</b>	3.09	0.00	0.13	Слаб.связ	$f < 0.6$
<b>C3-1</b>	1.92	0.09	4.68	Слаб.связ	$f < 0.6$
<b>C3-2</b>	2.90	0.01	0.17	Слаб.связ	$f < 0.6$
<b>C3-3</b>	1.51	0.06	4.17	Слаб.связ	$f < 0.6$
<b>C4-1</b>	2.93	0.01	0.34	Слаб.связ	$f < 0.6$
<b>C4-2</b>	1.88	0.00	0.21	Слаб.связ	$f < 0.6$
<b>C4-3</b>	2.66	0.00	0.15	Слаб.связ	$f < 0.6$
<b>C4-4</b>	2.31	0.01	0.30	Слаб.связ	$f < 0.6$
<b>C5-2</b>	11.54	0.11	0.99	Слаб.связ	$f < 0.6$
<b>C5-3</b>	13.97	0.16	1.12	Слаб.связ	$f < 0.6$
<b>C5-4</b>	12.62	0.13	0.99	Слаб.связ	$f < 0.6$
<b>C6-1-1</b>	22.70	9.48	41.76	Дов.связ	$0.6 < f < 0.9$
<b>C6-1-2</b>	21.76	8.11	37.29	Дов.связ	$0.6 < f < 0.9$
<b>C6-2-1</b>	22.96	9.97	43.40	Дов.связ	$0.6 < f < 0.9$
<b>C6-2-2</b>	22.70	9.75	42.93	Дов.связ	$0.6 < f < 0.9$
<b>C6-2-3</b>	22.088	6.794	30.7588	Дов.связ	$0.6 < f < 0.9$

\* Дов.связ: Довольно связаны.

\*\* Слаб.связ: Слабо связаны.

Результаты определения параметров модели представлены в **Табл. 4.4.** Мы назвали приведенное выше разделение параметра связности на группы «примитивной системой классификации параметра связности». На **Рис. 4.1** показана зависимость параметра  $f$  от логарифма отношения проницаемости к пористости. Исходя из этого рисунка, можно полагать, что зависимость значений отношения проницаемости к пористости от параметра  $f$ , экспоненциальная, поскольку  $f \propto \ln(k/\phi)$ .

Табл. 4.4. Расчетные значения параметров модели на основе примитивной системы классификации параметра связности ( $f$ ).

	$f$	$\sigma_f$	$\phi_c(\%)$	$\sigma_c(\%)$	$\alpha_{пор}$	$\sigma_{пор}$	$\alpha_{трещ}(10^{-4})$	$\sigma_{трещ}(10^{-4})$
C1-1	0.68	0.076	0.007	0.002	0.76	0.232	1.35	0.615
C1-2	0.09	0.134	0.004	0.002	0.76	0.155	0.37	0.293
C2-1	0.33	0.089	0.011	0.002	0.73	0.140	2.77	0.287
C2-2	0.09	0.077	0.005	0.001	0.61	0.191	2.89	0.132
C3-1	0.22	0.089	0.004	0.002	0.61	0.169	2.84	0.148
C3-2	0.19	0.083	0.001	0.001	0.74	0.128	2.68	0.318
C3-3	0.41	0.153	0.002	0.001	0.46	0.150	2.69	0.238
C4-1	0.52	0.096	0.008	0.005	0.26	0.182	1.13	0.404
C4-2	0.54	0.076	0.006	0.005	0.19	0.161	0.76	0.530
C4-3	0.21	0.185	0.015	0.004	0.80	0.232	0.91	0.153
C4-4	0.28	0.157	0.016	0.005	0.70	0.282	1.43	0.274
C5-2	0.11	0.155	0.108	0.025	0.85	0.221	2.58	0.364
C5-3	0.12	0.199	0.064	0.044	0.83	0.279	1.26	0.803
C5-4	0.12	0.144	0.114	0.032	0.82	0.226	2.74	0.583
C6-1-1	0.88	0.027	0.052	0.055	0.31	0.047	8.11	1.832
C6-1-2	0.88	0.027	0.057	0.067	0.36	0.073	6.11	1.018
C6-2-1	0.89	0.019	0.103	0.034	0.61	0.190	4.38	1.308
C6-2-2	0.90	0.004	0.114	0.034	0.42	0.158	14.42	2.875
C6-2-3	0.90	0.012	0.037	0.033	0.40	0.135	9.57	1.192



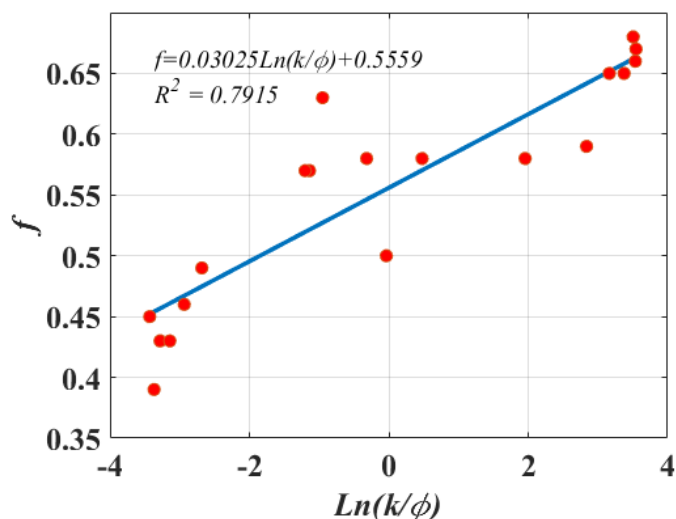


Рис. 4.1. Результаты расчета параметра  $f$  на основе предложенной классификации связности пустотного пространства на три группы.

Как упоминалось ранее, уравнение Козени-Кармана отражает информацию о морфологических характеристиках порового пространства исследуемых образцов, в частности, о связности пустотного пространства. Эти характеристики (см. [Табл. 4.2](#)) могут быть использованы для сужения границ для параметра  $f$ . Как указано в работе [131] и [148] для пористого материала с идеально соединенным поровым пространством (чрезвычайно низкая перколяционная пористость) извилистость является функцией только пористости. Наиболее известным среди полуэмпирических выражений для расчета извилистости является соотношение Брюггемана [131]:

$$\tau^{(ideal)} = \frac{1}{\phi^{0.5}}. \quad (4.2)$$

На основе теории перколяции для реальной среды уравнение (4.2) преобразуется следующим образом [148]:

$$\tau^{(real)} = \phi \left[ \frac{\phi - \phi_c}{1 - \phi_c} \right]^{-1.5} . \quad (4.3)$$

Поскольку текстура предложенной идеальной среды является той же, как у реальной исследуемой среды, факторы формы ( $K\theta$ ) у обеих сред аналогичны. Следовательно, геометрический фактор идеальной среды можно выразить следующим образом:

$$\frac{B^{(ideal)}}{B^{(real)}} = \frac{\tau^{(ideal)}}{\tau^{(real)}} = \left[ \frac{\phi - \phi_c}{\phi(1 - \phi_c)} \right]^{1.5} . \quad (4.4)$$

Учитывая, что такая гипотетическая среда имеет различные микроструктурные параметры и, следовательно, различные значения проницаемости для разных образцов, мы называем эту гипотетическую модель «локальной идеальной средой». Значение коэффициента связности для локальной идеальной среды близко к единице (максимальному значению).

Вышеупомянутая идеальная модель обеспечивают верхнюю границу значений проницаемости, причем, минимальная возможная проницаемость для пористой среды является нулевой проницаемостью. Однако это является не совсем верным, поскольку нулевая проницаемость соответствует среде, которая полностью герметична. Согласно результатам работ [141] [168] [122] [63] [89], минимальное значение проницаемости может быть принято равным  $10^{-7}$  мД. Предполагается, что порода с минимальным значением проницаемости имеют изолированные поры и трещины, значение параметра  $f$  для таких сред составляет весьма низкое значение ( $\sim 0$ ).

Значение верхней границы получается путем построения линейного уравнения ( $f = a \times \ln(k/\phi)$ , где “а” это коэффициент аппроксимирующего линейного уравнения) между средой с нулевым  $f$  и средой с  $f=1.0$  с  $\ln(10^{-7} / \phi)$  и  $\ln(k^{max} / \phi)$ , соответственно для каждого образца (значение  $\ln(k/\phi)$

известно). Нижняя граница параметра  $f$  получается на основе примитивной системы классификации.

Результаты расчета ограничений на параметр  $f$  для образцов, для которых имелись данные РЭМ, представлены в Табл. 4.5. На основе этих значений и значений  $\ln(k/\phi)$  для остальных образцов оценены величины минимального и максимального значений параметра  $f$  (см. Рис. 4.2).

Табл. 4.5. Значения отношений коэффициента проницаемости к коэффициенту пористости для изученных образцов, соответствующих им идеальных образцов (с идеальной текстурой) и границы коэффициента связности.

	$\ln(k/\phi)$	$\ln(k/\phi)$ идеальной среды.	$\ln(k/\phi)$ мин	$f$ -локальный
C1-1	2.84	13.91	-13.55	0.56
C1-2	1.96	12.11	-13.32	0.57
C2-1	-0.04	12.63	-12.88	0.46
C3-3	-0.32	3.65	-11.93	0.73
C5-2	-1.14	11.03	-13.96	0.48
C5-3	-0.95	10.82	-14.15	0.49
C6-1-1	3.51	10.46	-14.64	0.71
C6-2-1	3.55	10.73	-14.65	0.71

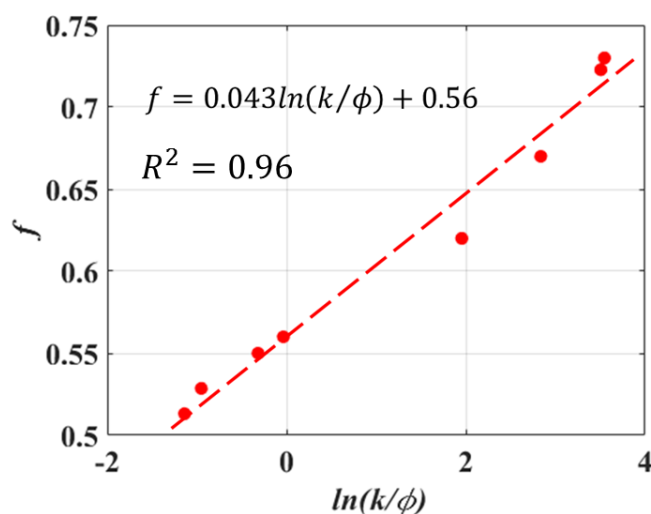


Рис. 4.2. Зависимость граничных значений параметра  $f$  от логарифма отношения коэффициента проницаемости к коэффициенту пористости для локальной (красная линия) идеальной среды.

Окончательная оценка этого параметра, полученная по решению обратной задачи на основе измеренных в лаборатории или в поле физических свойств, является оптимальным значением между глобальными и локальными границами.

Оценка параметра  $f$  на основе уравнения Козени - Кармана позволяет до некоторой степени учесть эффект размера пор и зерен, что невозможно сделать явно в методах теории эффективных сред.

В **Главе 3** на основе проведенных всесторонних испытаний на исследуемых карбонатных образцах получены значения верхней границы для значений трещинной пористости и аспектного отношения трещин как параметров, контролирующих пластическое поведение горных пород.

В данном исследовании мы приняли, что случайные ошибки различной природы при проведении эксперимента составляют 20% для при измерении фильтрационно-емкостных свойств и 35% при измерении напряжений и деформаций. Величины ограничений на параметр  $f$  (с учетом 20% полагаемой погрешности при измерении проницаемости и пористости), трещинную пористость и аспектное отношение трещин (с учетом 35% полагаемой погрешности при измерении напряжения и деформации), для всех исследуемых в данной работе образцов представлены в **Табл. 4.6**. Несмотря на полезные результаты, которые представляет геометрический фактор  $B$  о структурных характеристиках порово-трещиноватых горных пород, не существует никакой физически обоснованной зависимости между значениями геометрического фактора и аспектного отношения пор и зерен. Как показывает анализ чувствительности построенных моделей к изменению ее параметров (**Глава 2**), область приемлемых значений параметра  $f$  довольно велика при разумных сочетаниях других параметров моделей. Введение ограничений на

параметр связности пустотного пространства позволит значительно сузить область решений.

Табл. 4.6. Граничные значения на искомые параметры.

образец	$f_{min}$	$f_{max}$	$\phi_c^{max}(\%)$	$\phi_c^{min}(\%)$	$\alpha_c^{min}(10^{-4})$	$\alpha_c^{max}(10^{-4})$
C1-1	0.42	0.81	0.08	0.30	2.00	8.00
C1-2	0.40	0.84	0.08	0.30	2.00	8.00
C2-1	0.36	0.79	0.05	0.20	1.50	6.00
C2-2	0.31	0.71	0.05	0.20	1.50	6.00
C3-1	0.36	0.80	0.07	0.26	1.50	6.00
C3-2	0.31	0.71	0.07	0.28	1.50	6.00
C3-3	0.32	0.78	0.06	0.24	1.50	6.00
C4-1	0.33	0.73	0.07	0.26	2.00	8.00
C4-2	0.32	0.72	0.07	0.26	1.75	7.00
C4-3	0.31	0.71	0.07	0.26	1.00	4.00
C4-4	0.31	0.72	0.07	0.26	1.50	6.00
C5-2	0.37	0.76	0.08	0.32	3.50	14.00
C5-3	0.38	0.77	0.09	0.34	4.00	16.00
C5-4	0.36	0.76	0.08	0.30	3.00	12.00
C6-1-1	0.49	0.87	0.11	0.44	5.00	20.00
C6-1-2	0.48	0.87	0.11	0.44	5.00	20.00
C6-2-1	0.49	0.87	0.10	0.41	4.00	16.00
C6-2-2	0.49	0.87	0.13	0.50	7.00	28.00
C6-2-3	0.48	0.87	0.13	0.50	5.00	20.00

**Табл. 4.7** представляет средние значения и их стандартные отклонения для каждого искомого параметра, полученные по примененному алгоритму оптимизации для модели I и II. Для петроупругой модели II, представляющей порово-трещиноватой среды исследуемых образцов выбуренных из полноразмерного керна С6, существует 6 неизвестных параметров, подлежащих определению (по сравнению с моделью I, для которой определяется 4 неизвестных параметра). Помимо параметров модели I, для модели II определяются параметры порового пространства внутри оолитовых зерен, включая аспектное отношение и объемную долю пор. Аспектное отношение пор, представляющее микроморфологические характеристики порового пространства для образцов С6, является средним по объемной концентрации значением аспектных отношений пор внутри оолитовых зерен и межзерновых пор. Результаты, показывают, что оолитовые зерна включают

в себя примерно 70% от общего объема порового пространства, а межзерновые поры составляют примерно 30% от общей пористости (обсуждение особенностей этой микроструктуры будет продолжено далее при анализе влияния объемной доли микрита).

Табл. 4.7. Расчетные значения параметров моделей и их соответствующие СКО.

	$f$	$\sigma_c$	$\phi_c$ (%)	$\sigma_c$ (%)	$\alpha_p$	$\sigma_{ap}$	$\alpha_c \times 10^{-4}$	$\sigma_{ac} \times 10^{-4}$
C1-1	0.44	0.044	0.08	0.018	0.51	0.191	7.06	0.375
C1-2	0.41	0.024	0.08	0.006	0.50	0.137	7.89	0.281
C2-1	0.37	0.022	0.05	0.001	0.55	0.111	5.93	0.142
C2-2	0.34	0.011	0.05	0.001	0.60	0.124	5.74	0.327
C3-1	0.34	0.022	0.05	0.003	0.61	0.146	5.69	0.254
C3-2	0.38	0.033	0.07	0.003	0.50	0.170	6.41	0.125
C3-3	0.31	0.014	0.03	0.009	0.60	0.146	5.06	0.265
C4-1	0.45	0.064	0.07	0.007	0.51	0.147	7.50	0.444
C4-2	0.41	0.052	0.07	0.008	0.60	0.135	6.74	0.342
C4-3	0.32	0.017	0.07	0.002	0.55	0.204	3.95	0.136
C4-4	0.32	0.022	0.07	0.003	0.61	0.111	5.92	0.167
C5-2	0.49	0.102	0.30	0.036	0.41	0.112	11.13	0.965
C5-3	0.69	0.015	0.18	0.015	0.39	0.067	8.76	0.629
C5-4	0.53	0.099	0.23	0.042	0.52	0.141	10.84	0.729
C6-1-1	0.85	0.030	0.24	0.043	0.41	0.115	13.14	3.850
C6-1-2	0.85	0.031	0.25	0.052	0.40	0.113	10.98	2.214
C6-2-1	0.85	0.035	0.25	0.066	0.45	0.132	13.91	2.874
C6-2-2	0.87	0.014	0.34	0.028	0.43	0.105	23.90	5.065
C6-2-3	0.84	0.030	0.29	0.087	0.38	0.161	14.68	2.976

## 4.2 СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ПУСТОТНОГО ПРОСТРАНСТВА И УПРУГИХ МОДУЛЕЙ:

### 4.2.1 УПРУГИЕ СВОЙСТВА:

Величины статических модулей Юнга, полученные по всесторонним испытаниям, и также динамических модулей упругости, их отношение и значения динамического коэффициента Пуассона представлены в [Рис. 4.3](#) и [Табл. 4.8](#).

### Статические и динамические модули Юнга и их отношения

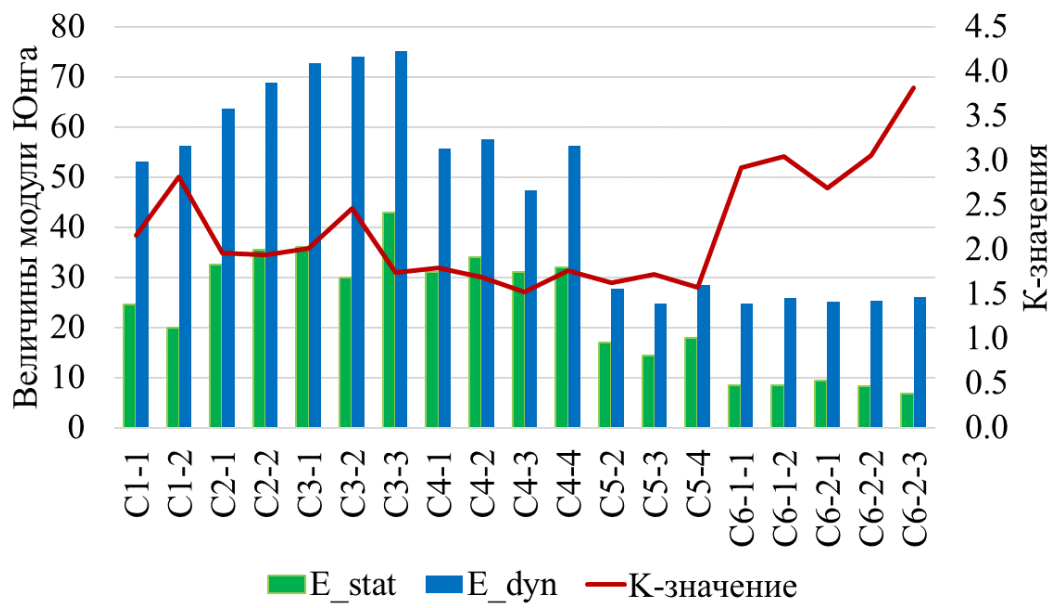


Рис. 4.3. Статические и динамические модули Юнга, их соотношение.

Табл. 4.8. Плотность, статические и динамические модули Юнга, их соотношение и динамические значения коэффициента Пуассона исследуемых образцов.

Образец	$\rho$ (гр/см <sup>3</sup> )	$E_{stat}^0$	$E_{dyn}^0$	К-значение	$\nu$
C1-1	2.57	24.61	53.11	2.158	0.20
C1-2	2.57	20.00	56.28	2.814	0.24
C2-1	2.60	32.50	63.77	1.962	0.26
C2-2	2.60	35.51	68.91	1.940	0.31
C3-1	2.64	36.00	72.66	2.018	0.30
C3-2	2.64	30.05	73.98	2.462	0.31
C3-3	2.64	43.00	75.09	1.746	0.31
C4-1	2.45	31.00	55.72	1.797	0.15
C4-2	2.45	34.00	57.60	1.694	0.13
C4-3	2.45	31.00	47.39	1.529	0.08
C4-4	2.45	32.00	56.29	1.759	0.12
C5-2	2.42	17.00	27.74	1.632	0.18
C5-3	2.42	14.38	24.74	1.721	0.18
C5-4	2.42	18.00	28.43	1.579	0.19
C6-1-1	2.09	8.50	24.82	2.919	0.23
C6-1-2	2.09	8.50	25.88	3.045	0.23
C6-2-1	2.09	9.37	25.24	2.694	0.24
C6-2-2	2.09	8.27	25.30	3.060	0.23
C6-2-3	2.09	6.80	25.99	3.820	0.24

$E_{stat}^0$ : статический модуль Юнга, оцененный в атмосферных условиях.

Для полученных параметров микроструктуры образцов были проведены бинарный нелинейный регрессионный анализ с целью исследования влияния каждого параметра, характеризующего пустотного пространство, на упругие модули исследуемых в данной работе образцов. Однако перед проведением любого статистического анализа обязательно нужно ответить на следующий вопрос: ”Значима ли корреляция между исследуемыми параметрами?”.

Для нашей цели исследуемыми параметрами являются упругие модули (динамические и статические модули Юнга и их отношение и динамический коэффициент Пуассона) и текстурные параметры горных пород. Самый простой способ для проверки значимости корреляции –это построение матрицы корреляции, что позволяет исследовать значимость корреляции между предполагаемыми независимыми параметрами (предикторами) и



значимость корреляции между предикторами с наблюдениями (величина упругих модулей). Коэффициент корреляции –это ковариация стандартизованных наблюдений, как указано в стр. 8 книги Ричарда Джонсона, и рассчитается по следующей формуле:

$$r_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^N (x_{ji} - \bar{x}_i)(x_{jp} - \bar{x}_p)}{\sqrt{\sum_{j=1}^N (x_{ji} - \bar{x}_i)^2} \sqrt{\sum_{j=1}^N (x_{jp} - \bar{x}_p)^2}}. \quad (4.5)$$

Для  $i$  и  $p=1,2,\dots,k$ .  $N$  и  $k$  –это число имеющихся данных и число независимых параметров соответственно. Результаты расчета матрицы коэффициентов корреляций представлены в **Табл. 4.9**. Затем проверим значимость коэффициентов корреляции, чтобы быть уверенными в том, что значение коэффициента корреляции достаточно большое по абсолютной величине для каждой пары параметров. Применяем методы проверки статистических гипотез для оценки значимости коэффициента корреляции. Статистическая гипотеза является предположением о виде распределения и свойствах случайной величины, которое можно подтвердить или опровергнуть применением статистических методов к данным выборки. Нулевая и альтернативная гипотезы выражаются следующим образом [208]:

$$\begin{aligned} H_0 : r &= 0 \\ H_1 : r &\neq 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Предполагая распределение t-Стьюдента для значений коэффициентов корреляции, значение статистического критерия можно рассчитать следующим образом [208]:

$$t = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}}. \quad (4.7)$$

При проверке статистических гипотез можно фальсифицировать нулевую гипотезу, когда она истинна, или принять нулевую гипотезу, когда она фактически ложна. Эти типы ошибок называются ошибками типа I и типа II соответственно. На основе определения ошибок родилось понятие критического уровня значимости ( $\alpha$ ), которое является допустимой вероятностью ошибочного отклонения нулевой гипотезы. Общепринято и практически принято устанавливать уровень значимости, равный 0.05 [155]. Так как наша статистическая гипотеза является двухсторонней, значимость коэффициентов корреляции равняется площади под правым и левым «хвостами» функции распределения t-Стюдента и выражается следующим образом [155]:

$$\alpha = P(T \geq |t|) + P(T \leq -|t|) = 2P(T \geq |t|), \quad (4.8)$$

где  $T$  –это все величины меньше или больше значений статистического критерия, рассчитанных для значений коэффициента корреляции каждой пары параметров.

По представленным данным в **Табл. 4.9** и **Табл. 4.10** легко можно заметить, что значимость корреляции между предполагаемыми текстурными параметрами высока. Наибольшая значимость связи наблюдается между параметром связности пустот и коэффициентом общей пористости ( $r=0.98$ ). По этим результатам видно, что связь между значениями форм трещин и пор имеет наименьшую значимость ( $r=-0.68$ ).

Табл. 4.9. Результаты расчета коэффициента корреляции для имеющихся данных.

	$\phi$	$f$	$\phi^c$	$\alpha^{nop}$	$\alpha^c$	$E^{dyn}$	$E^{stat}$	$K$	$\nu$
$\phi$	1.00	0.98	0.92	-0.85	0.85	-0.95	-0.89	0.71	0.06
$f$	0.98	1.00	0.87	-0.84	0.84	-0.93	-0.85	0.72	0.04
$\phi^c$	0.92	0.87	1.00	-0.84	0.89	-0.91	-0.91	0.54	-0.05
$\alpha^{nop}$	-0.85	-0.84	-0.84	1.00	-0.68	0.91	0.84	-0.60	0.03
$\alpha^c$	0.85	0.84	0.89	-0.68	1.00	-0.81	-0.74	0.64	0.07
$E^{dyn}$	-0.95	-0.93	-0.91	0.91	-0.81	1.00	0.92	-0.68	0.07
$E^{stat}$	-0.89	-0.85	-0.91	0.84	-0.74	0.92	1.00	-0.40	0.33
$K$	0.71	0.72	0.54	-0.60	0.64	-0.68	-0.40	1.00	0.36
$\nu$	0.06	0.04	-0.05	0.03	0.07	0.07	0.33	0.36	1.00

Табл. 4.10. Результаты расчета параметра значимости для значений коэффициента корреляции для имеющихся данных.

	$\phi$	$f$	$\phi^c$	$\alpha^{nop}$	$\alpha^c$	$E^{dyn}$	$E^{stat}$	$K$	$\nu$
$\phi$	0	$3.40 \times 10^{-13}$	$5.16 \times 10^{-8}$	$8.44 \times 10^{-6}$	$7.56 \times 10^{-6}$	$4.38 \times 10^{-10}$	$7.26 \times 10^{-7}$	0.001	0.760
$f$	$3.40 \times 10^{-13}$	0	$2.05 \times 10^{-6}$	$1.11 \times 10^{-5}$	$1.14 \times 10^{-5}$	$2.04 \times 10^{-8}$	$6.37 \times 10^{-6}$	0.001	0.773
$\phi^c$	$5.16 \times 10^{-8}$	$2.05 \times 10^{-6}$	0	$1.59 \times 10^{-5}$	$6.69 \times 10^{-7}$	$1.11 \times 10^{-7}$	$9.72 \times 10^{-8}$	0.033	0.769
$\alpha^{nop}$	$8.44 \times 10^{-6}$	$1.11 \times 10^{-5}$	$1.59 \times 10^{-5}$	0	0.0028	$9.48 \times 10^{-8}$	$1.67 \times 10^{-5}$	0.013	0.781
$\alpha^c$	$7.56 \times 10^{-6}$	$1.14 \times 10^{-5}$	$6.69 \times 10^{-7}$	0.0028	0	$5.86 \times 10^{-5}$	0.000705	0.006	0.753
$E^{dyn}$	$4.38 \times 10^{-10}$	$2.04 \times 10^{-8}$	$1.11 \times 10^{-7}$	$9.48 \times 10^{-8}$	$5.86 \times 10^{-5}$	0	$3.47 \times 10^{-8}$	0.003	0.751
$E^{stat}$	$7.26 \times 10^{-7}$	$6.37 \times 10^{-6}$	$9.72 \times 10^{-8}$	$1.67 \times 10^{-5}$	0.000705	$3.47 \times 10^{-8}$	0	0.163	0.274
$K$	0.0014	0.0010	0.0330	0.0131	0.0063	0.0028	0.16	0.000	0.223
$\nu$	0.760	0.773	0.769	0.781	0.753	0.751	0.274	0.223	0.000

Удостоверившись о наличии связи между текстурными параметрами с величинами модулей упругости, можно провести регрессионный анализ для аппроксимации этих связей математическими функциями.

Для проведения геотехнических вычислений в том числе построения геомеханических моделей необходимо определить статические модули упругости. Поскольку динамические модули упругости являются более доступными, применяются различные эмпирические корреляционные зависимости для оценки статических модулей упругости по имеющимся

величинам динамических модулей упругости (см. приложение 1, глава 1).

**Рис. 4.4** показывает зависимость величин статических модулей упругости от динамических. Линия – это подобранная кривая, вычисленная методом наименьших квадратов [62], полученная на основе минимизации следующего выражения:

$$\Psi = \sum_{i=1,n} \left[ \frac{F_i^{real} - F_i^{estimated}}{F_i^{real}} \right]^2, \quad (4.9)$$

где,  $F^{real}$  и  $F^{estimated}$  - это величины модулей Юнга, определённые по измеренным экспериментальным данным, и вычисленные величины модуля Юнга по предложенным для них корреляционным зависимостям.  $n$  – это число экспериментальных измерений (в данной работе  $n = 19$ ). Для решения вышеуказанной задачи наименьших квадратов применен алгоритм Левенберга-Маркварта [114], [123], включенный в библиотеку Compaq Visual Fortran 6.6.

Значение R-квадрат (коэффициент детерминации) вычисляется для определенных бинарных корреляционных зависимостей по следующему уравнению:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (F_i^{real} - F_i^{estimated})^2}{\sum_{i=1}^n (F_i^{real} - \bar{F}_i^{real})^2}, \quad (4.10)$$

где,  $\bar{F}_i^{real}$  - это среднее значение результатов лабораторных измерений соответствующей величины. Значение коэффициента детерминации показывает степень эффективности выбранной нами регрессионной модели. Значение коэффициента детерминации корректируется для количества

предикторов и имеющихся данных для построения регрессионной модели следующим образом (предиктор – это независимый параметр регрессионной модели, в нашем случае динамический модуль упругости является предиктором):

$$R_{adj}^2 = 1 - \left[ \frac{(1 - R^2)(N - 1)}{N - k - 1} \right], \quad (4.11)$$

где  $k$  это число неизвестных коэффициентов регрессионной модели (для нашего случая  $k = 2$ ). Высокое значение R-квадрат демонстрирует высокую корреляцию между имеющимися экспериментальными данными (наблюдениями, которые, как предполагается, зависят от предикторов) и предикторами.

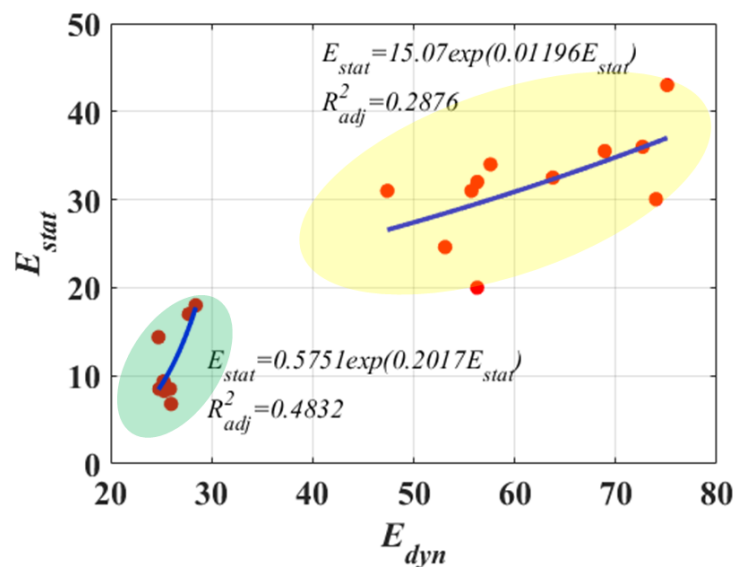


Рис. 4.4. Зависимость статических модулей упругости от динамических.

Как видно из рисунка, значения модуля Юнга исследуемых образцов можно разделить на две группы на основе их величин. Для образцов с относительно высоким значением коэффициента общей пористости ( $\phi > 10\%$ ), величины модуля Юнга низкие (зона, выделенная на рисунке зеленым

цветом), в то время как величины модуля Юнга образцов, у которых значение коэффициента общей пористости относительно низкое ( $\phi < 8\%$ ), являются высокими (зона, выделенная желтым цветом на рисунке). Корреляционные зависимости между динамическими и статическими модулями упругости имеют следующий вид (для модулей в ГПа):

Для образцов с высоким значением коэффициента общей пористости:

$$E_{stat} = 15.07 \exp(0.01196E_{dyn}) \quad R^2_{adj} = 0.28. \quad (4.12)$$

Для образцов с низким значением коэффициента общей пористости:

$$E_{stat} = 0.5751 \exp(0.2017E_{dyn}) \quad R^2_{adj} = 0.48. \quad (4.13)$$

Исходя из полученных корреляционных зависимостей, можно заметить, что значение R-квадрат для образцов с низкими значениями коэффициента общей пористости и высокими величинами модулей Юнга выше. Это свидетельствует о том, что применение эмпирических корреляционных зависимостей для оценки статических модулей упругости на основе динамических величин для горных пород с низким значением коэффициента общей пористости (<5%) может быть приемлемым подходом и, наоборот, применение эмпирических корреляционных зависимостей для горных пород с высоким значением коэффициента общей пористости может привести к неправильным результатам.

Данная корреляция и аналогичные опубликованные эмпирические корреляции для вычисления статического модуля Юнга на основе измеренных в лаборатории динамических модулей Юнга не дают возможности судить о причинах различия статических и динамических модулей и контролирующих эту зависимость параметрах.

Ниже рассмотрено влияние разных микроструктурных параметров моделей пород, полученных в Главе 2, на статический и динамический модули Юнга и их отношение. Далее в этой работе мы называем отношение динамического модуля Юнга к статическому, значением  $K$  и показываем его как  $K$ -значение.

#### 4.3 ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОБЩЕЙ ПОРИСТОСТИ

**Рис. 4.5** показывает зависимость величин статических и динамических модуля Юнга (верхний рисунок) и  $K$ -значения (нижний рисунок) от значений коэффициента общей пористости. В приведенных ниже корреляционных зависимостях пористость дана в процентах, а модули в ГПа.

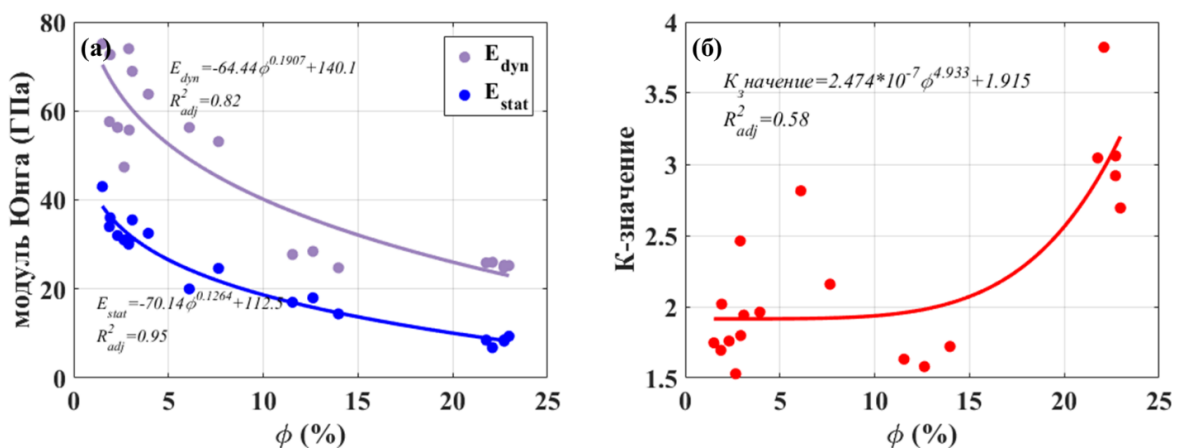


Рис. 4.5. Корреляция между: (а) величинами динамических и статических модулей Юнга и пористостью, (б) величинами параметра  $K$ -значение и пористостью.

Уравнения аппроксимирующих кривых можно записать следующим образом

$$E_{dyn} = -64.44\phi^{0.1907} + 140.1 \quad R_{adj}^2 = 0.82 \quad , \quad (4.14)$$

$$E_{stat} = -70.14\phi^{0.1264} + 112.5 \quad R_{adj}^2 = 0.95 \quad (4.15)$$

$$K_{\text{значение}} = 2.474 \times 10^{-7} \phi^{4.933} + 1.915 \quad R_{adj}^2 = 0.58 \quad (4.16)$$

Высокое значение коэффициента детерминации демонстрирует высокую корреляцию между величинами статических модулей упругости и значениями коэффициента общей пористости ( $R^2=0.95$ ). Высокая корреляция также существует между величинами динамических модулей упругости и значениями коэффициента общей пористости ( $R^2=0.82$ ) (см. **Рис. 4.5** (а)). Значение коэффициента детерминации для параметра К-значение низкое относительно значения коэффициента детерминации для корреляционных зависимостей, полученных для динамических и статических модулей Юнга. Одна из возможных причин - это суммирование ошибок при лабораторных измерениях скоростей упругих волн и измерениях напряженно-деформационных кривых при расчете К-значения.

Для исследуемых в данной работе образцов, исходя из **Рис. 4.5**, можно заключить, что увеличение коэффициента общей пористости снижает величины динамических и статических модулей упругости и повышает различие между величинами статических и динамических модулей упругости. На основе работы [125], для горных пород с низкими прочностными свойствами величины параметра К-значение выше. Исходя из того, что в общем случае прочность горных пород уменьшается с увеличением пористости, можно объяснить полученные на **Рис. 4.5** результаты.

Полученные выше результаты показывают значимость влияния коэффициента пористости на упругое поведение горных пород. Как показано в первой части главы 3, коэффициент пористости также является важным параметром, присущим горной породе, помимо давления и температуры (которые являются внешними параметрами), оказывающим влияние на упругопластическое поведение горных пород. Исходя из значимости этого коэффициента, следует более подробно исследовать параметры, характеризующие поровое пространство, и их влияние на упругие свойства горных пород на примере рассматриваемых в данной работе карбонатных



образцов. Для этого необходимо характеризовать поровое пространство количественными параметрами, описывающими его основные свойства. Эти параметры включают морфологические характеристики пор и трещин, пористость различных систем пустот (пор, трещин), их размер, степень связности, упругие свойства вещества, заполняющего пустоты и т.п. Чтобы учесть все вышеупомянутые параметры необходимо провести анализ изображений РЭМ в разных масштабах и построить цифровую модель керна, как сделано в работе [90] и [98]. После этого следует провести искусственные эксперименты или использовать статистические методы такие как нейронная сеть, дерево принятия решений, дискриминационный анализ, метод опорных векторов (SVP) и т.д., для искусственного воспроизведения имеющихся результатов и прогноза нужного параметра (например, для нашего случая это динамические и статические модули упругости и их соотношение) при разных характеристиках порового пространства (предикторы). Данные, полученные прямо из изображений РЭМ, имеют большие неопределенности, поскольку они определены на основе двухмерных картинок и нельзя их интерпретировать, как пространственные параметры особенно для карбонатных образцов, где трещины составляют основной объем порового пространства. Помимо сложности пространственной реконструкции трещин, в карбонатных породах высока степень неоднородности их строения.

Данные КТ-сканирования (компьютерной томографии) позволяют получать трехмерные изображения керна. Однако для карбонатных пород существует проблема сегментации изображения, которая заключается в трудности разделения пустотного пространства и твердого вещества.

На основе вышеупомянутых моментов, и исходя из высокой степени неоднородности и литологических свойств исследуемых в этой работе образцов, для характеристики порового пространства мы применили подходы теории эффективных сред и, в частности, метод обобщенного сингулярного приближения (ОСП). Теоретическое обоснование данного метода представлено в главе 1. С помощью метода ОСП построены две петроупругие

модели для изученных образцов. Описание петроупругих моделей и их параметров представлены в главе 2.

**Рис. 4.6** (а-б) показывает зависимость величин динамических (фиолетовые маркеры) и статических (синие маркеры) модулей Юнга, их отношений (К-значение) (красные треугольники), определённых по лабораторным измерениям, от значений коэффициента связности пустот, полученного в результате решения обратной задачи. На рисунке также отображены соответствующие аппроксимирующие зависимости. Уравнения соответствующих аппроксимирующих кривых имеют вид (для модулей в ГПа):

$$E_{dyn} = 20.63f^{-1.051} \quad R_{adj}^2 = 0.76 \quad (4.17)$$

$$E_{stat} = 7.649f^{-1.392} \quad R_{adj}^2 = 0.88 \quad (4.18)$$

$$K_{значение} = 4.781f^{8.769} + 1.913 \quad R_{adj}^2 = 0.60 \quad (4.19)$$

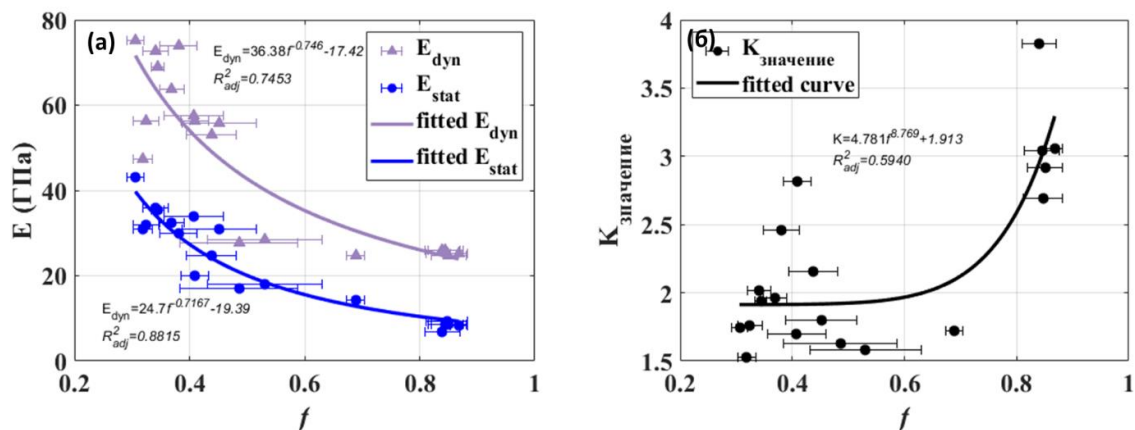


Рис. 4.6. Зависимость (а) динамических и статических модулей упругости, (б) К-значения от параметра связности пустот.

Как видно из **Рис. 4.6**, значения коэффициента детерминации высокие, что, в свою очередь, свидетельствует о хорошем качестве выбранной

зависимости между величинами статических и динамических модулей Юнга (их часто трактуют как прочностные свойства, называя модулями прочности) и К-значения и связностью пустот. На основе полученных зависимостей можно сделать вывод, что увеличение связности порового пространства (увеличение отношения  $k/\phi$ ) приводит к уменьшению величин упругих модулей и, соответственно, увеличению К-значения. Аналогичное влияние связности пустот на упругие свойства горных пород было отмечено в работах [170] и [101].

**Рис. 4.7** (а-б) отображает зависимость величин динамических (фиолетовые маркеры) и статических (синие маркеры) модулей Юнга и их отношений (К-значение) (красные треугольники), определённых по лабораторным измерениям, от значений трещинной пористости, полученной в результате решения обратной задачи. Уравнения аппроксимирующих зависимостей для трех корреляций можно записать в виде (для модулей в ГПа, пористости в процентах):

$$E_{dyn} = 88.12\phi_c^{-0.1835} - 86.47 \quad R_{adj}^2 = 0.89 \quad (4.20)$$

$$E_{stat} = 20.91\phi_c^{-0.3316} - 21.56 \quad R_{adj}^2 = 0.90 \quad (4.21)$$

$$K_{\text{значение}} = 3.429\phi_c^{0.2008} \quad R_{adj}^2 = 0.30 \quad (4.22)$$

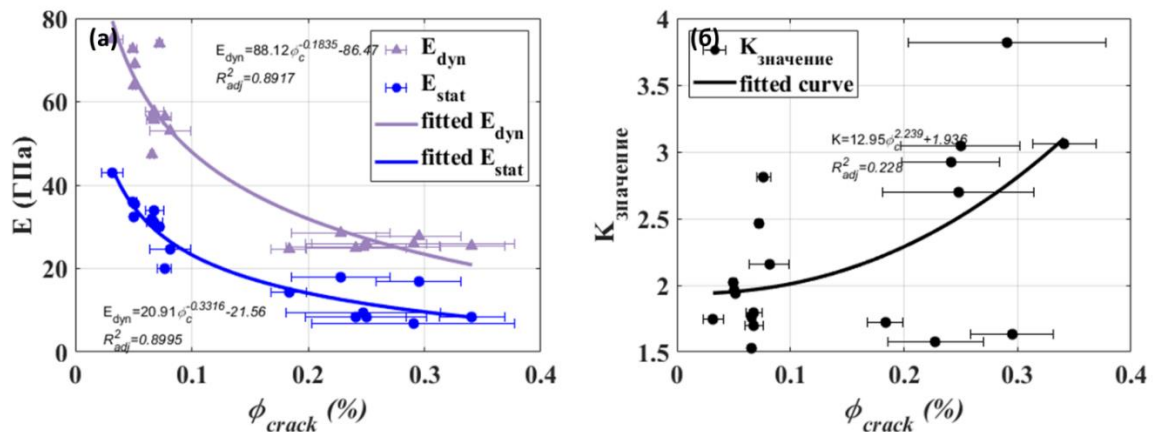


Рис. 4.7. Зависимость (а) динамических и статических модулей упругости, (б) К-значения от пористости трещиноватости.

Исходя из анализа значений коэффициента детерминации, можно заключить, что выбранные функции хорошо аппроксимируют данные зависимости. Низкое значение этого коэффициента для К-значения в основном из-за накопления ошибок при измерении скоростей упругих волн и при измерении напряжений и деформаций при проведении трехосных испытаний. Исходя из построенных корреляций, можно сказать, что увеличение трещинной пористости приводит к уменьшению как динамического, так и статического модуля Юнга. С увеличением объемной доли трещин требуемое напряжение для скольжения плоскости трещин относительно друг друга уменьшается, вследствие чего уменьшаются вязкость разрушения (сопротивление материала распространению трещины) и коэффициент сцепления горных пород (Costin 1983), (Hatzor, Zur, and Mimran 1997). Как было отмечено ранее, параметр К-значение повышается при уменьшении прочности горных пород. Влияние трещин на упругие свойства горных пород и значение К подробно рассмотрено в работе [125]. Согласно результатам упомянутой работы, затухание упругих волн является более чувствительным параметром к присутствию трещин по сравнению со скоростями продольных и поперечных волн. Коэффициент детерминации построенных зависимостей между отношением величин динамических и статических модулей упругости и параметром затухания является более высоким по сравнению со случаем с использованием скоростей продольных и поперечных волн вместо параметра затухания. В методе ОСП, на основе которого мы рассчитали параметры микроструктуры, не учитывается затухание упругих волн в среде. Однако, можно применить этот параметр, предполагая, что трещины заполняются изотропным и вязкоупругим веществом, со значением скорости продольной волны, равным скорости волны Крауклиса [14]. Вычисленные значения скоростей упругих волн в этом случае являются комплексными числами с

мнимой и действительной частями. Затем для каждой скорости теоретическое затухание можно рассчитать, как отношение мнимой и действительной частей соответствующей скорости. Параметры микроструктуры оцениваются, как и прежде, путем решения обратной задачи за исключением того, что помимо минимизации различия между теоретическими и измеренными значениями скоростей упругих волн, минимизируется различие между теоретическими и измеренными значениями параметра затухания для соответствующих упругих волн. В имеющихся лабораторных данных, к сожалению, отсутствуют оценки параметры затухания, и этот подход в настоящее время не может быть применен.

**Рис. 4.8** (а-б) представляет зависимость величин динамических (фиолетовые маркеры) и статических (синие маркеры) модулей Юнга и их отношений ( $K$ -значение) (красные треугольники), определённых по лабораторным измерениям, от аспектного отношения пор, полученного в результате решения обратной задачи. Уравнения аппроксимирующих зависимостей для соответствующих параметров имеют вид (для модулей в ГПа):

$$E_{dyn} = 198.8\alpha_p^{2.136} \quad R_{adj}^2 = 0.67 \quad (4.23)$$

$$E_{stat} = 157.2\alpha_p^{2.861} \quad R_{adj}^2 = 0.81 \quad (4.24)$$

$$K_{\text{значение}} = 1.041\alpha_p^{-1.062} \quad R_{adj}^2 = 0.34 \quad (4.25)$$

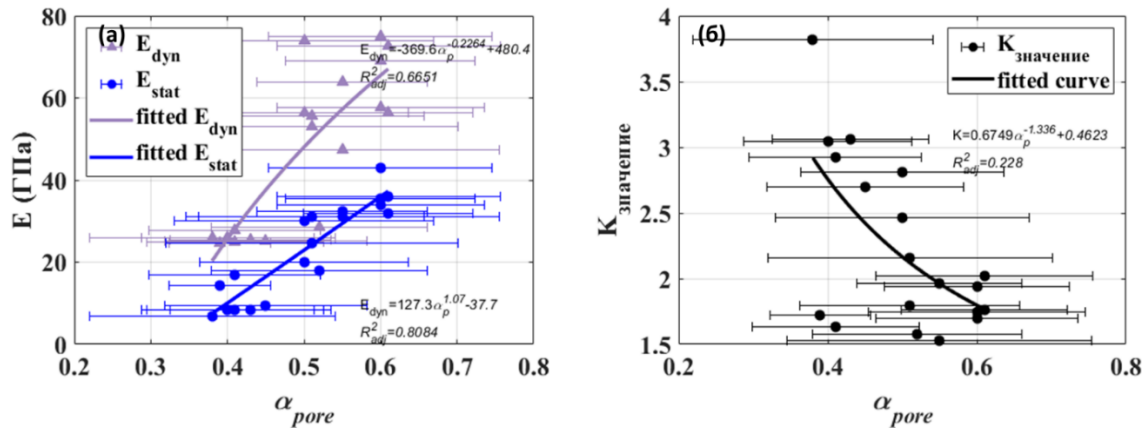


Рис. 4.8. Зависимость (а) динамических и статических модулей упругости, (б) К-значения от формы пор.

Исходя из анализа [Рис. 4.8](#) можно сделать вывод, что динамические и статические модули упругости увеличиваются с увеличением сферичности пор. Как показали результаты теоретического моделирования [17, 18], значения скоростей упругих волн в порово-трещиноватой среде зависят от формы пор и трещин и увеличиваются с увеличением аспектного отношения (сферичности) пустот при фиксированной пористости. Увеличение скоростей упругих волн приведет к увеличению рассчитанных значений динамических модулей Юнга. Полученные экспериментальные зависимости в этой работе показывают, что статические модули Юнга так же, как и динамические, увеличиваются с увеличением сферичности пустот. Вследствие увеличения прочности горных пород различие между величинами динамических и статических модулей прочности уменьшается.

Влияние формы трещин на динамические (фиолетовые маркеры) и статические модули (синие маркеры) упругости и их отношения (К-значение) (красные треугольники) отображено на [Рис. 4.9](#). Уравнения для аппроксимирующих зависимостей имеют вид (для модулей в ГПа):

$$E_{dyn} = 218.3\alpha_c^{-0.75} \quad R_{adj}^2 = 0.60 \quad (4.26)$$

$$E_{stat} = 176.0\alpha_c^{-1.0} \quad R_{adj}^2 = 0.70 \quad (4.27)$$

$$K_{\text{значение}} = 0.93\alpha_p^{0.41} \quad R_{adj}^2 = 0.40 \quad (4.28)$$

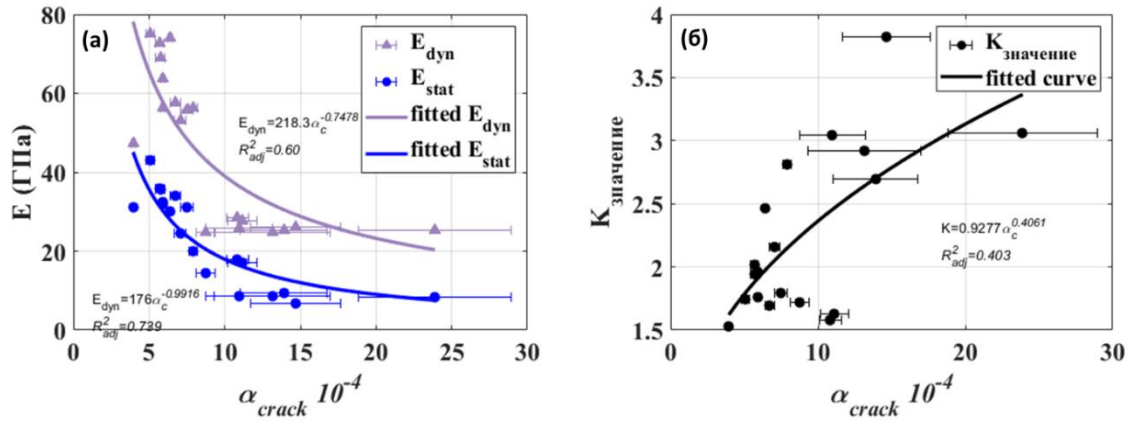


Рис. 4.9. Зависимость (а) динамических и статических модулей упругости, (б) К-значения от формы трещин.

Исходя из этого рисунка, можно заключить, что увеличение раскрытия трещин уменьшает прочностные свойства горных пород, вследствие чего увеличивается значение отношения динамического и статического модулей Юнга. Значения коэффициента детерминации для вычисленных корреляционных зависимостей довольно высокие. Интересно отметить тот факт, что при анализе чувствительности при фиксированных остальных параметрах модели (включая трещинную пористость) получается обратная зависимость. Модули упругости растут с увеличением аспектного отношения трещин. Такое поведение, полученное для реальных данных, может указывать на то, что увеличение аспектного отношения (относительного раскрытия трещин) сопровождается увеличением трещинной пористости, которая, в свою очередь, снижает модули упругости.

Предполагая, что значение коэффициента детерминации для бинарных эмпирических корреляционных зависимостей, построенных выше, показывает степень влияния параметра, в зависимости от которого вычислены корреляции

для динамических и статических модулей Юнга и их отношения, можно сделать заключение, что трещинная пористость оказывает большее влияние на значения динамических и статических модулей упругости. В то время как форма трещин определяет отношение динамических к статическим модулям упругости.

Выше мы представили эмпирические бинарные корреляционные зависимости для вычисления динамических и статических модулей упругости в зависимости от определённых параметров микроструктуры.

#### 4.4 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНИ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ МИКРОСТРУКТУРЫ ПОРОД НА ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОРОД

##### 4.4.1 ЦЕЛЬ ПРИМЕНЕНИЯ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

Целью факторного анализа является описание, по возможности, ковариационных отношений между многими переменными по нескольким основным, но ненаблюдаемым, случайным величинам, называемым факторами (латентными переменными). В принципе, суть факторной модели может быть сформулирована следующим образом. Предположим, что переменные могут быть сгруппированы по их корреляциям. То есть, предположим, что все переменные внутри конкретной группы сильно коррелированы между собой, но имеют относительно слабые корреляции с переменными в другой группе. Тогда можно предположить, что каждая группа переменных представляет собой одну основную конструкцию или фактор, который отвечает за наблюдаемые корреляции.

Поскольку подробное рассмотрение этого метода выходит из рамки данной диссертационной работы, мы коротко представим основы метода факторного анализа. Для более полного описания настоящего метода можно обратиться к работам [177], [70].



Вектор  $\mathbf{X}^{(k \times 1)}$ , с “ $k$ ” компонентами, имея вектор математического ожидания  $\boldsymbol{\mu}^{(k \times 1)}$  и матрицу ковариаций  $\boldsymbol{\Sigma}^{(k \times k)}$ , линейно зависит от нескольких ненаблюдаемых случайных величин  $\mathbf{F}^{(m \times 1)}$ , которые называются “общими факторами” и “ $k$ ” дополнительных вариаций  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k \times 1)}$ , которые называются “погрешностями” или “специфическими (конкретными) факторами”, следующим образом (надстрочные выражения показывают размер соответствующей матрицы):

$$\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{L} \mathbf{F} + \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4.29)$$

Матрица  $\mathbf{L}^{(k \times m)}$  называется матрицей факторных нагрузок и описывает связь между матрицей наблюдений и общими факторами. Описанные выше рассуждения и уравнение (4.29) можно иллюстрировать схемой, представленной на Рис. 4.10. Уравнение (4.29) называется факторной моделью.

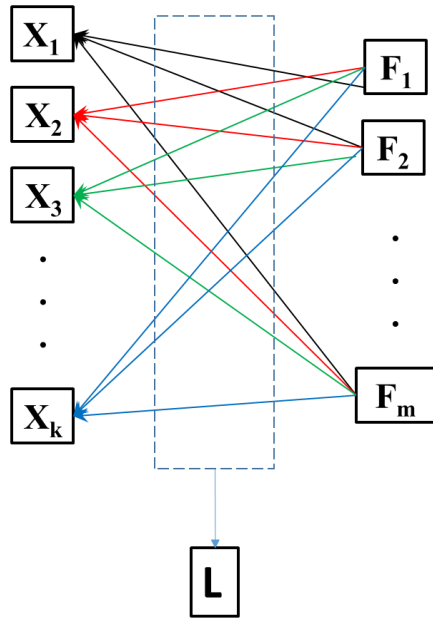


Рис. 4.10. Схема факторной модели.

Для построения факторной модели необходимы некоторые дополнительные предположения о случайных векторах  $\mathbf{F}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . А именно, предположим, что:

$$M(\mathbf{F}) = \mathbf{0}, \quad (4.30)$$

$$M(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}, \quad (4.31)$$

$$Cov(\mathbf{F}) = \mathbf{I}, \quad (4.32)$$

$$cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \psi_k \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Символ  $M$  обозначает математическое ожидание, а  $cov$  – это матрица ковариации. Применив указанные предположения для факторной модели, получаем следующее выражение для ковариации матрицы наблюдений  $\mathbf{X}$ :

$$\Sigma = \mathbf{L}\mathbf{L}^T + \Psi, \quad (4.34)$$

где  $\mathbf{L}^T$  – это транспонированная матрица  $\mathbf{L}$ . На основе уравнения (4.34) можно разделить вариации переменного  $X_i$  на два слагаемых следующим образом:

$$\sigma_{ii} = \ell_{i1}^2 + \ell_{i2}^2 + \dots + \ell_{im}^2 + \psi_i. \quad (4.35)$$

Сумма квадратов  $h_i = \sum_{j=1}^m \ell_{ij}^2$ ,  $j=1, 2, \dots, m$ , называется относительной дисперсией общих факторов (communality), а второе слагаемое называется специфической дисперсией (specific variance) [84]. По терминологии факторного анализа  $i$ -я относительная дисперсия представляет собой сумму квадратов «нагрузок»  $i$ -й переменной на  $m$  факторов.

Уравнение (4.34) содержит два неизвестных члена: матрицу  $\mathbf{L}$  и матрицу  $\Psi$ . В данной работе мы рассмотрим два самых популярных метода оценки этих неизвестных матриц – метод главных компонент (principle component approximation – PCA) и метод максимального правдоподобия (maximum likelihood method – MLM).

#### 4.4.2 МЕТОД ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ (МГК):

Если предположить, что последние  $k$ - $m$  собственных значений матрицы ковариации наблюдений малы, то спектральное разложение матрицы ковариации наблюдений будет аналогично (4.34) Следовательно, можно написать [84]:

$$\Sigma = \mathbf{L}\mathbf{L}^T + \Psi = [\sqrt{\lambda_1}\mathbf{e}_1 : \sqrt{\lambda_2}\mathbf{e}_2 : \dots : \sqrt{\lambda_m}\mathbf{e}_m] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\mathbf{e}_1^T \\ \dots \\ \sqrt{\lambda_2}\mathbf{e}_2^T \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ \sqrt{\lambda_m}\mathbf{e}_m^T \end{bmatrix} + \quad (4.36)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \psi_k \end{bmatrix}$$

где  $\lambda_i$  и  $\mathbf{e}_i$  — это собственные значения и собственные векторы матрицы ковариации ( $\Sigma$ ) и  $\psi_i = \sigma_{ii} - \sum_{j=1}^m \rho_{ij}^2$  для  $i=1, 2, \dots, k$ .

#### 4.4.3 МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ (ММП):

Предполагая, что общие факторы  $\mathbf{F}$  и погрешность  $\varepsilon$  описываются нормальным распределением, можно получить оценки максимального правдоподобия факторных нагрузок и конкретных дисперсий ( $\varepsilon$ ). При таких предположениях матрица наблюдений ( $\mathbf{X}$ ) также описывается нормальным распределением, и функция правдоподобия  $L$  выражается следующим образом [84], [177]:

$$L(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) = 2\pi^{-\frac{(N-1)k}{2}} \|\Sigma\|^{-\frac{(N-1)}{2}} \exp\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)tr\left[\Sigma^{-1}\left(\sum_{j=1}^N(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})^T\right)\right]\right\} \times \quad (4.37)$$

$$2\pi^{-\frac{k}{2}} \|\Sigma\|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\left(\frac{N}{2}\right)(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})\right\}.$$

Где  $N$  — это число наблюдений. В этом выражении для  $\mathbf{L}$  и  $\Psi$  выполняется условие (4.34). Максимизация функции правдоподобия дает решение задачи. Эта модель недоопределена из-за неоднозначности выбора  $\mathbf{L}$  (не

единственность ортогонального преобразования факторной модели (4.34). Как и в любой задаче оптимизации недоопределенной модели, необходимо установить ограничения на искомые параметры. Как указано в работах [84, 169, 177], можно сформулировать следующее условие единственности для матрицы нагрузок:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{\Psi}^{-1} \mathbf{L} = \mathbf{\Delta} \quad (4.38)$$

где  $\mathbf{\Delta}$  – это диагональная матрица. Следовательно, задачу оптимизации (4.37) можно записать, используя множители Лагранжа:

$$\min \left\{ L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) - \gamma (\mathbf{L}^T \mathbf{\Psi}^{-1} \mathbf{L} - \mathbf{\Delta}) \right\}, \quad (4.39)$$

где  $\gamma$  – это матрица множителей Лагранжа.

Как показано на практике, значения матрицы погрешности значительно меньше при применении метода максимального правдоподобия относительно значений матрицы погрешности, полученных путем применения метода главных компонент. Однако всегда целесообразно рассчитать матрицу нагрузок ( $\mathbf{L}$ ) и конкретных факторов ( $\mathbf{\Psi}$ ) разными способами [169].

#### 4.4.4 КРИТЕРИЙ БАРТЛЕТТА ДЛЯ ПРОВЕРКИ АДЕКВАТНОСТИ ФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ

Предположение о нормальном распределении  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{\Psi}$  приводит непосредственно к проверке адекватности факторной модели. Предположим, что имеет место общая факторная модель (4.34). В этом случае тестирование адекватности общей факторной модели эквивалентно тестированию следующей статистической гипотезы:

$$\begin{cases} H_0 : \boldsymbol{\Sigma}^{(k \times k)} = \mathbf{L}^{(k \times m)} \mathbf{L}^{T(m \times k)} + \mathbf{\Psi}^{(k \times m)} \\ H_1 : \boldsymbol{\Sigma} \text{ является иной матрицей} \end{cases} \quad (4.40)$$

Для данного случая статистика коэффициента правдоподобия для тестирования нулевой гипотезы имеет хи-квадрат распределение и выражается как [9]:

$$\chi^2 = \left[ N - 1 - \left( \frac{(2 \times k + 4m + 5)}{6} \right) \right] \ln \left[ \frac{\|\hat{\Sigma}\|}{\|\Sigma\|} \right], \quad (4.41)$$

где  $w$  – это отношение детерминанта определенной матрицы ковариации методом максимального правдоподобия (максимального правдоподобия при нулевой гипотезе ( $H_0$ )) к исходной матрице ковариации (максимальному правдоподобию) ( $w = \|\hat{\Sigma}\| / \|\Sigma\|$ ). Следовательно, мы отвергаем нулевую гипотезу при критическом уровне значимости  $\alpha^{critical}$  при следующем условии [9]:

$$\chi^2 \left( \chi, \frac{1}{2} \left[ (k - m)^2 - k - m \right] \right) < \alpha^{critical} \quad (4.42)$$

где  $\chi^2$  – это распределение хи-квадрат, и  $\hat{\mu}$  и  $\hat{\Sigma}$ , это математическое ожидание и ковариация, определенные одним из вышеуказанных способов (МГК или ММП).

#### 4.4.5 ОЦЕНКА ЗНАЧЕНИЙ ОБЩИХ ФАКТОРОВ

В факторном анализе интерес обычно сосредоточен на параметрах факторной модели. Однако также иногда требуется определить значения общих факторов. Эти величины часто используются для диагностических целей, а также для последующего анализа. Существует разные методики для оценки значений общих факторов, среди них метод взвешенных наименьших

квадратов (ВНК) и метод регрессии чаще остальных используются для практических целей.

#### 4.4.5.1 МЕТОД ВЗВЕШЕННЫХ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (ВНК)

Предполагаем, что вектор средних значений наблюдений  $\mu$ , факторные нагрузки  $L$ , и конкретные дисперсии  $\Psi$  известны для факторной модели (4.34). Далее, рассмотрим конкретные факторы  $\varepsilon$  как погрешность. Так как  $D(\varepsilon_i) = \psi_i$ ,  $i=1, 2, \dots, k$  не обязательно должны быть равными ( $D$  – это дисперсия), Бартлетт [8] определил значения общих факторов с помощью метода ВНК следующим образом [8]:

$$\hat{f}_j = (\hat{L}^T \hat{\Psi}^{-1} \hat{L})^{-1} \hat{L}^T \hat{\Psi}^{-1} (x_j - \bar{x}) \quad (4.43)$$

Когда  $\hat{L}$  и  $\hat{\Psi}$  определяются методом максимального правдоподобия, эти оценки должны удовлетворять условию единственности (4.38).

#### 4.4.5.2 МЕТОД РЕГРЕССИИ

Имея матрицу нагрузок  $L$  и матрицу конкретных дисперсии  $\Psi$ , и предполагая, что общие факторы  $F$  и конкретные факторы (или погрешности)  $\varepsilon$  совместно нормально распределенные, можно получить следующее выражение для расчета общих факторов [84]:

$$\hat{f}_j = \hat{L}^T (\hat{L} \hat{L}^T + \hat{\Psi})^{-1} (x_j - \bar{x}) \quad (4.44)$$

Для полученных результатов на основе метода максимального правдоподобия, если элементы диагональной матрицы (4.38) близки к нулю,

методы регрессии и обобщенного метода наименьших квадратов дадут примерно схожие результаты.

#### 4.4.6 ПРОВЕРКА ПРИМЕНИМОСТИ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ АНАЛИЗА ПАРАМЕТРОВ МИКРОСТРУКТУРЫ ИЗУЧЕННЫХ ПОРОД

Перед проведением факторного анализа необходимо проверить данные для применимости этого анализа. Самым простым способом является построение матрицы корреляции. Высокие значения коэффициентов корреляции между значениями параметров, которые предполагаются независимыми, показывает возможную связь между этими параметрами. Следовательно, если значения коэффициентов корреляции относительно высокие ( $> 0.3$  [84]) стоит рассмотреть факторный анализ как метод для уменьшения размерности параметров факторной модели. Один из успешных подходов к проверке применимости метода факторного анализа был предложен Генри Кайзером в 1970 [95] на основе сравнения коэффициентов корреляции с их суммарным значением. Этот метод был затем модифицирован Кайзером и Рисом в 1974 [96]. По методу Кайзера и Риса рассчитывается индекс  $I$  следующим образом:

$$I^{KMO} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (r_{ij} - \delta_{ij})^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (r_{ij} - \delta_{ij})^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij}}, \quad (4.45)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{\Omega} - \text{diag}(\mathbf{\Omega}), \quad (4.46)$$

где  $\mathbf{\Omega}$  – является «анти-имиджевой корреляционной матрицей» по терминологии исходной работы Кайзера и Рисом [96] и выражается следующим образом:



$$\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\mathbf{\Theta})\mathbf{\Theta}^{-1}\text{diag}(\mathbf{\Theta}), \quad (4.47)$$

$\mathbf{\Theta}$  – это анти-имиджевая матрица ковариации по терминологии, представленной в работе [96]. Ее можно определить, имея матрицу коэффициентов корреляции, следующим образом:

$$\mathbf{\Theta} = \text{diag}\left(\frac{1}{\mathbf{r}'}\right)\mathbf{r}'\text{diag}\left(\frac{1}{\mathbf{r}'}\right), \quad (4.48)$$

где  $\mathbf{r}'$  это обратная матрица коэффициентов корреляций  $\mathbf{r}$  и  $\frac{1}{\mathbf{r}'}$  содержит члены  $\frac{1}{r'_{ij}}$ .

Индекс Кайзера-Риса обычно называют индексом Кайзера-Майера-Олкина (КМО). Этот индекс меняется от 0 до 1 и иллюстрирует, до какой степени каждую переменную в наборе данных можно предсказать без ошибок другими переменными. Хайер (2009, [67]) предложил применить значение 0.5 как пороговое для проведения факторного анализа. То есть при значениях индекса КМО меньше 0.5 корреляции между параметрами данных низкие и не стоит применять факторный анализ для уменьшения размера данных. По работе Хайера значения между 0.5 и 0.7 являются посредственными, а значения между 0.7 и 1.0 являются хорошими.

Для имеющихся данных индекс КМО составляет 0.74, что свидетельствует о сильной связи между предполагаемыми независимыми параметрами (параметрами микроструктуры).

В идеальном случае вклад первых нескольких факторов в дисперсии значений параметров должен быть большим. Следовательно, для выбора числа общих факторов  $m$  мы сначала анализируем, какую долю дисперсии ( $\Lambda$ ) обеспечивает фактор  $j$ . По данному методу число общих факторов постепенно

увеличивается и рассчитывается следующая доля, которая является вкладом назначенных общих факторов в общую дисперсию выборки [84]:

$$\Lambda = \frac{\sum_{j=1}^{m \text{ назначенный}} \hat{\lambda}_j}{tr(\Sigma)} \quad (4.49)$$

Процесс увеличения числа общих факторов продолжается до того момента, пока доля общей дисперсии выборки из-за появления  $j$ -го фактора не станет значительно высокой ( $> 0.90$  [84]). Число общих факторов ( $m$ ) также должно удовлетворять следующей степени свободы Бартлетта, которая позволяет проверить достоверность факторной модели с помощью метода Бартлетта [9]:

$$m < \frac{1}{2} (2k + 1 - \sqrt{8k + 1}). \quad (4.50)$$

Для нашего случая ( $k=5$ ) степень свободы Бартлетта составляет 2.3. С другой стороны, доля общей дисперсии выборки из-за первых двух общих факторов равняется 0.9503, что свидетельствует о том, что один общий фактор может описывает 95.03 % от общей дисперсии имеющихся данных. Для расчета матрицы нагрузок данные нормализованы следующим образом:

$$z_j = \begin{bmatrix} \frac{(x_{j1} - \bar{x}_1)}{\sqrt{\sigma_{11}}} \\ \frac{(x_{j2} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sigma_{22}}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{(x_{jk} - \bar{x}_k)}{\sqrt{\sigma_{kk}}} \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Следовательно, матрица ковариации нормализованных данных соответствует матрице коэффициентов корреляции исходных данных. Этот подход позволяет получить нормализованную матрицу нагрузок, значения которой изменяются между -1 и 1. Матрица нагрузок (**L**) определена методом ММП, описанным выше, и результаты представлены в **Табл. 4.11**.

Табл. 4.11. Результаты факторного анализа. Первая и вторая колонки показывают значения нагрузок на первый и второй общий фактор соответственно. Третья и четвертая колонки — это значения относительной и специфической дисперсий общих факторов.

	$\hat{\ell}_{i1}$	$\hat{\ell}_{i2}$	$\hat{h}_i$	$\psi_i$
<b><i>φ</i></b>	0.9779	-0.0223	0.9568	0.0432
<b><i>f</i></b>	0.9655	-0.0361	0.9335	0.0665
<b><i>φ<sup>c</sup></i></b>	0.9596	0.0752	0.9265	0.0735
<b><i>α<sup>ноп</sup></i></b>	-0.8936	0.4081	0.9651	0.0349
<b><i>α<sup>c</sup></i></b>	0.9061	0.3854	0.9696	0.0304

Результаты проверки адекватности модели по критерию Барлетта показывают, что так как имеет место равенство:

$$\left[ N - 1 - \left( \frac{(2 \times k + 4m + 5)}{6} \right) \right] \ln \left[ \frac{\|\hat{\Sigma}\|}{\|\Sigma\|} \right] =$$

$$\left[ 19 - 1 - \left( \frac{(2 \times 5 + 4 \times 2 + 5)}{6} \right) \right] \ln \left[ \frac{2.403 \times 10^{-4}}{2.2011 \times 10^{-4}} \right] = 1.2279 \quad (4.52)$$

для  $\frac{1}{2}[(k - m)^2 - k - m] = 2$  степени свободы Бартлетта, при 5% критическом значении,  $\chi^2(0.05, 2) = 5.991$  не превышено, и мы не можем отклонить  $H_0$ . Следовательно можно заключить, что данные не противоречат предложенной двухфакторной модели. На самом деле, наблюдаемый уровень значимости, или Р-значение  $P[\chi^2_{\text{ст.св}=2} > 5.991] = 0.5356$  означает, что  $H_0$  не будет отвергнута на любом разумном уровне.

Расчётные значения для нагрузок латентного параметра показывают значимость предполагаемых независимых параметров. По представленным результатам в **Табл. 4.11**, значимость коэффициента общей пористости больше остальных параметров. Это вполне ожидаемый и физически приемлемый результат. Значения матрицы нагрузок показывают, что нагрузки первого латентного фактора высокие для параметра связности пустот и трещиной пористости относительно формы пустот. Однако значения нагрузок второго латентного фактора значительно низки для коэффициента общей пористости, параметра связности пустот и трещиной пористости (второй и третий параметр по значимости соответственно) относительно значениям нагрузок для формы пустот. Следовательно, можно сказать, что первый латентный фактор отвечает за параметры, которые связаны с объемной долей пустот (*объемный фактор*) а второй латентный фактор отвечает за микроморфологические характеристики пустот (*фактор формы*).

Мы определили значения общих факторов ( $F_1$  и  $F_2$ ) по двум вышеуказанным методам (методом ВНК и методом регрессии) (см. **Табл. 4.12**). Сходства значений общих факторов, рассчитанных по двум методам,

показывает незначительность матрицы конкретных факторов (погрешности) и, следовательно, точность предложенной факторной модели [84].

Табл. 4.12. Расчётные значения общих факторов, определенные по методам ВНК и регрессии для всех 19 наблюдений.

N	ВНК		Регрессия	
	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>
1	-0.0646	-0.6523	-0.075	-0.6399
2	-0.2711	-0.5804	-0.2761	-0.5732
3	-0.3488	-0.8329	-0.3568	-0.8219
4	-0.5716	-0.6999	-0.5729	-0.6956
5	-0.6063	-0.7043	-0.6069	-0.7005
6	-0.5113	-0.5057	-0.5103	-0.5043
7	-0.6936	-0.8387	-0.6949	-0.8337
8	0.0658	-0.9066	0.0483	-0.8867
9	-0.3038	-0.6947	-0.3103	-0.6857
10	-0.9223	-0.3299	-0.91	-0.3395
11	-0.8947	-0.3481	-0.8832	-0.3568
12	-1.8602	2.761	-1.7743	2.6706
13	0.9148	-0.1289	0.8944	-0.1099
14	-0.7928	1.3847	-0.7524	1.3419
15	1.7324	0.0409	1.6989	0.071
16	1.5819	0.2103	1.5545	0.2341
17	1.6384	0.1686	1.6091	0.1944
18	0.7944	1.7093	0.8092	1.6881
19	1.1134	0.9475	1.1084	0.9478

Высокие значения нагрузок для всех параметров (несмотря на их малое различие) мотивирует построить многопараметрическую регрессионную модель, чтобы подробно рассмотреть более общую функцию для описания связи между наблюдениями и независимыми параметрами. Исходя из того, что параметры модели имеют разную значимость, существует оптимальное количество независимых параметров для описания связи. Превышение оптимального количества независимых параметров приводит к добавлению шума в регрессионную модель.

Предполагаем, что регрессионная модель имеет следующий линейный вид:

$$\mathbf{Y}^{(N \times 1)} = \mathbf{C}^{(1 \times k)} \mathbf{X}^{(k \times N)} + \boldsymbol{\delta}^{(N \times 1)}, \quad (4.53)$$

где  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{X}$  и  $\boldsymbol{\delta}$  – это матрица неизвестных коэффициентов, матрица предполагаемых независимых параметров и матрица погрешности с распределением  $N(0, \sigma)$ . Введем следующее обозначение для линейной регрессионной модели:  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Для вышеуказанной линейной модели регрессии определяется так называемая *кажущаяся ошибка*, которая имеет распределение  $\sigma^2 \chi^2_{N-k-1}$ , следующим образом [210]:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2. \quad (4.54)$$

Для проверки достоверности предложенной модели определяем нулевую и альтернативную гипотезы следующим образом:

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{C} = \mathbf{0} \\ H_1 : \mathbf{C} \neq \mathbf{0} \end{cases}. \quad (4.55)$$

Для нашей линейной регрессионной модели следующее выражение имеет распределение Фишера [55] с указанными в уравнении числами степеней свободы [210]:

$$F_{k, N-k-1} = \frac{\frac{1}{k} \sum_{l=0}^k (\beta_l - c_l)^2 \langle W^l, W^l \rangle}{\frac{1}{N-k-1} \Delta^2}, \quad (4.56)$$

где  $W^l$  это коллинеарная проекция параметра  $x^l$  на ортогональную систему  $\mathbf{W}$  (процесс Грама — Шмидта). Поэтому по заданному уровню

критической значимости  $\alpha$  можно указать такое  $F_\alpha$ , что нулевую гипотезу можно отвергнуть при следующем условии:

$$P \left\{ \frac{1}{m} \sum_{l=0}^k (\beta_l - c_l)^2 \langle W^l, W^l \rangle > \frac{F_\alpha}{N - k - 1} \Delta^2 \right\} = \alpha. \quad (4.57)$$

Теперь рассмотрим вопрос о выборе оптимального количества независимых параметров –  $k^{opt}$ . Следует начать с небольшого количества параметров и увеличивать  $k$  ( $k \rightarrow k + 1$ ), строя на каждом этапе регрессионную модель  $\mathcal{R}$ . Выбор независимого параметра для добавления в регрессионную модель проводится по значимости параметров, которая определена в результате применения факторного анализа. Увеличение числа независимых параметров на каждом этапе уменьшает кажущуюся ошибку ( $\Delta^2$ ). Но возникает вопрос, достаточно ли сильно уменьшение кажущейся ошибки при переходе от  $k_1$  к  $k_2$ , чтобы обосновать необходимость такого перехода? Статистический критерий для решения этого вопроса представлен в работе Тутубалина, 1992 [210].

Для этого предложим  $\mathfrak{R}^{(1)} = \mathfrak{R}(\mathbf{X})$ ,  $\mathfrak{R}^{(2)} = \mathfrak{R}(\mathbf{a})$ ,  $k_2 > k_1$ , где  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_{k_1}) \in \mathfrak{R}^{(1)}$  и  $\mathbf{a} = (x_1, x_2, \dots, x_{k_2}) \in \mathfrak{R}^{(2)}$ . Следовательно, нулевую и альтернативную гипотезы можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} H_0 : \mathbf{a} \in \mathfrak{R}^{(1)} \\ H_1 : \mathbf{a} \notin \mathfrak{R}^{(1)} \end{cases} \quad (4.58)$$

При верной (альтернативной) гипотезе следующая статистика имеет распределение Фишера с указанным в уравнении числом степеней свободы [210]:

$$F_{k_2-k_1, N-k_2-1} = \frac{\frac{1}{k_2-k_1}(\Delta_1^2 - \Delta_2^2)}{\frac{1}{N-k_2-1}\Delta_2^2}. \quad (4.59)$$

Вследствие этого можно проверить гипотезу  $\mathbf{a} \in \mathfrak{R}^{(1)}$  стандартным путем, и при необходимости отклонить ее следует увеличить число независимых параметров

Для имеющихся в этой работе данных были ранее построены бинарные корреляционные зависимости и получена сильная связь между модулями и параметрами модели, когда функция аппроксимации является степенной ( $\mathfrak{R} \equiv \mathbf{Y} \sim c_1 \mathbf{X}^{c_2}$ ). Предполагая, что каждый параметр влияет на упругие модули и К-значение независимо от других параметров, корреляции между величинами упругих свойств и К-значений с параметрами микроструктуры являются суперпозициями определенных выше бинарных эмпирических корреляционных зависимостей. Следовательно, можно построить линейную регрессионную модель для наблюдений следующим образом:

$$\mathfrak{R} \equiv \ln(\mathbf{Y}^{(N \times 1)}) \sim \mathbf{C}^{(1 \times k^{opt})} \mathbf{X}^{(k^{opt} \times N)}, \quad (4.60)$$

где  $k^{opt}$  оптимальное число независимых параметров. Результаты определения оптимального числа независимых параметров представлены на **Рис. 4.11**. Так как общая пористость имеет высокую значимость относительно других рассмотренных параметров микроструктуры, начинаем строить регрессионную модель для наблюдений в зависимости от этого параметра. Проверим вероятность принятия нулевой гипотезы (4.55), которая заключается в неприемлемости предложенной бинарной модели регрессии  $\mathfrak{R}^{(1)} \equiv \ln(\mathbf{Y}^{(N \times 1)}) \sim \mathbf{C}^{(1 \times 1)} \phi_c^{(N \times 1)} + \boldsymbol{\delta}^{(N \times 1)}$  между величинами наблюдений и значениями общей пористости, определением статистики (4.59). Исходя из



**Рис. 4.11**, предложенная модель применима для описания связи между величинами статических и динамических модулей Юнга и их отношения (К-значения) с общей пористостью. Продолжим наше исследование по построению многопараметрической регрессионной модели с оптимальным числом независимых параметров с увеличением числа независимых параметров. Так как параметр связности пустот является вторым по значимости, проверим значимость уменьшения погрешности регрессионной модели при добавлении параметра связности пустот

$$\mathfrak{R}^{(2)} \equiv \ln(\mathbf{Y}^{(N \times 1)}) \sim \mathbf{C}^{(N \times 2)} \begin{bmatrix} \phi_c^{(N)} \\ f^{(N)} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\delta}^{(N \times 1)}. \quad (4.61)$$

Проверим вероятность приема нулевой гипотезы (4.58) определением статистики (4.59). Как представлено на рисунке для многопараметрической регрессионной модели, построенной для описания связи между величинами динамического и статического модели упругости и их отношение с значениями общей пористости и параметра связности пустот, мы не можем принять нулевую гипотезу. Следовательно,  $\mathbf{a} = (f, \phi_t) \notin \mathfrak{R}^{(1)}$  и применение параметра  $f$  в качестве дополнительного независимого параметра (предиктора) значительно уменьшает погрешность для оценки динамического и статического модуля упругости и К-значения. Добавим трещинную пористость как третий независимый параметр к многопараметрической регрессионной модели, построенной для динамического и статического модуля Юнга и К-значения в предыдущем этапе и повторим вышеуказанный алгоритм. Для этого случая мы не можем отклонить нулевую гипотезу (4.58) для построенных регрессионных моделей для описания динамического модуля упругости и К-значения, и процесс добавления независимых параметров к регрессионной модели для динамического модуля упругости и К-значения останавливается. Однако, трещинная пористость статистически значительно повышает точность оценки величин статического модуля Юнга. Добавление формы трещин как

четвёртого независимого параметра к многопараметрической регрессионной модели, построенной для оценки величин статического модуля Юнга, статистически не значимо. Следовательно, мы на этом этапе останавливаем процесс добавления независимых параметров к многопараметрической регрессионной модели.

Таким образом, мы останавливаем построение многопараметрических регрессионных моделей для динамического модуля Юнга и К-значения, включив в них только два параметра - общую пористость и параметр связности пустот (пор и трещин). А для статистических модулей упругости используем модель, зависящую от трех параметров - общей пористости, параметра связности пустот и трещинной пористости.

Из проведенного выше анализа можно сделать вывод, что, помимо значений коэффициента общей пористости, имея значения параметра связности пустот, можно значимо увеличить точность оценки величин динамического модуля Юнга. Однако наименьшая погрешность для оценки величин статического модуля Юнга получается, когда, помимо значений коэффициента общей пористости, используются как значения, параметра связности пустот так и значения трещинной пористости.

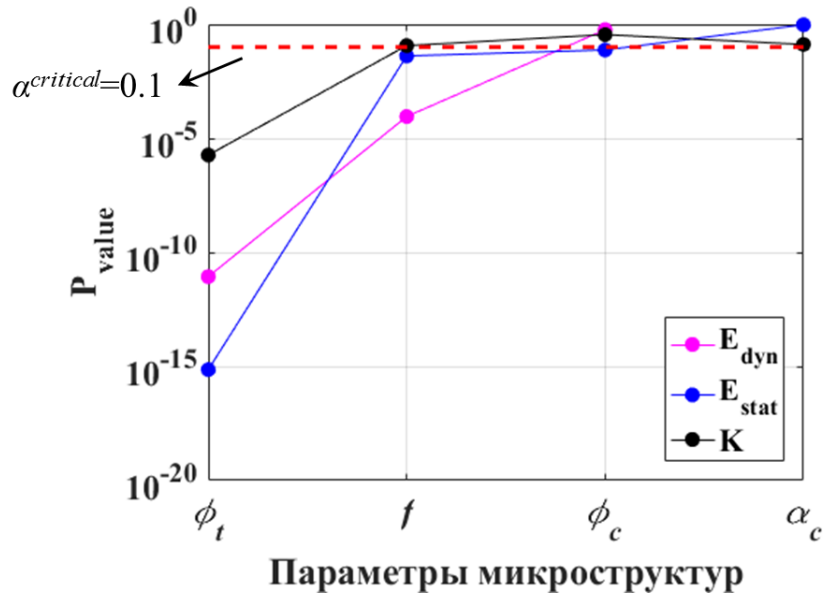


Рис. 4.11. Статистическая значимость увеличения точности регрессионной модели в результате добавления независимых параметров.

Результирующие регрессионные модели определяются следующим образом:

$$\ln(E^{dyn}) = 4.1066 - 0.3070\ln(\phi_t) - 0.3029\ln(f)$$

$$R_{adj} = \sqrt{0.919} = 0.96$$
(4.62)

$$\ln(E^{stat}) = 2.5469 - 0.2160\ln(\phi_t) - 0.8343\ln(f) - 0.0914\ln(\phi_c)$$

$$R_{adj} = \sqrt{0.94} = 0.97$$
(4.63)

$$\ln(K) = 1.2319 + 0.2100\ln(\phi_t) + 0.5668\ln(f)$$

$$R_{adj} = \sqrt{0.53} = 0.73$$
(4.64)

#### 4.4.7 ПРИМЕНЕНИЕ БУТСТРЕП МЕТОДА ДЛЯ АНАЛИЗА МАЛОЙ ВЫБОРКИ

Целью статистических анализов является оценка некоторой статистической характеристики ( $\Theta$ ), подчиняющейся неизвестному распределению вероятности  $F$ , путем построения эмпирической функции распределения статистических характеристик изучаемой случайной величины при наличии повторностей наблюдений. Для случая, когда отсутствует возможность получения истинных повторностей наблюдений, разработаны методы, которые позволяют сгенерировать большое число так называемых "псевдовыборок". Используя эти «псевдобыборки», можно получить оценки для математического ожидания, дисперсии, а также - доверительного интервала. Под методами "численного ресамплинга" (другое название в отечественных публикациях - "методы генерации повторных выборок") понимают четыре различных подхода. Отличие этих подходов в используемых алгоритмах, но по сути эти методы близки. В число таких методов входит рандомизация, или перестановочный тест (permutation), бутстреп (bootstrap), метод "складного ножа" (jackknife) и кросс-проверка (cross-validation). Эти методы позволяют моделировать эмпирическое распределение выборочных характеристик. Строго говоря, генерируемые с помощью «ресамплинга» псевдовыборки не являются независимыми. Тем не менее, если число псевдовыборок растет, то зависимости между ними начинают ослабевать. Это приводит к тому, что ресамплированные значения статистик можно рассматривать как независимые случайные величины, полагая, что они являются вполне состоятельными оценками параметров (Орлов, 2007). Согласно работе Б. Эфрона (1988) основная идея бутстрепа заключается в том, чтобы, используя метод статистических испытаний Монте-Карло, многократно генерировать повторные выборки из эмпирического распределения. Более детально это выглядит следующим образом. Рассмотрим совокупность из  $n$  членов исходной выборки  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ . Из этой выборки, используя датчик случайных чисел (равномерное распределение на интервале), на каждом шаге из  $n$  последовательных

итераций извлекается произвольный элемент  $x_k$ , который затем опять помещается в исходную выборку.

Используя этот алгоритм, можно получить любое, сколь угодно большое число бутстреп-выборок (обычно до 10000). На основе разброса значений анализируемого параметра, полученного в процессе работы метода, можно рассчитать различные статистические характеристики, например, среднее значение, дисперсию, доверительные интервалы оцениваемого параметра. Согласно различным теоретическим подходам [28], стр. 169-176; [3], для того, чтобы получить интервальные оценки параметров с использованием бутстрепа основными условиями успешного применения этого подхода являются симметричность и унимодальность распределения исходной выборки, а также алгоритм бутстрепирования, на основе которого из этого распределения генерируются случайные и независимые повторности.

Для построения доверительных интервалов для параметров, анализируемых в данной работе, мы применили вариант метода бутстрепа, который в англоязычной литературе называется BCa (bias-corrected and accelerated bootstrap interval), который решает проблемы асимметрии и неунимодальности.

В методе BCa требуется оценить два параметра: параметр коррекции смещения  $z_0$ , который связан с долей оценок бутстрепа и всегда меньше наблюдаемой статистики; параметр ускорения “а”, который пропорционален асимметрии распределения бутстрепов. Можно использовать метод ножа для оценки параметра ускорения.

Как указано в работе [48], метод BCa имеет еще одно важное теоретическое преимущество: метод BCa соответствует преобразованию, т.е., доверительный интервал корректно преобразуется, если мы изменим искомый статистический параметр ( $\Theta$ ) на некоторую функцию от  $\Theta$ .

Причисленные причины являются достаточно убедительными чтобы мы выбрали метод BCa для расчета доверительного интервала изменения искомого параметра. Доверительный интервал для случайной величины  $\Theta$

определяется, исходя из распределения рассчитанных величин  $\Theta^*$ , и выражается следующим образом (параметр  $\Theta$  получен для каждой случайной выборки):

$$\Theta_{BCA}[\alpha] = \hat{G}^{-1} \left( \Phi \left( \hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + z^{(\alpha)}}{1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z^{(\alpha)})} \right) \right), \quad (4.65)$$

Где  $\hat{G}$ , это кумулятивная функция распределения статистического параметра, рассчитанного по бутстреповским выборкам ( $\Theta^*$ ),  $\hat{z}_0$  и  $\hat{a}$  это коррекция систематического отклонения и ускорения соответственно (см. выше для более детального описания этих параметров), и  $\Phi$  - кумулятивная функция стандартного нормального распределения. Подробное описание метода ВСа и связанных с ним параметров представлено в главах 13, 14 и 22 книги Эфрона [48].

Мы провели бутстреп анализ для статистических характеристик параметров, представленных в этой работе, включая коэффициенты корреляции, коэффициенты детерминации бинарных регрессионных зависимостей и результаты, полученные с помощью факторного анализа, чтобы выяснить насколько представительными наши результаты являются. Число случайных выборок составляет 10000 для бутстреп анализа указанных статистических параметров ( $B=10000$ ), и 105 для расчета доверительного диапазона (число случайных выборок должно быть достаточно высоко для расчета доверительного диапазона как указано в [48]). Результаты представлены в виде гистограмм для значений коэффициента корреляции и детерминации, а для факторного анализа, ради краткости и ясности, в виде каскадной диаграммы. **Рис. 4.12** показывает диапазон изменения значений коэффициентов корреляции между текстурными параметрами рассмотренных карбонатных образцов (Кп, параметр f, трещинная пористость, форма пор и

трещин) и значениями динамического (синие столбцы) и статического (оранжевые столбцы) модулей Юнга. Исходя из этого рисунка и соответствующей таблицы (Табл. 4.13 и Табл. 4.14), значения коэффициента корреляции между текстурными свойствами с динамическими и статическими значениями модулей упругости, устойчивые и не меняются значительно при разных значениях выборки.

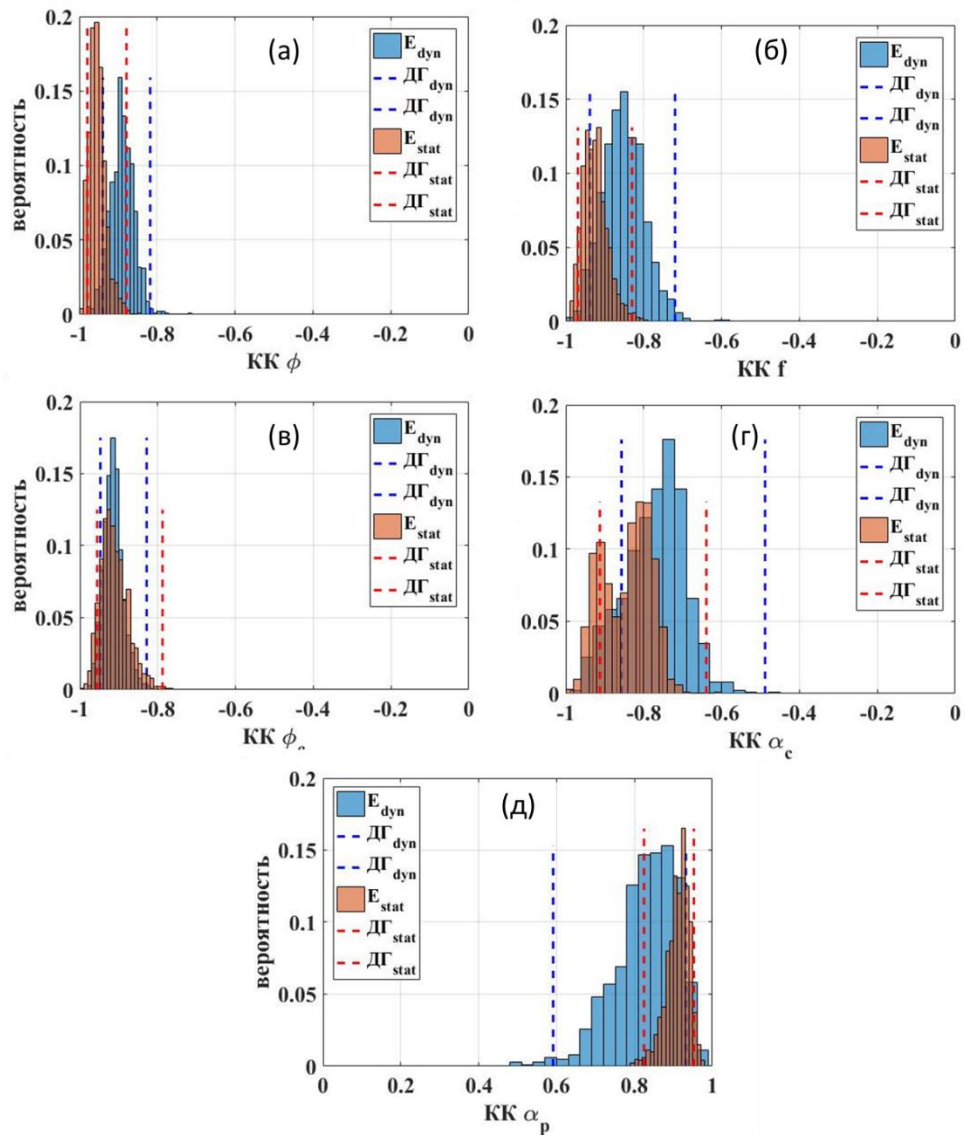


Рис. 4.12. Результаты применения метода бутстрепа для коэффициентов корреляции между параметрами микроструктуры и упругими свойствами. Синие и оранжевые столбцы – это вероятности значений коэффициентов корреляции (КК) между рассмотренным параметром микроструктуры со

значениями динамических и статических модулей упругости соответственно.

Штриховые линии - доверительные границы (ДГ) для значений КК.

Табл. 4.13. Средние значения КК между оцененными параметрами микроструктуры и значениями динамического модуля Юнга и их среднеквадратическое отклонение (СКО), вычисленные на основе метода бутстрепа. НГ - нижняя граница КК, ВГ - верхняя граница КК.

	<i>КК</i>	<i>СКО</i>	<i>НГ</i>	<i>ВГ</i>
$\phi$	-0.89	0.030	-0.94	-0.82
$f$	-0.85	0.053	-0.94	-0.72
$\phi_c$	-0.91	0.026	-0.95	-0.83
$\alpha_p$	0.84	0.080	0.59	0.93
$\alpha_c$	-0.74	0.078	-0.86	-0.49

Табл. 4.14. Средние значения КК между оцененными параметрами микроструктуры и значениями статического модуля Юнга и их среднеквадратическое отклонение (СКО), вычисленные на основе метода бутстрепа. НГ - нижняя граница КК, ВГ - верхняя граница КК.

	<i>КК</i>	<i>СКО</i>	<i>НГ</i>	<i>ВГ</i>
$\phi$	-0.95	0.022	-0.98	-0.88
$f$	-0.93	0.032	-0.97	-0.83
$\phi_c$	-0.91	0.035	-0.96	-0.79
$\alpha_p$	0.91	0.030	0.82	0.95
$\alpha_c$	-0.81	0.062	-0.91	-0.64

На основе полученных результатов (см. [Рис. 4.13](#) , [Табл. 4.15](#) и [Табл. 4.16](#)) можно заключить, что значения коэффициента детерминации для регрессионных зависимостей построенных между значениями формы пор и трещин с значениями динамических и статических модулей Юнга, не



устойчиво (широкие доверительные интервалы) и может меняться значительно в зависимости от значений выборки. Это доказывает, что имеющиеся данные не являются достаточными для описания связи между динамическими и статическими модулями Юнга с формой трещин и пор и требуется больше данных.

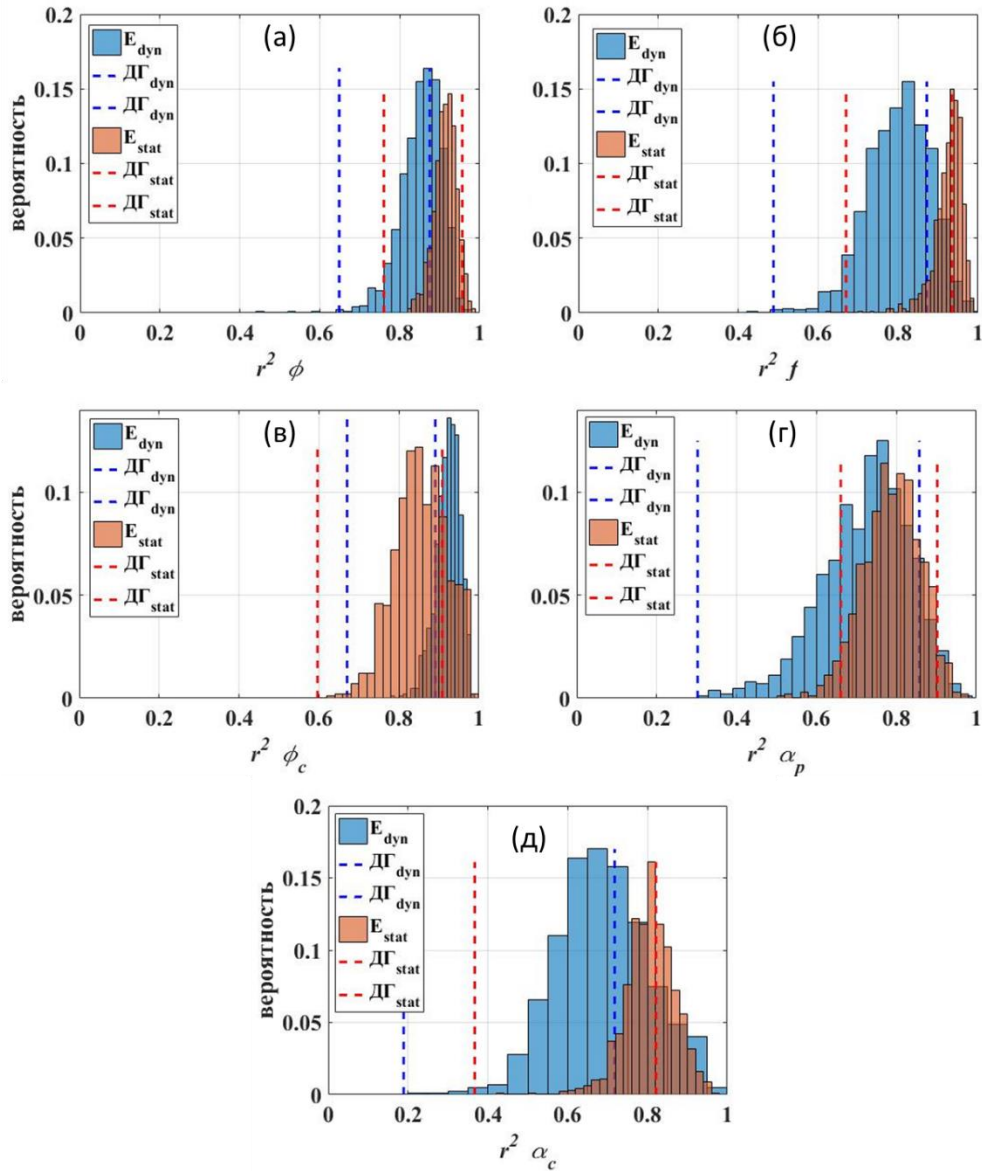


Рис. 4.13. Результаты применения метода бутстрепа для коэффициентов детерминации (КД) корреляционных зависимостей, построенных между параметрами микроструктуры и упругими модулями. Синие и оранжевые столбцы – это вероятности значений КД между рассмотренным параметром микроструктуры и значениями динамических и статических модулей

упругости соответственно. Штриховые линии: доверительные границы (ДГ) для значений КД.

Табл. 4.15. Средние значения КД корреляционных зависимостей, построенных между оцененными параметрами микроструктуры и значениями динамического модулей Юнга и их среднеквадратическое отклонение (СКО), вычисленные на основе метода бутстрепа. НГ - нижняя граница КД, ВГ - верхняя граница КД.

	<i>КК</i>	<i>СКО</i>	<i>НГ</i>	<i>ВГ</i>
$\phi$	-0.95	0.022	-0.98	-0.88
$f$	-0.93	0.032	-0.97	-0.83
$\phi_c$	-0.91	0.035	-0.96	-0.79
$\alpha_p$	0.91	0.030	0.82	0.95
$\alpha_c$	-0.81	0.062	-0.91	-0.64

Табл. 4.16. Средние значения КД корреляционных зависимостей, построенных между оцененными параметрами микроструктуры и значениями статического модулей Юнга и их среднеквадратическое отклонение (СКО), вычисленные на основе метода бутстрепа. НГ - нижняя граница КД, ВГ - верхняя граница КД

	<i>КК</i>	<i>СКО</i>	<i>НГ</i>	<i>ВГ</i>
$\phi$	0.90	0.029	0.76	0.96
$f$	0.85	0.032	0.67	0.93
$\phi_c$	0.82	0.066	0.60	0.91
$\alpha_p$	0.82	0.073	0.66	0.90
$\alpha_c$	0.63	0.063	0.37	0.82

Мы также провели бутстреп анализ для проверки устойчивости результатов, полученных в результате факторного анализа. Верхние и нижние границы «столбиков» показывают средние значения нагрузок для каждого параметра

плюс-минус среднеквадратическое отклонения соответствующей нагрузки. Линии представляют собой доверительные диапазоны для нагрузки. Исходя из **Рис. 4.14** (а) можно заключить, что значения нагрузок первого латентного фактора (объемный фактор) являются устойчивыми и не меняются резко при разных значениях выборки (узкий доверительный интервал). Значения нагрузок второго латентного фактора (фактор формы) являются менее устойчивыми относительно значений нагрузок объемного фактора. Это, в действительности, согласуется с результатами, полученными по бутстреп анализу для регрессионного анализа. По этим результатам мы также получили более широкую область изменения коэффициента детерминации для построенных регрессионных зависимостей между значениями формы пустот и параметрами, характеризующими упругие свойства.

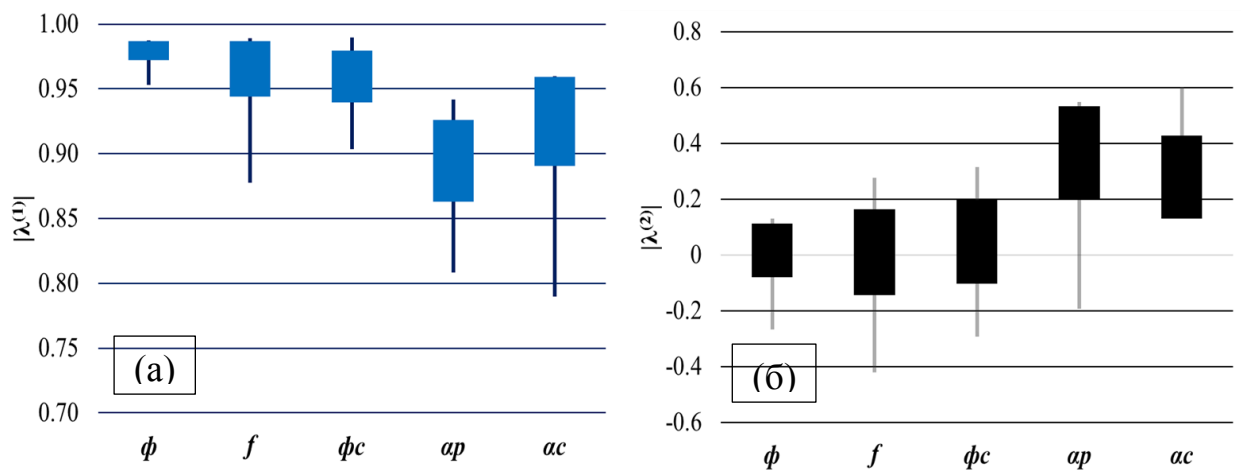


Рис. 4.14. Результаты метода бутстреп для параметров, полученных при применении факторного анализа, проведенного для параметров микроструктуры: (а) для первой матрицы нагрузок  $\lambda^{(1)}$ , (б) для второй матрицы нагрузок  $\lambda^{(2)}$ . «Столбики» показывают средние значения нагрузок для каждого параметра плюс-минус среднеквадратическое отклонения соответствующей нагрузки. Линии представляют собой доверительные диапазоны для нагрузки.

#### 4.5 АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ, КОТОРЫЕ ВЫХОДЯТ ЗА РАМКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ЭФФЕКТИВНЫХ СРЕД:

Несмотря на то, что размеры зерен [59, 60], и пор [130], [94], [200] влияют на значения скоростей упругих волн и величины упругих модулей, методы теории эффективных сред не учитывают размер включений. На основе предложенного метода в этой работе для введения ограничений на параметр связности пустот, мы применили уравнение Козени - Кармана чтобы в какой-то степени косвенно учесть влияние размера включений. Теме модификации методов теории эффективных сред для учета параметра размера включений посвящено мало работ [166], [196], [121]. Но так как эта тема является весьма существенной следует продолжать работать в этом направлении. Средний размер зерен и пор горных пород можно оценить на основе визуальных анализов фото РЭМ и исследовать их влияние на прочностные свойства наряду с другими микроструктурными параметрами. Из 19 имеющихся образцов карбонатных пород, проводился анализ изображений РЭМ для 8 образцов. Для этих 8 образцов определены размер крупных кальцитовых кристаллов, макропор ( $D_{пор} > 36 \mu\text{м}$ , [58]) и объемная доля микрита. Однако, ограниченное количество данных не позволяет построить многопараметрические регрессионные зависимости также, как и для параметров микроструктуры пустотного пространства. Следовательно, для определенных значений размера зерен и пор можно построить только бинарные корреляционные зависимости, которые служат для качественного анализа влияний этих параметров на упругие свойства. Как показано выше, объемная доля микрита является значимым параметром, контролирующим текстурные характеристики породы такие, как значение коэффициента общей пористости, проницаемости, диаметр пор и геометрический параметр ( $B$ ).

Анализ измеренных значений скоростей упругих волн и данных, полученных по изображениям РЭМ показывают, что значения скоростей продольных и поперечных волн прямо пропорциональны объемной доли микрита (см. **Рис. 4.15** (а-1,2,3)). Аналогичные результаты представлены в работах Cole D. I. [42], Holt R. M., Kjølås J. et al. [73], Vanorio T., Mavko G. [176] и El Husseiny A., Vanorio T. [51]. Микрит встречается в породах, как

цемент, содержащий круглые межкристаллические микропоры, который обволакивает крупные кристаллы или оолитовые зерна. Как показано ранее, вследствие увеличения объемной доли микрита коэффициент общей пористости уменьшается. Как правило, вследствие уменьшения значения коэффициента общей пористости упругие модули увеличиваются и их отношение уменьшается ( $K_p$  является самым значимым параметром для оценки упругих модулей на основе результатов, полученных ранее).

**Рис. 4.15** (б-1,2,3) отображает зависимость измеренных значений скоростей упругих волн от размера крупных кристаллов кальцита. Исходя из этого рисунка можно заключить, что значения скоростей продольных и поперечных волн выше в образцах, у которых средний размер крупных кальцитовых кристаллов больше. Высокие значения скоростей соответствуют высоким значениям динамических и статических модулей Юнга. Следовательно, для исследуемых образцов увеличение размера крупных кристаллов приводит к низким значениям отношений динамических модулей Юнга к статическим. Численное моделирование зернистых сред показывают, что увеличение размера зерен приводит к снижению прочностных свойств [77], [159]. Для моделированных зернистых сред увеличение размера зерен приводит к увеличению коэффициента общей пористости и, следовательно, уменьшению прочности горных пород. Заметим, что, как правило, наблюдается положительная корреляция между модулем Юнга и пределом прочности, вследствие чего модуль Юнга иногда называют модулем прочности. При цементации песчаников, их прочность увеличивается за счет уменьшения коэффициента общей пористости и усиливающегося влияния цемента [130]. Однако для карбонатных пород поровое пространство образуется, в основном, в результате процессов вторичного диагенеза и метагенеза таких как растворение под давлением и доломитизация. Анализ текстурных характеристик, исследуемых образцов позволяет заключить, что степень микритизации выше в тех образцах, у которых средний размер

крупных кристаллов больше, что, в свою очередь, приводит к повышению прочностных свойств.

Исходя из анализа **Рис. 4.15** (в-1,2,3) можно сделать вывод, что значения скоростей продольных и поперечных волн, и величины динамических и статических модулей Юнга снижаются с увеличением размера макропор. Макропоры являются пустотными включениями, которые служат в качестве барьера для распространения упругих волн. Увеличение размера этих барьеров приводит к уменьшению значений скоростей упругих волн. В результате увеличения размера пустот объем порового пространства увеличивается, вследствие чего уменьшаются прочностные свойства порово-трещиноватых сред, включая статический модуль Юнга.

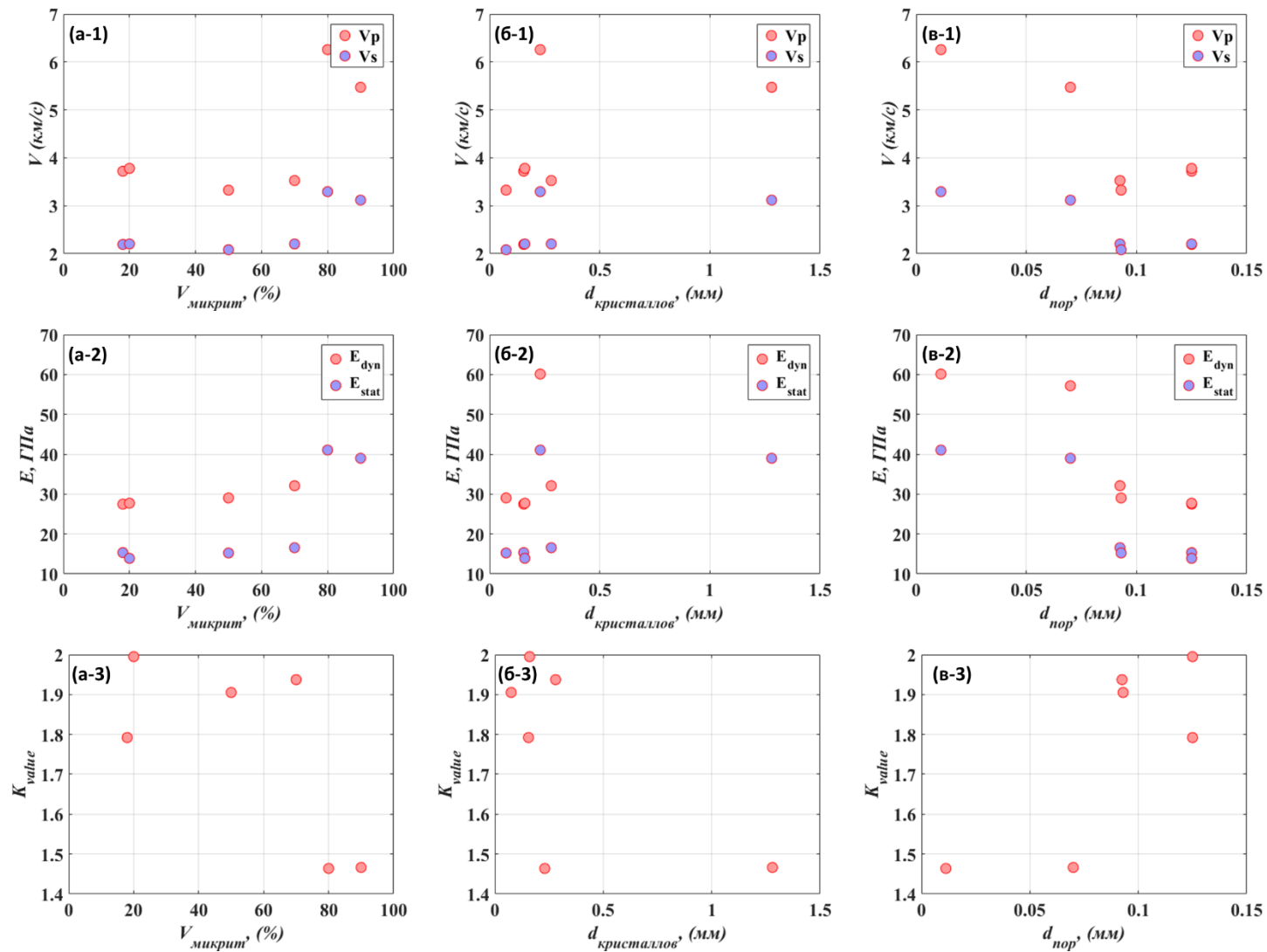


Рис. 4.15. Влияние объемной доли микрита, размера крупных кристаллов и размера макропор на (а,б,в-1) скорости упругих волн, (а,б,в-2) модули упругости, (а,б,в-3) К-значения.

#### 4.5.1 ДИНАМИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПУАССОНА

Для промышленных целей принято считать, что статические и динамические значения коэффициента Пуассона равны ([30], [39]). Имея это в виду рассчитали динамические значения коэффициента Пуассона для исследуемых в этой работе образцов на основе измеренных значений скоростей упругих волн. Исходя из **Рис. 4.16** (а) можно заключить, что не наблюдается никакой зависимости между значениями коэффициента Пуассона и значениями коэффициента общей пористости. Аналогичный вывод справедлив для **Рис. 4.16** (б)-(д), иллюстрирующих связь между значениями коэффициента Пуассона и значениями параметров микроструктур (параметр связности пустот, трещиноватая пористость, аспектное отношение пор и трещин).

Причиной отсутствия связей между значениями коэффициента Пуассона и текстурными параметрами (значениями  $K_p$  и параметров микроструктур) является неустойчивость зависимостей отношения значений скоростей продольных к значениям поперечных волн (коэффициент Пуассона рассчитывается по отношению  $V_p/V_s$ ) от коэффициента пористости и от параметров, характеризующих пустотное пространство соответственно.



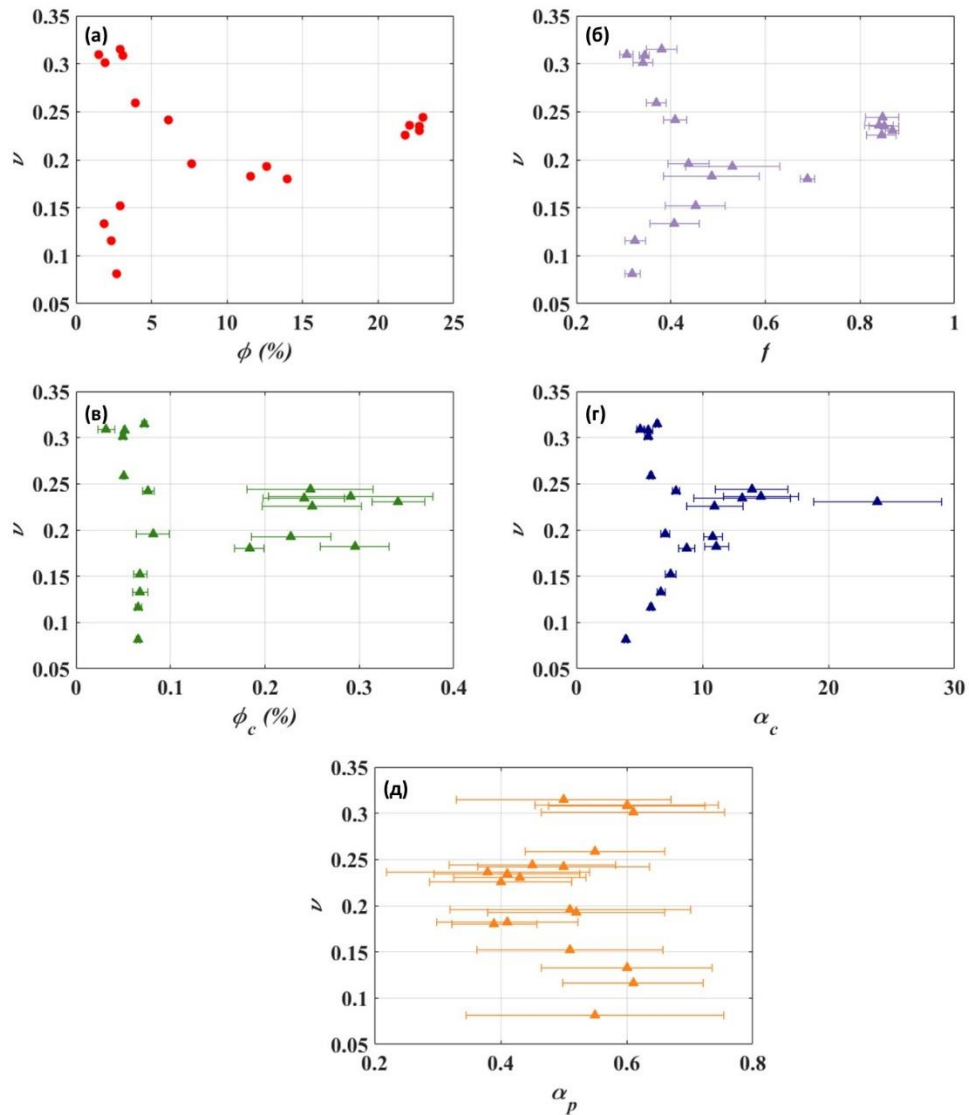


Рис. 4.16. Значения коэффициента Пуассона (ось Y), и значения параметров микроструктуры (ось X) (а) коэффициента общей пористости (б) параметр связности пустот, (в) трещинной пористости, (г) аспектное отношение пор, (д) аспектное отношение трещин.

#### 4.5.2 МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА:

Многостадийные трехосные испытания проводились для образцов С1-1, С2-1, С3-1, С4-4, С5-2, С6-2-4, С6-2-1. По полученным данным рассчитаны угол внутреннего трения ( $\phi^0$ ) и прочность на одноосное сжатие (UCS) на основе критерии Кулона-Мора. Согласно зарубежной терминологии, в данной работе мы называем эти параметры механическими (или прочностными) свойствами. Результаты расчетов представлены в [Табл. 4.17](#). Так как число

образцов для которых проводился многостадийной эксперимент ограничено, корреляционные зависимости не построены и результаты проиллюстрированы только значениями.

Табл. 4.17. Рассчитанные значения угол внутреннего трения  $\psi^0$  и прочность на одноосное сжатие (UCS)

образец	Прочность, МПа	$\psi^0$	UCS, МПа
C1-1	21.61	14.62	55.93
C2-1	23.13	19.13	65.00
C3-1	24.37	28.54	82.00
C4-4	24.86	26.00	79.56
C5-2	22.69	11.28	55.33
C6-2-4	21.47	6.38	48.00
C6-2-1	21.49	7.50	49.00

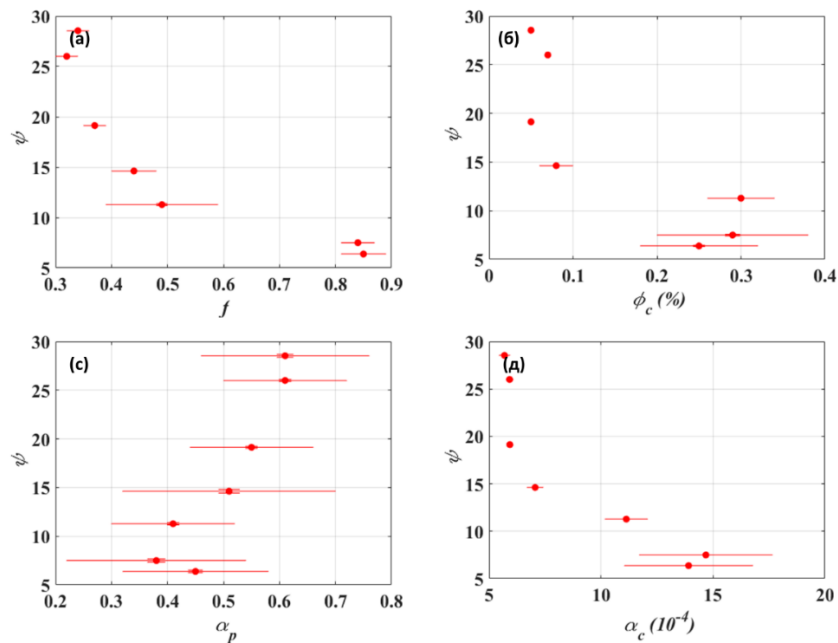


Рис. 4.17. Значения угла внутреннего трения (ось Y), и значения параметров микроструктур (ось X) (а) параметр связности пустот, (б) трещинная пористость, (в) аспектное отношение пор, (г) аспектное отношение трещин.

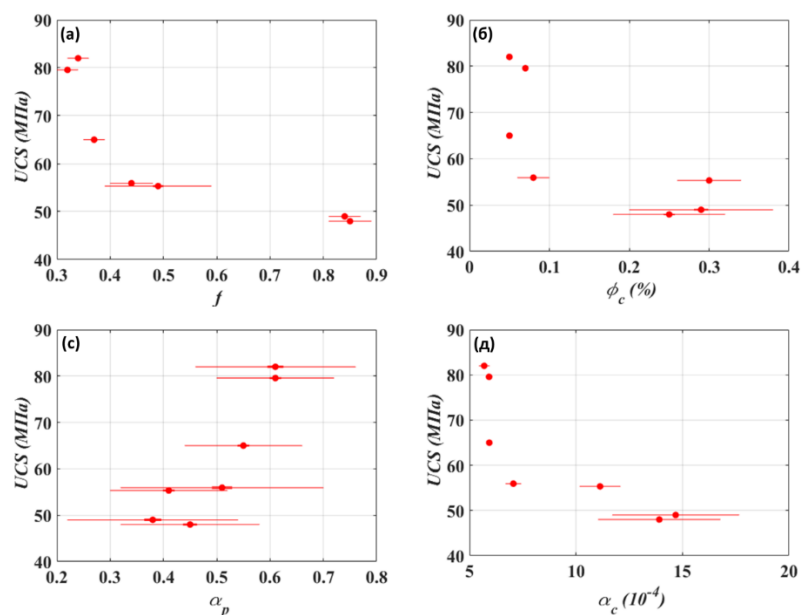


Рис. 4.18. Значения угла внутреннего трения (ось Y), и значения параметров микроструктур (ось X). (а) параметр связности пустот, (б) трещинная пористость, (в) аспектное отношение пор, (д) аспектное отношение трещин.

Результаты показывают, что влияние параметров микроструктуры на угол внутреннего трения и прочность на одноосное сжатие аналогично влиянию параметров микроструктуры на модуль Юнга. Исходя из Рис. 4.17, можно заключить, что для образцов с высоким значением параметра связности пустот значения угла внутреннего трения меньше. Трещинная пористость и аспектное отношение трещин высокие для образцов с низкими значениями угла внутреннего трения. Образцы, содержащие более сферичные поры (аспектное отношение близко к 1), имеют угол внутреннего трения заметно выше по сравнению с другими образцами.

Исходя из Рис. 4.18, можно заключить, что увеличение значений параметров связности пустот, трещинной пористости и аспектного отношения пор приводит к уменьшению значений прочности на одноосное сжатие. Однако, увеличение сферичности пор резко увеличивает значения прочности на одноосное сжатие.

#### 4.6 Выводы

Для геотехнических и инженерных целей необходимо оценивать модули упругости геологических формаций. Причем, оценка модулей упругости на основе акустических измерений является наиболее доступным и экономически эффективным методом. Однако экспериментальные и полевые наблюдения показывают, что косвенно измеренные величины модули упругости (динамические модули) на основе акустических методов отличаются от измеренных величин в лаборатории путем проведения одноосных и всесторонних испытаний на выбуренных образцах. Общей и общепринятой практикой является оценка статических модулей упругости по динамическим модулям упругости на основе имеющихся эмпирических корреляций.

Поскольку структурные и минералогические параметры являются основными факторами, контролирующими механическое поведение пород, мы посвятили эту главу изучению влияния микроструктурных параметров на модули упругости. Для определения степени влияния различных микроструктурных параметров петроупругих моделей на модули Юнга (статический и динамический) и их отношение ( $K$ -значение) использован факторный анализ.

На основе результатов факторного анализа сделан вывод о том, что по степени влияния на модули Юнга (статический и динамический) и их отношение параметры моделей делятся на две группы: 1) параметры, характеризующие объем и связность пор и трещин и 2) параметры формы пустот. Причем, первая группа параметров оказывает более заметное влияние на модули и их отношение по сравнению со второй группой. Наиболее значимым параметром, оказывающим влияние на модули Юнга и их отношение, является общая пористость. На втором месте по значимости находится связность пустот, на третьем – трещинная пористость. Показано, что трехпараметрическую зависимость от параметров объема и связности

пустот имеет смысл строить только для статического модуля Юнга. Для динамического модуля Юнга и  $K$ -значения достаточно ограничиться параметрической зависимостью, включающей два параметра – общую пористость и параметр связности пустот.

Низкие значения СКО для рассчитанных КК по методу бутстрепа показывают, что наличие связи между найденными параметрами микроструктур с динамическими и статическими модулями Юнга весьма вероятно. Низкие значения СКО также получились для КД построенных корреляционных зависимостей. Это в свою очередь свидетельствует о том, что предложенные эмпирические зависимости могут служить общими уравнениями для описания связи между параметрами микроструктур и значениями модулей Юнга. Исключением является аспектное отношение трещин, для которого доверительный интервал достаточно широкий. Результаты расчета СКО и доверительного интервала для сгенерированных выборок по методу бутстрепа показывают, что установленная высокая значимость коэффициента общей пористости и коэффициента связности пустот для оценки динамических и статических модулей Юнга является весьма вероятной. Однако широкий доверительный интервал, вычисленный по методу ВСа для аспектных отношений пор и трещин (фактор формы), отражает наличие неопределенности относительно значимости фактора формы. Аналогичные результаты получены для корреляционных зависимостей. Следовательно, для исследования влияния микроморфологических свойств пустотного пространства важно привлечение дополнительного объема данных.

Упругие свойства карбонатных образцов, исследованных в данной работе, имеют прямую связь с объемной долей микрита. Для образцов, у которых объемная доля микрита больше, наблюдаются повышенные значения скоростей упругих волн и величин динамических и статических упругих модулей.

Значения скоростей упругих волн и величины динамических и статических модулей упругости прямо пропорциональны размеру крупных кристаллов. Для образцов, у которых средний размер крупных кристаллов больше, модули Юнга выше.

Исходя из анализа графиков, построенных для иллюстрации зависимости механических свойств от параметров микроструктуры пустотного пространства, можно сделать вывод, что при увеличении параметра связности пустот, трещинной пористости и аспектного отношения трещин, значения угла внутреннего трения и прочности на одноосное сжатие уменьшается. Для образцов, содержащих поры с высокими значениями аспектного отношения, значения угла внутреннего трения и прочности на одноосное сжатие выше.

Параметры микроструктуры пустотного пространства, исследованные выше, меняются в пластовых условиях при высоких давлениях и температурах. Помимо давления и температуры, флюидонасыщение заметно влияет на упругие и механические свойства, механизмы которых коротко рассмотрены во введении третьей главы. Следовательно, результаты получены выше в лабораторных условиях, могут быть совершенно иными в пластовых условиях для горных пород, насыщенных разными флюидами. Для учета эффекта флюидонасыщения в модельных средах задача флюидозамещения решается путем замены воздуха в пустотном пространстве нужным флюидом и применением снова метод ОСП. Также можно использовать метод Гассмана. Результаты двух указанных методов для моделирования влияния флюида на упругие свойства достаточно близки (как показывают расчеты, разница в скоростях в пределах 10 %). Для прогноза влияния пластовых условий на упругие свойства необходимо построить отдельные петроупругие модели для стадии линейной упругости и стадии после дилатации образца при нагрузке. Эти модели должны учитывать анизотропию, индуцированную при нагрузке образца. Имея скорости упругих волн ( $V_p$ ,  $V_{sv}$  и  $V_{sh}$ ) в трех основных ортогональных направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$  (ось  $z$  расположена вертикально вдоль

оси образца) при испытании можно оценить эволюции параметров микроструктуры на разных стадиях поведения исследуемого образца. Таким образом, требуется провести более широкое исследование с большим количеством образцов. Несмотря на все указанные недостатки данной работы, мы разработали общую схему для будущих аналогичных исследований, которую можно применить для поиска ответов на чрезвычайно важный вопрос: “Как можно эффективно и достоверно оценить упругие и механические свойства горных пород?”

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ:**

Основной задачей данного исследования было установление взаимосвязей между параметрами микроструктуры различных карбонатных пород, содержащих поры и трещины, и физико-механическими характеристиками этих пород. Последние включали в себя динамический и статический модули Юнга, динамический коэффициент Пуассона, который обычно принимают равным статическому, прочность на одноосное сжатие и угол внутреннего трения.

*В первой главе* рассмотрены основные причины различия между величинами динамических и статических модулей упругости. Методы моделирования эффективных упругих свойств горных пород сгруппированы на основе подходов к анализу влияния их микроструктурных параметров. Более подробно рассмотрены наиболее распространённые методы теории эффективных сред. Представленные методы классифицированы на основе теоретических подходов, применённых к их обоснованию, и предположений, применённых для получения расчетных формул. Обоснован выбор метода обобщенного сингулярного приближения для построения петроупругих моделей пород, содержащих трещины и поры.

*Во второй главе* построены петроупругие модели шести пород – пяти карбонатных пород (микритовые, биоспаритовые и оолитовые известняки) и одной карбонатно-терригенной породы. Для построения моделей использованы данные о микроструктуре пород и результаты многоуровневого ультразвукового прозвучивания образцов пород. На основе этих данных породы отнесены к изотропным, содержащим отдельные неоднородности. Петроупругие модели пород включают такие параметры микроструктуры как общую и трещинную пористость, параметр связности пустот, аспектное отношение пор и трещин. Для оолитового известняка построена более сложная модель, отражающая особенности пустотного пространства самих оолитов.



Исследована чувствительность построенных моделей к микроструктурным параметрам.

По результатам анализа чувствительности построенных петроупругих моделей пород была выявлена довольно широкая область возможной неопределенности в параметрах микроструктуры, экспериментальные значения для которых получить практически невозможно. Эти параметры включают: параметр связности пустотного пространства, аспектное отношение трещин и трещинную пористость. С целью уменьшения этой неопределенности в *третьей главе* проанализированы данные трехосных одностадийных и многостадийных испытаний на изучаемых образцах пород. Помимо величин статических модулей Юнга, определены значения давления закрытия трещин и дилатации, передела упругости и пиковой прочности исследованных образцов. На основе анализа начальной зоны нелинейного поведения при нагрузке образца определены максимальное значение аспектного отношения трещин и максимальное значение коэффициента трещинной пористости.

В *четвертой главе* предложен метод для оценки ограничений сверху на параметр связности пустот (параметр  $f$ ) путем построения идеализированной среды с максимальной проницаемостью. С использованием этого результата, а также ограничений на трещинную пористость и аспектное отношение трещин решена обратная задача по определению параметров микроструктуры шести изученных пород. Для исследования влияния оцененных параметров пустотного пространства на физико-механические характеристики пород оценена степень корреляции между параметрами микроструктуры и модулями упругости (статическим и динамическим модулями Юнга и их отношением). Установленная высокая корреляция между указанными величинами явилась основанием для построения бинарных регрессионных зависимостей.

Для определения степени влияния различных микроструктурных параметров петроупругих моделей на модули Юнга (статический и динамический) и их отношение ( $K$ -значение) использован факторный анализ.

На основе результатов факторного анализа сделан вывод о том, что по степени влияния на модули Юнга (статический и динамический) и их отношение параметры моделей делятся на две группы: 1) параметры, характеризующие объем и связность пор и трещин и 2) параметры формы пустот. Причем, первая группа параметров оказывает более заметное влияние на модули и их отношение по сравнению со второй группой. Наиболее значимым параметром, оказывающим влияние на модули Юнга и их отношение, является общая пористость. На втором месте по значимости находится связность пустот, на третьем – трещинная пористость. Показано, что трехпараметрическую зависимость от параметров объема и связности пустот (пор и трещин) имеет смысл строить только для статического модуля Юнга. Для динамического модуля Юнга и  $K$ -значения достаточно ограничиться параметрической зависимостью, включающей два параметра – общую пористость и параметр связности пустот.

Таким образом в работе решена задача об установлении взаимосвязей между параметрами микроструктуры различных карбонатных пород, содержащих поры и трещины, и физико-механическими характеристиками этих пород. Решение этой задачи имеет важное научное значение, поскольку позволяет прогнозировать эти характеристики в зависимости от возможных изменений этих параметров в процессе бурения скважин и разработки месторождений.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

В данном приложении представлены наиболее распространённые эмпирические корреляционные зависимости для оценки величин статических модулей упругости по величинам динамических модулей упругости.

Таблица 0.1. Уравнения связи динамического и статического модулей Юнга.

Модель	Год	Уравнение (psi)	Применение	Комментарии
Моралес и Морцинев [136]	1993	$\log E_{st} = A_0 + A_1 \log (E_{dy})$	Кп: 10 – 15%	$A_0 = 2.37$ $A_1 = 0.661$ Ошибка-16%
			Кп: 15 – 25%	$A_0 = 1.829$ $A_1 = 0.6920$ , Ошибка-8%
			Кп > 25%	$A_0 = -0.4575$ $A_1 = 0.9402$ , Ошибка-15%
Эйса и Кази [50]	1998	$\log E_{st} = A_0 + A_1 \log (\rho * E_{dy})$	Кп: 10 – 15%	Корреляция нарушается для Кп >25%
Монтмейер и Грайвс [133]	1986	$E_{st} = E_{dy} * (0.81 + 2 * 10^{-4} * \vartheta)$	Чистый песчаник, глинистый песчаник, известковый песчаник, доломиты и неконсолидирован ные песчаники	Нет корреляции с коэффициентом Пуассона
Лэйси [108]	1997	$E_{st} = 0.0293 * E_{dy}^2 + 0.4533 * E_{dy}$	Песчаник	Коэффициент корреляции - 0.74
		$E_{st} = 0.0428 * E_{dy}^2 + 0.2334 * E_{dy}$	Глины	Коэффициент корреляции - 0.93
		$E_{st} = 0.018 * E_{dy}^2 + 0.422 * E_{dy}$	Песчаники, глины, известняки и доломиты	Коэффициент корреляции - 0.75 и 0.62 for a power fit
Брэдфорд и др.	1998	$E_{st} = 0.0018 * E_{dy}^{2.7}$	Песчаник	Средние Кп =22% и k=70 мД

Таблица 0.2. Корреляционные зависимости для расчета прочности на одноосное сжатие в песчаниках (НППС, МПа).

Модель	Год	Входные данные	Уравнение (МПа)	Применение	Регион
Верник и др. Vernik [178]	2006	$K_p - V_{shale}$	$UCS = (254 - 204 * V_{shale}) * (1 - 2.7 * K_p)^2$	Глинистый песчаник	Весь мир
Эдлманн и др. [47]	1998	$K_p$	$UCS = (-3.225 * K_p + 129.54)$	Песчаник	Северное море
Фарквар и др. [54]	1994	$K_p$	$UCS = 208.08 * \exp(-0.074 * K_p)$	Песчаник	Северное море
Райен и др. [154]	1996	$K_p$	$UCS = (43 - 140 * K_p + 63 * K_p^2)$	Песчаник	Северное море
Сарда и др. [162]	1993	$K_p$	$UCS = 357 * \exp(-10.8 * K_p)$	Пласт Жерминьи-Су-Куломб $0 < K_p < 0.07$	
Сарда и др. [162]	1993	$K_p$	$UCS = 258 * \exp(-9.0 * K_p)$	Пласт Жерминьи-Су-Куломб $K_p < 0.3$	
Сарда и др. v [162]	1993	$K_p$	$UCS = 115 * \exp(-11.6 * K_p)$	Пласт Жерминьи-Су-Куломб, $K_p > 0.3$	
Верник и др.	1993	$K_p$	$UCS = 254.06896552 * (1 - 2.7 * K_p)^2$	Консолидированный песчаник,	Весь мир

[178]				терригенные горные породы от кварцевого песчаника до wackes	
Рахман и др. [149]	2010	$\Delta t$	$UCS = 281.703 * \exp(-0.0268 * \Delta t)$	Третичный песчаник, морские газовые месторождения.	Южная Азия
Чэнг и др. [34]	2006	$\Delta t$	$UCS = (1.4138 * 10^7 * \Delta t^{-3})$	Слабые и неконсолидированные породы	Побережье Мексиканского залива
Мус и др. [135]	1999	$V_p, \rho$	$UCS = (1.745 * 10^{-9} * \rho * V_p^2 - 21)$	Мелкие, средние и крупнозернистые	Залив Кука, Аляска
Чэнг и др. [34]	2006	$V_p, \rho$	$UCS = 3.87 * \exp(1.14 * 10^{-10} * \rho * V_p^2)$		Побережье Мексиканского залива
Вэйнгартен и Перкинс [185]	1995	$E, K, V_{shale}$	$UCS = 10^{-12} * (114 + 97 * V_{shale}) * K_b * E_{dyn}$	Неконсолидированные песчаники и газовые месторождения	США
Чэнг и др. [34]	2006	$E$	$UCS = 46.2 * \exp(0.027 * E)$		

Таблица 0.3. Корреляция для расчёта прочности на одноосное сжатие в карбонатных породах.

Модель	Год	Входные данные	Уравнение (фунт/дюйм <sup>2</sup> )	Применение	Регион
Милитзер и Столл [132]	1973	$\Delta t$	$UCS = \left(\frac{7682}{\Delta t}\right)^{1.82} / 145$	Известняки	
Фарквар и др. [54]	1994	Кп	$UCS = 174.8 * \exp(-0.093 * Кп)$	Карбонаты	Северное море
Ржевски и Новик [161]	1971	Кп	$UCS = 276 * (1 - 3Кп)^2$	Коробчеевское месторождение	Россия
Чэнг и др. [34]	2006	Кп	$UCS = 135.9 * \exp(-4.8 * Кп)$	1450 < UCS < 43500 фунт/дюйм <sup>2</sup> 0.0 < Кп < 0.2	Средний восток
Чэнг и др. [34]	2006	Кп	$UCS = 143.8 * \exp(-6.95 * Кп)$	4350 < UCS < 21750 фунт/дюйм <sup>2</sup> 0.05 < Кп < 0.2	Средний восток
Голубев и Рабинович [64]	1976	$\Delta t$	$UCS = \left(10^{2.44 + \left(\frac{109.14}{\Delta t}\right)}\right) / 145$	Известняки	
Чэнг и др. [34]	2006	$E$	$UCS = 13.8 * E^{0.51}$	Допустимый для плотных песчаников 1450 < UCS < 43500 фунт/дюйм <sup>2</sup>	
Чэнг и др. [34]	2006	$E$	$UCS = 25.1 * E^{0.34}$	Доломиты, 8700 < UCS < 14500 фунт/дюйм <sup>2</sup>	

Таблица 0.4. Корреляционные зависимости для расчёта прочности на одноосное сжатие в глинистых породах.

Модель	Год	Входные данные	Уравнение (фунт/дюйм <sup>2</sup> )	Применение	Регион
Хорсруд [75]	2001	$\Delta t$	$UCS = \left(\frac{111.65}{145}\right) * \left(\frac{304.8}{\Delta t}\right)^{2.93}$	Высокопроницаемые третичные глины	Северное море
Чэнг и др. [34]	2006	$\Delta t$	$UCS = \left(\frac{62.35}{145}\right) * (304.8 / \Delta t)^{3.2}$	Плиоценовые и молодые глины	
Лал [110]	1999	$\Delta t$	$UCS = \left(\frac{1450}{145}\right) * (304.8 / (\Delta t - 1))$	Высокопроницаемые третичные глины	
Хорсруд [75]	2001	$E$	$UCS = (8.03E^{0.91})$	Высокопроницаемые третичные глины	Северное море
Чэнг и др. [34]	2006	$E$	$UCS = (7.22E^{0.712})$	Плотные и уплотненные глины	
Лашкари и Дусолт [111]	1993	$K_p$	$UCS = (1.001K_p^{-1.143})$	Уплотненные глины, $K_p < 0.10$	
Хорсруд [75]	2001	$K_p$	$UCS = \left(\frac{243.6}{145}\right) * K_p^{-0.96}$	Высокопроницаемые третичные глины	Северное море
Чэнг и др.	2006	$K_p$	$UCS = \left(\frac{41.47}{145}\right) * K_p^{-1.762}$	Глины $> 0.27$	

[34]					
------	--	--	--	--	--

Таблица 0.5. Корреляционные зависимости для расчёта угла внутреннего трения горных пород.

модель	$\varphi$ (градус)	Комментарии
Лал [110]	$\sin^{-1}\left(\frac{V_p - 1000}{V_p + 1000}\right)$	Глинистые породы
Вайнгартен и Перкинс [185]	$57,8 - 105 * Kп$	Песчаники
Вайнгартен и Перкинс [185]	$tg^{-1}\left(\frac{(GR - GR_{sand}) * 0.5 + (GR_{shale} - GR) * 0.9}{GR_{shale} - GR_{sand}}\right)$	Глины песчаники
Пламп [149]	$26.5-37.4*(1- Kп - V_{shale}) + 62.1 * (1 - Kп - V_{shale})^2$	Карбонаты



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Al-Shayea N. A. Effects of testing methods and conditions on the elastic properties of limestone rock // *Engineering Geology*. 2004. Vol. 74(1–2). P. 139-156.
2. Alkhimenkov Y. Practical Applications of the T-Matrix Approach to Fractured Porous Rocks // *Society of Petroleum Engineers*. 2015. Vol. 978-1-61399-376-7
3. Anthony D. C., D. H. Bootstrap Methods and Their Application. 1997.
4. Anthony J. L., Marone C. Influence of particle characteristics on granular friction // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2005. Vol. 110(B8).
5. Ashby M. F., Sammis C. G. The damage mechanics of brittle solids in compression // *pure and applied geophysics*. 1990. Vol. 133(3). P. 489-521.
6. Atkinson B. K. Subcritical crack growth in geological materials // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1984. Vol. 89(B6). P. 4077-4114.
7. Auld B. A. Acoustic Fields and Waves in Solids. New York, Wiley, 1973.
8. Bartlett M S. The statistical conception of mental factors // *British Journal of Psychology. General Section*. 1937. Vol. 28(1). P. 97-104.
9. Bartlett M. S. A Note on the Multiplying Factors for Various Approximations // *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*. 1954. Vol. 16(2). P. 296-298.
10. Baud P., Schubnel A., Wong T.-f. Dilatancy, compaction, and failure mode in Solnhofen limestone // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2000. Vol. 105(B8). P. 19289-19303.
11. Baud P., Vajdova V., Wong T.-f. Shear-enhanced compaction and strain localization: Inelastic deformation and constitutive modeling of four porous sandstones // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2006. Vol. 111(B12).
12. Bayuk I., Ammerman M., Chesnokov E. Elastic moduli of anisotropic clay // *GEOPHYSICS*. 2007. Vol. 72(5). P. D107-D117.

13. Bayuk I., Ammerman M., Chesnokov E. Estimation of shale's permeability from microseismicity // SEG Technical Program Expanded Abstracts 2009: Society of Exploration Geophysicists. 2009. P. 1581-1585.
14. Bayuk I., Goloshubin G. Krauklis waves as indicator of fractured zones in reservoir rocks: Rock-physics modeling // SEG Technical Program Expanded Abstracts 2017: Society of Exploration Geophysicists. 2017. P. 3735-3739.
15. Bayuk I. et al. Rock-physics based prediction of hydraulic permeability and thermal conductivity of anisotropic clastic rocks from logging data // SEG Technical Program Expanded Abstracts 2016: Society of Exploration Geophysicists. 2016. P. 3154-3158.
16. Bayuk I. O., Ammerman M., Chesnokov E. M. Upscaling of elastic properties of anisotropic sedimentary rocks // Geophysical Journal International. 2008. Vol. 172(2). P. 842-860.
17. Bayuk I. O., Chesnokov E. M. Correlation between elastic and transport properties of porous cracked anisotropic media // Physics and Chemistry of the Earth. 1998. Vol. 23(3). P. 361-366.
18. Bayuk I. O., Chesnokov E. M. TRANSPORT PROPERTIES OF POROUS CRACKED ANISOTROPIC MEDIA // Porous Media: WORLD SCIENTIFIC. 2000. P. 325-336.
19. Benveniste Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials // Mechanics of Materials. 1987. Vol. 6(2). P. 147-157.
20. Berg C. A. Deformation of fine cracks under high pressure and shear // Journal of Geophysical Research. 1965. Vol. 70(14). P. 3447-3452.
21. Berryman James G. Effective Medium Theories for Multicomponent Poroelastic Composites // Journal of Engineering Mechanics. 2006. Vol. 132(5). P. 519-531.
22. Berryman J. G. Long-wavelength propagation in composite elastic media II. Ellipsoidal inclusions // The Journal of the Acoustical Society of America. 1980. Vol. 68(6). P. 1820-1831.

23. Bieniawski Z. T. Mechanism of brittle fracture of rock: Part II—experimental studies // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*. 1967. Vol. 4(4). P. 407-423.
24. Blokhintsev D. I. The Many-Body Problem. *Quantum Mechanics*. ed. D.I. Blokhintsev. Dordrecht: Springer Netherlands, 1964. P. 349-369.
25. Böhm H. J. A Short Introduction to Continuum Micromechanics. *Mechanics of Microstructured Materials*. ed. H.J. Böhm. Vienna: Springer Vienna, 2004. P. 1-40.
26. Bourbie T., Zinszner B. Hydraulic and acoustic properties as a function of porosity in Fontainebleau Sandstone // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1985. Vol. 90(B13). P. 11524-11532.
27. Bradford I. D. R. et al. Benefits of Assessing the Solids Production Risk in a North Sea Reservoir using Elastoplastic Modelling // *Society of Petroleum Engineers*. 1998.
28. Brian S. Everitt D. H. *Encyclopedia of Statistics in Behavioral Science*. Wiley, 2005. P. 2352.
29. Bueble S., Schmahl W. W. Mechanical twinning in calcite considered with the concept of ferroelasticity // *Physics and Chemistry of Minerals*. 1999. Vol. 26(8). P. 668-672.
30. Burshtein L. S. Determination of poisson's ratio for rocks by static and dynamic methods // *Soviet Mining*. 1968. Vol. 4(3). P. 235-238.
31. Carman P. C. Fluid flow through granular beds // *Chemical Engineering Research and Design*. 1937. Vol. 75. P. S32-S48.
32. Carman P. C. Fluid flow through granular beds // *Chemical Engineering Research and Design*. 1997. Vol. 75. P. S32-S48.
33. Castañeda P. P., Willis J. R. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1995. Vol. 43(12). P. 1919-1951.

34. Chang C., Zoback M. D., Khaksar A. Empirical relations between rock strength and physical properties in sedimentary rocks // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2006. Vol. 51(3–4). P. 223-237.
35. Chen K. et al. Deformation twinning and residual stress in calcite studied with synchrotron polychromatic X-ray microdiffraction // *Physics and Chemistry of Minerals*. 2011. Vol. 38(6). P. 491-500.
36. Cheng C. H. Crack models for a transversely isotropic medium // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1993. Vol. 98(B1). P. 675-684.
37. Chesnokov E. M., Bayuk I. O., Metwally Y. Inversion of Shale Microstructure Parameters From Permeability Measurements // *Society of Exploration Geophysicists*. 2010.
38. Chesnokov E. M. et al. Mathematical modelling of anisotropy of illite-rich shale. 2009.
39. Ciccotti M., Mulargia F. Differences between static and dynamic elastic moduli of a typical seismogenic rock // *Geophysical Journal International*. 2004. Vol. 157(1). P. 474-477.
40. Civan F. Scale effect on porosity and permeability: Kinetics, model, and correlation // *AIChE Journal*. 2001. Vol. 47(2). P. 271-287.
41. Civan F. Effective Correlation of Apparent Gas Permeability in Tight Porous Media // *Transport in Porous Media*. 2010. Vol. 82(2). P. 375-384.
42. Cole D. I. Velocity/porosity relationships in limestones from the Portland group of Southern England // *Geoexploration*. 1976. Vol. 14(1). P. 37-50.
43. Costa A. Permeability-porosity relationship: A reexamination of the Kozeny-Carman equation based on a fractal pore-space geometry assumption // *Geophysical Research Letters*. 2006. Vol. 33(2).
44. De Wit A. Correlation structure dependence of the effective permeability of heterogeneous porous media // *Physics of Fluids*. 1995. Vol. 7(11). P. 2553-2562.
45. DiGiovanni A. A. et al. Micromechanics of Compaction in an Analogue Reservoir Sandstone // *American Rock Mechanics Association*. 2000.

46. Eberhardt E. et al. Identifying crack initiation and propagation thresholds in brittle rock // *Canadian Geotechnical Journal*. 1998. Vol. 35(2). P. 222-233.
47. Edimann K. et al. Predicting Rock Mechanical Properties from Wireline Porosities // *Society of Petroleum Engineers*. 1998. Vol.978-1-55563-383-7
48. Efron B., Tibshirani R. J. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall/CRC, 1993.
49. Ehrenberg S. N., Eberli G. P., Baechle G. Porosity–permeability relationships in Miocene carbonate platforms and slopes seaward of the Great Barrier Reef, Australia (ODP Leg 194, Marion Plateau) // *Sedimentology*. 2006. Vol. 53(6). P. 1289-1318.
50. Eissa E. A., Kazi A. Relation between static and dynamic Young's moduli of rocks // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*. 1988. Vol. 25(6). P. 479-482.
51. El Husseiny A., Vanorio T. The effect of micrite content on the acoustic velocity of carbonate rocks // *GEOPHYSICS*. 2015. Vol. 80(4). P. L45-L55.
52. Emil d. S. S. F. *Tensor Calculus for Engineers and Physicists*. Springer Netherlands, 2016.
53. Eshelby J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 1957. Vol. 241(1226). P. 376-396.
54. Farquhar R. A., Somerville J. M., Smart B. G. D. Porosity as a Geomechanical Indicator: An Application of Core and Log Data and Rock Mechanics // *Society of Petroleum Engineers*. 1994. Vol.978-1-55563-461-2
55. Fisher R. A. *Statistical methods for research workers*. Edinburgh: Oliver and Boyd. 1932.
56. Fortin J., Schubnel A., Guéguen Y. Elastic wave velocities and permeability evolution during compaction of Bleurswiller sandstone // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2005. Vol. 42(7). P. 873-889.

57. Fortin J. et al. Acoustic emission and velocities associated with the formation of compaction bands in sandstone // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2006. Vol. 111(B10).
58. Fournier F., Borgomano J. Critical porosity and elastic properties of microporous mixed carbonate-siliciclastic rocks // *GEOPHYSICS*. 2009. Vol. 74(2). P. E93-E109.
59. Fredrich J. T., Evans B., Wong T.-F. Micromechanics of the brittle to plastic transition in Carrara marble // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1989. Vol. 94(B4). P. 4129-4145.
60. Fredrich J. T., Evans B., Wong T.-F. Effect of grain size on brittle and semibrittle strength: Implications for micromechanical modelling of failure in compression // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1990. Vol. 95(B7). P. 10907-10920.
61. Gammel J. L., McDonald F. A. Application of the Pad'e Approximant to Scattering Theory // *Physical Review*. 1966. Vol. 142(4). P. 1245-1254.
62. Glantz S. A., Slinker B. K. *Primer of applied regression and analysis of variance*. New York: McGraw-Hill, Health Professions Division, 1990.
63. Gleeson T. et al. Mapping permeability over the surface of the Earth // *Geophysical Research Letters*. 2011. Vol. 38(2).
64. Golubev A. A., Rabinovich G. Y. Resultaty primeneia apparturny akusticeskogo karotasa dlja predeleina proconstykh svoistv gornych porod na mestorosdeniaach tverdykh isjopaemykh // *Prikl. Geofiz Moskva*. 1976. Vol. 73. P. 109-116.
65. Gu Y. et al. The porosity and permeability prediction methods for carbonate reservoirs with extremely limited logging data: Stepwise regression vs. N-way analysis of variance // *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. 2017. Vol. 42. P. 99-119.
66. Guéguen Y., Ravalec M. L., Ricard L. Upscaling: Effective Medium Theory, Numerical Methods and the Fractal Dream // *pure and applied geophysics*. 2006. Vol. 163(5). P. 1175-1192.

67. Hair J. F. *Multivariate Data Analysis: A Global Perspective*. 7th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2009.
68. Hamilton G. M., Goodman L. E. The Stress Field Created by a Circular Sliding Contact // *Journal of Applied Mechanics*. 1966. Vol. 33(2). P. 371-376.
69. Han D., Nur A., Morgan D. Effects of porosity and clay content on wave velocities in sandstones // *GEOPHYSICS*. 1986. Vol. 51(11). P. 2093-2107.
70. Hand D. *Latent Variable Models and Factor Analysis: A Unified Approach*, Third Edition by David J. Bartholomew, Martin Knott, Irini Moustaki. Vol. 81, 2013.
71. Hashin Z., Shtrikman S. A Variational Approach to the Theory of the Effective Magnetic Permeability of Multiphase Materials // *Journal of Applied Physics*. 1962. Vol. 33(10). P. 3125-3131.
72. Hill R. The Elastic Behaviour of a Crystalline Aggregate // *Proceedings of the Physical Society. Section A*. 1952. Vol. 65(5). P. 349.
73. Holt R. M. et al. Comparison between controlled laboratory experiments and discrete particle simulations of the mechanical behaviour of rock // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2005. Vol. 42(7). P. 985-995.
74. Hori M. Statistical theory of effective electrical, thermal, and magnetic properties of random heterogeneous materials. VI. Comment on the notion of a cell material // *Journal of Mathematical Physics*. 1975. Vol. 16(9). P. 1772-1775.
75. Horsrud P. *Estimating Mechanical Properties of Shale From Empirical Correlations*. 2001.
76. Horsrud P., SØnstebØ E. F., BØe R. Mechanical and petrophysical properties of North Sea shales // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 1998. Vol. 35(8). P. 1009-1020.

77. Hsieh Y.-M. et al. Interpretations on how the macroscopic mechanical behavior of sandstone affected by microscopic properties—Revealed by bonded-particle model // *Engineering Geology*. 2008. Vol. 99(1). P. 1-10.
78. Hubbert M. K., Rubey W. W. Role of fluid pressure in mechanics of overthrust faulting: i. Mechanics of fluid-filled porous solids and its application to overthrust faulting // *GSA Bulletin*. 1959. Vol. 70(2). P. 115-166.
79. Hudson J. A. Overall properties of a cracked solid // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1980. Vol. 88(2). P. 371-384.
80. Hudson J. A. Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks // *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*. 1981. Vol. 64(1). P. 133-150.
81. Hudson J. A. Overall elastic properties of isotropic materials with arbitrary // *Geophysical Journal International*. 1990. Vol. 102(2). P. 465-469.
82. Hung N.-S., Jan-Philip S. *Tensor Analysis and Elementary Differential Geometry for Physicists and Engineers*. Springer Netherlands, 2017.
83. Itskov M. *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers with Applications to Continuum Mechanics*. Springer Netherlands, 2015.
84. J. R., W. D. *Applied multivariate statistical analysis*: Prentice-Hall, Inc. 1988.
85. Jaeger J. C. *Brittle Fracture Of Rocks* // *American Rock Mechanics Association*. 1966.
86. Jakobsen M., A. Hudson J., Arne Johansen T. T-Matrix approach to shale acoustics. Vol. 154. 2003. P. 533-558.
87. Jiang T. Connection of elastic and transport properties: effective medium study in anisotropic porous media. PhD dissertation, Faculty of the Department of Earth and Atmospheric Sciences University of Houston, 2013.
88. Jiang T., Chesnokov E. Elastic moduli relation to microstructure properties in porous media using GSA modeling // *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2012: Society of Exploration Geophysicists*. 2012. P. 1-5.



89. Jiang X.-W., Wang X.-S., Wan L. Semi-empirical equations for the systematic decrease in permeability with depth in porous and fractured media // *Hydrogeology Journal*. 2010. Vol. 18(4). P. 839-850.
90. Jianjun L., Lijun L., Youjun J. Using Rock SEM Image to Create Pore-scale Finite Element Calculation Mesh // *Physics Procedia*. 2011. Vol. 22. P. 227-232.
91. Johnson P. A., Rasolofosaon P. N. J. Nonlinear elasticity and stress-induced anisotropy in rock // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1996. Vol. 101(B2). P. 3113-3124.
92. Josh M. et al. Laboratory characterisation of shale properties // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2012. Vol. 88-89. P. 107-124.
93. Jourdan C., Sauvage M. Properties of elastic twinning in calcite as observed by X-ray topography // *physica status solidi (a)*. 1970. Vol. 3(2). P. 343-352.
94. Ju Y. et al. Effects of Pore Structures on Static Mechanical Properties of Sandstone // *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2013. Vol. 139(10). P. 1745-1755.
95. Kaiser H. F. A second generation little jiffy // *Psychometrika*. 1970. Vol. 35(4). P. 401-415.
96. Kaiser H. F., Rice J. Little Jiffy, Mark Iv // *Educational and Psychological Measurement*. 1974. Vol. 34(1). P. 111-117.
97. Katsuki D. et al. Stress-Dependent Permeability and Dynamic Elastic Moduli of Reservoir and Seal Shale // *Unconventional Resources Technology Conference*. 2016.
98. Kelly S. et al. Assessing the utility of FIB-SEM images for shale digital rock physics // *Advances in Water Resources*. 2016. Vol. 95. P. 302-316.
99. Kennaird T. Avoiding Pitfalls When Upscaling Core Data // *Society of Petroleum Engineers*. 2005. P. Vol.978-1-61399-012-4
100. King M. S. Static And Dynamic Elastic Moduli Of Rocks Under Pressure // *American Rock Mechanics Association*. 1969.

101. Kitamura K. et al. Effects of pressure on pore characteristics and permeability of porous rocks as estimated from seismic wave velocities in cores from TCDP Hole-A // *Geophysical Journal International*. 2010. Vol. 182(3). P. 1148-1160.
102. Kjartansson E. Attenuation of seismic waves in rocks and applications in energy exploration. Ph.D. Thesis Stanford Univ., CA, 1979.
103. Kolesnikov Y. I. Dispersion effect of velocities on the evaluation of material elasticity // *Journal of Mining Science*. 2009. Vol. 45(4). P. 347-354.
104. Koponen A., Kataja M., Timonen J. Permeability and effective porosity of porous media // *Physical Review E*. 1997. Vol. 56(3). P. 3319-3325.
105. Koyama T., Jing L. Effects of model scale and particle size on micro-mechanical properties and failure processes of rocks—A particle mechanics approach // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2007. Vol. 31(5). P. 458-472.
106. Kuster G., Toksöz M. Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media: part i. Theoretical formulations // *GEOPHYSICS*. 1974. Vol. 39(5). P. 587-606.
107. Kuster G., Toksöz M. Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media: part ii. Experimental results // *GEOPHYSICS*. 1974. Vol. 39(5). P. 607-618.
108. Lacy L. L. Dynamic Rock Mechanics Testing for Optimized Fracture Designs // *Society of Petroleum Engineers*. 1997.
109. Lafhaj Z. et al. Correlation between porosity, permeability and ultrasonic parameters of mortar with variable water/cement ratio and water content // *Cement and Concrete Research*. 2006. Vol. 36(4). P. 625-633.
110. Lal M. Shale Stability: Drilling Fluid Interaction and Shale Strength // *Society of Petroleum Engineers*. 1999. P. Vol.978-1-55563-366-0
111. Lashkaripour G. R. Predicting mechanical properties of mudrock from index parameters // *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*. 2002. Vol. 61(1). P. 73-77.

112. Lawn B. Fracture of Brittle Solids. 2 ed. Cambridge Solid State Science Series. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
113. Lehner F. K. Thermodynamics of rock deformation by pressure solution, in Deformation Processes in Minerals, Ceramics and Rocks. Springer New York. 1990. P. 296–333.
114. Levenberg K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares // Quart. Appl. Math. 1944. Vol. 2. P. 164-168
115. Li L., Fjær E. Modeling of stress-dependent static and dynamic moduli of weak sandstones // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2012. Vol. 117(B5).
116. Lifshitz E. M., Kosevich A. M., Pitaevskii L. P. CHAPTER III - ELASTIC WAVES. Theory of Elasticity (Third Edition). Oxford: Butterworth-Heinemann, 1986. P. 87-107.
117. Lin S. C., Mura T. Elastic fields of inclusions in anisotropic media (II) // physica status solidi (a). 1973. Vol. 15(1). P. 281-285.
118. Lisabeth H. P., Zhu W. Effect of temperature and pore fluid on the strength of porous limestone // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2015. Vol. 120(9). P. 6191-6208.
119. Lockner D. A. et al. Chapter 1 Observations of Quasistatic Fault Growth from Acoustic Emissions. International Geophysics. ed. B. Evans, T.-f. Wong: Academic Press. Vol. 51. 1992. P. 3-31.
120. Ma H., Hu G. Eshelby tensors for an ellipsoidal inclusion in a micropolar material // International Journal of Engineering Science. 2006. Vol. 44(8). P. 595-605.
121. Ma H. M., Gao X. L. Strain gradient solution for a finite-domain Eshelby-type plane strain inclusion problem and Eshelby's tensor for a cylindrical inclusion in a finite elastic matrix // International Journal of Solids and Structures. 2011. Vol. 48(1). P. 44-55.

122. Manning C. E., Ingebritsen S. E. Permeability of the continental crust: Implications of geothermal data and metamorphic systems // *Reviews of Geophysics*. 1999. Vol. 37(1). P. 127-150.
123. Marquardt D. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1963. Vol. 11(2). P. 431-441.
124. Martin C. D., Chandler N. A. The progressive fracture of Lac du Bonnet granite // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*. 1994. Vol. 31(6). P. 643-659.
125. Martínez-Martínez J., Benavente D., García-del-Cura M. A. Spatial attenuation: The most sensitive ultrasonic parameter for detecting petrographic features and decay processes in carbonate rocks // *Engineering Geology*. 2011. Vol. 119(3). P. 84-95.
126. Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J. *The Rock Physics Handbook: Tools for Seismic Analysis of Porous Media*. Cambridge University Press, 2009.
127. Mavko G., Nur A. The effect of a percolation threshold in the Kozeny-Carman relation // *GEOPHYSICS*. 1997. Vol. 62(5). P. 1480-1482.
128. McGregor R., Peters R. H. The Effect of Rate of Flow on Rate of Dyeing I—The Diffusional Boundary Layer in Dyeing\* // *Journal of the Society of Dyers and Colourists*. 1965. Vol. 81(9). P. 393-400.
129. Mees F. et al. Applications of X-ray computed tomography in the geosciences // *Geological Society, London, Special Publications*. 2003. Vol. 215(1). P. 1.
130. Menéndez B., Zhu W., Wong T.-F. Micromechanics of brittle faulting and cataclastic flow in Berea sandstone // *Journal of Structural Geology*. 1996. Vol. 18(1). P. 1-16.
131. Meredith R. E., Tobias C. W. Conduction in heterogeneous systems // In: Tobias, C.W. (ed.) *Advances in Electrochemistry and Electrochemical Engineering 2.*, Interscience Publishers, New York, 1962.

132. Militzer H., Stoll R. Einige Beiträgeder Geophysik zur primaerdatenerfassung im Bergbau // Neue Bergbautechnik, Leipzig. 1973. Vol. 3(1). P. 21-25.
133. Montmayeur H., Graves R. M. Prediction of Static Elastic/Mechanical Properties of Consolidated and Unconsolidated Sands From Acoustic Measurements: Correlations // Society of Petroleum Engineers, 1986.
134. Moore M. G. Quantum Mechanics Ii (PHY 852). Michigan state University, 2008. P. 1-28.
135. Moos D., Zoback M. D., Bailey L. Feasibility Study of the Stability of Openhole Multilaterals, Cook Inlet, Alaska. 2001.
136. Morales R. H., Marcinew R. P. Fracturing of High-Permeability Formations: Mechanical Properties Correlations // Society of Petroleum Engineers. 1993.
137. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metallurgica. 1973. Vol. 21(5). P. 571-574.
138. Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. Springer Netherlands, 1987.
139. Myung J. I., Helander D. P. Correlation Of Elastic Moduli Dynamically Measured By In-situ And Laboratory Techniques.1972.
140. Nelder J. A., Mead R. A Simplex Method for Function Minimization // The Computer Journal. 1965. Vol. 7(4). P. 308-313.
141. Neuzil C. E. Groundwater Flow in Low-Permeability Environments // Water Resources Research. 1986. Vol. 22(8). P. 1163-1195.
142. Nishizawa O. Seismic velocity anisotropy in a medium containing oriented cracks transversely isotropic case // Journal of Physics of the Earth. 1982. Vol. 30(4). P. 331-347.
143. Norris A. N., Callegari A. J., Sheng P. A generalized differential effective medium theory // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1985. Vol. 33(6). P. 525-543.

144. Nur A. Effects of stress on velocity anisotropy in rocks with cracks // Journal of Geophysical Research. 1971. Vol. 76(8). P. 2022-2034.
145. Orlander T., Andreassen K. A., Fabricius I. L. Temperature Effects on Stiffness Moduli of Reservoir Sandstone From the Deep North Sea // American Rock Mechanics Association. 2017. P. Vol.
146. Orsi T. H., Dunn D. A. Correlations between sound velocity and related properties of glacio-marine sediments: Barents sea // Geo-Marine Letters. 1991. Vol. 11(2). P. 79-83.
147. Paterson M. S., Teng-fong W. Experimental Rock Deformation: The Brittle Field,. Springer, New York, 2005.
148. Pisani L. Simple Expression for the Tortuosity of Porous Media // Transport in Porous Media. 2011. Vol. 88(2). P. 193-203.
149. Plumb R. A. Influence of composition and texture on the failure properties of clastic rocks // Society of Petroleum Engineers. 1994. Vol.978-1-55563-464-3
150. Polyzos D. et al. A boundary element method for solving 2-D and 3-D static gradient elastic problems: Part I: Integral formulation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2003. Vol. 192(26). P. 2845-2873.
151. Potyondy D. O., Cundall P. A. A bonded-particle model for rock // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2004. Vol. 41(8). P. 1329-1364.
152. Prasad M. Velocity-permeability relations within hydraulic units // GEOPHYSICS. 2003. Vol. 68(1). P. 108-117.
153. R. H. A self-consistent mechanics of composite materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1965. Vol. 13(4). P. 213-222.
154. Raaen A. M. et al. FORMEL: A Step Forward in Strength Logging // Society of Petroleum Engineers. 1996. P. Vol.978-1-55563-423-0
155. Ravi S. Testing Statistical Hypotheses, 3rd edn by E. L. Lehmann and J. P. Romano // Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society). 2007. Vol. 170(2). P. 508-508.

156. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1929. Vol. 9(1). P. 49-58.
157. Rocher M. et al. Mechanical twin sets in calcite as markers of recent collisional events in a fold-and-thrust belt: Evidence from the reefal limestones of southwestern Taiwan // Tectonics. 1996. Vol. 15(5). P. 984-996.
158. Rodriguez E., Giacomelli F., Vazquez A. Permeability-Porosity Relationship in RTM for Different Fiberglass and Natural Reinforcements // Journal of Composite Materials. 2004. Vol. 38(3). P. 259-268.
159. Rong G. et al. Effect of Particle Shape on Mechanical Behaviors of Rocks: A Numerical Study Using Clumped Particle Model // The Scientific World Journal. 2013. Vol. 2013. P. 12.
160. Roscoe R. The viscosity of suspensions of rigid spheres // British Journal of Applied Physics. 1952. Vol. 3(8). P. 267.
161. Rzhavskii V. V., Novik G. I. A. n. The physics of rocks. Moscow : Mir Publishers, 1971. P. 320.
162. Sarda J. P. et al. Use of Porosity as a Strength Indicator for Sand Production Evaluation // Society of Petroleum Engineers, 1993.
163. Scott T. E., Ma Q., Roegiers J. C. Acoustic velocity changes during shear enhanced compaction of sandstone // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts. 1993. Vol. 30(7). P. 763-769.
164. Selvadurai A. P. S., Selvadurai P. A. On Effective Permeability of Heterogeneous Porous Media // Tech Science Press. 2010. Vol. 4(3). P. 121-128.
165. Settari A., Al-Ruwaili K., Sen V. Upscaling of Geomechanics in Heterogeneous Compacting Reservoirs // Society of Petroleum Engineers. 2013.978-1-61399-233-3

166. Sharma P., Ganti S. Size-Dependent Eshelby's Tensor for Embedded Nano-Inclusions Incorporating Surface/Interface Energies // *Journal of Applied Mechanics*. 2004. Vol. 71(5). P. 663-671.
167. Shepherd R. G. Correlations of Permeability and Grain Size // *Ground Water*. 1989. Vol. 27(5). P. 633-638.
168. Stober I. Researchers study conductivity of crystalline rock in proposed radioactive waste site // *Eos, Transactions American Geophysical Union*. 1996. Vol. 77(10). P. 93-94.
169. Stoica P., Jansson M. On maximum likelihood estimation in factor analysis—An algebraic derivation // *Signal Processing*. 2009. Vol. 89(6). P. 1260-1262.
170. Sun Y.-F. Seismic signatures of rock pore structure // *Applied Geophysics*. 2004. Vol. 1(1). P. 42-49.
171. Tembe S., Baud P., Wong T.-f. Stress conditions for the propagation of discrete compaction bands in porous sandstone // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2008. Vol. 113(B9).
172. Torabi A., Skurtveit E. Effect of Initial Grain Size and Packing on the Evolution of Elastic Properties of Poorly Lithified Sandstones // *American Rock Mechanics Association*. 2013.
173. Vajdova V., Baud P., Wong T.-f. Compaction, dilatancy, and failure in porous carbonate rocks // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2004. Vol. 109(B5).
174. Vajdova V. et al. Micromechanics of inelastic compaction in two allochemical limestones // *Journal of Structural Geology*. 2012. Vol. 43. P. 100-117.
175. Vajdova V. et al. Micromechanics of brittle faulting and cataclastic flow in Tavel limestone // *Journal of Structural Geology*. 2010. Vol. 32(8). P. 1158-1169.
176. Vanorio T., Mavko G. How micrite content affects the transport, seismic, and reactive properties of carbonate rocks. Implications for 4D seismic // *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2009: Society of Exploration Geophysicists*. 2009. P. 2030-2034.



177. Vehkalahti K. Foundations of Factor Analysis, Second Edition by Stanley A. Mulaik // International Statistical Review. 2010. Vol. 78(2). P. 327-328.
178. Vernik L., Bruno M., Bovberg C. Empirical relations between compressive strength and porosity of siliciclastic rocks // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts. 1993. Vol. 30(7). P. 677-680.
179. Voigt W. Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper // Annalen der Physik. 1889. Vol. 274(12). P. 573-587.
180. Walpole L. J. On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems—II // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1966. Vol. 14(5). P. 289-301.
181. Walsh J. B. The effect of cracks in rocks on Poisson's ratio // Journal of Geophysical Research. 1965. Vol. 70(20). P. 5249-5257.
182. Walsh J. B. The effect of cracks on the compressibility of rock // Journal of Geophysical Research. 1965. Vol. 70(2). P. 381-389.
183. Watt J. P., Davies G. F., O'Connell R. J. The elastic properties of composite materials // Reviews of Geophysics. 1976. Vol. 14(4). P. 541-563.
184. Weinberger C., Cai W. Lecture Note 2. Eshelby's Inclusion I // ME340B – Elasticity of Microscopic Structures – Stanford University – Winter 2004. 2004. Vol.
185. Weingarten J. S., Perkins T. K. Prediction of Sand Production in Gas Wells: Methods and Gulf of Mexico Case Studies, 1995.
186. Willis J. R. Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1977. Vol. 25(3). P. 185-202.
187. Willis J. R. Variational and Related Methods for the Overall Properties of Composites. Advances in Applied Mechanics. ed. Y. Chia-Shun: Elsevier. Vol. 21. 1981. P. 1-78.

188. Wong T.-F. Mechanical compaction and the brittle—ductile transition in porous sandstones // Geological Society, London, Special Publications. 1990. Vol. 54(1). P. 111-122.
189. Wong T.-f., David C., Zhu W. The transition from brittle faulting to cataclastic flow in porous sandstones: Mechanical deformation // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 1997. Vol. 102(B2). P. 3009-3025.
190. Wu X. Y., Baud P., Wong T.-f. Micromechanics of compressive failure and spatial evolution of anisotropic damage in Darley Dale sandstone // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2000. Vol. 37(1). P. 143-160.
191. Yalaev T. R., Bayuk I. O., Popov E. Y. Fluid Substitution Problem for Thermal Conductivity of Hydrocarbon Reservoirs Based on Rock Physics Methods // 7th EAGE Saint Petersburg International Conference and Exhibition 2016. Vol.
192. Yalaev T. R. et al. Connection between thermal and elastic properties of bentheimer sandstone // seismic technologies. 2016. Vol. 2. P. 76-82.
193. Yalaev T. R. et al. Connection of Elastic and Thermal Properties of Bentheimer Sandstone Using Effective Medium Theory (Rock Physics) // American Rock Mechanics Association. 2016.
194. Zeller R., Dederichs P. H. Elastic Constants of Polycrystals // physica status solidi (b). 1973. Vol. 55(2). P. 831-842.
195. Zhang J., Wong T.-F., Davis D. M. Micromechanics of pressure-induced grain crushing in porous rocks // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 1990. Vol. 95(B1). P. 341-352.
196. Zhang X., Sharma P. Inclusions and inhomogeneities in strain gradient elasticity with couple stresses and related problems // International Journal of Solids and Structures. 2005. Vol. 42(13). P. 3833-3851.
197. Zhang X., Spiers C. J. Compaction of granular calcite by pressure solution at room temperature and effects of pore fluid chemistry // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2005. Vol. 42(7). P. 950-960.

198. Zhang X., Spiers C. J., Peach C. J. Compaction creep of wet granular calcite by pressure solution at 28°C to 150°C // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 2010. Vol. 115(B9).
199. Zhang Y., Sayers C. M., Adachi J. I. The use of effective medium theories for seismic wave propagation and fluid flow in fractured reservoirs under applied stress // *Geophysical Journal International*. 2009. Vol. 177(1). P. 205-221.
200. Zhao H. et al. Influence of Pore Structure on Compressive Strength of Cement Mortar // *The Scientific World Journal*. 2014. Vol. 2014. P. 247058.
201. Zimmerman R. W., Somerton W. H., King M. S. Compressibility of porous rocks // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1986. Vol. 91(B12). P. 12765-12777.
202. Баяк И.О. et al. Сейсмоакустические исследования кернa при пластовых условиях // *Технологии сейсморазведки*. 2015. Vol. 2.
203. Баяк И. О. Теоретические основы определения эффективных физических свойств коллекторов углеводородов // *Акустика неоднородных сред. Ежегодник РАО*. 2011. Vol. (12). P. 107-120.
204. Баяк И. О. Междисциплинарный подход к прогнозированию макроскопических и фильтрационно-емкостных свойств коллекторов углеводородов. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Москва: ИФЗ РАН. 2013. P. 228.
205. Баяк И. О. Основные принципы математического моделирования макроскопических физических свойств коллекторов углеводородов // *Технологии сейсморазведки*. 2013. Vol. (04). P. 5-18.
206. Баяк И. О., Рыжков В. И. Определение параметров трещин и пор карбонатных коллекторов по данным волнового акустического каротажа // *Технологии сейсморазведки*. 2011. Vol. P. 32-42.
207. Гасеми М. Ф., Баяк И. О. Петроупругая модель оолитового известняка в масштабе кернa // *Экспозиция Нефть Газ*. 2018.

208. Ивановский Р. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде. 2008
209. Машинский Э. И. Физические причины различия статических и динамических модулей упругости горных пород // Геология и геофизика. 2003. Vol. 44(9). P. 953-959.
210. Тутубалин В. Н. Теория вероятностей и случайных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1992. 400 с.
211. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. Наука, 1977. 400 с.