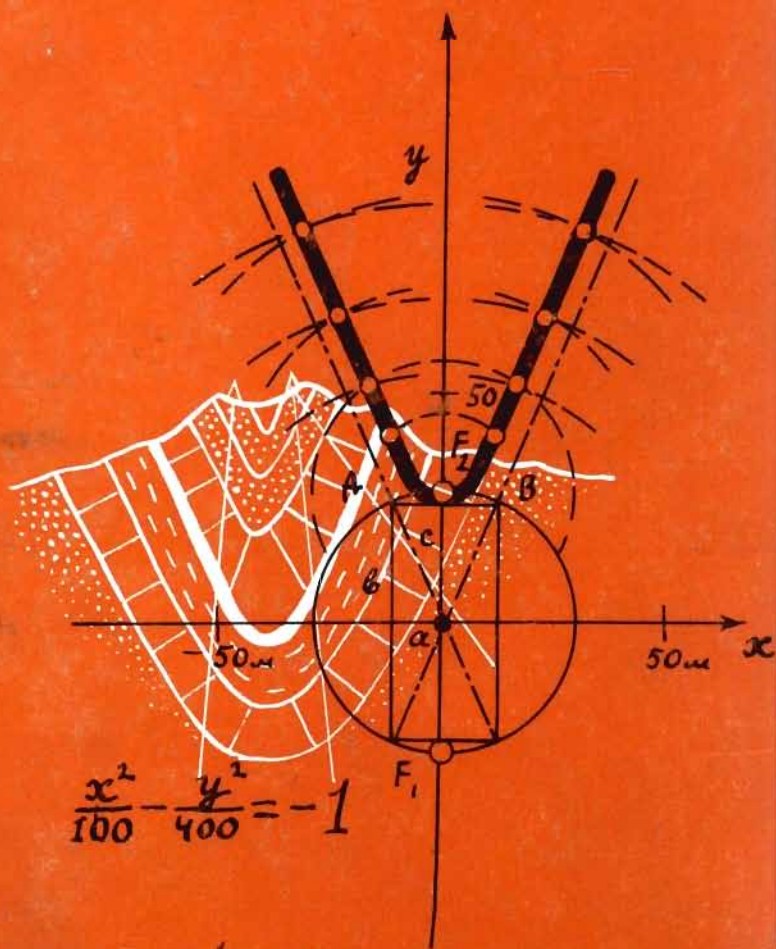


М. В. Гзовский

# Математика в геотектонике

551.24  
P-46



139038

М. В. Гзовский

МАТЕМАТИКА  
В  
ГЕОТЕКТОНИКЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НЕДРА»  
Москва 1971

**Математика в геотектонике.** Гзовский М. В. М., изд-во «Недра», 1971, 240 стр.

Книга содержит описание принципов использования математики в геотектонике и тектонофизике с целью решения различных практических задач, возникающих при поисках, разведке и разработке месторождений полезных ископаемых, а также в связи с исследованиями по ряду коренных теоретических проблем геологии.

Излагаются принципы геометрического описания различных структурных элементов земной коры, включая складки, трещиноватость и крупные разрывы, с помощью графических методов и математических уравнений.

Рассматривается применение дифференциального и интегрального исчисления при изучении тектонических движений, деформаций и энергии тектонических процессов.

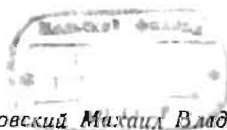
Указываются возможности использования основ векторного и тензорного исчисления в целях пространственного описания тектонических движений, деформаций и напряжений в земной коре.

Приводятся главные понятия из математической статистики, теории вероятностей и математической логики, которые желательны привлекать при геотектонических обобщениях.

Рассматривается много конкретных геологических примеров из различных районов, иллюстрирующих возможности использования в геотектонике математических методов.

Таблиц 2, иллюстраций 76, библиография 228 названий.

2-9-2  
29-71



*Гзовский Михаил Владимирович*

Математика в геотектонике

Редактор издательства Л. В. Власова

Техн. редактор А. Е. Матвеева

Корректор Э. Н. Капальская

Сдано в набор 22/III 1971 г.	Подписано в печать 11/VIII 1971 г.	T-12766
Формат 70×108 <sup>1/16</sup>	Печ. л. 15,5 с вкл.	Усл. печ. л. 21,7 Уч.-изд. л. 20,4
Индекс 1-4-1	Заказ 155/2717-1	Тираж 2900 экз.
		Цена 2 р. 18 к.

Издательство «Недра», Москва, К-12, Третьяковский проезд, д. 1/19.  
Московская типография № 6 Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР  
Москва Ж-88, 1-й Южно-партоавый пр. д. 17.

## ВВЕДЕНИЕ

Широкое использование математики является завтрашним днем нашей науки и геологического производства. В данной книге мы ограничимся рассмотрением того, как математика может быть использована в геотектонике и тектонофизике.

Проводя исследования в лаборатории тектонофизики Института физики Земли АН СССР и читая лекции по тектонофизике на физическом и геологическом факультетах МГУ, автор убедился в том, что знакомство с определенными математическими представлениями и методами необходимо для того, чтобы освоить и по существу понять эту науку. Стало ясно, что систематическому изложению тектонофизики геологам должна предшествовать математическая геотектоника.

Современная тектоника включает большое число измерений. В ней много количественных характеристик: элементы залегания слоев, статистические обобщения по трещинной тектонике и микроструктурному анализу, размеры структурных форм различного порядка, скорости движений. Современная геотектоника немыслима без структурных карт с изолиниями высоты залегания слоев и карт истории движений земной коры с изолиниями величины перемещения (за которые принимают изопакхиты). Различные приемы построения структурных профилей и карт являются элементами геометрии недр. Все эти приложения математики в геотектонике весьма полезны, но сейчас их становится недостаточно. Они содержат числовую характеристику лишь отдельных многочисленных фактов. Обобщение множества фактов одинакового смысла дается главным образом в графической форме.

В настоящее время важно перейти к обобщению фактов в виде формул, т. е. к выявлению математических закономерностей в тектонических явлениях. Математическая форма записи откроет возможность машинного анализа огромного объема фактических данных.

Таким образом, математизация даст качественно новые выводы в геотектонике. Это представление разделяется многими тектонистами. В СССР есть ряд энтузиастов: Ю. А. Косыгин, Ю. А. Воронин, В. П. Бухарцев, Л. Д. Кноринг и др., работающих в данном направлении в геотектонике. Уже существуют лаборатории математической геологии в Математическом институте АН СССР, в Сибирском отделении АН СССР и в Геологическом институте АН СССР.

Привлечение математических методов для решения тектонических вопросов надо рассматривать не как замену, а как дополнение к сложившемуся в тектонике арсеналу различных методов исследования.

Автор надеется, что многочисленные примеры, приведенные в книге, убедят читателя в *необходимости развития математических методов решения тектонических вопросов.*

Совокупность излагаемых в книге математических понятий и методов является обязательной ступенью, подводящей читателя к пониманию физической теории тектонических процессов — тектонофизике.

Каковы направления использования математики в геотектонике и тектонофизике? Прежде всего должны быть развиты методы точной

характеристики структуры земной корь. Существует несколько путей: графическое точное изображение, избирательное использование лишь некоторых характерных размеров тектонических форм, запись формы с помощью уравнения. Для характеристики структуры требуются аналитическая геометрия, а также теория графического выражения трансцендентных функций.

Для описания морфологии структуры и изучения тектонических движений необходимо привлекать основные элементы дифференциального и интегрального исчисления.

В геотектонике и тектонофизике мы часто имеем дело с векторными и тензорными величинами: перемещениями, скоростями, деформациями, напряжениями. Поэтому геологу приходится обращаться к векторному и тензорному исчислениям.

Обобщение данных по многочисленным природным объектам требует использования математической статистики и теории вероятностей.

Наконец, переходя к выводам, которые вытекают из фактических данных, делая прогнозы, используя тектонические признаки для решения практических задач, геологу следует опираться на основы математической логики и теории вероятностей.

Автор надеется, что в данной книге тектонист увидит, какие математические методы могут ему помочь в работе, а теоретик найдет какие-то новые интересные для него задачи. Эта первая книга по математической геотектонике отнюдь не исчерпывает ее и не решает до конца многих вопросов. Цель работы — заинтересовать тектонистов и способствовать проникновению математики в геотектонику.

Рукопись была прочтена рядом специалистов по геологии, геофизике, физике и математике. Автор благодарен за замечания и советы Г. П. Горшкову, Д. А. Родионову, В. Н. Страхову, Д. Н. Осокиной, А. В. Михайловой и особенно А. С. Григорьеву и А. М. Кочеткову, которые весьма подробно рассмотрели рукопись. Замечания и пожелания читателей будут приняты с благодарностью.

# 1. ГЕОМЕТРИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СТРУКТУРЫ ЗЕМНОЙ КОРЫ

## СТРУКТУРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЗЕМНОЙ КОРЫ

В геотектонике большое значение имеет мысленное разделение земной коры на такие области различной величины и соподчиненности, которые являются однородными по истории развития и внутренней структуре. Эти области можно называть структурными элементами коры. Таковы антиклинории, антеклизы, антиклинали и многие другие.

Описанию различных по величине структурных элементов коры материков и океанов с рассмотрением их морфологии, истории и возможных причин возникновения с многочисленными примерами посвящены объемистые руководства по структурной геологии и геотектонике. Существуют обобщенные данные о строении материков и океанов, выраженные в виде тектонических карт, статей, монографических описаний глубинного строения коры (Белоусов, 1948—1968; Пейве 1956—1965; Хаин, 1964; Косыгин, 1969; Ажгирей, 1966; Шатский, Богданов, Яншин и др., 1957; Деменицкая, 1961; Шатский и др., 1962; Дедеев и др., 1963; Яншин, 1966; Удинцев, 1965; Косминская, 1968; Беляевский, 1967; Резанов, 1968; Борисов, 1967 и др.).

В данной книге структурные элементы коры рассматриваются с особой точки зрения, которая требует математического подхода и отражает некоторые новые грани нашего понимания этих элементов.

Первоначально структурные элементы можно было выделять и классифицировать в основном опираясь на геологическую карту, т. е. на то, что видно на поверхности. Объемное представление о структурных элементах было развито слабее, чем плановое. Данные наблюдений на поверхности удавалось экстраполировать с малой надежностью на глубины не более 15 км. Глубинное строение коры, его соотношение с наблюдаемыми структурными элементами и даже положение нижней поверхности земной коры не были известны. При таком состоянии знаний несколько десятилетий тому назад сложилась та система представлений о структурных элементах земной коры, которой мы пользуемся в настоящее время. Однако сейчас имеются глубокие скважины, разнообразные горные выработки на эксплуатируемых месторождениях и обильный материал геофизических исследований, которые раскрывают перед нами основные черты строения земной коры на всю ее глубину. Поэтому в старые термины тектонисты сейчас вкладывают новое содержание, подразумевая объемные характеристики земной коры. В отчетливо сформулированном виде такая новая система представлений о структурных элементах коры еще не сложилась, хотя ясно, что она формируется (Косыгин и др., 1964; Косыгин, 1969).

Итак, типы структурных элементов определяются прежде всего последними геологическими событиями, создавшими наблюдаемые на поверхности формы залегания горных пород. В силу известных теперь особенностей глубинного строения коры мы будем вкладывать в поня-

тие о структурном элементе объемный смысл. Каждый структурный элемент представляет собой одну из многих разновидностей геологических тел — понятие, сформулированное в математической геологии Ю. А. Қосыгиным, Ю. А. Ворониным, В. А. Соловьевой (1964). Границы этих тел могут иметь четкое физическое выражение, например представлять собой резкое изменение вещественного состава горных пород на краях горста или грабена. Но могут быть границы и иного рода, не имеющие четкого физического выражения, выбираемые нами условно и имеющие математический смысл. Так, например, в дальнейшем мы будем ограничивать внутреннюю часть складки местами изменения знака кривизны структурных поверхностей.

Земной корой принято называть внешнюю часть твердой Земли от верхней поверхности до глубины, на которой скорость продольных сейсмических волн скачкообразно увеличивается до  $8 \text{ км/сек}$  (любопытно, что эта величина численно равна первой космической скорости). Эта нижняя граница земной коры называется поверхностью Мохоровичича (сокращенно — Мохо). Внутри земной коры скорость продольных сейсмических волн меньше  $8 \text{ км/сек}$ , за исключением весьма небольших участков — ультраосновных интрузий.

Сейсмологические исследования в ряде районов позволяют разделить земную кору на много слоев, лежащих почти горизонтально один над другим. Однако существуют две главные границы, разделяющие кору на три основных слоя: 1) осадочный (часто его называют осадочным покровом); 2) гранитный; 3) базальтовый.

Осадочный слой ( $\sigma$ ) образуют полого залегающие слабо деформированные породы, преимущественно осадочные, местами рыхлые, часто с малой вязкостью, иногда содержащие прослои вулканогенных пород и магматические интрузии. Скорость продольных сейсмических волн в осадочном покрове от  $2$  до  $5 \text{ км/сек}$ , средняя плотность  $1,8$ — $2,4$ . Мощность осадочного слоя в редких местах достигает  $12$ — $15 \text{ км}$ . На материках во многих районах он полностью отсутствует, и тогда на поверхность выходит подстилающий слой — гранитный.

Гранитный слой ( $\gamma$ ) состоит не только из гранитов, но и из других пород с различными физическими свойствами. Средняя плотность слоя  $2,67$ , или  $2,7$ . Многие исследователи делят гранитный слой на две части, которые мы будем условно называть верхней ( $\gamma_2$ ) и нижней ( $\gamma_1$ ).

В верхней части (нередко называемой «консолидированным фундаментом») широко распространены сильно деформированные, уплотненные и заметно измененные осадочные горные породы с прослоями вулканогенных пород и с магматическими интрузиями. Мощность этой части гранитного слоя может доходить до  $10$ — $15 \text{ км}$ . Средняя скорость продольных сейсмических волн в нем от  $5,5$  до  $6,2 \text{ км/сек}$ , средняя плотность  $2,4$ — $2,7$ . Эта часть присутствует далеко не во всех районах.

В нижней части гранитного слоя распространены разнообразные метаморфические и магматические горные породы, среди которых преобладают граниты (в широком смысле слова, т. е. гранитоиды) и гнейсы. Мощность их достигает нескольких десятков километров, средняя скорость продольных волн от  $6,5$  до  $7,0 \text{ км/сек}$ , средняя плотность  $2,7$ . Нижняя часть гранитного слоя в пределах материков существует повсеместно, за исключением глубоководных ( $2000 \text{ м}$  и более) участков внутриматериковых и окраинных морей.

Под обширными пространствами океанов гранитный слой целиком отсутствует.

Базальтовый слой ( $\beta$ ) отделен от гранитного так называемой поверхностью Конрада, непосредственно ниже нее средняя скорость продольных волн поднимается до  $7,0$  и более (часто  $7,5$ ). Базальтовый слой отделяется от верхней мантии поверхностью Мохоровичича, под ней скорость продольных сейсмических волн скачкообразно увеличи-

зается до 7,9 и более, вплоть до 8,7 км/сек. Средняя плотность под границей Мохоровичича 3,3 (от 2,9 до 3,4). Ниже поверхности Конрада вплоть до поверхности Мохоровичича залегают отнюдь не базальты, как может показаться из названия слоя. Базальты — довольно пористые породы, образующиеся при затвердении лавы основного состава, изливающейся на поверхность Земли. Базальтовый слой, как предполагают исходя из его физических свойств (зарегистрированных геофизически), состоит из магм основного состава, затвердевших на глубине, т. е. из габбро, норитов и других интрузивных аналогов базальтов. Достоверных сведений о составе базальтового слоя на материках пока нет. Предполагают, что от него ответвляются те основные интрузии, выходы которых имеются на поверхности.

В океанических областях Земли и на глубоководных участках внутриматериковых и окраинных морей базальтовый слой залегают непосредственно под более или менее мощным осадочным покровом. Весьма вероятно, что широко распространенные базальты, образующие многие острова внутри океанов, по химическому составу соответствуют базальтовому слою океанов, который в отличие от базальтов должен обладать полнокристаллическим строением. Вопрос о соотношениях базальтов и базальтового слоя осложняется тем, что магматические очаги, из которых изливаются базальты, расположены ниже земной коры в верхней мантии. Возможно, базальтовый слой океанов образовался путем перекристаллизации и уплотнения ранее излившихся базальтов.

Существует, однако, представление о возможности наращивания базальтового слоя снизу в результате перекристаллизации верхней части пород верхней мантии. В этом случае предполагается, что верхняя часть верхней мантии обладает тем же химическим составом, что и базальтовый слой, но химические элементы сгруппированы в ней в другие минералы, образующие не габбро и нориты, а более плотные эклогиты. Исследователи, не разделяющие это представление, предполагают, что верхняя мантия состоит не из основных, а из ультраосновных пород — перидотитов и др. (Белоусов, 1966, 1968; Магницкий, 1965 и др.).

Нередко думают, что базальтовый слой наиболее древний, гранитный моложе, а осадочный еще моложе, по аналогии с тем, как снизу вверх изменяется возраст в пределах слоистых толщ осадочных горных пород. Эта точка зрения не является вполне верной, так как слои характеризуют прежде всего современную структуру коры, и разные участки одного и того же слоя, лежащие на одном уровне, имеют различный возраст. Так, осадочный покров в одних местах состоит лишь из палеозойских пород, в других — из палеозойских и мезозойских, в третьих — из мезозойских и кайнозойских, в четвертых — из одних мезозойских, в пятых — из одних кайнозойских. Разновозрастна в различных районах и верхняя часть гранитного слоя. То же можно утверждать относительно нижней части гранитного слоя. Один и тот же материальный объем горных пород с течением времени превращался из осадочного слоя в верхнюю часть гранитного, а затем в нижнюю часть гранитного слоя, или же непосредственно из осадочного в нижнюю часть гранитного. Такое смещение границ слоев коры происходит неравномерно в пространстве и во времени. Относительно границ Конрада и Мохоровичича нередко предполагают такие же перемещения с течением времени, но все же это мнение еще дискуссионно.

Важным достижением геофизики за два последние десятилетия явилось установление того, что существуют такие крупные структурные элементы коры, современное развитие которых регистрируется на поверхности Земли в виде тектонических движений и деформаций, и при этом данные элементы могут быть прослежены на глубину вплоть до подошвы земной коры. Многие из них, вероятно, распространяются



и в верхнюю мантию. Такие элементы мы будем называть *общекоревыми*.

Вместе с тем на поверхности выявляются и такие элементы, которые не проходят через всю земную кору, а достигают лишь глубины определенной структурной поверхности. Существуют элементы, расположенные внутри коры между некоторыми структурными поверхностями. Таким образом, можно говорить о *внутрикоревых* элементах.

Наконец, по сейсмическим данным выявляются элементы структуры, существующие в верхней мантии, но не распространяющиеся в земную кору — это *подкоревые* элементы. Они иногда представлены крупными зонами подкоревых разрывов, выявляющихся по гипоцентрам глубокофокусных землетрясений, и не отражаются в структуре коры. Примеры этому имеются на Памире, в Приморье, в Андах.

Наиболее изученными и обладающими простым внутренним строением являются внутрикоревые элементы. Поэтому именно с них мы и начнем геометрическое рассмотрение структуры коры. Многие представления, выработанные на простых мелких структурных формах, могут быть распространены и на главные общекоревые структурные элементы. Однако ограничиться ими нельзя, а необходимо разработать для них ряд специфических характеристик.

Структурные элементы любой глубинности в геологии давно принято разделять на два главных класса: 1) связанные (пликативные) элементы, внешние границы и внутренняя структура которых определяются пластическими деформациями; 2) разрывные (дизъюнктивные) элементы, представляющие собой нарушения сплошности горных пород. В результате изучения ряда районов многие исследователи ввели представление о смешанном классе элементов, в границах и внутренней структуре которых совместно проявляются и имеют соизмеримое значение пластические деформации и тектонические разрывы. Если примером связанного элемента служит антиклиналь, а разрывного — сброс, то смешанным элементом является горст-антиклиналь.

Указанный выше подход к структурным элементам как к объемным геологическим телам, по мнению автора, должен быть применен ко всем трем классам.

При детальном изучении каждый разрыв предстает как сложная система поверхностей разрушения, распространенная в определенном объеме, который можно считать дискретным геологическим телом. Присутствие определенных поверхностей разрушения в соответствующем сочетании между собой является признаком, который позволяет выделить данное объемное тело. Наиболее крупные разрывы выражены круто наклонными телами толщиной до десятков километров при длине по простиранию в тысячи километров и протяженности по падению — на сотни километров. Даже частные нарушения сплошности в большинстве случаев представляют собой полости, заполненные жилами, т. е. являются объемными телами, а не поверхностями, не имеющими толщины. Наконец, изучая трещиноватость, мы также представляем себе некоторый объем горных пород — геологическое тело, пронизанное решеткой многочисленных трещин определенных направлений и удаленных на известное среднее расстояние одна от другой.

## ВНУТРИКОРОВЫЕ СТРУКТУРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

### СКЛАДКИ

Каждый геолог знает, что такое складка, но нередко даже крупные тектонисты затрудняются дать четкое определение складки. В руководствах по общей геологии, геотектонике, геометрии недр и в геологических словарях мы также не находим одинаковых по смыслу фор-

мулировок. Неясность определения складки вызывает затруднения при выделении основных элементов складок и их математическом описании.

## ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О СКЛАДКАХ

### *Определение складки*

Для того чтобы сформулировать, что такое складка в математическом смысле, нужно использовать два понятия: структурная поверхность и первоначальный средний уровень ее залегания.

В любом складчатом участке коры имеются какие-то структурные поверхности: слои, границы несогласного залегания, пенеплены и т. п., по форме которых обнаруживаются складки. В однородной среде, не имеющей структурных поверхностей, складок не видно. Однако, отметив каким-либо образом некоторые материальные поверхности в физически однородном теле, мы после его деформации могли бы обнаружить складки. Так, например, в лабораторных условиях на модель однородного участка земной коры наносят краской линии, которые играют роль структурных поверхностей. После деформации модели на ней по этим линиям обнаруживаются складки.

У каждой структурной поверхности существует определенный первоначальный средний уровень залегания. В простейшем, широко распространенном случае структурные поверхности представляются нам первично горизонтальными. Однако встречаются вертикальные и наклонные, плоские или искривленные первоначальные положения поверхностей. Опираясь на эти понятия, можно дать четкое определение складки.

Складка — это объемная область, в пределах которой каждая структурная поверхность в результате деформации среды испытывает одно единственное отклонение от среднего уровня залегания. Во многих складках все поверхности отклоняются в одну сторону, мы будем называть их односторонними. Реже встречаются складки, в которых часть поверхностей отклоняется в одну, а другая часть — в противоположную сторону; это — двусторонние складки (рис. 1, а). Флексуры также являются складками — в них происходит одно изменение среднего уровня залегания слоев.

Понятие о складке включает определенные масштабные ограничения. Материковые и океанические участки коры, платформы, синеклизы и антеклизы, антиклинории и синклинории и другие соизмеримые с ними элементы структуры коры не считаются складками. Качественным признаком элементов, не являющихся складками, служит то, что земная кора может быть разделена на них без остатка. Такое разделение в математике называется разбиением.

Складки могут существовать поодиночке или группами; при выделении складок может не произойти разбиения земной коры, так как останутся обширные участки, не являющиеся складками. Большинство складок представляют собой внутрикоровые геологические тела, захватывающие часть осадочного покрова или весь его целиком (внутрипокровные складки), или осадочный покров вместе с частью подстилающего гранитного слоя. Такие складки принято называть глубинными. Наконец, на платформах распространены наиболее крупные складки, в которых могут принимать участие все структурные поверхности земной коры, включая ее подошву, — это общекоровые складки.

Складки разделяются на антиклинали и синклинали. При объемном понимании складок эти названия следует связывать с формой залегания наиболее молодых слоев, входящих в складку. Если они обра-

щены вогнутостью в сторону более древних слоев — мы имеем антиклиналь, если в сторону более молодых слоев — синклиналь.

Складки часто встречаются группами, причем крупные и мелкие могут располагаться рядом. Тогда может возникнуть вопрос, являются ли две соседние складки равноправными и самостоятельными,

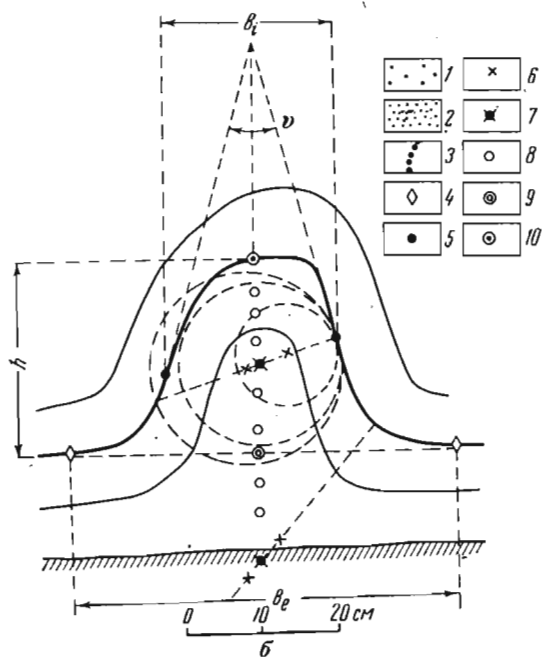
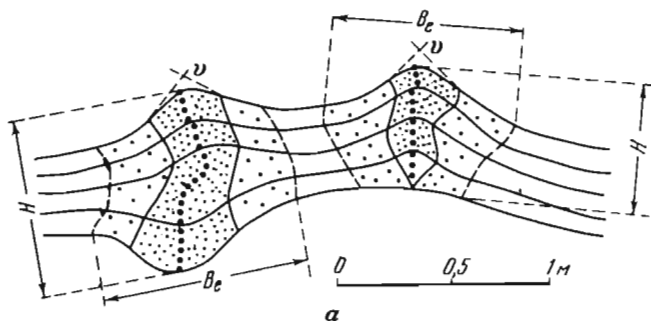


Рис. 1. Элементы общей (а) и частной (б) складок

1 — внешние части двусторонней (слева) и односторонней (справа) общих антиклиналей; 2 — внутренние части общих антиклиналей; 3 — осевые поверхности общих антиклиналей; 4 — внешние границы частной антиклинали; 5 — границы внутренней части частной антиклинали; 6 — центры окружностей, не лежащих на осевой поверхности; 7 — найденные центры окружностей, лежащих на осевой поверхности; 8 — другие точки, лежащие на осевой поверхности; 9 — ось частной складки; 10 — шарнир частной складки;  $\varphi$  — угол складки. Складки а описаны в палеозойских известняках Каратау (Средняя Азия); складка б получена в модели из петролатума при продольном сжатии слоев

или же одну из них можно считать осложнением другой. Можно условиться, что осложняющими являются складки, которые в три и более раз меньше основной (на половину десятичного порядка).

В строении любой складки участие принимают разрывы различной величины. Будем считать складками такие области, в которых откло-

жение структурных поверхностей от средних уровней за счет всех разрывов (суммы их амплитуд) не менее чем на десятичный порядок меньше полного отклонения. При большей величине суммарной амплитуды разрывов структурный элемент является смешанным, т. е. складчато-разрывным (например, антиклиналь с надвигом, синклинали со сбросом, антиклиналь с горстом, синклинали с грабеном и т. п.). Разрывы, сочетающиеся со складкой, проходят через все структурные поверхности или пересекают некоторые из них. В последнем случае отклонение, созданное разрывом, может превышать отклонение, вызванное пластической деформацией, и структурная форма в этих поверхностях получит название разрывной: чешуи, горсты, грабены и т. п. Такую область с чисто разрывными нарушениями поверхностей не следует включать в складку.

### Элементы складок

Внешняя граница складки является геометрическим местом точек, в которых отклонение структурных поверхностей от их среднего уровня залегания становится заметным при заданной (или осуществимой) точности измерения (см. рис. 1, б). Таким образом, внешняя граница складки условна.

Рассматривая форму залегания всех структурных поверхностей в пределах одного объемного геологического тела, мы имеем дело с общей складкой. Ограничившись формой одной структурной поверхности, как это обычно делается в структурной геологии, мы говорим о частной складке. Частная складка — это искривленная поверхность, а не объемное тело.

Высотой общей складки ( $H$ ) будем называть наибольшее расстояние между верхней и нижней границами складки, т. е. между верхней и нижней структурными поверхностями, испытавшими отклонения от первоначального их залегания. Измерение высоты предлагается производить по нормали к первоначальному уровню залегания структурных поверхностей.

Шириной складки ( $B_c$ ) назовем наибольшее расстояние между внешними границами складки, измеренное вдоль первоначального среднего уровня залегания структурных поверхностей.

Длину складки ( $L$ ) приравняем наибольшему расстоянию между ее границами.

Аналогично вводятся понятия о высоте ( $h$ ), внешней ширине ( $b_e$ ), внутренней ширине ( $b_i$ ) и длине ( $l$ ) частных складок по каждой структурной поверхности (см. рис. 1, б).

Каждая структурная поверхность в пределах общей складки разделяется на три части по знаку кривизны. Вдоль кольцевой линии, выраженной на профиле двумя точками, знак кривизны изменяется. Геометрическое место линий изменения знака кривизны многих частных складок образует особую поверхность, которая разделяет общую складку на внутреннюю часть и внешнюю, кольцеобразную, часть (см. рис. 1, а). Флексуру по линиям изменения знака кривизны можно разделить на верхнюю и нижнюю части, принимая за верхнюю направление омоложения слоев.

Частную складку также можно разделить на внутреннюю и внешнюю части. Если через границы внешней и внутренней частей частной складки, выраженные на профиле двумя точками изменения знака кривизны, провести прямые линии, касательные к линии, изображающей частную складку на поперечном профиле, то угол пересечения этих прямых ( $\theta$ ) будет углом складки. Он считается положительным, если лежит с выпуклой стороны частной складки, и отрицательным, если

находится с вогнутой стороны. В точке пересечения биссектрисы угла складки со слоем лежит начало осевой поверхности, если складка не веерообразная, лежащая или перевернутая.

Внутри частной складки геометрическим построением можно найти поверхность, по отношению к которой частная складка расположена с наибольшим приближением к симметрии. Для этого от одной из границ внешней и внутренней частей частной складки проводим нормаль. На ней, путем последовательного подбора циркулем, находим точку, одинаково удаленную от другой стороны складки (см. рис. 1, б). Затем аналогичное построение производим для других точек частной складки. В итоге находим геометрическое место точек, равноудаленных от обеих сторон частной складки — это частная осевая поверхность. Продлеваем ее до пересечения с соседней структурной поверхностью, т. е. до соседней частной складки. В последней также находим ее частную осевую поверхность. В итоге, через общую складку прослеживается совокупность частных осевых поверхностей, образующих общую осевую поверхность. Она может оказаться волнистой и даже прерывистой поверхностью (см. рис. 1, а).

Линию пересечения частной осевой поверхности и первоначального среднего уровня залегания данной структурной поверхности назовем осью частной складки. Линия пересечения частной осевой поверхности с соответствующей ей частной складкой является шарниром этой складки. Складки с горизонтальными шарнирами называют горизонтальными, с наклонными шарнирами — наклонными, с вертикальными шарнирами — вертикальными. В связи со списками и разработкой месторождений, особенно нефтяных, важно выделять гребень частной складки — линию, на которой лежат наиболее высоко расположенные точки всех поперечных профилей. Расстояние от оси до шарнира частной складки, измеренное вдоль осевой поверхности, именуется амплитудой ( $a$ ) частной складки.

В структурной геологии используются еще и другие элементы частных складок, имеющие геометрически менее точные определения: замók — часть складки, прилегающая к шарниру и включающая в себя одно или два места с наибольшей кривизной\*; крылья — боковые части складки, удаленные от шарнира и не включенные в замók, ядро — это область, окруженная частной складкой, т. е. лежащая внутри нее.

Если несколько складок располагаются рядом таким образом, что антиклинали непосредственно прилегают к синклиналям, то внешние части как частных, так и общих складок исчезают, и внутренние части антиклиналей граничат с внутренними частями синклиналей.

При пространственном рассмотрении частных складок можно использовать различные геометрические методы определения элементов складки. В геометрии недр рекомендуются построения на картах, изображающих форму частной складки с помощью стратоизогипс (см. Рыжов, 1964). Это делается, если частную складку можно представить в виде двух пересекающихся плоскостей, совпадающих с ее крыльями; осевая поверхность при этом считается плоскостью. Такие складки широко распространены в Донбассе, Кузбассе и в других районах.

**Метод построения элементов складки. Построение шарнира.** Прямоугольные отрезки стратоизогипс, соответствующие разным крыльям, продолжают до их взаимного пересечения в точке  $A$  (рис. 2, а). Такое же построение делают и по другим стратоизогипсам для нахождения точек  $B$  и  $C$ . Последние найденные точки являются проекциями на горизонтальную плоскость точек  $B_1$  и  $C_1$ , которые лежат на продольном профиле складки и на ее шарнире (см. рис. 2, б). Высота каждой из них совпадает с высотой той стратоизогипсы на карте, по которой най-

\* Замók антиклинали часто называют сводом.

дена точка. Соединив их на карте прямой, мы получаем проекцию шарнира на горизонтальную плоскость. По изменению высоты найденных точек видно, в какую сторону наклонен шарнир. На карте легко измерить азимут ( $\alpha$ ) этого направления. Для определения угла наклона шарнира строится профиль по вертикальному сечению, идущему вдоль шарнира. Точки  $A, B, C$ , найденные на карте, изображаются на профиле вдоль горизонтальной линии. Вверх от них откладываются

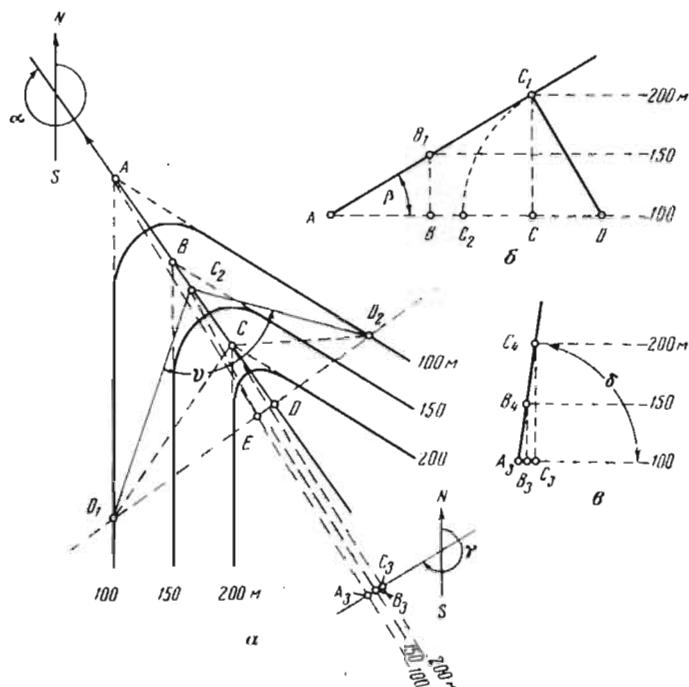


Рис. 2. Построение элементов складки по карте стратонизогипс  
 $a$  — карта,  $б$  — продольный профиль,  $в$  — поперечный профиль. Пояснения в тексте

разности между отметками стратонизогипс. Так получаются точки  $B_1$  и  $C_1$ , лежащие на шарнире. Угол на профиле между линиями  $ABC$  и  $AB_1C_1$  является углом наклона шарнира ( $\beta$ ).

**Построение угла складки.** Угол между крыльями складки ( $\phi$ ) должен быть измерен в плоскости, перпендикулярной шарниру (см. рис. 2). След пересечения этой плоскости с вертикальным сечением вдоль шарнира (плоскостью  $C, B, A, B_1, C_1$ ) на данном сечении на рис. 2,  $б$  выглядит в виде прямой  $C_1D$ , перпендикулярной линии  $AB_1C_1$ . Через точку  $D$  на рис. 2,  $а$  проходит прямая  $D_1D_2$ , лежащая на уровне стратонизогипсы с высотой точки  $A$ . Она пересекается с крыльями складки в точках  $D_1$  и  $D_2$ . Чтобы их найти, надо на карте от точки  $C$  отступить в сторону подъема шарнира на расстояние  $CD$  (это следует из профилей рис. 2,  $б$ ), отметить точку  $D$  и провести через нее перпендикулярно шарниру прямую  $D_1D_2$ . Теперь мы имеем на карте рис. 2,  $а$  угол  $D_1CD_2$ , являющийся проекцией угла складки  $\phi$  на горизонтальную плоскость. Сам угол  $\phi$  лежит на наклонной плоскости, соединяющей точки  $D_1C_1D_2$  (на рис. 2,  $а$  точка  $C_1$  совпадает с точкой  $C$ ). Эту плоскость можно повернуть до горизонтального положения вокруг прямой  $D_1D_2$ . Для этого взятое с профиля (см. рис. 2,  $б$ ) расстояние  $C_1D$  откладываем на карте рис. 2,  $а$  в направлении падения шарнира от точки  $D$ . Найденную точку  $C_2$  соединяем прямыми с точками  $D_1$  и  $D_2$ . Угол  $D_1C_2D_2$  есть искомый угол складки  $\phi$ .

*Построение осевой поверхности.* Проведем биссектрису угла  $D_1C_2D_2$ . Она пересечет прямую  $D_1D_2$  в точке  $E$ . Точка  $E$ , как и точка  $A$ , лежит в осевой плоскости. Обе они имеют одинаковую высоту. Значит, прямая  $AE$  есть изогипса осевой поверхности. Параллельно ей через точки  $B$  и  $C$  проведем прямые  $BB_3$  и  $CC_3$ . Они являются другими изогипсами осевой поверхности с высотами, соответствующими точкам  $B_1$  и  $C_1$ . Направление, перпендикулярное стратонизогипсам и изображенное прямой  $C_3B_3A_3$ , даст нам азимут падения осевой плоскости ( $\gamma$ ). Вертикальный разрез (см. рис. 2, *в*), проведенный вдоль линии  $C_3B_3A_3$ , на котором от точек  $C_3$  и  $B_3$  отложены вверх их превышения над уровнем  $A_3$ , позволяют найти точки  $C_4$  и  $B_4$ . Прямая  $C_4B_4A_3$  на этом разрезе имеет наклон, равный углу падения осевой поверхности ( $\delta$ ).

Изображенные на карте (см. рис. 2, *а*) изогипсы осевой поверхности имеют большое значение при проектировании разведочных работ и особенно при разработке месторождений.

Другой метод определения элементов складки с плоскими крыльями, используемый автором, основан на применении стереографической проекции. Для упрощения построений и большей их наглядности автор использует измененную сетку Вульфа, повернутую на  $90^\circ$ , с особым расположением чисел, обозначающих азимуты, и шкалой крутизны наклона на нижней половине вертикального диаметра (рис. 3, *а*). Эта сетка позволяет изображать плоскости по их элементам залегания и наклонные линии в том виде, как они выглядят, если проходят через центр сферы и обрезаются верхней половиной сферы, на которую мы смотрим сверху. Сфера эта жестко связана с географической системой координат: вертикальный диаметр параллелен меридиану (верхний конец направлен на север), горизонтальный — широте; плоскость круговой диаграммы горизонтальна. На сетку сверху накладывается восковка с одной опорной отметкой, отстоящей от центра сетки на расстоянии радиуса сетки. На рис. 3, *б, в, г, д* показана восковка в различных положениях, но при этом имеется в виду, что везде под восковкой находится сетка, расположенная во всех случаях одинаково — как на рис. 3, *а*.

Для построения элементов складки с плоскими крыльями достаточно иметь элементы залегания каждого крыла. Например, крылья антиклинали имеют азимут падения  $330^\circ$ , угол  $30^\circ$  и азимут падения  $30^\circ$ , угол  $60^\circ$ . Этого достаточно, чтобы выполнить следующие построения.

1. Для изображения первого крыла поворачиваем восковку так, чтобы отметка на круге совпала с величиной азимута на лежащей внизу сетке. На нижней половине диаграммы находим опирающуюся на горизонтальный диаметр дугу, соответствующую углу падения  $30^\circ$ . Продолжим на восковке («поднимаем») эту дугу прерывистой линией (см. рис. 3, *б*).

2. Для изображения второго крыла поворачиваем восковку до совпадения отметки на ней с числом  $30^\circ$  (азимут падения) на сетке. Вычерчиваем на восковке дугу, изображающую плоскость с углом падения  $60^\circ$  (см. рис. 3, *в*). Отмечаем точку  $A$  пересечения дуг — это точка пересечения шарнира с верхней половиной сферы.

3. Проекцию шарнира складки находим, повернув восковку так, чтобы точка  $A$  легла на нижнюю половину вертикального диаметра. Соединив точку  $A$  с центром диаграммы, получаем проекцию шарнира складки. Отметка на восковке стоит против числа на сетке, указывающего азимут наклона шарнира ( $315^\circ$ ), а на нижней половине вертикального диаметра найденная точка  $A$  совпадает с отметкой  $60^\circ$ , которая показывает угол наклона шарнира (см. рис. 3, *г*). Теперь точками покрываем те части плоскостей крыльев антиклинали, которые лежат

ниже шарнира. Так получается изображение складки в стереографической проекции.

4. Угол складки измеряем следующим образом. Не поворачивая восковки (см. рис. 3, *г*), отсчитываем от точки *A* (пересечения шарнира со сферой)  $90^\circ$  вверх вдоль вертикального диаметра и ставим

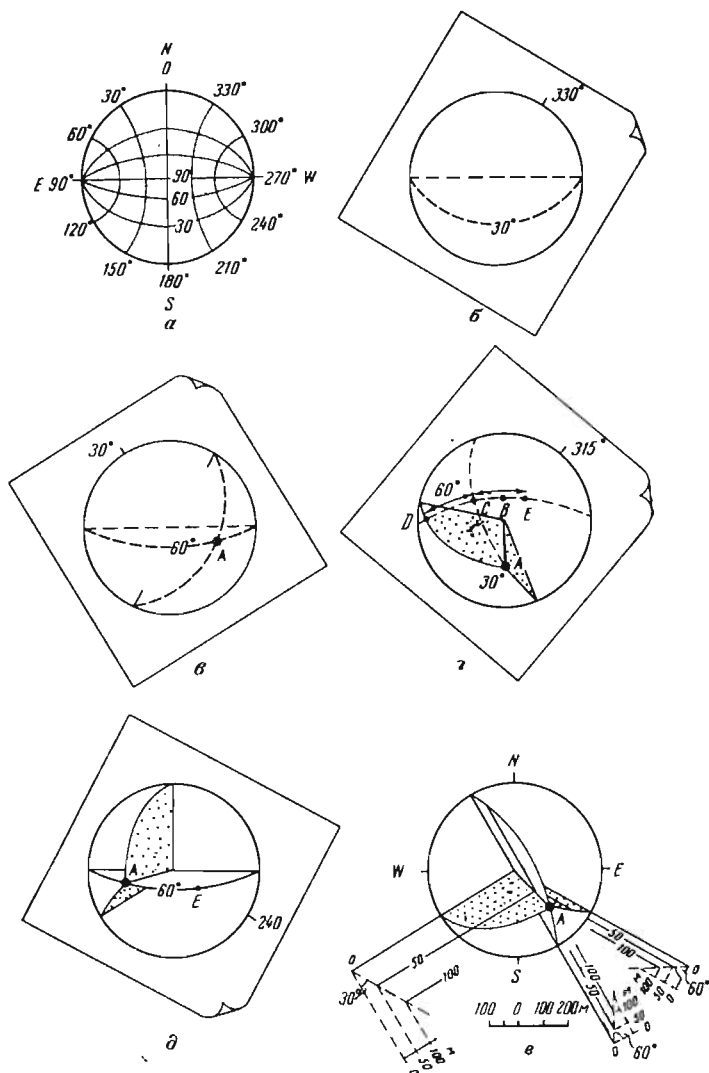


Рис. 3. Построение элементов складки в стереографической проекции. Пояснения в тексте

точку *B*. Поднимаем на восковку ту опирающуюся на горизонтальный диаметр дугу, которая проходит через точку *B*. Она изображает плоскость, перпендикулярную шарниру складки, и пересекается с нанесенными ранее дугами, показывающими крылья в точках *C* и *D*. По сетке видим, что острый угол между крыльями, вдоль плоскости, перпендикулярной шарниру, равен  $60^\circ$  (дуга *CD*). Значит, тупой угол между крыльями составляет  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ . Это и есть угол складки.

5. Осевая поверхность делит угол складки пополам. Поэтому от одной из плоскостей крыльев отсчитываем  $60^\circ$  вдоль плоскости, перпендикулярной шарниру (дуга *CE*). Найденная точка *E*, как и точка *A*, лежит в осевой плоскости. Этим определяется следующая операция.



Поворачиваем восковку до тех пор, пока точки  $A$  и  $E$  не совпадут с одной и той же дугой на нижней половине диаграммы — эта дуга есть след осевой плоскости складки. Отметка на восковке указывает азимут наклона ( $240^\circ$ ), а нижнюю половину вертикального диаметра дуга пересекает у числа  $60^\circ$ , которое указывает угол падения (см. рис. 3,  $\partial$ ).

6. Поворачиваем восковку в основное исходное положение отметкой наверх — в сторону севера. На диаграмме, изображенной на восковке, справа находится восток, слева — запад (см. рис. 3,  $e$ ).

7. По стереографической диаграмме складки строим стратоизогипсы крыльев и осевой поверхности. Для этого помещаем центр диаграммы на карте в точку пересечения шарнира с определенным горизонтальным уровнем, который примем за 0. Линии пересечения плоскостей с горизонтальным кругом продолжим за пределы диаграммы. Это стратоизогипсы с отметкой 0. От каждой из них в сторону восстания плоскости строим перпендикуляр. Из основания перпендикуляра под углом к нему, равным углу падения плоскости, проводим прямую. Она играет роль профиля данной наклонной плоскости. На ней находятся точки, высота которых соответствует произвольно выбранным отметкам стратоизогипс (50 и 100 м). Высоты откладываем в масштабе карты. Через высотные точки параллельно линии простирания плоскости проводим прямые. Они являются искомыми стратоизогипсами (см. рис. 3,  $e$ ).

### Безразмерные габаритные коэффициенты складок

Для общей характеристики формы складок и объективного геометрического сопоставления складок различной величины, например природных и создаваемых нами в моделях, необходимы безразмерные габаритные численные коэффициенты (Гзовский, 1948).

В частных складках в качестве единицы длины удобно взять их ширину ( $b_i$ ), которая равна наибольшему расстоянию на поперечном профиле между точками изменения знака кривизны на крыльях складки (или между внешними границами складки  $b_e$ ).

Коэффициенты для частной складки:

$$\text{высоты } k_{hi} = \frac{h}{b_i}, \quad \text{или } k_{he} = \frac{h}{b_e}, \quad (1)$$

$$\text{длины } k_{li} = \frac{l}{b_i}, \quad \text{или } k_{le} = \frac{l}{b_e}. \quad (2)$$

При  $k_{hi} < 1$  складки низкие (рис. 4,  $a$ ), при  $k_{hi} > 1$  — высокие (см. рис. 4,  $b$ ). При  $k_{li} \approx 1$  складки принято называть куполами, или чашами, при  $2 < k_{li} < 4$  — брахиантиклиналями и брахисинклиналями, при  $k_{li} > 4$  — линейными складками.

Большое значение имеют угловые характеристики: угол складки ( $\phi$ ) и наклон осевой поверхности ( $v$ ). При положительном  $\phi > 90^\circ$  говорят об открытых складках (см. рис. 4,  $\partial$ ), при  $\phi < 90^\circ$  — о закрытых (см. рис. 4,  $z$ ); при  $\phi \approx 0$  — об изоклинальных (см. рис. 4,  $\partial$ ), при  $\phi < 0$ , т. е. отрицательном угле — о веерообразных (см. рис. 4,  $e$ ).

Если угол наклона осевой поверхности ( $v$ ) относительно поверхности среднего залегания рассматриваемого слоя близок к  $90^\circ$ , складку называют прямой (симметричной; см. рис. 4,  $ж$ ); если он не равен  $90^\circ$  и при этом оба крыла складки наклонены в противоположных направлениях, — складка считается косой асимметричной (см. рис. 4,  $з$ ), если оба крыла имеют наклон в одном направлении, и  $0 < v < 90^\circ$ , складка именуется опрокинутой (см. рис. 4,  $и$ ); при  $v \approx 0$  говорят о лежащей складке (см. рис. 4,  $к$ ). Если знак  $v$  на верхнем конце осевой

поверхности противоположен этому знаку на нижнем ее конце, говорят о перевернутой складке (см. рис. 4, л).

Существенное значение имеет форма свода частной складки, которую характеризует кривизна слоя на поперечном профиле. Если есть только один максимум кривизны, мы имеем дело с некоробчатыми складками (параболическими, см. рис. 4, м; синусоидообразными и гиперболическими, см. рис. 4, н; шарнирными, см. рис. 4, о).

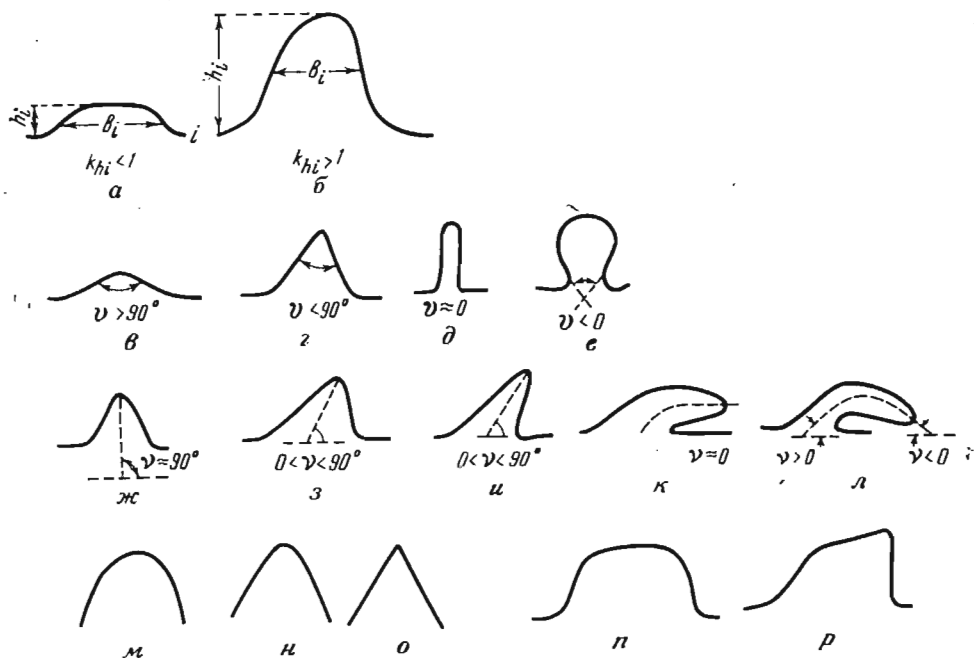


Рис. 4. Различные формы поперечного сечения частных складок. Пояснения в тексте

Кривизну характеризует безразмерный радиус кривизны  $k_r$ , равный отношению наименьшего радиуса кривизны  $r_{\min}$  к ширине складки  $b_1$ :

$$k_r = \frac{r_{\min}}{b_1}. \quad (3)$$

Бывают складки с двумя максимумами кривизны, совпадающими с краями свода, это — коробчатые (р) и эллипсоидные (н) складки. Перечисленные складки рассматриваются ниже.

Существует традиционная характеристика, которую мы будем называть геометрической интенсивностью ( $I_g$ ), равная отношению расстояния между границами складки, измеренному вдоль слоя  $L_s$ , к расстоянию между теми же точками вдоль первоначального среднего (невозмущенного складкой) уровня залегания слоя  $L$ :

$$I_g = \frac{L_s}{L}. \quad (4)$$

В дальнейшем, вероятно, будет установлено, что более удобны величины интенсивности складок, вычисленные по формулам, сходным с формулами для вычисления небольших по величине условных деформаций:

$$I_c = \frac{L_s - L}{L}. \quad (5)$$

и больших по величине логарифмических деформаций:

$$I_{\ln} = \ln \left( 1 + \frac{L_s - L}{L} \right) = \ln \frac{L_s}{L}. \quad (6)$$

Исследования на моделях, начатые А. В. Михайловой и автором, приводят к установлению эмпирических однозначных соотношений между перечисленными разновидностями интенсивности складок по формулам (4)—(6) и средними значениями деформаций внутри тех же складок (Гзовский, 1970).

Для общих складок предстоит разработать специфическую систему безразмерных габаритных коэффициентов. В качестве основной единицы можно выбрать максимальную ширину между внешними ( $B_e$ ) или внутренними ( $B_i$ ) границами, высоту ( $H$ ), амплитуду вдоль осевой поверхности ( $A$ ) или первоначальную мощность толщи слоев, образующих общую складку ( $m_0$ ). Во многих случаях наиболее удобной окажется последняя единица ( $m_0$ ), так как только она остается постоянной на протяжении всего развития складки. Тогда коэффициенты

$$\text{высоты } K_H = \frac{H}{m_0}, \quad (7)$$

$$\text{ширины } K_B = \frac{B}{m_0}, \quad (8)$$

$$\text{длины } K_L = \frac{L}{m_0}, \quad (9)$$

$$\text{амплитуды } K_a = \frac{a_{\max}}{m_0} \text{ и } K_A = \frac{A}{m_0}, \quad (10)$$

где  $H$ ,  $B$ ,  $L$  — соответственно высота, ширина и длина общей объемной складки;  $a_{\max}$  — наибольшая из амплитуд частных складок, входящих в общую;  $A$  — амплитуда общей складки в целом (расстояние от верха до низа складки вдоль осевой поверхности).

Без сомнения, необходим коэффициент  $K_v$ , характеризующий наклон осевой поверхности общей складки. Его можно выразить двумя числами, равными наклону поверхности в верхней части (например,  $70^\circ$ ) и в нижней части (например,  $90^\circ$ ). Тогда запись будет  $K_v = = 70 \div 90$ .

Для геологоразведочной и горнодобывающей практики важен угловой коэффициент общей складки  $K_\theta$ , равный углу между плоскостями, изображающими средний наклон границ объемной складки. Если острие этого угла направлено в сторону более молодых слоев, будем считать угол положительным, если в сторону более древних — отрицательным. Соответственно получаем положительные клинообразные и отрицательные клинообразные складки. При угле  $K_\theta$ , близком к 0, складка является плитообразной.

Большое значение имеет соотношение между формами частных складок внутри общей. Оно характеризует степень дисгармонии. Один крайний случай представляют общие складки, у которых все слои образуют одинаковые по величине и форме частные складки; такие складки именуют подобными, но лучше их называть конформными (рис. 5, а). В большинстве случаев это условие не соблюдается. Изображение подобных (конформных) складок получается путем параллельного переноса в пространстве одной частной складки.

При разведке и разработке месторождений часто выполняют ряд геометрических построений, исходя из предположения о постоянстве расстояния между соседними слоями; в этих случаях речь идет о параллельных складках, хотя их лучше называть изопакитными (равномощностными, см. рис. 5, б).

Многие общие складки отличаются существенно разной формой частных складок и заметными изменениями мощностей разных слоев (см. рис. 5, в). Для них особенно важно введение коэффициента дисгармонии.

Его можно вычислить различными способами, которые дают разные результаты.

Один коэффициент дисгармонии, который назовем общим —  $K_D$ , является отношением наблюдаемой вдоль осевой поверхности мощ-

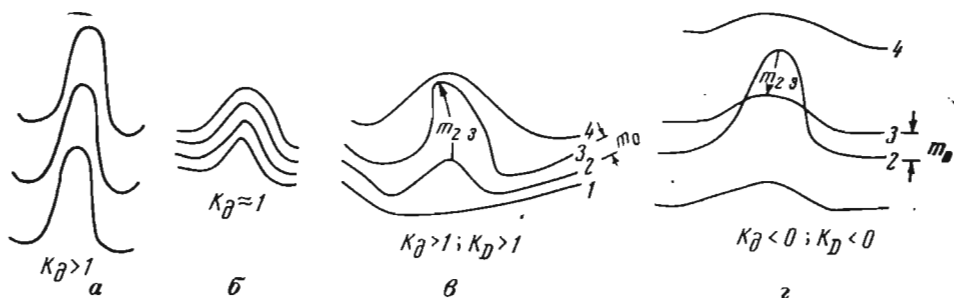


Рис. 5. Коэффициент дисгармонии общих складок различной формы. Пояснения в тексте

ности  $m_{ik}$  слоя между соседними структурными поверхностями  $i$  и  $k$  к исходной мощности  $m_0$  между теми же недеформированными слоями

$$K_D = \frac{m_{ik}}{m_0}. \quad (11)$$

Этот коэффициент может быть больше и меньше единицы. При отсутствии дисгармонии он равен единице.

Если исходная мощность неизвестна, будем вычислять частный коэффициент дисгармонии  $K_D$ , равный отношению мощности  $m_g$  в осевой части складки к мощности  $m_f$  между двумя смятыми в складку поверхностями  $i$  и  $k$ :

$$K_D = \frac{m_{g(ik)}}{m_{f(ik)}}. \quad (12)$$

Данный коэффициент также может оказаться больше или меньше единицы, а если он равен единице — дисгармония отсутствует.

Возможна характеристика дисгармонии общим относительным коэффициентом  $K_\Delta$ , получаемым делением разности  $m_{ik} - m_0$  на величину  $m_0$ :

$$K_\Delta = \frac{m_{ik} - m_0}{m_0}. \quad (13)$$

Частный относительный коэффициент дисгармонии  $K_\delta$  выражается следующим отношением:

$$K_\delta = \frac{m_{g(ik)} - m_{f(ik)}}{m_{f(ik)}}. \quad (14)$$

Последние два коэффициента при отсутствии дисгармонии равны нулю, при увеличении мощности слоев в складке они положительны, при уменьшении — отрицательны.

Предельным проявлением дисгармонии в общих (объемных) складках служит диапиризм, т. е. пересечение одних структурных поверхностей другими. Расстояние между соседними слоями (см., например,  $m_{ik} = m_{23}$  на рис. 5, г), измеряемое вдоль осевой поверхности, оказы-

вается при этом отрицательным, т. е. отсчитывается в обратном направлении (как бы сверху вниз по сравнению с нормальным стратиграфическим разрезом). Поэтому признаком диапиризма является отрицательный знак коэффициента дисгармонии  $K_D$ . Чем сильнее диапировые явления, тем больше абсолютная величина этого коэффициента (см. рис. 5, з).

Для общей складки можно указать максимальную или среднюю величину коэффициента дисгармонии.

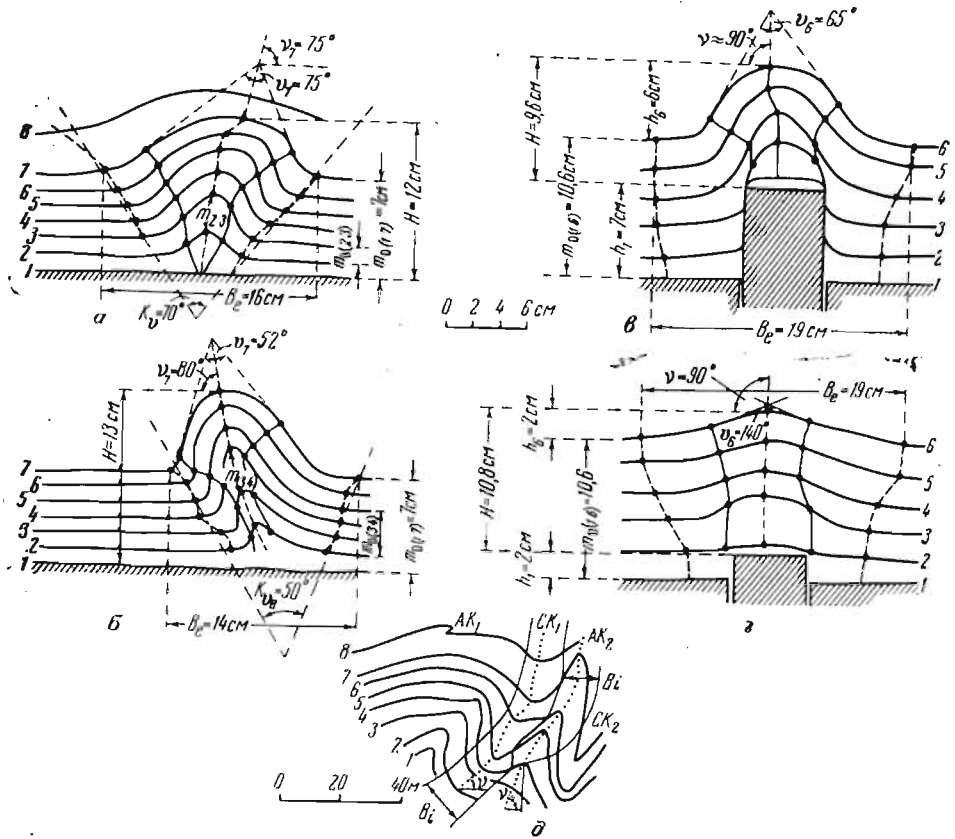


Рис. 6. Примеры характеристики складок габаритными коэффициентами. Пояснения в тексте

Приведенная система габаритных коэффициентов позволяет давать четкую количественную характеристику каждой стадии развития складки, а также конкретно определять различия в морфологии частных складок, образуемых разными слоями внутри одной общей складки.

Для более полной характеристики формы складок необходимо от габаритных коэффициентов перейти к уравнениям, описывающим форму складки. Проще всего это сделать для поперечных профилей частных складок.

Остановимся на нескольких примерах характеристики складок габаритными коэффициентами. На рис. 6, а показана складка, полученная в модели из петролатума при его продольном сжатии горизонтальной силой. Цифрами от 1 до 8 обозначены структурные поверхности в возрастной последовательности (снизу вверх). Ограничимся рассмотрением общей складки в пределах поверхностей 1 и 7. Первоначальная мощность слоев между ними  $m_{0(1-7)} = 7$  см может быть взята за эталон

длины  $m_{0(17)}=1$ . Тогда высота складки  $H=12$  см, а безразмерный коэффициент высоты:

$$K_H = \frac{H}{m_{0(17)}} = 1,7.$$

Максимальная ширина складки по внешней границе  $B_e=16$  см; безразмерный коэффициент ширины:

$$K_{B_e} = \frac{B_e}{m_{0(17)}} = \frac{16}{7} = 2,2.$$

Угол частной складки по верхней поверхности 7  $\phi_7=75^\circ$ , угол наклона осевой поверхности для складки в этом слое  $\nu_7=75^\circ$ . Однако между поверхностями 6 и 7  $\nu_{67}=35^\circ$ , далее вниз он возрастает до  $\nu_{12}=85^\circ$ . Поэтому

$$K_\nu = 35 \div 85.$$

Из-за большой средней крутизны осевой поверхности  $K_A \approx K_H$  линии среднего наклона внешних общих границ складки пересекаются под углом  $70^\circ$ , т. е.

$$K_\phi = 70^\circ.$$

Наибольшая геометрическая интенсивность отмечена на поверхности, для которой  $I_g=1,5$ . Наибольший коэффициент дисгармонии между поверхностями 2 и 3:

$$K_{D(23)} = \frac{m_{23}}{m_{0(23)}} = 2.$$

Важной количественной характеристикой является и то, что поверхности 5 и 7 во внутренней части складки имеют по два максимума кривизны.

Складка, полученная в другой модели из петролатума при продольном горизонтальном сжатии (см. рис. 6, б), характеризуется такими же коэффициентами. При  $m_{0(17)}=7$  см и  $H=13$  см имеем  $K_H=1,9$ . Наибольшая ширина по внешним границам  $B_e=14$  см, что дает  $K_{B_e}=2$ . Угол частной складки в поверхности 7 составляет  $\phi_7=52^\circ$ . Наклон осевой поверхности отрицательный, его угол меняется сверху вниз от  $\nu_7=-80^\circ$  до  $\nu_2=-65^\circ$ , значит,  $K_\nu = -(80 \div 65)$ .

Коэффициент  $K_\phi = 50^\circ$ , его определяют средние наклоны внешних границ общей складки. Наибольший коэффициент дисгармонии между поверхностями 3 и 4  $K_{D(34)}=3$ . Наибольшая геометрическая интенсивность по поверхности 4 составляет  $I_g=1,64$ . У всех поверхностей во внутренней части складки имеется только один максимум кривизны.

Габаритные коэффициенты объективно количественно характеризуют различие форм складок рис. 6, а и рис. 6, б. Первая шире второй, обладает противоположным наклоном осевой поверхности и несколько большей геометрической интенсивностью и дисгармонией. Первая имеет два, а вторая один максимум кривизны верхних структурных поверхностей во внутренней части складки.

На рис. 6, в и г показаны две стадии подъема складки в модели из влажной глины под действием вертикальной силы. Наилучшей количественной характеристикой каждой стадии в этом случае является не высота общей складки  $H$  (которая изменяется от 10,8 см в начале деформирования до 9,6 см в конце), а высоты частных складок — по поверхностям 1 и 6. Эти поверхности являются для складки предельными и их можно отметить индексами, употребляемыми в стратиграфии:  $i$  — нижняя и  $s$  — верхняя (от французских слов *inferieur* и *superieur*). Индексация  $h_i$  и  $h_s$  является более общей, чем  $h_1$  и  $h_6$ . В ходе развития складки  $h_i$  изменилась от 2 до 7 см, а  $h_s$  — от 2 до 6 см. Эталонном

длины мы по-прежнему можем считать исходную мощность слоев между нижней и верхней структурными поверхностями  $m_{0(16)} = 10,6$  см. Соответственно, безразмерные коэффициенты

$$K_{hi} = \frac{h_i}{m_{0(16)}} \quad \text{и} \quad K_{hs} = \frac{h_s}{m_{0(16)}}$$

существенно изменяются с ростом складки:  $K_{hi}$  от 0,19 до 0,67, а  $K_{hs}$  — от 0,19 до 0,56.

Коэффициент дисгармонии между нижней и верхней поверхностями на первой стадии  $K_{D(is)} = 1$ , так как расстояние между этими поверхностями вдоль осевой поверхности складки и вне складки одинаковые. На второй стадии этот коэффициент заметно меньше единицы —  $K_{D(is)} = 0,87$ , что указывает на сокращение мощности слоев вдоль осевой поверхности.

Наибольшая геометрическая интенсивность ( $I_g$ ) на первой стадии достигает 1,06 (по поверхности 3), а на второй 1,4 (по поверхности 4).

Из угловых характеристик значительно изменяется угол складки по верхней поверхности  $v_6$ : от  $140^\circ$  на первой стадии до  $65^\circ$  на второй.

Коэффициент ширины ( $K_{Be}$ ) и наклона осевой поверхности ( $K$ ) практически не изменяются.

На рис. 6, д показаны две антиклинали и две синклинали, которые соприкасаются друг с другом. Такие складки были описаны в палеозойских известняках Каратау. Из-за соприкосновения складок сохраняются их внутренние части, границы которых показаны на чертеже сплошными линиями. Антиклинали обозначены индексами  $AK_1$  и  $AK_2$ , а синклинали —  $СК_1$  и  $СК_2$ . Крайние складки видны не полностью, поэтому охарактеризуем только внутренние складки  $СК_1$  и  $AK_2$ . Их осевые поверхности изображены точечными линиями. Проведя параллельные им линии, касающиеся наиболее удаленных от осевой поверхности точек границ складок, возьмем наибольшее расстояние между линиями в качестве ширины общей складки  $B_i$ . У синклинали  $СК_1$  ширина  $B_i = 16$  м, у антиклинали  $AK_2$  ширина  $B_i = 12$  м. Примем эти размеры в качестве эталонов высоты для каждой из складок. Тогда для  $СК_1$  коэффициент высоты между поверхностями 2 и 7  $K_{H(27)} = 3$ , а для  $AK_2$   $K_{H(27)} = 3,3$ .

Наклоны осевых поверхностей записываются в следующем виде:  $K_v = 80 \div 25^\circ$  для  $СК_1$  и  $K_v = 85 \div 65$  для  $AK_2$ . Минимальные углы складок  $\phi = 60^\circ$  у  $СК_1$  и  $\phi = 15^\circ$  у  $AK_2$  (по поверхности 7). Наибольшая геометрическая интенсивность у  $СК_1$  достигает  $I_g = 2$  (по поверхности 6); у  $AK_2$  она доходит до 2 (по поверхности 7). Коэффициент дисгармонии ( $K_d$ ) получается как отношение наибольшего (измеренного параллельно осевой поверхности) к наименьшему расстоянию между двумя структурными поверхностями в крыльях. Наибольшее значение  $K_d$  для  $СК_1$  равно 1,5, а для  $AK_2$  составляет 2,2.

Наконец, необходимо оценить коэффициент конгруэнтности — отношение ширины  $b_i$  антиклиналей к ширине синклиналей. В данном случае он составляет 0,75, т. е. близок к единице.

При наличии складчатой зоны, состоящей из многих складок, имеет смысл разделить ее на подзоны с более или менее одинаковыми формой и величиной складок. Для каждой подзоны изображаются два зеркала складок — верхнее и нижнее (ориентировка производится относительно стратиграфического разреза).

Зеркалом называется наиболее простая огибающая поверхность, касающаяся всех складок. Каждое зеркало рассматривается как крупная частная складка и количественно описывается габаритными коэффициентами. Затем вычисляются средние значения коэффициентов для частных складок подзоны.

Для поперечного профиля подзоны по каждой проходящей на-

сквозь структурной поверхности вычисляется геометрическая интенсивность ( $I_g$ ), которая равна отношению расстояния между краями зоны, взятому вдоль складчатого слоя, к расстоянию по прямой. Из всех интенсивностей, полученных по разным слоям, имеет смысл выделить максимальную.

Весьма показательным является отношение средней ширины антиклиналей ( $b_{ia}$ ) к средней ширине синклиналей ( $b_{is}$ ), которое можно назвать коэффициентом конгруэнтности  $K_K$ .

$$K_K = \frac{b_{ia}}{b_{is}}.$$

При близости  $K_K$  к единице складчатость называется голоморфной (полной), при  $K_K$  существенно большей единицы — дежективной (коробчатой), при  $K_K$  намного меньшей единицы — эжективной (гребневидной), по терминологии В. В. Белоусова (1948, 1964).

Указанным набором чисел можно объективно количественно охарактеризовать любую складчатую подзону. Набор чисел представляет собой как бы формулу структуры, подобно тому как перечень химических элементов с указанием их количества является химической формулой минерала. По средним габаритным коэффициентам можно построить схематичный профиль, состоящий из одинаковых «типичных» антиклиналей и одинаковых синклиналей. Такой условный профиль был назван тектонограммой (Гзовский, 1948).

Примеры практического использования безразмерных габаритных коэффициентов опубликованы (Гзовский, 1970; Гзовский, Михайлова, 1971).

## СКЛАДКИ НА ПРОФИЛЕ

### *Задачи аналитического описания складок*

Необходимость в аналитическом выражении формы структурных элементов земной коры, т. е. с помощью уравнений, в ближайшем будущем станет возникать все чаще. Приведем примеры исследований, при которых аналитическое выражение структуры отдельных участков земной коры может оказаться полезным.

1. При выборе районов для детальных поисков месторождений, а также при расширении разведанных площадей за счет слабо изученных флангов месторождений важно заранее оконтурить места, в которых структура похожа на структуру уже разведанных богатых месторождений. При сопоставлении структур необходимо располагать количественными методами сравнения. Важно знать, какие размеры снимать с отдельных структурных элементов и каким математическим закономерностям (формулам) подчиняются формы геологических тел. Тогда можно объективно установить степень сходства сравниваемых структурных форм.

2. При поисках месторождений с использованием геофизических методов аналитическое выражение структуры поможет вычислению гравитационных и магнитных аномалий, вызываемых находящимися на глубине складками, диапировыми ядрами, глыбами фундамента, интрузиями магматических пород. Это облегчит структурную интерпретацию геофизических аномалий и позволит быстрее выявить участки под разведочное бурение.

3. При разработке и разведке месторождений проектирование новых горных выработок, если формы геологических тел будут иметь не только графическое изображение, но и описание в виде математических формул, станет более точным.



4. При изучении процессов образования месторождений, в частности при выявлении механизма формирования структуры и его влияния на качество месторождений, большое значение имеет объективная количественная характеристика форм, получаемых на моделях, и форм природных геологических тел, сопоставляемых с моделями. Количественные характеристики позволяют статистически проанализировать все эти формы.

5. При оценке сейсмической опасности количественные характеристики структуры рассматриваемого района должны сравниваться с такими же характеристиками других — «эталонных» районов, сейсмическая опасность которых известна намного лучше.

В XVIII в. крупнейший французский математик и физик Декарт начал развивать аналитическую геометрию, которая заключается в отыскании алгебраических уравнений, соответствующих различным геометрическим образам, начиная с точки и линии на плоскости и кончая кривыми поверхностями, ограничивающими в пространстве объемные тела. Элементы аналитической геометрии широко используются во многих областях знаний, наиболее простые из них могут применяться в структурной геологии.\*

## ***Координаты и их преобразования***

### **Системы координат**

В последующих главах мы будем находить уравнения, которыми можно описать форму различных складок, а также разрывов. В эти уравнения будут входить координаты точек, принадлежащих рассматриваемой структурной форме.

Координатами называются числа, определяющие положение точки в пространстве по отношению к определенной системе линий, например широт и долгот на земном шаре.

В математике существует много различных систем координат: прямолинейные и криволинейные, прямоугольные и косоугольные. Наиболее употребительна прямолинейная прямоугольная система, называемая декартовой по имени Декарта. Часто пользуются также полярной системой, состоящей из окружностей с центром в одном полюсе и выходящими из него прямыми лучами. Положение точки определяется, во-первых, углом между лучом, на котором она лежит, и исходным лучом — началом отсчета углов (полярная ось), во-вторых, расстоянием до полюса, т. е. радиусом окружности, проходящей через точку. Положение точки в пространстве определяется во многих случаях в цилиндрической и сферической системах координат.

В геотектонике оси декартовой системы при рассмотрении крупных регионов совмещают с географическими координатными направлениями — меридианом, широтой и отвесом. Эту систему мы используем также при изучении трещинной тектоники и напряженного состояния земной коры, ориентируя главные направления стереографических координат. Однако изображение трещин на стереографических диаграммах выполняется с помощью полярной системы: азимут играет роль угла, а крутизна падения — радиуса окружности.

Три оси прямоугольной системы часто ориентируются в соответствии с простираем структурных элементов земной коры; вдоль него и поперек в горизонтальной плоскости и вертикально. Описывая небольшие участки месторождений, складки и обнажения, можно ориен-

---

\* Геологам, начинающим изучать аналитическую геометрию, рекомендуется учебник И. И. Привалова (1953).

тировать оси произвольно, выбирая их положение, наиболее удобное для данного случая.

Наконец в петротектонике, изучая шиф под микроскопом, целесообразно использовать систему координат, связанную с ориентировкой минералов в данной пластинке горной породы. Полученные диаграммы можно перевести в другую систему координат, например, жестко связанную с господствующим региональным простиранием складок и разрывов, или географическую (меридиан, широта, отвес).

При составлении уравнений складок конкретный вид уравнения, его численные параметры в значительной степени зависят от того, как ориентированы оси координат и где выбрано начало отсчета расстояний. Для каждого небольшого участка (например, одной складки) всегда можно выбрать такую систему координат, в которой уравнение приобретет наиболее простую форму с наименьшими числовыми параметрами и наглядным выражением признаков уравнений определенного класса. Это обеспечит удобство изучения данного участка. Однако имея дело с несколькими участками с разными системами координат, мы встречаемся с необходимостью преобразования всех координат точек и уравнений из разных систем в одну общую. Этим важным вопросом мы и займемся.

### Преобразование декартовых координат точки на плоскости

Рассмотрим координаты точки  $M$  в двух различных системах декартовых координат (рис. 7). На этом рисунке точечными линиями показана местная система, оказавшаяся удобной при рассмотрении небольшого участка. В ней координаты точки  $M$  обозначим малыми буквами  $x_M$  и  $y_M$ . Будем называть их старыми. Требуется перейти от этих к новым координатам, обозначаемым большими буквами  $X_M$  и  $Y_M$ , которые соответствуют новым направлениям осей, показанным толстыми сплошными линиями, и другому положению начала отсчета, отмеченному на рис. 7 буквой  $O$ .

Переход от старых координат к новым разделяется на две операции. Первая заключается в переносе начала координат в новое положение  $O$  без изменения направления осей. Так получается промежуточная система обозначения  $x'Oy'$ . Координаты точки в ней обозначим малыми буквами со штрихами:  $x'_M$  и  $y'_M$ . Вторая операция состоит в повороте осей координат в новое положение, дающее систему  $XOY$ .

Первая операция складывается из переноса начала координат на величину  $x_0$  вдоль оси  $x$  и на величину  $y_0$  вдоль оси  $y$  в старой системе. Как видно на рис. 7, координаты  $x_M$  и  $y_M$  в старой системе связаны с координатами  $x'_M$  и  $y'_M$  в промежуточной системе и смещениями координат  $x_0$  и  $y_0$  простейшими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x_M &= x'_M + x_0 \\ y_M &= y'_M + y_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

По этим формулам можно одни координаты в уравнении складки заменить другими, если различие в системах координат состоит только в положении точек их начала, а направления их осей одинаковые.

Вторая операция — поворот осей координат от их направлений, соответствующих промежуточной системе  $x'Oy'$ , к новой  $XOY$  может происходить или по часовой стрелке ( $-\alpha$ ), или против часовой стрелки ( $+\alpha$ ). При достаточно большой величине поворота промежуточные координаты точки  $M$  с положительными значениями  $x'_M$  и  $y'_M$  в новой системе могут не только изменить величину, но и оказаться другого знака.

Если новая система повернута относительно промежуточной на угол  $+\alpha$ , то, проведя показанные на рис. 7 вспомогательные линии  $MP_1$ ,  $P_1S$ ,  $MNP$  и  $NP_1$ , мы сможем выразить промежуточные и новые координаты через эти отрезки.

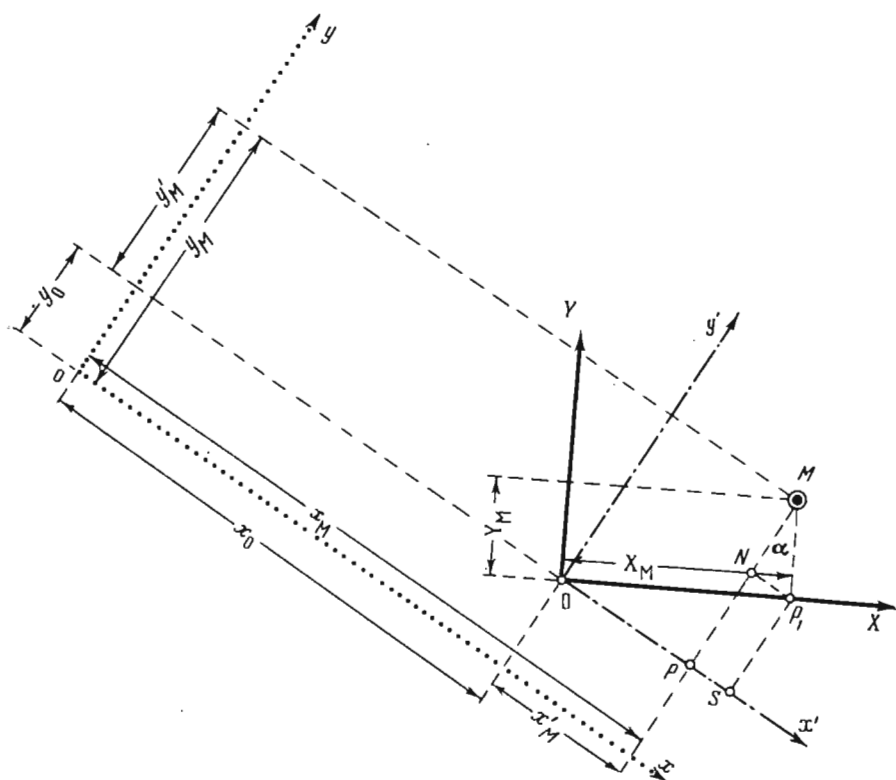


Рис. 7. Схема к выводу формул преобразования декартовых координат

Действительно, промежуточная координата

$$x'_M = OP = OS - PS. \quad (2)$$

Из прямоугольного треугольника  $OSP_1$  ясно, что:

$$OS = OP_1 \cos \alpha, \quad (3)$$

а из прямоугольного треугольника  $MNP_1$  видно, что

$$PS = NP_1 = MP_1 \sin \alpha. \quad (4)$$

Новые координаты точки  $M$ , как вытекает из чертежа, будут

$$X_M = OP_1; \quad Y_M = MP_1. \quad (5)$$

Следовательно, производя замену  $OS$  и  $PS$  в (2), согласно (3), (4), (5), получим выражение промежуточных координат через новые:

$$x'_M = OS - PS = X_M \cos \alpha - Y_M \sin \alpha. \quad (6)$$

Далее из чертежа находим, что промежуточная координата

$$y'_M = MP = NP + MN. \quad (7)$$

Из прямоугольного треугольника  $OSP_1$ :

$$NP = SP_1 = OP_1 \sin \alpha \quad (8)$$

и согласно (5):

$$NP = X_M \sin \alpha. \quad (9)$$

Из треугольника  $MP_1N$  видим, что

$$MN = MP_1 \cos \alpha. \quad (10)$$

Учитывая (5), имеем

$$MN = Y_M \cos \alpha. \quad (11)$$

Подставляя (9) и (11) в (7), получаем

$$y'_M = X_M \sin \alpha + Y_M \cos \alpha. \quad (12)$$

Формулы (6) и (12) позволяют в уравнения складок, содержащие промежуточные координаты, вводить вместо них новые координаты  $X_M$  и  $Y_M$ , осуществляя таким образом поворот осей на угол  $\alpha$ .

В наиболее общем случае, показанном на рис. 7, старые координаты  $x_M$  и  $y_M$  надо выразить через новые  $X_M$  и  $Y_M$ , учтя и перенос начала координат по формулам (1) и поворот осей по формулам (6) и (12). Это достигается путем подстановки выражений для  $x'_M$  и  $y'_M$  из (6) и (12) в уравнения (1).

В итоге, в уравнения складки вместо старых координат  $x_M$  и  $y_M$  мы можем вписать:

$$\left. \begin{aligned} x_M &= X_M \cos \alpha - Y_M \sin \alpha + x_0 \\ y_M &= X_M \sin \alpha + Y_M \cos \alpha + y_0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Полученные выражения (13) называются формулами преобразования координат. Они имеют большое значение при решении многих вопросов механики.

### Стереографическая проекция и преобразование ее координат

В геотектонике и тектонофизике широко используется заимствованное из кристаллографии изображение направления линейных и плоскостных геометрических образов в стереографической проекции с помощью чисел — координат, имеющих размерность угла. Так поступают с трещинами, крупными разрывами, элементами складки, осями и площадками главных напряжений, оптическими осями и двойниковыми швами в минеральных зернах в горной породе.

Подлежащая изображению прямая линия помещается в центр мысленной сферы. Сфера делится пополам плоскостью, проходящей через ее центр. Будем называть эту плоскость основанием полусферы. Она является плоскостью проекции. На рис. 8, *a* она заштрихована. В дальнейшем рассматривается только одна из полусфер. Точка  $M$  пересечения полусферы с выходящей из центра прямой проектируется на основание полусферы. Делать это можно разными способами; соответственно, говорят и о разных проекциях точки  $M$ .

Один способ проектирования — опустить из точки  $M$  перпендикуляр на основание полусферы. Такое ортогональное проектирование неудобно тем, что у краев основания происходит сильное сближение проекций тех точек, которые на поверхности полусферы лежат на одинаковом расстоянии одна от другой.

Другой способ проектирования в значительной мере устраняет этот недостаток. Точку  $M$  на полусфере соединяют с центром проекции  $C$ , который лежит на второй (отброшенной) полусфере в том месте, где ее пересекает перпендикуляр к основанию, проведенный через его центр (см. рис. 8, *a*). Эта проекция — одна из наиболее удобных для всевозможных построений и определений углов. Ее называют стереографиче-

ской. Для получения такой проекции используются специальные сетки А. К. Болдырева и Г. В. Вульфа.

Сетка А. К. Болдырева состоит из радиально расходящихся лучей и концентрических окружностей, имеющих общий с ними центр. Каждый луч соответствует определенному направлению наклона прямой

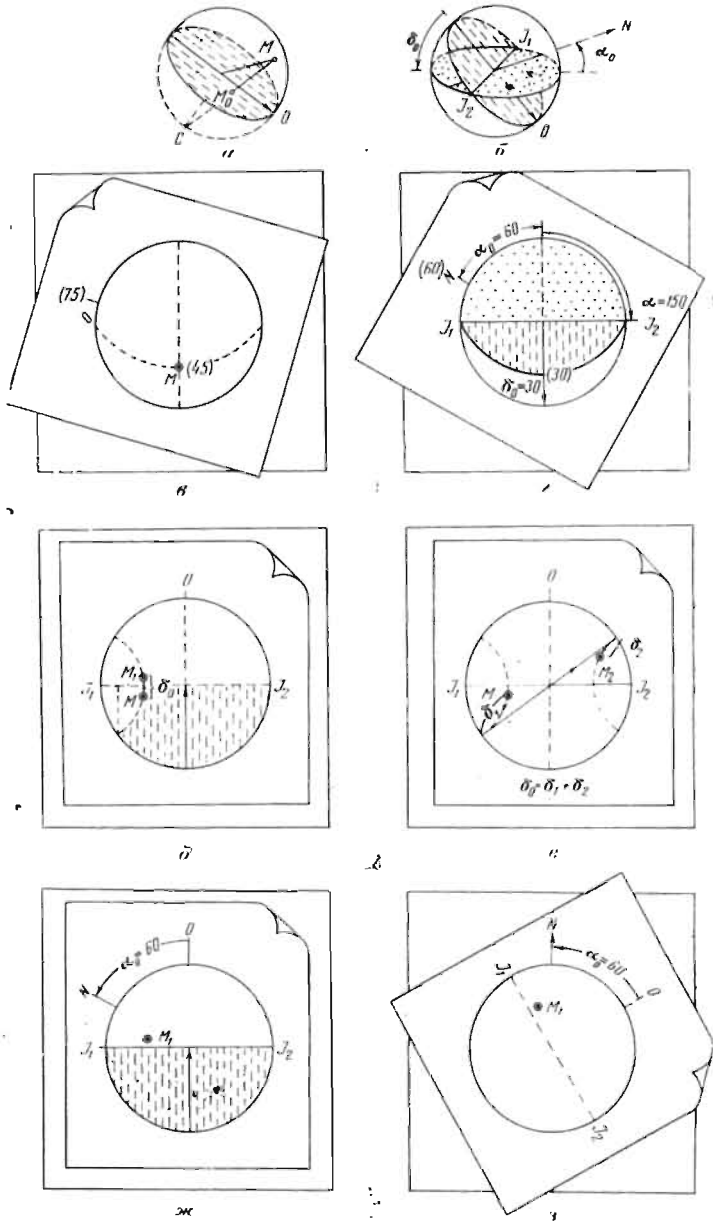


Рис. 8. Схемы, поясняющие преобразование стереографических координат. Пояснения в тексте

относительно основания. Каждая окружность объединяет линии, имеющие одинаковый по величине наклон к основанию. Точка пересечения нужного луча с окружностью, изображающей требуемый угол наклона, является стереографической проекцией наклонной линии. Сетка А. К. Болдырева называется полярной, так как она выглядит одинаково

с географической сеткой меридианов и параллелей на глобусе, если на него смотреть со стороны полюса.

Для изображения плоскости на сетку наносят проекцию линии, ориентированной определенным образом относительно изображаемой плоскости: перпендикулярно или вдоль падения (направления наибольшего наклона). В кристаллографии и петротектонике принято использовать перпендикуляр; в тектонофизике, по мнению автора, часто удобнее наносить линию падения, а не нормаль. На сетке А. К. Болдырева можно изобразить большое число плоскостей и линий. Однако для определения углов между ними и ряда других пространственных геометрических построений эта сетка неудобна. Поэтому обычно пользуются другой сеткой, которая независимо была предложена крупнейшими русскими кристаллографами Е. С. Федоровым в 1892 г. и Г. В. Вульфом\* в 1897 г. Сетка Е. С. Федорова более сложная и состоит из совмещенных двух сеток Вульфа и сетки А. К. Болдырева. Сетка Вульфа по виду напоминает сеть меридианов и широт на карте земного полушария. Если мы наносили плоскости с помощью нормалей к ним, линия сетки, аналогичная экватору, располагается горизонтально. Иногда целесообразно изображать плоскости не с помощью перпендикуляров к ним, а путем нанесения на диаграмму линий падения; тогда сетку Вульфа следует располагать так, чтобы экватор занимал на чертеже вертикальное положение, а азимуты и углы падения были надписаны так, как это сделано на рис. 3, а.

В сетке Вульфа имеется два семейства кривых линий, которые пересекаются под прямым углом. Линии одного семейства пересекают экватор сетки и сходятся к двум полюсам — концам перпендикулярного экватору диаметра сетки. Эти линии подобны меридианам полушарий и являются следами больших кругов, т. е. проекциями линий пересечения полусферы с плоскостями, проходящими через ее центр и полюсы. Линии второго семейства нигде не соединяются между собой. Они подобны широтам на географической карте и являются следами малых кругов, т. е. проекциями линий пересечения полусферы плоскостями, перпендикулярными ее основанию и прямой, соединяющей два полюса. Все кривые на сетке Вульфа являются дугами окружностей. Меридианы, широты, экватор и полюсы сетки Вульфа никак не связаны с одноименными географическими понятиями.

Сетка Вульфа относится к числу экваториальных, так как мы смотрим на сферу со стороны экватора.

На сетку Вульфа точки проекций линий и плоскостей непосредственно не наносятся. Делается это на восковке, наложенной на сетку и имеющей окружность, совпадающую с границей сетки, и одну отметку, обозначающую верх будущей диаграммы — начало отсчета углов, определяющих направление наклона.

Для изображения стереографической проекции линии с помощью сетки Вульфа восковку вращают до совмещения имеющейся на ней отметки с числом на периферии сетки, обозначающим направление наклона линии. Затем на шкале угла наклона находят соответствующее число и изображают на восковке точку пересечения проходящего через него следа большого круга с экватором сетки. Затем восковку возвращают в исходное положение, т. е. отметкой вверх.

Плоскость удобно изображать точкой, соответствующей следу пересечения линии падения с верхней полусферой, на которую наблюдатель смотрит сверху вниз. В момент нанесения этой точки она лежит на следе одного из больших кругов (на меридиане). Его можно под-

---

\* Г. В. Вульф (1863—1925), профессор Московского университета и член-корреспондент Академии наук СССР, основал первую в России рентгеновскую лабораторию. В 1913 г. одновременно с английским физиком У. Г. Брэггом вывел формулу, лежащую в основе рентгеноструктурного анализа и носящую название условия Вульфа — Брэгга.

нять на восковку. Концы этой дуги, упирающиеся в полюсы, соединяются прямой, проходящей через центр диаграммы. В итоге получается наглядное, как бы объемное изображение наклонной плоскости.

Сетка Вульфа обладает двумя особенностями: 1) окружности, изображенные на поверхности полусферы, при их проектировании на основание полусферы указанным выше способом изображаются не эллипсами, а окружностями; 2) одинаковые по величине окружности на поверхности полусферы после их проектирования на основание изображаются меньшими окружностями ближе к центру диаграммы и большими — около ее периферии. Поэтому при статистическом подсчете числа точек, приходящихся на диаграмме на определенную площадь, размер этой единичной площади в центре и на периферии диаграммы берется различным, но таким, чтобы он соответствовал 1% площади полусферы. Величина таких круглых площадок в пределах сетки Вульфа изображена на специальной сетке-планисфере А. В. Прониной (1949).

До появления планисферы А. В. Прониной в целях равномерного распределения подлежащих статистической обработке точек проекции на основание (если точки равномерно распределены по поверхности полусферы) по сделанному в 1909 г. предложению В. В. Каврайского (Доливо-Добровольский, 1937) использовалась не сетка Вульфа, а сходная с ней сетка. Ее называют сеткой Каврайского, сеткой Шмидта, или сеткой Вальтера. Она имеет на экваторе почти равные расстояния между меридианами; они несколько увеличиваются к центру сетки, тогда как у сетки Вульфа — сильно уменьшаются к центру.

На сетке Каврайского следы малых кругов (широт) не являются дугами окружности как на сетке Вульфа. Центр проекции сетки Каврайского находится почти в 2,5 раза дальше от центра сферы, чем центр проекции сетки Вульфа. Достоинством сетки Каврайского является то, что площадки, ограниченные определенным числом градусов по широте и долготе в разных частях диаграммы, имеют одинаковую площадь. Поэтому данную сетку называют еще равноплощадной. Эта сетка обычно используется при изображении полушарий Земли на географических картах\*.

Мы будем использовать только стереографическую сетку Вульфа.

Для того чтобы получить стереографическую проекцию прямой линии, мы должны сначала задаться определенной ориентировкой в пространстве основания полусферы и лежащим в ее плоскости одним исходным нулевым направлением для отсчета направления наклона изображаемой линии. Иными словами, начнем с выбора системы угловых координат.

В тектонофизике пользуются различными системами стереографических координат. При сборе данных по трещинной тектонике горным компасом определяют положение каждой трещины относительно направления на север (азимут падения) и горизонтальной плоскости (угол падения). Соответственно диаграмма, на которую наносятся результаты измерения многих трещин, имеет горизонтальное основание и направленное на север нолевое направление. Рассматривается верхняя полусфера. Такие диаграммы можно изображать непосредственно на карте (ориентируя нолевое направление на север). Если возникает предположение, что часть трещин определенным образом ориентирована по отношению к наклонно залегающим слоям, которые имеют в разных местах различные азимуты и углы падения, появляется необходимость посмотреть, как будут выглядеть диаграммы при проектировании трещин на плоскость слоя. Взяв плоскость наклонного слоя в качестве основания верхней полусферы, за нолевое направление при-

\* Подробное описание различных сеток можно найти в книгах П. А. Рыжова (1964), Л. И. Лукина, В. Ф. Чернышева, И. П. Кушнарева (1965).

нимают то, в котором падает слой. Так возникает задача нахождения проекции линии в новой системе координат, если известны ее координаты в старой системе.

При петротектоническом изучении шлифов из горных пород под микроскопом выявляются преимущественные направления вытянутости зерен, плоскостей спайности и двойниковых швов, а также мелких трещин. По ним восстанавливаются направления осей деформаций и напряжений. Шлифы вырезаются из взятых в поле образцов, ориентировка которых связана с различно расположенными в пространстве реперами: с падением слоя, падением трещины, элементами залегания жилы и т. п. Для сопоставления диаграмм, характеризующих различные точки изучаемого района, и изображения их на карте необходимо ввести одну общую систему координат с горизонтальным основанием полусферы и ориентированным на север нолевым направлением. Итак, мы снова встречаемся с необходимостью преобразования стереографических координат.

Техника преобразования стереографических координат основывается на следующих представлениях. Проектируемые направления линий и плоскостей остаются неизменно ориентированными относительно географических координат, как бы мы ни изменяли систему стереографических координат — положение основания полусферы и нолевое направление. При повороте системы координат вокруг оси, проходящей через центр сферы, точки пересечения полусферы с неподвижными линиями перемещаются по полусфере в направлении, противоположном вращению полусферы.

Перевод старой системы координат (заштрихована линиями на рис. 8, б) в новую (покрыта точками на рис. 8, б) состоит из трех общих операций. Первая операция — нахождение линии пересечения старого и нового оснований полусферы, которая будет использована в качестве оси поворота ( $I_1I_2$ ) и определение угла между двумя положениями основания  $\delta_0$ . Вторая операция — перевод основания полусферы из старого положения в новое путем его поворота на угол  $\delta_0$  вокруг найденной выше оси  $I_1I_2$ . При этом точки пересечения неподвижных линий с полусферой перемещаются по ней в направлении, обратном повороту, следуя вдоль следов малых кругов, перпендикулярных оси вращения. Третья операция — поворот полусферы на угол  $\alpha_0$  вокруг оси, перпендикулярной новому положению основания, приводящий к совмещению старого нолевого направления ( $O$ ) с новым ( $N$ ). Проекция точек на диаграмме движутся при этом по дугам окружностей вокруг центра основания полусферы на угол  $\alpha_0$  в направлении, обратном повороту.

Технику осуществления перечисленных операций рассмотрим на конкретном примере. Пусть мы имеем плоскость шлифа, взятого около разрыва. Шлиф имеет наклон  $30^\circ$  по азимуту  $60^\circ$ . На диаграмме имеется скопление точек, изображающих направление оптической оси в многочисленных зернах кальцита. Центр  $M$  скопления по отношению к шлифу наклонен под углом  $45^\circ$ . Направление этого наклона отличается на  $75^\circ$  (против часовой стрелки) от нолевого направления на диаграмме, совпадающего с падением плоскости шлифа. На рис. 8, в изображено, как центр  $M$  наносится на диаграмму, связанную со шлифом. Требуется определить положение центра  $M$  скопления точек на диаграмме после поворота основания полусферы в горизонтальное положение и ориентирования нолевого направления на север.

*Первая операция.* Изображаем на восковке в качестве основной новую (географическую) систему координат — горизонтальное основание и ориентированное на север нолевое направление. Наносим на эту восковку положение старой системы координат. Для этого вращаем восковку до совмещения ее верхней отметки с числом  $60^\circ$  у внешней



окружности сетки, равным азимуту падения полусферы (см. рис. 8, г, число в скобках). На шкале углов падения находим число  $30^\circ$ , равное наклону основания (оно тоже указано в скобках). Наносим на восковку след большого круга, проходящего через отметку угла падения  $30^\circ$ . Проводим диаметр диаграммы, соединяющий концы этого следа. Так мы получим изображение старого положения основания полусферы в новой системе координат. Не сдвигая восковки, видим по сетке, что старое основание совместится с новым, если его повернуть на угол  $\delta_0 = 30^\circ$  вокруг горизонтальной оси  $I_1I_2$ , простирающейся на юго-восток  $150^\circ$ . Эта ось есть линия пересечения двух положений основания полусферы. Она перпендикулярна нолевому направлению старой системы и лежит в плоскости основания ее полусферы. В том случае, если одно из двух положений основания полусферы является горизонтальным, осью вращения  $I_1I_2$  оказывается линия простирающаяся наклонного основания полусферы.

*Вторая операция.* Берем исходную диаграмму в старой системе координат с изображенным на ней центром  $M$  скопления точек (см. рис. 8, в). На ней ось поворота  $I_1I_2$  перпендикулярна нолевому направлению (О). Совмещаем ось с горизонтальным диаметром на подложенной под восковку сетке; он перпендикулярен экватору сетки. Теперь сквозь восковку видим следы малых кругов сетки, перпендикулярных оси вращения. Точку  $M$  переносим вдоль проходящего через нее малого круга на  $\delta_0 = 30^\circ$  в направлении, обратном повороту основания полусферы в точку  $M_1$  (см. рис. 8, д). Если при таком повороте, не закончив его, мы дошли бы до края диаграммы, отсчитав угол  $\delta_1 < \delta_0$ , то оставшееся число градусов ( $\delta_2 = \delta_0 - \delta_1$ ) следовало отсчитать вдоль малого круга, проходящего через точку, лежащую на противоположном конце диаметра сетки, начинающегося в том месте, где мы попали на край диаграммы. Например, если бы поворот составлял не  $30^\circ$ , а  $90^\circ$  в обратном направлении, мы произвели бы построение, показанное на рис. 8, е, и перенесли точку  $M$  в положение  $M_2$ .

*Третья операция.* Последнее, что нам осталось сделать, — повернуть диаграмму вокруг перпендикуляра к чертежу на угол  $\alpha_0 = 60^\circ$ , составляющий различие в азимутах нолевого направления в старой системе (после ее первого поворота) и нолевого направления новой системы координат. Для этого, не сдвигая восковки, отсчитываем по шкале азимутов  $60^\circ$  против часовой стрелки и ставим на восковке отметку  $N$ , т. е. север (см. рис. 8, ж). Переходя от старого начала отсчета к новому, мы отсчитываем угол против часовой стрелки потому, что положение азимута старого начала отсчета относительно нового находилось по часовой стрелке. Наконец, поворачиваем восковку так, чтобы отметка «север» оказалась бы верхней точкой диаграммы (см. рис. 8, з). Теперь мы имеем искомую стереографическую проекцию  $M_1$  точки  $M$  в новой системе координат.

Если требуется дугообразную проекцию следа плоскости преобразовать из старой системы в новую, на этом следе произвольно отмечают две точки (для самоконтроля можно отметить и третью). Затем находят положение каждой точки в новой системе координат, как это было сделано выше с точкой  $M$ . Потом диаграмму поворачивают вокруг перпендикуляра к чертежу до тех пор, пока новые положения точек не расположатся на каком-то одном меридиане. Когда это достигнуто, на восковку наносят найденный меридиан и соединяющий его концы диаметр. Это и есть новая стереографическая проекция плоскости.

Поставим обратную задачу: координаты точки, изображенной в системе с горизонтальным основанием и ориентированным на север нолевым направлением, преобразовать в координаты с наклонным основанием полусферы и нолевым направлением, которое совпадает с падением основания. Сначала, сохраняя горизонтальное положение

полусферы, повернем ее вокруг вертикальной оси так, чтобы полевое направление совпало с азимутом наклона основания в заданном новом направлении. Затем, приняв простираание основания полусферы новой системы за ось поворота  $I_1I_2$ , повернем основание из горизонтального положения в наклонное с заданным углом падения.

### Аппроксимация складок линиями первого порядка

**Одно уравнение — одна прямая.** Во многих районах структура верхней части земной коры имеет глыбовый характер. Профиль, изображенный на рис. 9, а, можно считать типичным для большей части территории СССР. Вверху на профиле видны рыхлые осадочные породы, часто содержащие нефть, уголь и другие осадочные полезные ископаемые, внизу показаны магматические и метаморфические породы кристаллического фундамента, содержащие главным образом месторождения металлов. Как любой профиль, рис. 9, а имеет ряд достоверных опорных точек и отрезков, между которыми верхняя граница фундамента проведена менее точно. В северной части профиля штрих-пунктирная граница проведена по данным геофизической разведки. Она также относится к менее точным линиям профиля.

Данный профиль без уменьшения его точности можно аппроксимировать, как говорят математики (т. е. приближенно заменить), ломаной линией, состоящей из прямолинейных отрезков, проходящих через все опорные точки и отрезки границ (см. рис. 9, б).

Теперь выберем систему координат. Для удобства последующих построений и вычислений примем прямоугольную регионально тектоническую систему: одна ее ось ( $z$ ) вертикальна, другая ось ( $y$ ) перпендикулярна простираанию и горизонтальна, третья ось ( $x$ ) параллельна простираанию. Начало координат расположено в точке  $O$ , где высота поверхности фундамента равна нулю (совпадает с уровнем моря).

Каждый прямолинейный отрезок профиля может быть записан в виде уравнения. Совокупность уравнений для всех участ-

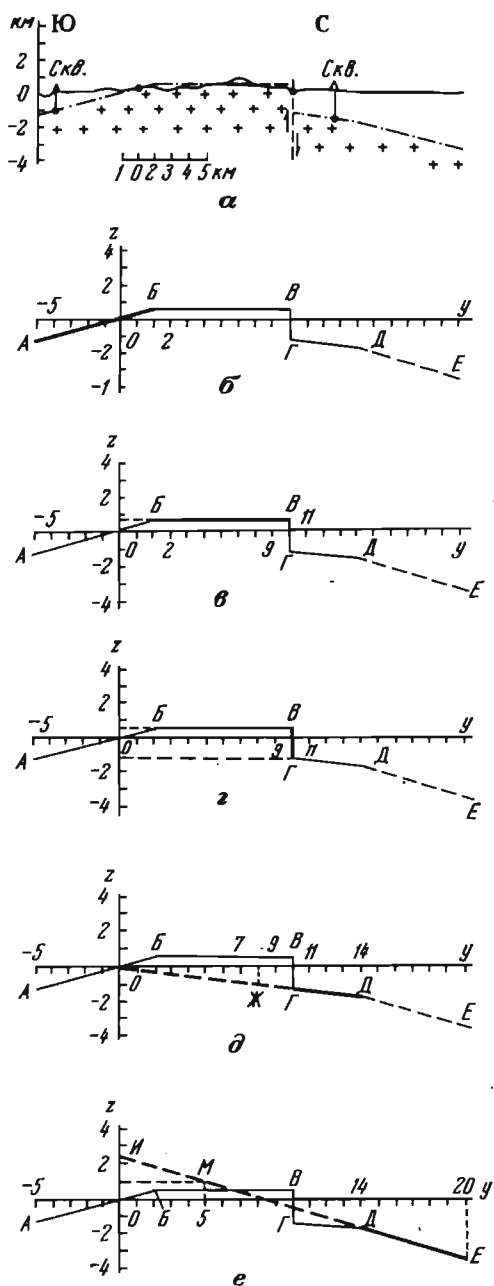


Рис. 9. Использование уравнений прямых линий для описания отдельных частей геологического профиля. Пояснения в тексте

ков будет аналитическим выражением профиля в целом. Координату  $y$  можно считать той переменной (аргументом), которая определяет высоту залегания фундамента (функцию).

Отрезок  $AB$  проходит через начало координат (см. рис. 9, б). У принадлежащих ему точек по мере увеличения координаты аргумента  $y$  координата функции  $z$  также увеличивается. Координаты всех точек таких прямых удовлетворяют уравнению

$$z = ky, \quad (1)$$

где величина  $k$ , называемая угловым коэффициентом, является постоянной, которая и характеризует наклон прямой. Легко найти  $k$  из графика. Для этого надо взять любые две точки на прямой, например  $O$  и  $B$ , и вычислить отношение разности величин координат функции этих точек ( $z_B - z_O = 0,5 - 0 = 0,5$ ) к разности координат аргумента этих точек ( $y_B - y_O = 2 - 0 = 2$ ):

$$k = \frac{z_B - z_O}{y_B - y_O} = 0,25. \quad (2)$$

Коэффициент  $k$  равен тангенсу угла наклона рассматриваемой прямой (относительно горизонтальной оси  $y$ ).

Теперь заметим, что прямая  $AB$  распространяется не до любых значений аргумента  $y$ , а находится между  $y = -5$  на юго-западе и  $y = 2$  на северо-востоке.

В итоге уравнение части профиля  $AB$ :

$$z = 0,25y; \quad -5 \leq y \leq 2. \quad (3)$$

Отрезок  $BB$  (см. рис. 9, в) замечателен тем, что горизонтально идущая линия во всех точках имеет одну и ту же постоянную величину координаты  $z = 0,5$  км.

Однако эта линия существует не при всех значениях аргумента  $y$ , а только между  $y = 2$  км и  $y = 10$  км. Следовательно, линия  $BB$  записывается так:

$$z = 0,5; \quad 2 \leq y \leq 10. \quad (4)$$

Отрезок  $BГ$  вертикален (см. рис. 9, г). Поэтому все лежащие на нем точки имеют одинаковую координату  $y = 10$  км. Координата  $z$  точек этого отрезка может быть только от  $-1,25$  до  $0,5$  км. Из этого вытекает запись линии  $BГ$ :

$$y = 10; \quad -1,25 \leq z \leq 0,5. \quad (5)$$

Отрезок  $ГД$  принадлежит линии, проходящей через начало координат, но, в противоположность прямой  $AB$ , данная линия характеризуется уменьшением координаты  $z$  по мере увеличения  $y$ . Это отражается на знаке углового коэффициента  $k$  в уравнении отрезка  $ГД$ :

$$z = ky. \quad (6)$$

Величина углового коэффициента определяется по координатам любых двух точек. Удобны координаты точек  $O$  и  $Ж$  (см. рис. 9, д). Берем отношение разностей их координат:

$$k = \frac{z_{Ж} - z_O}{y_{Ж} - y_O} = \frac{-1 - 0}{8 - 0} = -0,125.$$

Отмечаем пределы существования отрезка  $ГД$  между  $y = 10$  и  $y = 14$ . В итоге отрезок  $ГД$  записывается так:

$$z = -\frac{1}{8}y; \quad 10 \leq y \leq 14. \quad (7)$$

Наконец, отрезок  $DE$  (см. рис. 9,  $e$ ) отличается от всех предыдущих тем, что, будучи наклонным, он не проходит через начало координат, а отсекает на оси  $z$  отрезок  $OI=2,5$  км. Поэтому уравнение отрезка  $DE$ :

$$z = ky + 2,5 = -0,3y + 2,5. \quad (8)$$

Угловой коэффициент  $k$  имеет отрицательную величину, поскольку увеличение координаты  $y$  сопровождается у точек данной линии уменьшением координаты  $z$ . Для определения величины  $k$  следует отношение разности координат  $z$  двух любых точек на прямой  $EИ$  разделить на разность координат  $y$  тех же точек. Берем точку  $M$  ( $z=1$  км,  $y=5$  км) и точку  $I$  ( $z=2,5$  км,  $y=0$ ). Отсюда:

$$k = \frac{z_M - z_I}{y_M - y_I} = \frac{1 - 2,5}{5 - 0} = -0,3. \quad (9)$$

Окончательная запись отрезка  $DE$ :

$$z = -0,3y + 2,5; \quad 14 \leq y \leq 20. \quad (10)$$

Постоянный член, равный 2,5 км, стоит со знаком плюс, так как линия  $EИ$  пересекает ось  $z$  в ее положительной части. Для координаты  $y$  отрезка  $DE$  указаны пределы от 14 до 20 км. Теперь профиль, изображенный на рис. 9,  $a$ , можно зафиксировать записью:

$$\begin{aligned} z &= 0,25y; & -5 \leq y \leq 2; \\ z &= 0,5; & 2 \leq y \leq 10; \\ y &= 10; & -1,25 \leq z \leq 0,5; \\ z &= -0,125y; & 10 \leq y \leq 14; \\ z &= -0,3y + 2,5; & 14 \leq y \leq 20. \end{aligned} \quad (11)$$

Эта запись годится для ввода в память электронной вычислительной машины.

Охарактеризованные отрезки отражают различные типы расположения прямой относительно осей координат. Ясно, что вместо  $y$  и  $z$  могут стоять  $x$  и  $y$  или другие переменные величины. Поэтому приведенные уравнения годны для описания любых прямолинейных графиков.

В рассмотренных примерах были выписаны отдельные частные виды уравнения прямой линии. Наиболее общей записью уравнения прямой является:

$$Ax + By + C = 0, \quad (12)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — постоянные числа, конкретные значения которых выделяют данную прямую среди множества других. Если разделить все члены суммы на  $-C$  и обозначить  $\frac{-C}{A} = a$  и  $\frac{-C}{B} = b$ , то получим другую форму общего уравнения прямой, называемую уравнением в отрезках  $a$  и  $b$ , отсекаемых на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (13)$$

Аналитическим признаком уравнения прямой в декартовых координатах служит то, что переменные координаты входят в него только в первой степени; членов, содержащих произведения координат, в уравнении нет.

**Одно уравнение — две прямых.** В районах интенсивной складчатости часто встречаются шарнирные складки, имеющие зигзагообразную форму. На рис. 10,  $a$  показана одна из складок, изучавшихся ав-

тором в Ферганском хребте. Широкое распространение складок этой формы было установлено в результате специальных экспедиций на Кавказе (Сорский, 1964; Шолпо, 1964) и на Урале (Эз и др., 1965).

Отдельные антиклинальные и синклиналильные складки шарнирной формы, имеющие плоские (прямолинейные на профиле) крылья и очень узкие «вырожденные» замки в виде перелома слоя, хорошо описываются простейшим уравнением, содержащим абсолютную величину одной из координат.



*a*

На рис. 10, б изображена шарнирная антиклиналь Ферганского хребта. Введем систему координат с началом в шарнире складки. Пусть одна из осей совпадает с осевой поверхностью складки, т. е. делит угол между крыльями пополам. Заметим, что координата  $y$  для всех точек пласта имеет только отрицательные значения, т. е.  $y < 0$ . Каждой величине  $y$  соответствует два значения  $x$ : одно положительное, другое — равное ему по абсолютной величине, но отрицательное. Определив величину углового коэффициента  $k$  в одном крыле, опишем его уравнением прямой:

$$y = -kx; \quad x \geq 0. \quad (14)$$

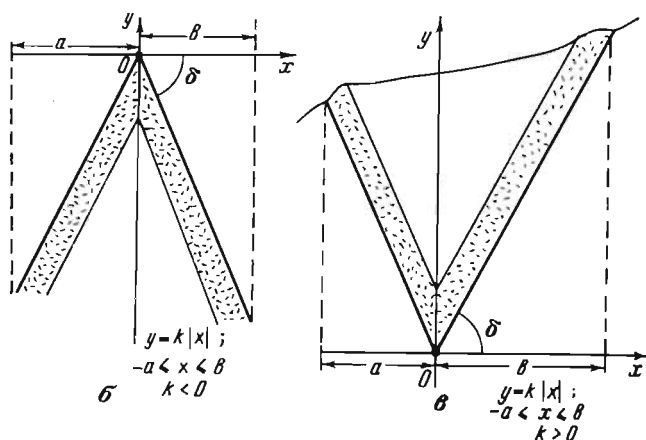


Рис. 10. Шарнирная складка

*a* — природная антиклиналь в юрских угленосных отложениях Ферганского хребта; *б* — форма антиклинали, соответствующая  $y = 2,2|x|$  при  $-a < x < b$ ; *б* — форма синклинали, соответствующая  $y = 2,2|x|$  при  $-a < x < b$

Другое крыло, имеющее противоположный по направлению наклон под тем же углом, можно охарактеризовать уравнением

$$y = kx; \quad x \leq 0. \quad (15)$$

Перепишем последние два уравнения, соединив знаки «+» и «—» с координатой  $x$ :

$$\left. \begin{aligned} y &= k(-x); & x &\geq 0 \\ y &= k(+x); & x &\leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Задавшись определенной величиной  $y=y_1$ , мы будем иметь в складке две точки с одинаковой абсолютной величиной  $x_1$  и  $x_2$ , которая обозначается  $|x|$ , т. е.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при } x > 0 \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (17)$$

Это соблюдается для всей складки. Поэтому уравнением складки служит выражение:

$$y = k |x|; \quad -a \leq x \leq b, \quad (18)$$

где  $-a$  и  $b$  обозначают показанные на рис. 10, б пределы распространения слоя в данной антиклинали.



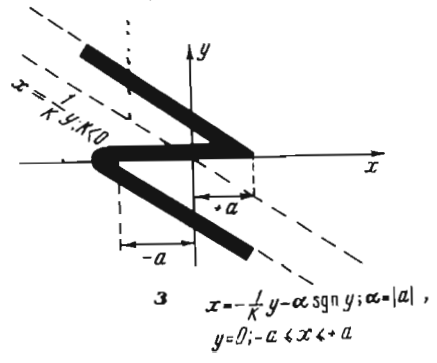
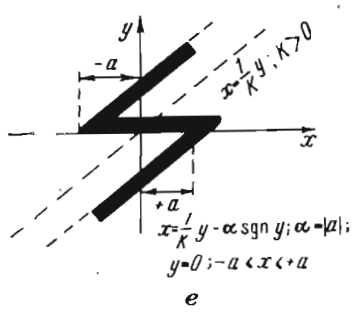
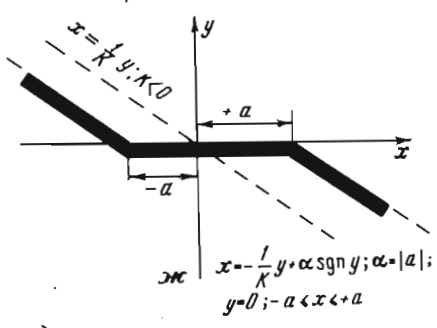
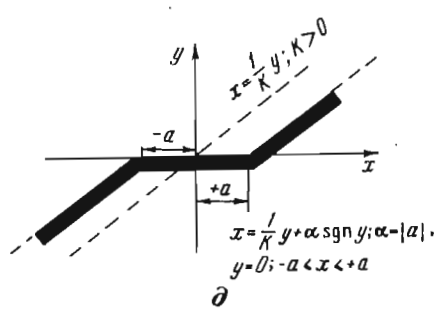
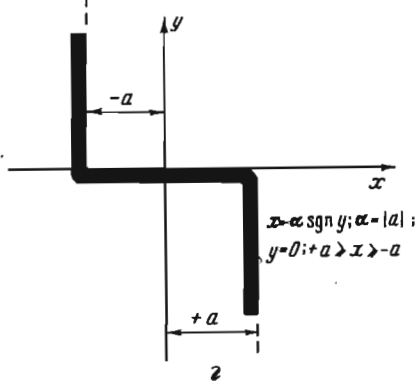
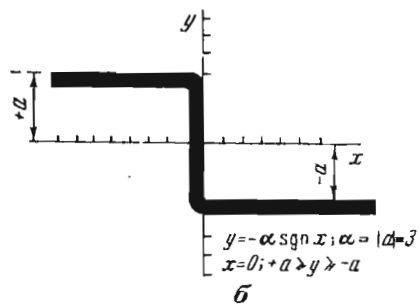
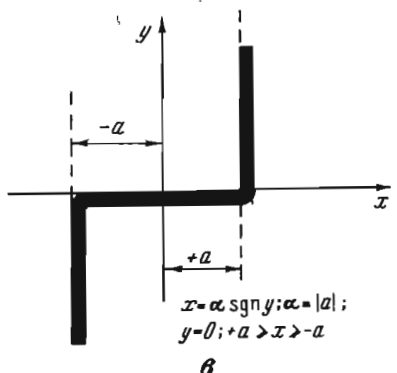
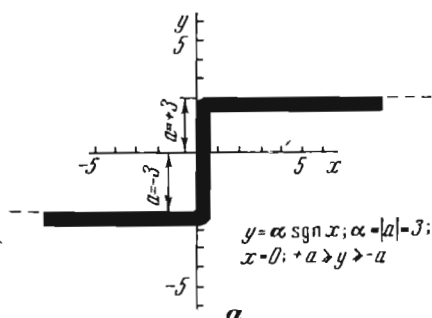
Рис. 11. Коленообразная складка в юрских отложениях Ферганского хребта

Синклиналию складку (см. рис. 10, в) опишет уравнение:

$$y = k |x|; \quad -a \leq x \leq b. \quad (19)$$

В случае наклонного положения осевой поверхности вначале используется промежуточная система координат, а затем от последней переходят к общей системе координат.

**Два уравнения — три прямых.** Имея дело с флексурой, смыкающее крыло которой перпендикулярно общему горизонтальному залеганию слоев, или со стулообразной складкой среди слоев, стоящих на головах, а также с коленообразными складками типа, показанного на рис. 11, мы за начало координат примем середину смыкающего крыла. Одну ось координат направим параллельно, а другую перпендикулярно общему залеганию слоев (рис. 12). Обратим внимание на то, что на рис. 12, а в области положительных значений  $x$ , т. е. при  $x > 0$ , слой имеет постоянную абсциссу  $y=a$ . Представим теперь величину  $+a$  как произведение  $+1$  на множитель  $\alpha$ , который в данном случае составляет  $\alpha=3$ . Численно  $\alpha$  всегда равен абсолютной величине  $|a|$ . В области отрицательных значений  $x$ , т. е. при  $x < 0$ , слой залегает на более низком уровне, который, благодаря выбранной системе координат, составляет  $y=-a$ . Представим  $-a$  как произведение  $-1$  на прежний множитель  $\alpha=|a|=3$ .



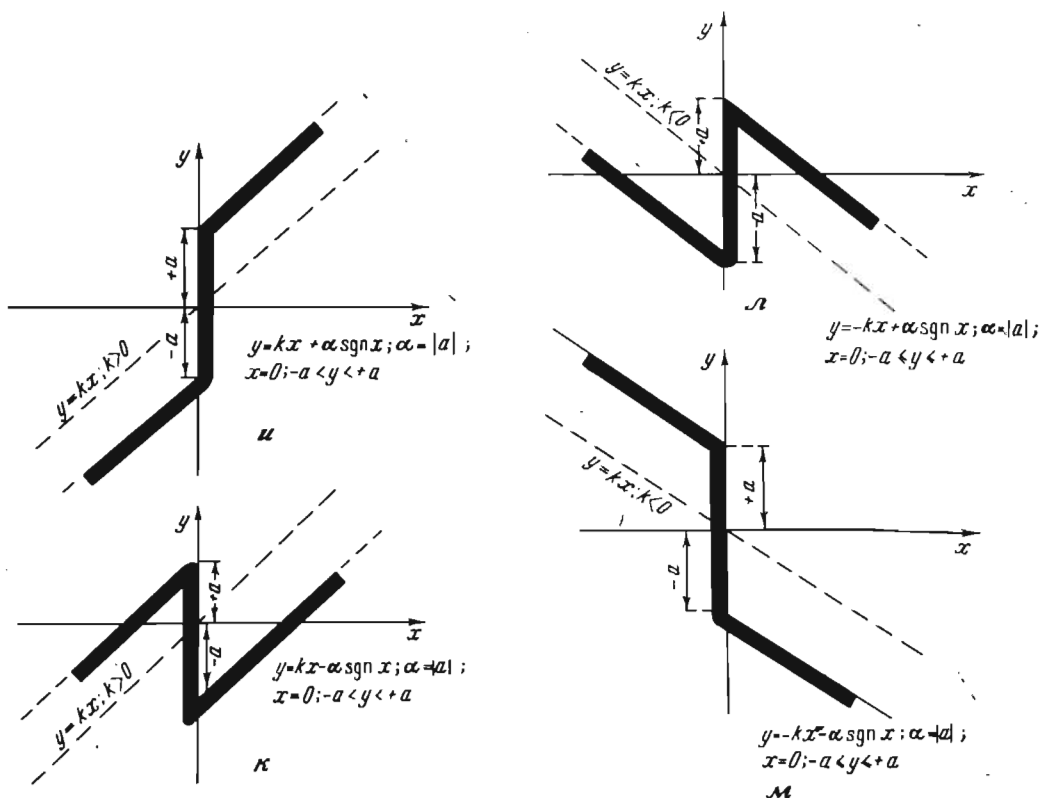


Рис. 12. Использование знака сигнума (sgn) при описании  
 а, б — флексуры в горизонтально залегающем пласте; в, г — ступообразной складки в вертикально залегающем пласте; д, е, ж, з — складок в наклонно залегающем пласте; и, к, л, м — флексур в наклонно залегающем пласте

Используем существующее в математике понятие о знаке, называемое «сигнум», обозначаемое  $\operatorname{sgn}$ . Знак какой-либо величины, например  $x$ , обозначается:

$\operatorname{sgn} x = +1$  для всех положительных величин  $x$ , т. е. при  $x > 0$ ;

$\operatorname{sgn} x = 0$  при  $x = 0$ ;

$\operatorname{sgn} x = -1$  для всех отрицательных величин  $x$ , т. е. при  $x < 0$ .

Значит, в области профиля с  $x > 0$  высота залегания слоя  $y$ :

$$y = \alpha \cdot \operatorname{sgn} x = 3 \cdot (+1) = +3.$$

В области профиля с  $x < 0$  высота залегания слоя будет:

$$y = \alpha \cdot \operatorname{sgn} x = 3 \cdot (-1) = -3.$$

Итак, вдоль всего профиля (кроме  $x = 0$ ) справедлива одна и та же формула сигнума, умноженного на один постоянный множитель  $\alpha$ , равный половине смыкающего крыла:

$$\left. \begin{aligned} y &= \alpha \operatorname{sgn} x; \quad \alpha = |a|; \quad x \neq 0 \\ x &= 0; \quad -a \leq y \leq a. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Запись  $x = 0$  представляет собой второе уравнение, которое показывает, что слой проходит через все точки с координатами от  $y = +a$  до  $y = -a$ .



Если крыло флексуры, находящееся в области положительных  $x$ , относительно опущено, то достаточно ввести в формулу знак минус, чтобы она стала описывать такую флексуру (см. рис. 12, б):

$$\left. \begin{aligned} y &= -\alpha \operatorname{sgn} x; \quad \alpha = |a|; \quad x \neq 0 \\ x &= 0; \quad -a \leq y \leq a. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

В случае стулообразной складки, осложняющей слон, стоящие на головах, величина  $x$  становится функцией сигнума  $y$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha \operatorname{sgn} y; \quad \alpha = |a|; \quad y \neq 0; \\ y &= 0; \quad -a \leq x \leq +a \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

или

$$\left. \begin{aligned} x &= -\alpha \operatorname{sgn} y; \quad \alpha = |a|; \quad y \neq 0; \\ y &= 0; \quad -a \leq x \leq a \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

в зависимости от направления стулообразной складки (см. рис. 12, в, г).

При наклонном общем залегании слоев за пределами флексуры или стулообразной складки параллельно этим слоям проводится вспомогательная линия через начало координат. Уравнение этой линии:

$$y = kx, \quad (24)$$

где  $k$  — угловой коэффициент. Его величину находят так, как указывалось выше. Описываемый слой по сравнению с линией  $y=kx$  смещен на величину  $\alpha=a$  вверх или вниз, в зависимости от знака  $x$ . Таким образом, мы получаем четыре уравнения:

$$x = \frac{1}{k}y + \alpha \operatorname{sgn} y, \quad k > 0; \quad (25)$$

$$x = \frac{1}{k}y - \alpha \operatorname{sgn} y, \quad k > 0; \quad (26)$$

$$x = -\frac{1}{k}y + \alpha \operatorname{sgn} y, \quad k < 0; \quad (27)$$

$$x = -\frac{1}{k}y - \alpha \operatorname{sgn} y, \quad k < 0. \quad (28)$$

Каждое из этих уравнений должно сопровождаться указанием на то, что  $\alpha=|a|$  и при  $y=0$  мы имеем продолжение пласта в диапазоне  $-a \leq x \leq +a$ .

На рис. 12, д, е, ж, з приведены примеры описания структурной террасы, т. е. локального выполаживания наклонно залегающего пласта, а также косо́й складки. На рис. 12, и, к, л, м даны другие примеры.

Использование величины сигнума в сочетании с постоянным множителем  $\alpha$  открывает широкие возможности описания всевозможных сочетаний складок с разрывами, имеющими плоскую форму их поверхности. Практически любую складчатую структуру мы можем представить рассеченной разрывом, введя в уравнение складчатости еще одно слагаемое, содержащее сигнум с множителем  $\alpha$ , равным половине амплитуды разрыва.

Приведенные на рис. 12 формулы для флексур, структурных террас, стулообразных и косо́й складок можно использовать для описания вертикальных и горизонтальных разрывов пласта. Для этого надо исключить из формул указание на то, что при  $x=0$  пласт проходит вдоль оси координат, имея  $-a < y < +a$ , или же указание, что при  $y=0$  пласт тянется вдоль оси абсцисс, обладая  $-a < x < +a$ . Если такого рода указания в формуле нет, пласт должен считаться прерывающимся при  $x=0$  или при  $y=0$ .

Если смыкающее крыло складки (или разрыв) имеет не вертикальное или горизонтальное, а наклонное направление, то можно ввести промежуточную систему координат. В такой системе одна из осей должна совпадать со смыкающим крылом (или разрывом). Структура сначала записывается в этой системе. Затем вводятся осложнения уравнений, связанные с переходом к основной системе координат. Как это делается, было сказано выше.

**Формула угла складки.**  
Если мы можем на профиле провести две прямых касательных к крыльям складки, то каждую из этих прямых опишет уравнение прямой, отличающееся величиной коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

Пусть одно крыло мы записали в виде:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (29)$$

а другое крыло:

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \quad (30)$$

Теперь простые формулы дают нам координаты  $x_0$  и  $y_0$  точки пересечения этих двух прямых (рис. 13).

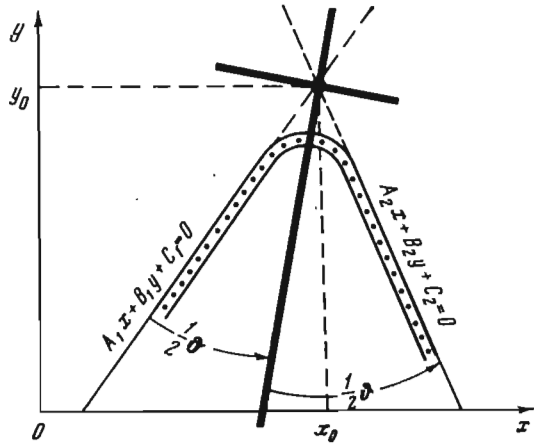


Рис. 13. Схема к аналитическому определению угла складки и ее осевой поверхности

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \left| \begin{array}{c} B_1C_1 \\ B_2C_2 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{c} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{array} \right| ; \\ y_0 &= \left| \begin{array}{c} C_1A_1 \\ C_2A_2 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{c} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{array} \right| . \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Если  $\left| \begin{array}{c} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{array} \right| = 0$ , то данные прямые параллельны, что характерно для изоклинальных складок.

Стоящие в прямых скобках таблицы коэффициентов называются в алгебре определителями. В данном случае мы имеем дело с определителями второго порядка, так как в каждом из них есть два столбца и две строки, заполненных коэффициентами. Каждый определитель является числом, которое находится следующим образом. Сначала выписывается произведение левого верхнего коэффициента на правый нижний. Затем из этой величины вычитается произведение правого верхнего коэффициента на левый нижний. Иными словами

$$\left| \begin{array}{c} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{array} \right| = A_1B_2 - B_1A_2. \quad (32)$$

Угол между двумя прямыми касательными к крыльям складок в геологии принято называть углом складки. Обозначим его  $\vartheta$ . Он обладает тангенсом:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \quad (33)$$

Если нам известны угловые коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  двух прямых касательных к крыльям:

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1} \quad \text{и} \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}, \quad (34)$$

то  $\text{tg } \vartheta$  можно вычислить по формуле

$$\text{tg } \vartheta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (35)$$

Соответствующий угол складки  $\vartheta$  отсчитывается от первой прямой к второй против часовой стрелки.

В изоклинальных складках, как уже говорилось,

$$\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} = A_1 B_2 - B_1 A_2 = 0. \quad (36)$$

Следовательно, у них

$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} = k_1 = k_2. \quad (37)$$

Если угол складки прямой, то

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0, \quad (38)$$

т. е.

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (39)$$

**Уравнение осевой поверхности складки на профиле.** Угол складки можно разделить пополам биссектрисой, которая является линией пересечения профиля с осевой поверхностью складки. Эта поверхность, вообще говоря, не всегда является плоскостью. Мы в данном случае имеем в виду те складки, у которых осевая поверхность может считаться плоской (см. рис. 13). Имея уравнение двух касательных к крыльям:

$$\left. \begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

мы получим уравнения биссектрисы угла складки и перпендикулярной к ней линии:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} + \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right) x + \left( \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} + \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right) y + \\ &+ \left( \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} + \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} &\left( \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right) x + \left( \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \right. \\ &\left. - \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right) y + \left( \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Точная фиксация положения осевой поверхности имеет существенное практическое значение, так как около нее происходит особенно сильная деформация горных пород. Поэтому около осевой поверхности в складках продольного сжатия существует повышенная концентрация гидротермальных рудных минералов. По той же причине качество нефтяных и угольных месторождений ухудшается около осевых поверхностей складок продольного сжатия. Эти поверхности являются местом резкого осложнения условий разработки месторождения — здесь изменяется угол падения слоев и появляется особенно много разрывов.

## Аппроксимация складок линиями второго порядка

Существует много месторождений полезных ископаемых, особенно осадочного происхождения, и крупных районов, на профилях которых слои изображаются в виде кривых линий — складок различной формы. Таковы Донбасс, Кузбасс, нефтяные районы Кавказа и Средней Азии и многие другие. Отдельная складка, вмещающая месторождение, или отрезок профиля могут быть строго математически изображены кривыми второго порядка, которым соответствуют определенные уравнения. Производя такую операцию, важно отдавать себе отчет, что форма залегания слоев на профилях месторождений имеет различную степень достоверности. Около хорошо обнаженных участков поверхности и в местах, где пройдено много разведочных и эксплуатационных горных выработок (скважин, штолен, шахт), достоверность формы высокая. Эту форму надо воспроизвести возможно точнее. На глубине, где профиль изображается путем интерполяции и экстраполяции от редких опорных точек, можно удовлетвориться менее точным воспроизведением профиля с помощью математической кривой. Конечно, она обязана пройти через все достоверные опорные точки залегания слоя на профиле. В немногочисленных местах с особо благоприятными природными условиями удается полностью увидеть целые складки (рис. 14) и даже несколько складок. В этих редких случаях форма всей складки известна достоверно. Весьма ценными для познания морфологии складок являются также лабораторные модели, на которых все вопросы, касающиеся морфологии, решаются вполне достоверно.



Рис. 14. Антиклиналь в олигоценовых отложениях Гиссарского хребта (Таджикистан)

В аналитической геометрии кривыми линиями второго порядка называют эллипс, окружность (частный случай эллипса), гиперболу и квадратную параболу.

Наиболее общее уравнение линий второго порядка записывается в виде:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

или в более удобном для ряда последующих преобразований виде:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (2)$$

где  $A, B, C, D, E, F$  являются численными коэффициентами. В дальнейшем под общим уравнением линий второго порядка мы будем подразумевать уравнение (2). Все члены этого уравнения присутствуют в том случае, если кривая лежит в стороне от начала координат и оси кривой повернуты относительно осей координат.

Кривые второго порядка и теория относящихся к ним уравнений являются наиболее благоприятным материалом, на котором можно

овладеть началами весьма увлекательного и важного во многих отношениях искусства «читать» уравнения и кривые различной формы. Научившись этому, геолог, глядя на природное обнажение, геологический профиль или модель, сможет написать в общей форме уравнение, описывающее складку, и таким образом причислить ее к определенному математическому классу. Затем будет легко определить численное значение коэффициентов уравнения, отражающих в наиболее объективной форме индивидуальные особенности данной складки. В других случаях, располагая уже написанным уравнением какой-либо складки, полезно уметь «читать» его таким образом, чтобы перед глазами вместо формул вставала складка с определенной морфологией. Такое умение интерпретировать кривые и уравнения можно сравнить со способностью читать геологическую карту. На карте показаны лишь выходы пород различного возраста, а опытный геолог видит в ней объемное изображение структуры земной коры на большую глубину и сложную историю формирования этой структуры.

Обратимся к общему уравнению (2). Если оси кривой параллельны осям координат, из уравнения (2) исчезает член с произведением  $xy$ , т. е. признаком параллельности осей кривой и координат служит  $B=0$ . Поворотом осей координат вокруг начала координат всегда можно добиться того, чтобы  $B=0$ . Угол такого поворота находится по формуле

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B}, \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}. \quad (3)$$

Наличие в уравнении двух (именно двух!) членов первого порядка, т. е.  $2Dx \neq 0$  и  $2Ey \neq 0$ , указывает на то, что оси кривой не совпадают с осями координат. Параллельным переносом осей координат можно добиться исчезновения обоих членов первого порядка (в случае эллипса или гиперболы) или одного члена первого порядка (при параболе). В результате переноса начала координат и поворота их осей получается наиболее простая форма уравнения, называемая канонической, при которой центр симметрии эллипса или гиперболы совпадает с началом координат. У параболы в этом случае вершина совпадает с началом координат. В канонических уравнениях кривых второго порядка  $B=0$ ; для эллипса и гиперболы характерно  $D=0$  и  $E=0$  и присутствие обязательно двух членов второго порядка  $Ax^2$  и  $Cy^2$ . Для эллипса необходимо, чтобы знаки при  $A$  и  $C$  были одинаковыми, а знак при  $F$  был противоположен знаку при  $A$  и  $C$ . В уравнении гиперболы может быть любой знак у  $F$ , но обязательно, чтобы значения  $A$  и  $C$  были бы противоположного знака.

Уравнения кривых второго порядка относятся к эллиптическому типу, если  $AC - B^2 > 0$ . При  $AC - B^2 > 0$  уравнение относится к гиперболическому типу. Наконец,  $AC - B^2 = 0$  является признаком параболического типа уравнений второго порядка.

Эллипс и гипербола могут быть реально геометрически построены лишь при условии, что в общем уравнении  $AC - B^2 \neq 0$ , так как только в этом случае могут быть найдены координаты центра кривой  $x_0$  и  $y_0$  из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D &= 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В каноническом уравнении параболы обязательно  $B=0$  и должны присутствовать лишь один член второго порядка  $Ax^2$  (или  $Cy^2$ ) и один член первого порядка другой переменной  $2Ey$  (или  $2Dx$ ). В общем уравнении параболы — кривой, не имеющей центра симметрии, — имеет место соотношение  $AC - B^2 = 0$ .

Если приведенные соотношения между коэффициентами не соблюдаются, уравнениям соответствуют другие геометрические образы, например, точка вместо эллипса, две пересекающихся прямых вместо гиперболы, две параллельных прямых или одна прямая вместо параболы, или же вообще уравнение не может быть выражено никаким геометрическим образом в реальном пространстве. В последнем случае возникает необходимость геометрического изображения мнимой величины  $\sqrt{-1}$ , и поэтому говорят о мнимых геометрических образах.

Кривые второго порядка — эллипс, гиперболу и квадратную параболу (сокращенно — просто параболу) — называют также коническими сечениями, так как форму этих кривых имеют линии пересечения плоскости с двумя соосными круговыми конусами, у которых общая вершина и они направлены навстречу друг другу. Если плоскость пересекает только один конус по замкнутой кривой, то эта кривая является эллипсом. Если плоскость пересекает один из конусов по незамкнутой кривой, линия пересечения оказывается параболой. В данном положении плоскость параллельна одной из образующих двойного конуса. Если плоскость пересекает оба конуса, линия пересечения имеет форму гиперболы.

### Эллипс

**Форма кривой и уравнение эллипса.** Эта замкнутая кривая овальной формы удобна для описания замковых частей складок, кривизна которых изменяется в пространстве. Эллипс позволяет соединять кривой линией крылья складок, имеющих самое разнообразное падение, в том числе и параллельное, свойственное изоклинальным складкам. В них кривизна слоев уменьшается с удалением от оси складки. Эллипс дает возможность изображать как выпуклые кверху, так и прогнутые вниз замки антиклиналей коробчатого облика, у которых кривизна слоя в замке возрастает с удалением от оси складки и приближением к крыльям. Он пригоден для изображения лежащих и веерообразных складок.

Каноническое уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат:

$$A_1x^2 + C_1y^2 + G_1 = 0 \quad (1)$$

при условии, что знак величины  $G_1$ , которая не равна 0, противоположен знакам величины  $A_1$  и  $C_1$ , вследствие чего  $A_1C_1 > 0$ . Введя обозначения  $\frac{A_1}{-G_1} = A_2$  и  $\frac{C_1}{-G_1} = C_2$ , можно записать его:

$$A_2x^2 + C_2y^2 = 1. \quad (2)$$

Разделив все члены в (1) на  $-G_1$  и обозначив  $\frac{-G_1}{A_1} = a^2$ ;  $\frac{-G_1}{C_1} = b^2$ , мы получаем другую форму канонического уравнения эллипса, имеющую наглядную геометрическую интерпретацию:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Из него следует, что:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (4)$$

Таким образом, в каноническое уравнение (3) входят только две постоянные  $a$  и  $b$ , которые полностью определяют форму и размеры эллипса. Эллипс вписывается в прямоугольник со сторонами длиной  $2a$  (обычно большая) и  $2b$  (обычно меньшая). Он касается середин этих

сторон. Центр прямоугольника является центром эллипса. У эллипса всегда значения коэффициентов  $A_1$  и  $C_1$  имеют одинаковый знак. Если центр эллипса не совпадает с началом координат, а его оси не параллельны осям координат, то обязательно должно соблюдаться также условие  $AC - B^2 > 0$ . В случае  $G_1 = 0$  эллипс превращается («вырождается») в точку начала координат, к которой он стремится при бесконечном уменьшении его осей.

В случае одинакового знака при коэффициентах  $A_1$ ,  $C_1$  и  $G_1$  в (1), т. е. при наличии  $-1$  в правой части (2), уравнению соответствует мнимый эллипс.

Итак, уравнения эллиптического вида определяют или действительный, или вырожденный в точку, или мнимый эллипс.

**Составление уравнения эллиптической складки.** Желая показать часть складки с помощью эллиптической кривой, мы должны на изображении складки наметить прямоугольник, в который впишется искомый эллипс. Половины сторон этого прямоугольника обозначаются  $a$  и  $b$ . Никаких координат можно пока не вводить (рис. 15, а). Для использования эллипса важны две его точки, называемые  $F_1$  и  $F_2$  (см. рис. 15, б). Два фокуса находятся на длинной оси эллипса, располагаясь симметрично на расстоянии  $c$  от его центра. Формула, связывающая величины  $a$ ,  $b$  и  $c$ :

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad (5)$$

позволяет находить  $c$ , считая его одним из катетов прямоугольного треугольника, имеющего гипоте-

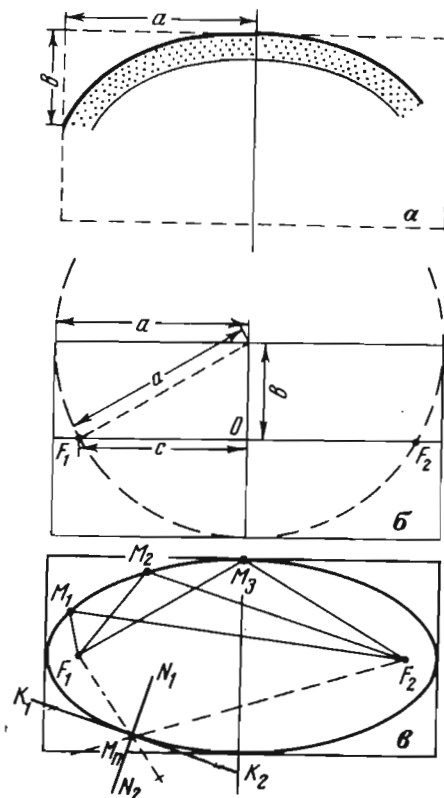


Рис. 15. Геометрические свойства эллипса. Пояснения в тексте

нузу, равную  $a$ , и один из катетов длиной  $b$ .

Практически поступаем так: из середины длинной стороны прямоугольника проводим окружность радиусом  $a$ . Она пересечет линию, проходящую через центр прямоугольника параллельно его длинной стороне, два раза. Эти две точки пересечения являются искомыми фокусами  $F_1$  и  $F_2$ .

Фокусы эллипса замечательны в двух отношениях. Во-первых, при рассмотрении любой точки эллипса:  $M_1$ ,  $M_2$  или  $M_3$ , оказывается, что сумма расстояний от точки до двух фокусов является постоянной величиной, равной  $2a$ . Это свойство эллипса считается его основным геометрическим признаком. Во-вторых, легко устанавливается следующее направление касательной и нормали к эллипсу. Соединим любую точку эллипса  $M_n$  двумя пересекающимися прямыми с фокусами  $F_1$  и  $F_2$ . Затем строим две взаимно перпендикулярные линии, делящие пополам углы между пересекающимися в  $M_n$  прямыми. Одна из этих линий  $K_1K_2$  является касательной, а другая  $N_1N_2$  — нормальной к кривой линии эллипса в точке  $M_n$  (см. рис. 15, в). Последнее свойство позволяет осуществлять сопряжение эллипса с любой прямой, которая имеет заданное направление.

Отношение

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = e \quad (6)$$

называется эксцентриситетом. Чем он больше, тем эллипс сильнее вытянут.

Из нескольких способов построения эллипса по двум заданным величинам полуосей  $a$  и  $b$  наиболее простым является следующий (рис. 16). На полоске бумаги двумя штрихами отмечается отрезок

длиной  $a$ . Затем от одного его конца откладывается отрезок длиной  $b$ . На месте построения будущего эллипса проводятся две взаимно перпендикулярные линии — локальные оси координат. Точка их пересечения и есть центр будущего эллипса. Полоска бумаги прикладывается к одной из осей координат так, чтобы один какой-нибудь из крайних штрихов совпал с центром эллипса. Около среднего штриха ставится точка 1 на координатной оси.

Затем полоска бумаги перемещается таким образом, чтобы один крайний штрих все время скользил по одной оси координат, а другой крайний штрих совмещался с перпендикулярной к ней осью. На чертеже около среднего штриха ставятся точки. Так получается четверть эллипса. Повторяя это построение в других координатных квадрантах, получим весь эллипс (см. рис. 16).

Построенная кривая накладывается на изображаемую часть складки. Если совмещение достоверных точек и линий профиля с построенной кривой не удовлетворяет нас, построения следует повторить, варьируя величины  $a$  и  $b$  и их отношение.

Если на чертеже имеется общая для всего профиля система координат  $XU$ , например регионально тектоническая, то находим координаты ее начала  $x_0$  и  $y_0$  в локальной системе, имеющей оси, параллельные осям  $XU$ . После этого уравнение построенного эллипса записывается в региональной системе координат в виде:

$$\frac{(X + x_0)^2}{a^2} + \frac{(Y + y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

Если центр эллипса совпадает с началом координат, имеем  $x_0=0$ ,  $y_0=0$ . Следовательно, уравнение приобретает канонический вид

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1. \quad (8)$$

Пояснения в тексте

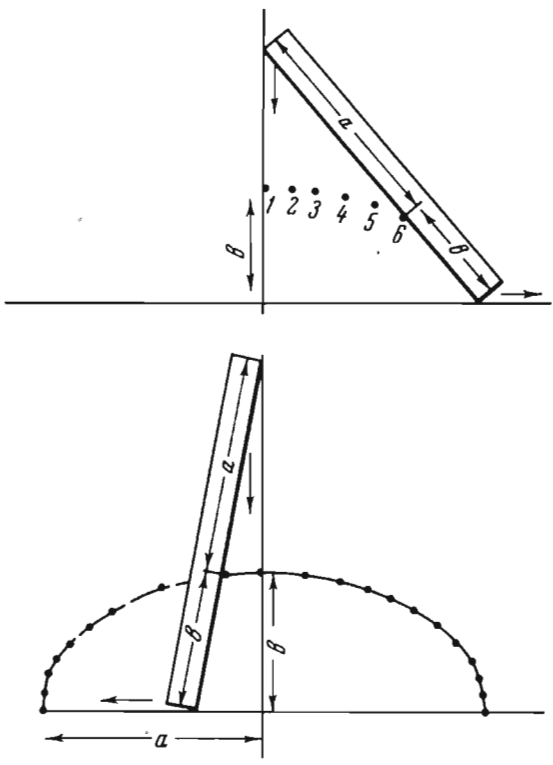


Рис. 16. Построение эллипса по заданным полуосям  $a$  и  $b$ . Пояснения в тексте



В записи, кроме уравнения эллипса, требуется указать пределы значений координат  $x$  и  $y$ , между которыми дуга эллипса совпадает с линией, изображающей форму залегания слоя.

Оси эллипсов (7) и (8) параллельны осям координат. В случае наклонного положения осей эллипса по отношению к осям координат всего профиля можно поступить двояко.

Или мы указываем, что в определенном диапазоне региональных координат используется локальная система  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , повернутая относительно региональной системы на определенный угол  $\alpha$  и имеющая начало в точке  $X_0$ ;  $Y_0$  общей системы. Уравнение эллипса тогда записывается в простейшей форме (8) в локальной системе координат  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ .

Или мы усложняем уравнение эллипса, записывая его непосредственно в региональной системе координат. Пусть начало региональной системы имеет в локальной системе координаты  $x_0$  и  $y_0$ . Пусть оси эллипса, по сравнению с осями координат, повернуты на угол  $\alpha$  против часовой стрелки.

Координаты канонического уравнения (3) в локальной системе координат  $x$  и  $y$  выражаются через координаты региональной системы  $X$  и  $Y$  формулами преобразования (см. стр. 31):

$$\left. \begin{aligned} x &= X \cos \alpha - Y \sin \alpha + x_0 \\ y &= X \sin \alpha + Y \cos \alpha + y_0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Подставив (9) в (3), мы получим в общей системе уравнение эллипса, центр которого смещен относительно начала региональной системы, а оси повернуты по сравнению с осями региональной системы на угол  $\alpha$  по часовой стрелке:

$$\frac{(X \cos \alpha - Y \sin \alpha + x_0)^2}{a^2} + \frac{(X \sin \alpha + Y \cos \alpha + y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (10)$$

Если мы изображаем на профиле часть эллипса, длинная ось которого параллельна вертикальной оси  $y$ , а короткая ось параллельна оси  $x$ , то уравнение эллипса принимает вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{при } b > a \quad (\text{тогда } c^2 = b^2 - a^2). \quad (11)$$

На рис. 14 приведена фотография, а на рис. 17 профиль антиклинали. На профиле изображена произвольная система координат  $X$ ,  $Y$ . Для кровли одного из пластов найдена аналитическая форма кривой. Свод антиклинали в диапазоне  $-62 \leq X \leq +50$  м;  $+160 \leq Y \leq +200$  м считается эллиптической линией, для которой найдено уравнение:

$$\frac{X^2}{62^2} + \frac{(Y - 160)^2}{40^2} = 1. \quad (12)$$

На профиле показаны крупные точки, соответствующие этому уравнению. Они достаточно хорошо совпадают с кровлей рассматриваемого пласта. Начало координат  $O$  удалено от центра эллипса, обозначенного  $O_2$ , по оси ординат на  $y_0 = 160$  м, поэтому в уравнении (12) фигурирует число 160. Центр эллипса лежит на оси  $Y$ , следовательно,  $x_0 = 0$ .

Большая полуось  $a = 62$  м, а малая  $b = 40$  м. Эти числа стоят в уравнении (12). Южная часть профиля характеризуется ниже.

### Окружность

**Уравнение окружности.** Если в уравнении эллипса, центр которого совпадает с началом координат, стоят одинаковые коэффициенты при

$x^2$  и  $y^2$ , т. е.  $A=C$ , а величина  $F \neq 0$  и имеет противоположный им знак, уравнение можно преобразовать к виду:

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (1)$$

где  $R^2 = -\frac{F}{A}$ .

Разделив все члены (1) на  $R^2$ , получим:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1. \quad (2)$$

Это уравнение окружности, которая вписана в квадрат со стороной, равной  $2R$ .

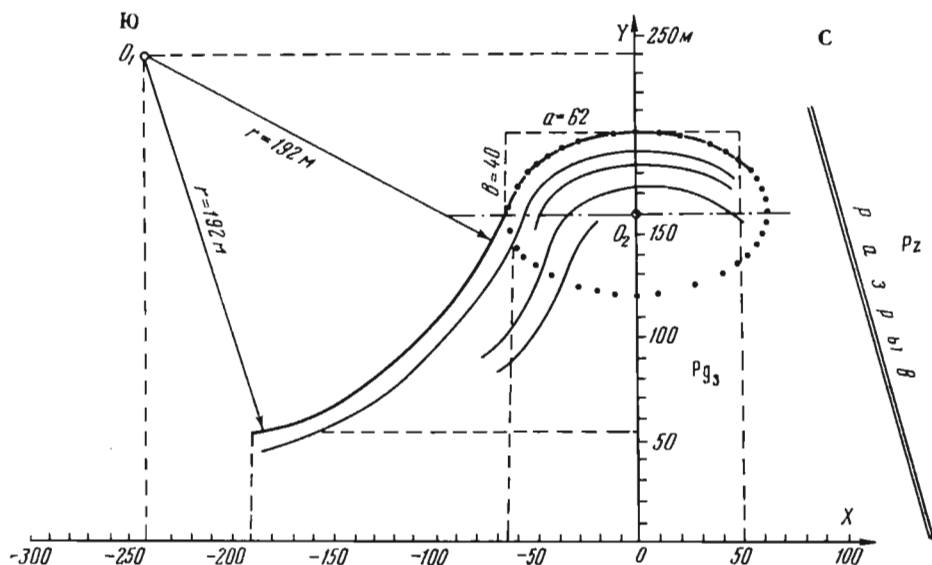


Рис. 17. Точки, построенные по уравнению эллипса  $\frac{X^2}{62^2} + \frac{(Y-160)^2}{40^2} = 1$ , и дуга окружности радиусом 192 м и их сопоставление с природной складкой

Если центр окружности не совпадает с началом координат и не лежит ни на одной из осей координат, получается самое общее по форме уравнение окружности:

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (3)$$

при условии, что  $F \neq 0$  и имеет знак, обратный знаку величины  $A$ .

Для любого уравнения окружности характерно равенство коэффициентов при  $x^2$  и  $y^2$ , а также отсутствие члена  $xy$ . Последнее вызвано тем, что у окружности обе полуоси одинаковы по величине. Значит, любые координатные оси можно считать параллельными двум взаимно перпендикулярным и произвольно выбираемым осям симметрии окружности. Именно эта параллельность осей координат и кривой порождает отсутствие члена  $xy$ .

Если центр окружности лежит на одной из осей координат, например на оси абсцисс, уравнение (1) включает абсциссу центра  $x_0$ :

$$(x - x_0)^2 + y^2 = R^2. \quad (4)$$

Раскрыв скобки, мы получим общее уравнение, содержащее член с  $x$  в первой степени:

$$x^2 + y^2 + 2Dx + F = 0. \quad (5)$$

Если центр окружности лежит на оси ординат  $y$ , его ордината  $y_0$  войдет в уравнение

$$x^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (6)$$

Это вызовет появление члена с  $y$  в первой степени после раскрытия скобок и преобразование уравнения к общему виду:

$$x^2 + y^2 + 2Ey + F = 0. \quad (7)$$

В наиболее общем случае, когда центр окружности лежит в стороне от обеих осей координат и обладает абсциссой  $x_0$  и ординатой  $y_0$ , уравнение окружности можно записать в форме

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (8)$$

Раскрыв скобки, мы свободно приведем его к виду (3). Однако делать это не всегда имеет смысл, так как формула (8) дает наиболее наглядное представление о форме кривой и положении ее центра. Для структурной геологии формула (8) особенно важна.

На примере окружности теоретически строго доказывается, что бывают такие случаи, когда одну и ту же кривую можно изобразить существенно различными уравнениями. Выше окружность была описана алгебраическим уравнением второго порядка. Для тектонофизики весьма важно другое — параметрическое описание окружности с привлечением тригонометрических функций. Центр окружности помещается на положительной части оси  $x$ . Концы совпадающего с ней диаметра имеют координаты  $y=0, x=x_1$  (правый конец) и  $y=0, x=x_2$  (левый конец). Координаты  $x$  и  $y$  кривой выражаются при этом через третью величину (параметр) — угол  $\alpha$  между осью  $x$  и хордой, выходящей из левого конца диаметра окружности, совпадающего с осью  $x$ . Координаты точки на другом конце хорды (не совпадающем с осью  $x$ ) равны:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + b \cos 2\alpha \\ y &= b \sin 2\alpha \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Если на оси абсцисс  $x_1$  обозначает наибольшее значение  $x$  в пределах окружности, а  $x_2$  — наименьшее, то:

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad b = \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

Геометрическим выражением множителя  $b$  является радиус  $R$  окружности,  $a$  — абсцисса ее центра.

Уравнения (9) называются уравнениями круга Отто Мора, одного из крупнейших немецких специалистов по механике конца XIX в. С помощью кругов Мора графически изображаются деформированное и напряженное состояния в окрестности точки тела.

**Составление уравнения складки.** Дуги окружности часто используются в структурной геологии при изображении отдельных участков складок. На рассмотренном (см. рис. 17) примере складки с эллиптическим сводом обнаруживается, что видимая часть южного крыла антиклинали совпадает с дугой окружности, имеющей радиус  $R=192$  м и центр с координатами  $X_0=-240$  м,  $Y_0=240$  м. Из этих величин, полученных геометрическим построением на профиле, вытекает возможность записи уравнения южного крыла антиклинали, если подставить формулу (8) соответствующие значения  $X_0, Y_0, R$ :

$$(X + 240)^2 + (Y - 240)^2 = 192^2. \quad (10)$$

Необходимо отметить в записи, что слой подчиняется закономерности (10) в диапазоне  $-190 \text{ м} \leq X \leq -62 \text{ м}; 55 \leq Y \leq 160 \text{ м}$ .

Таким образом, совокупность последнего выражения (10) и (12) со стр. 52, а также записи диапазонов  $X$  и  $Y$ , в которых они действительны

$$\left. \begin{aligned} \frac{X^2}{62^2} + \frac{(Y-160)^2}{40^2} = 1; \quad \text{при} \quad -62 \leq X \leq 50 \text{ м} \\ 160 \leq Y \leq 200 \text{ м} \\ (X+240)^2 + (Y-240)^2 = 192^2; \quad \text{при} \quad -190 \leq X \leq -62 \text{ м} \\ 55 \leq Y \leq 160 \text{ м}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

полностью передает профиль залегания пласта в антиклинальной складке, изображенной на рис. 14 и 17.

### Гипербола

**Форма кривой и уравнения гиперболы.** Гиперболой называется совокупность двух второго порядка кривых (ветвей гиперболы), расположенных симметрично относительно двух осей, пересекающихся под прямым углом в точке, называемой центром. Через эту точку проходят две других пересекающихся прямых — две асимптоты. К ним ветви гиперболы неограниченно приближаются по мере своего удаления в бесконечность. Угол пересечения асимптот не обязательно является прямым. Одна ветвь гиперболы расположена в одном углу между асимптотами, другая ветвь — в противоположном (равном по величине) углу между асимптотами. Биссектрисами этих углов служат оси координат, если за них приняты оси симметрии.

Если ветви гиперболы занимают углы, разделенные пополам вертикальной осью координат, каждая из ветвей имеет привычную для геолога форму складки. Лежащая выше начала координат верхняя ветвь гиперболы соответствует синклинали, а нижняя ветвь — антиклинали. Для этих складок характерна плоская форма крыльев в достаточном удалении от начала координат. Возможна любая величина угла складки. Кривизна замковой части складки может быть большей или меньшей при одной и той же величине угла складки.

Следовательно, используя одну из ветвей гиперболы, мы можем описать довольно разнообразные по форме складки, начиная от шарнирных и кончая складками с широкими сводами, в пределах которых кривизна уменьшается по мере удаления слоя от осевой поверхности складки. Гиперболы не пригодны для описания изоклинальных, сундучных и веерообразных складок.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$A_1x^2 + C_1y^2 + G_1 = 0 \quad (1)$$

отличается от уравнений эллипса тем, что значения коэффициентов  $A_1$  и  $C_1$  имеют противоположные знаки, т. е.  $A_1C_1 < 0$ . Величина  $G_1$  у гиперболы может быть любого знака. Если  $G_1 = 0$ , гипербола превращается («вырождается») в две пересекающиеся прямые, совпадающие с асимптотами.

Разделив все члены на  $-G_1$  и обозначив

$$\left| \frac{G_1}{A_1} \right| = a^2, \quad \left| \frac{G_1}{C_1} \right| = b^2, \quad (2)$$

вместо (1) получим другую форму канонического уравнения:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{если} \quad G_1A_1 < 0, \quad (3)$$

или

$$\left. \begin{aligned} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= -1 \end{aligned} \right\} \text{если } G_1 A_1 > 0. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) наиболее удобны при графическом анализе гипербол, так как величины  $a$  и  $b$  имеют непосредственное выражение на графиках. Обратим внимание на то, что уравнения (3) и (4) относятся к двум разным по форме и различно расположенным гиперболам. Если коэффициент  $a$  в уравнениях (3) и (4) имеет одну величину, а коэффициент  $b$  имеет другую одинаковую

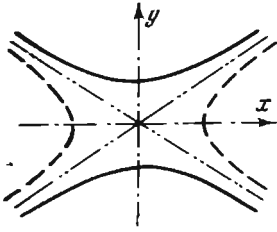


Рис. 18. Две сопряженные гиперболы

Ветви, проведенные сплошной линией, соответствуют уравнению (4), ветви, проведенные прерывистой — уравнению (3)

для (3) и (4) величину, то такие две гиперболы (каждая из которых состоит из двух ветвей) называются сопряженными друг с другом (рис. 18). Уравнение (3) изображается гиперболой, ветви которой пересекают ось  $x$ . Ее ветви могут быть сопоставлены с лежащими складками. Уравнение (4) описывает гиперболу с ветвями, пересекающими ось  $y$ . Поэтому одна ветвь может быть использована для описания прямой синклинали, а другая ветвь — прямой антиклинали. Как видно из (3) и (4), форма и величина гиперболы может быть полностью определена всего лишь двумя параметрами  $a$  и  $b$ .

Изобразим прямоугольник, одна сторона которого имеет длину  $2a$ , другая  $2b$  (рис. 19). Он называется основным прямоугольником. Проведем две диагонали этого прямоугольника, продлив их возможно дальше. Найденный таким образом центр прямоугольника  $O$  служит центром гиперболы. Диагонали являются асимптотами гиперболы. Это значит, что по мере удаления от своего центра в бесконечность ветви гиперболы все более приближаются к прямым, хотя и не сливаются с ними. Прямые с такими свойствами называются асимптотами не только у гиперболических кривых.

Примем центр прямоугольника  $O$  за начало координат, ось  $x$  проведем параллельно сторонам длиной по  $2a$ , ось  $y$  — параллельно сторонам по  $2b$ . При такой системе координат уравнения двух асимптот будут следующими:

$$y = +\frac{b}{a}x; \quad y = -\frac{b}{a}x. \quad (5)$$

Теперь следует решить, какую из двух сопряженных гипербол, соответствующих найденным асимптотам, мы хотим изобразить:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

или

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

Остановимся, например, на уравнении (7). Полагая, что  $x=0$ , найдем координаты точек пересечения ветви гиперболы с осью  $y$ , которая будет называться действительной осью гиперболы. Ось  $x$  оказывается мнимой осью гиперболы, так как она нигде не пересекается кривой, в чем легко убедиться, полагая в (7)  $y=0$  и отыскивая величины  $x$ . Как видно, для  $x$  получатся мнимые значения.

Чтобы построить гиперболу, надо найти еще две точки, лежащие на действительной оси. Речь идет о фокусах гиперболы, которые отстоят от ее центра на расстоянии  $+c$  и  $-c$ . Величина  $|c|$  связана простой зависимостью с  $|a|$  и  $|b|$ :

$$c^2 = a^2 + b^2; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (8)$$

Из рассмотрения прямоугольника со сторонами  $2a$  и  $2b$  следует, что отрезок  $c$  равен половине диагонали. Поэтому, поставив одну ножку циркуля в центр гиперболы  $O$ , а другую совместив с вершиной

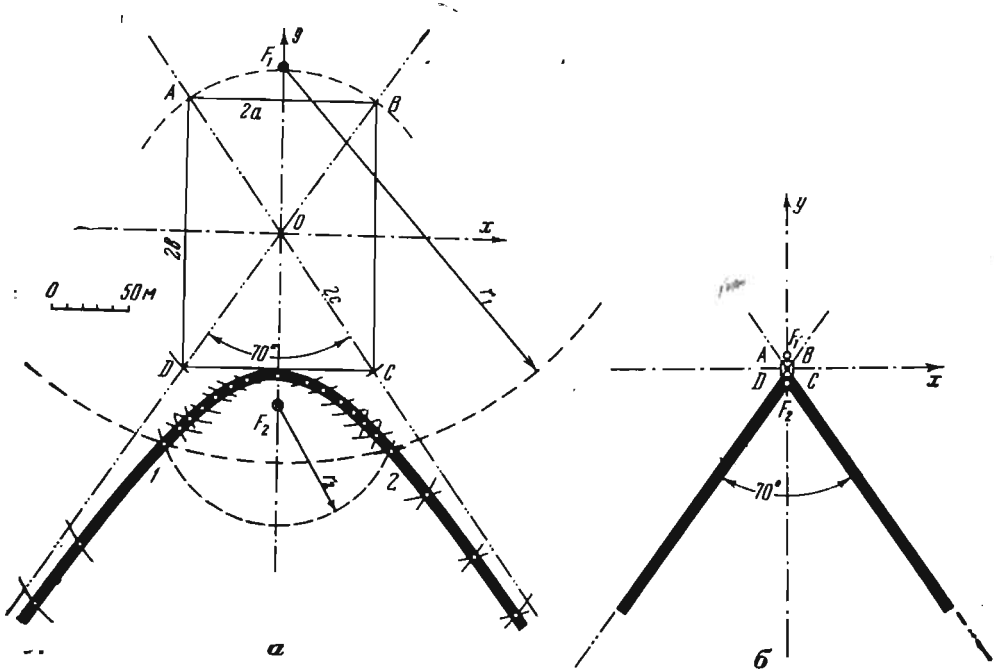


Рис. 19. Построение гиперболической складки и зависимость ее формы от величины сторон основного прямоугольника  $ABCD$  при постоянном отношении этих сторон

любого угла этого прямоугольника, мы проводим окружность. Две точки ее пересечения с действительной осью будем называть фокусами гиперболы  $F_1$  и  $F_2$ .

Заметим, что отношение

$$\frac{c}{a} = e \quad (9)$$

называется эксцентриситетом. У гиперболы эксцентриситет всегда больше единицы (у эллипса он всегда меньше 1). Величина эксцентриситета характеризует форму гиперболы, но не отражается на величине области перехода гиперболы от одной асимптоты к другой. Иными словами, складка гиперболической формы может иметь разную ширину замка при одном эксцентриситете. Чем меньше эксцентриситет, тем он ближе к единице, тем острее угол между асимптотами гиперболы.

Основное геометрическое определение гиперболы таково: гипербола является геометрическим местом точек, для каждой из которых разность расстояний до двух заданных точек (фокусов) есть величина постоянная и равная  $2a$  или  $2b$  в зависимости от того, какая ось является действительной:  $x$  или  $y$ .

Обычно в математике за действительную берут ось  $x$ , поэтому разность двух фокальных радиусов во всех учебниках и справочниках

приравняется  $2a$ . В геологии чаще в качестве действительной нужно брать ось  $y$ . Тогда разность фокальных радиусов должна составлять  $2b$ .

Расстояние до любой точки гиперболы от первого фокуса  $F_1$ , т. е. первый фокальный радиус-вектор, обозначается  $r_1$ , а расстояние до второго фокуса  $F_2$  обозначается  $r_2$ .

Одна ветвь гиперболы, для которой  $r_1 > r_2$ , удовлетворяет условию:

$$r_1 - r_2 = 2b \text{ (или } 2a), \quad (10)$$

для другой ветви  $r_2 > r_1$  и для нее выполняется:

$$r_2 - r_1 = 2b \text{ (или } 2a). \quad (11)$$

Из выбранного нами канонического уравнения гиперболы (7) с вертикальной действительной осью вытекает, что ординаты ее точек:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + a^2}. \quad (12)$$

Если берется знак плюс, то остается только верхняя ветвь гиперболы, имеющая форму синклинали. При сохранении одного знака минус рассматривается лишь нижняя ветвь гиперболы, обладающая антиклинальной формой. Абсциссы этих ветвей гиперболы:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 - b^2}. \quad (13)$$

Соответствующая уравнению (6) сопряженная гипербола с горизонтальной действительной осью имеет ординаты:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (14)$$

и абсциссы:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}. \quad (15)$$

Ветви гиперболы касаются прямоугольника со сторонами  $2a$  и  $2b$  в точках, где и гипербола, и прямоугольник пересекают действительную ось.

Значит, в случае уравнения (7) ветви пересекают ось  $y$  в точках с координатами  $x=0$ ,  $y=+b$  и  $x=0$ ,  $y=-b$ . Эти точки называются вершинами гиперболы.

Если бы мы выбрали уравнение (6) для сопряженной гиперболы, то действительной была бы ось  $x$ . На ней лежат вершины в точках с координатами  $y=0$ ,  $x=+a$  и  $y=0$ ,  $x=-a$ .

Построение всей гиперболы, вытекающее из ее основного геометрического свойства, производится так (см. рис. 19). Одна ножка циркуля ставится в первый фокус  $F_1$ . В области построения кривой произвольным радиусом  $r_1$  проводится отрезок дуги окружности. Затем радиус уменьшается на величину  $2b$  (или  $2a$ , если действительной служит ось  $x$ , а не  $y$ ). Циркуль переставляется во второй фокус  $F_2$ . Из него проводится дуга радиусом ( $r_2=r_1-2b$ ) до двукратного пересечения с первой дугой. Итак, найдены две точки 1 и 2 гиперболы (см. рис. 19, а). Повторяя такие же построения, мы найдем любое число точек первой ветви. Затем, начиная построение не с первого, а со второго фокуса, получим и вторую ветвь гиперболы.

Направления нормали и касательной в некоторой точке гиперболы взаимно перпендикулярны. Они делят пополам углы между двумя пересекающимися прямыми, проведенными в эту точку из фокусов гиперболы (рис. 20).

Важно подчеркнуть, что отношение величин  $a$  и  $b$  определяет угол между асимптотами, с которым естественно связать построение крыльев складки. Форма замка складки, а следовательно, и закругления гиперболы, могут быть различными при данном отношении  $a$  к  $b$ .

На рис. 19, б показана гипербола, описывающая форму залегания угольного пласта в одной из шахт Кузбасса. Угол этой складки равен  $70^\circ$ . Основной прямоугольник  $ABCD$  гиперболы весьма мал, он имеет  $a=3,7$  м,  $b=5$  м. На рис. 19, а изображены такие же асимптотические линии. Но основной прямоугольник  $ABCD$  произвольно взят намного большей величины. Его  $a=62,5$ ,  $b=88$  м. Отношение  $\frac{b}{a} \approx 1,4$  в этом прямоугольнике такое же, как и в прямоугольнике природной складки. Оно определяет уравнения асимптот для гипербол обеих складок:

$$y = \pm 1,4x. \quad (16)$$

Однако форма гиперболы на рис. 19, а значительно отличается от формы гиперболы на рис. 19, б. Причиной служит уменьшение величин  $a$  и  $b$ .

**Составление уравнения гиперболической складки.** Обратимся к вопросу о том, каким образом можно по форме складки на профиле подобрать такие величины коэффициентов  $a$  и  $b$ , которые позволили бы построить гиперболическую кривую, совпадающую со складкой.

На рис. 21, а приведен профиль синклинали складки в хр. Каратау, изученной на поверхности и пересеченной на глубине нескольких разведочными буровыми скважинами, вскрывшими согласные со слоистостью полиметаллические рудные тела. На профиле, который соответствует имеющимся выходам и буровым данным, геологом Т. Е. Масаловой складка была изображена с плоскими крыльями. Кривизна слоев показана максимальной около оси складки. Этих двух морфологических особенностей достаточно, чтобы попытаться описать данную складку гиперболической кривой. Выбираем слой  $l$ , который будем описывать (см. рис. 21, а).

Проведем прямые линии, касательные к крыльям складки по выбранному слою (см. рис. 21, б). Примем эти прямые за асимптоты гиперболы. Точку их пересечения обозначим  $O$ . Построим биссектрису угла складки и будем считать ее осью  $y$ . Перпендикулярно к ней проведем ось  $x$ . Она оказалась на высоте 1150 м от уровня моря. Построим перпендикуляр к следу осевой поверхности на профиле, касательный к вершине складки. Отметим точки  $A$  и  $B$  пересечения этого перпендикуляра с асимптотами. В итоге под складкой получился равнобедренный треугольник  $OAB$ . Его высота есть отрезок  $b$ , основание  $AB$  равно  $2a$ , а каждая из двух равных сторон соответствует  $c$  — расстоянию от центра гиперболы  $O$  до каждого из двух фокусов.

Располагая перечисленными величинами, мы свободно находим фокусы гиперболы  $F_1$  и  $F_2$ . Для этого из центра  $O$  проводим окружность

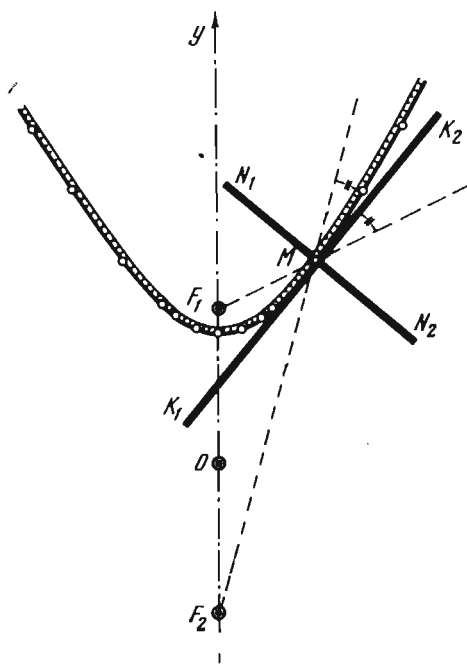


Рис. 20. Построение касательной  $K_1K_2$  и нормали  $N_1N_2$  к гиперболе



радиусом, равным  $c$ . Две точки ее пересечения с осью  $y$  являются искомыми фокусами.

Приступаем к построению верхней ветви гиперболы, описывающей синклинали. Произвольным радиусом проводим с помощью циркуля дугу окружности из первого фокуса  $F_1$ . Уменьшаем радиус на величину  $2b$  и проводим дугу из второго фокуса  $F_2$ . Отмечаем две точки

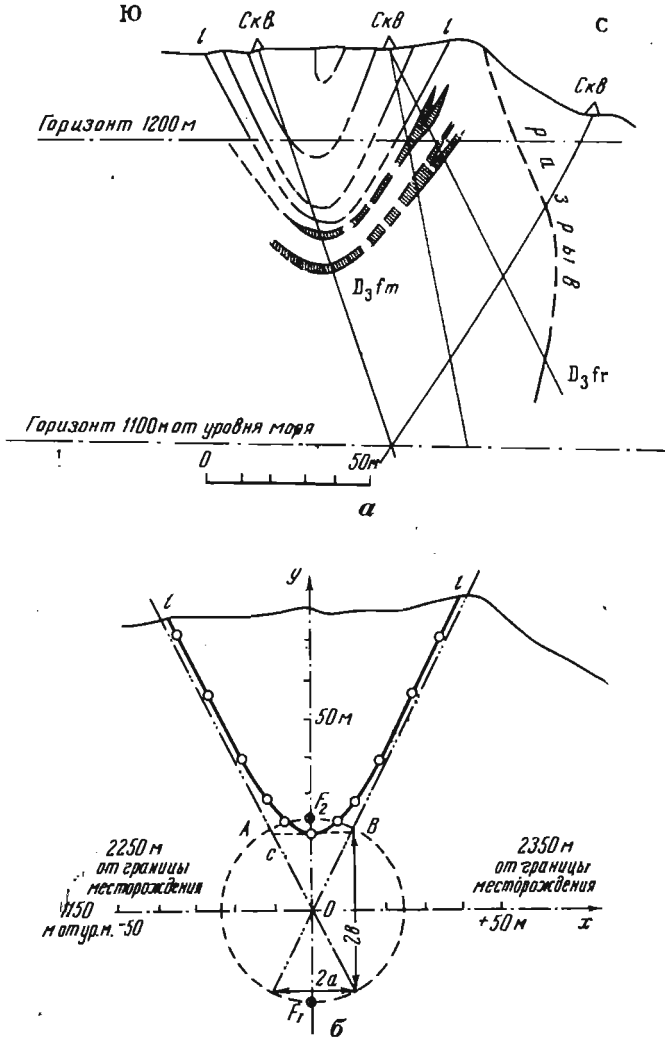


Рис. 21. Гиперболическая синклинали в девонских отложениях хребта Каратау

$a$  — геологический профиль складки: заштрихованы рудные тела,  $D_3fr$  — франские песчаники,  $D_3fm$  — фамеинские карбонатные породы,  $b$  — точки, построенные по уравнению гиперболы  $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{20} = 1$ , и их сопоставление с природной складкой

пересечения дуг. Эти точки принадлежат гиперболе, которая определяется найденными отрезками  $a$  и  $b$ . Производим такое построение (начиная его с новой величины произвольного радиуса) столько раз, сколько нужно, чтобы через получившиеся точки можно было по лекалу провести плавную кривую (см. рис. 21, б). На ту же фигуру нанесена исходная форма залегания рассматриваемого слоя  $l$ , взятая с рис. 21, а.

Построенная гипербола хорошо согласуется с геологическим про-

филом. Отклонения точек от слоя не выходят за пределы точности построения профиля. Следовательно, найденные элементы гиперболы мы можем использовать для аналитического описания синклинальной формы залегания слоя  $l$ . Измеряя  $a$  и  $b$  на рис. 21, б, находим, что  $a=10$  м,  $b=20$  м.

Значит, каноническое уравнение гиперболы в избранной системе координат:

$$-\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1. \quad (17)$$

Детальный план, охватывающий все месторождение, имеет свою общую систему координат. Нам требуется преобразовать уравнение так, чтобы в нем фигурировали общие координаты. Вертикальная координата отсчитывается от уровня моря, а не от центра гиперболы, лежащего на высоте 1150 м. Обозначим общую для месторождения вертикальную координату буквой  $Z$ . Пусть расстояния, отсчитываемые от южной границы плана в северном направлении, обозначаются буквой  $Y$ . Допустим, что южная граница плана находится в 2300 м от центра гиперболы. При этих условиях по общей для месторождения системе координаты центра гиперболы:  $Y=2300$  м,  $Z=1150$  м.

Координаты любой точки в промежуточной системе  $x, y$ , использованные на рис. 21, б, могут быть получены из общих координат  $Y, Z$  по очевидным формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= Y - 2300 \text{ м,} \\ y &= Z - 1150 \text{ м.} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Подставляя эти значения в (17), мы получаем уравнение гиперболической складки в слое  $l$  в системе координат общей для всего месторождения:

$$-\frac{(Y-2300)^2}{10^2} + \frac{(Z-1150)^2}{20^2} = 1. \quad (19)$$

Раскрыв скобки и произведя приведение подобных членов, можно преобразовать это уравнение в общую форму:

$$-4Y^2 + Z^2 + 18400Y - 2300Z - 19837900 = 0. \quad (20)$$

Последнее уравнение более громоздко и менее наглядно, чем предыдущее.

Разные знаки, стоящие перед двумя координатами, входящими в уравнение (20) во второй степени ( $Y^2$  и  $Z^2$ ), показывают, что мы имеем дело с гиперболической кривой. Отсутствие члена с произведением двух координат ( $YZ$ ) свидетельствует о параллельности осей гиперболы с осями координат  $Y$  и  $Z$ . Члены с двумя координатами в первой степени ( $Y$  и  $Z$ ) указывают на смещенность центра гиперболы относительно начала координат и на его несовпадение с обеими осями координат.

**Равносторонняя гипербола и обратно пропорциональная зависимость.** Равносторонняя, или равнобокая, гипербола является видом кривой, получающимся при равенстве коэффициентов  $a=b$  канонического уравнения гиперболы. Аналогичное соотношение окружности с эллипсом было отмечено выше.

Возьмем наиболее распространенное уравнение равносторонней гиперболы, при котором действительная ось совпадает с осью  $x$ :

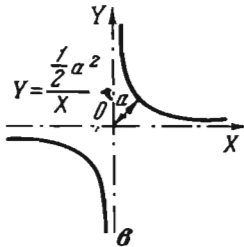
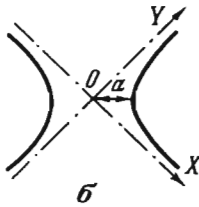
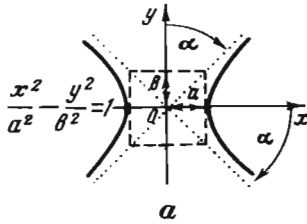
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (21)$$

Учитывая равенство  $a=b$ , запишем его в форме:

$$x^2 - y^2 = a^2, \quad (22)$$

которая похожа на уравнение окружности, отличаясь лишь присутствием одного знака минус.

Равенство  $a=b$  показывает, что угол между асимптотами является прямым и асимптоты расположены под углом  $45^\circ$  к координатным осям (рис. 22, а).



Наличие двух пар взаимно перпендикулярных линий открывает перед нами возможность любую из них принимать за оси координат. Если мы за оси координат примем две асимптотических линии, то из этого последует интересный общий вывод. Он станет ясным после некоторых преобразований. Дело в том, что уравнение равносторонней гиперболы (22) написано для обычной системы координат. Чтобы перейти к новой системе, мы осуществим поворот первоначальных координатных осей на  $45^\circ$ , т. е. по часовой стрелке вокруг точки  $O$ , чтобы оси совместились с асимптотами.

Из рассмотренных ранее формул преобразования координат [(6), (12), стр. 30, 31] следует, что вместо старых координат  $x$  и  $y$  в результате поворота на угол  $\alpha$  получаются новые координаты  $X$  и  $Y$ , связанные формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y &= X \sin \alpha + Y \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

При  $\alpha = -45^\circ$  синус равен  $-\frac{\sqrt{2}}{2} = -0,7071$ , а косинус составляет  $+\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071$ . Поэтому

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2} (X + Y) \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2} (Y - X). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Рис. 22. Равносторонняя гипербола при обычной системе координат (а), после поворота осей координат на угол  $\alpha$  до их совмещения с асимптотами (б) и поворота на  $45^\circ$  всего чертежа (в)

Подставив последние выражения в уравнение равносторонней гиперболы (22), после преобразования получаем:

$$XY = \frac{a^2}{2}. \quad (25)$$

Получившееся произведение координат свидетельствует, что оси координат не параллельны осям гиперболы. Обозначив

$$\frac{a^2}{2} = C, \quad (26)$$

приходим к формуле

$$Y = \frac{C}{X}, \quad (27)$$

которая является выражением обратной пропорциональности. Наконец, повернем весь чертеж, не изменяя соотношения кривой с осями

координат так, чтобы одна была вертикальная, а другая горизонтальная (см. рис. 22, в).

Таким образом, обратная пропорциональность выражается равно-сторонней гиперболой, тогда как прямая пропорциональность изобра-жается прямой линией.

В зависимости от величины  $C$  в формуле (27) равносторонняя гипербола приближается на различное расстояние к началу координат, вписываясь больше или меньше в первый координатный угол. С ростом  $C$  кривая удаляется от начала координат. Чтобы найти  $C$ , имея перед собой эмпирический гиперболический график обратно пропорциональной зависимости, мы должны измерить расстояние от начала координат до кривой, следуя биссектрисе угла между осями координат. Это расстояние равно  $a$  (см. рис. 22, в) и, следовательно,  $C$  найдется по (26). После этого по уравнению (27) строится кривая, строго соответствующая принятой величине  $C$  («теоретическая кривая»). Величину  $C$  можно непосредственно измерить на графике: значение  $Y$ , которое соответствует  $X=1$ , есть  $C$ .

Уравнение и график равносторонней гиперболы могут быть использованы для описания участков перехода от вертикального к горизонтальному залеганию слоев.

## Парабола

**Форма кривой и уравнение параболы.** Параболой называется незамкнутая кривая второго порядка, имеющая одну ветвь и напоминающая формой подковообразный магнит. Парабола может различным образом располагаться относительно осей координат. В простейшем случае она проходит через точку начала координат. Если парабола уходит вверх от начала координат, она по форме похожа на синклинали. Если же парабола уходит вниз, она соответствует антиклиналям. У параболы имеется ось симметрии, но нет центра симметрии. Точка пересечения кривой с осью симметрии называется вершиной параболы.

Складки, сопоставляемые с параболой, должны иметь дугообразные замки с изменяющейся кривизной. У простейшей (квадратной) параболы максимальная кривизна регистрируется у вершины кривой. С удалением от вершины кривизна кривой уменьшается, и эта кривая все более приближается к положению, параллельному оси параболы, хотя теоретически его достигнуть не может.

Параболические кривые подходят для описания складок с округлыми замками и различным расположением крыльев — от изоклиналичного (параллельного) до наклоненного под существенно различными, постепенно изменяющимися углами.

Термин «параболическая» зависимость, или кривая, употребляется в разных смыслах. В узком смысле параболическая зависимость связывает первую степень одной координаты, например  $y$ , со второй степенью другой координаты  $x$ :

$$y = x^2. \quad (1)$$

Такие зависимости и соответствующие им кривые, строго говоря, надо называть квадратными параболой, или параболой второй степени. Именно о них и будет идти речь. Однако существует понятие о параболе в широком смысле слова. Тогда в наипростейшем виде уравнение параболы имеет вид:  $y = x^n$  или  $x = y^n$ , причем показатель степени  $n$  равен 3,4 или другому целому и даже дробному числу. Такого типа зависимости называют также степенными, поскольку аргумент в них возводится в определенную степень  $n$ . Вернемся к квадратной параболе.

В общем уравнении второй степени [(2), стр. 47] параболическая зависимость наглядно проявляется в том, что

$$AC = B^2 = 0.$$

После приведения общего уравнения в каноническую форму имеем:  $A \neq 0, C = 0$  и  $E \neq 0$ , если ось параболы параллельна оси  $y$ ,

или

$A = 0, C \neq 0$  и  $D \neq 0$ , если ось параболы параллельна оси  $x$ .

Только при соблюдении этих условий уравнение соответствует действительной параболе, которую можно вычертить. При иных соотношениях между коэффициентами параболического уравнения (т. е. с одним членом второго порядка  $Ax^2$  или  $Cy^2$  и  $B=0$ ), на графике получаются две параллельные прямые, например, при:

$$A \neq 0; C = 0; E = 0 \text{ и } D^2 - AF > 0, \quad (2)$$

которые могут сливаться в одну прямую при:

$$A \neq 0; C = 0; E = 0 \text{ и } D^2 - AF = 0. \quad (3)$$

Наконец, существуют параболические уравнения, которые не имеют реального геометрического выражения и соответствуют мнимому месту точек в пространстве. Так получается, например, при

$$A \neq 0; C = 0; E = 0 \text{ и } D^2 - AF < 0. \quad (4)$$

Итак, помня о перечисленных условиях (2) и (3), мы можем представлять себе общее уравнение параболической кривой в виде:

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F &= 0 \\ Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Присутствие двух членов первого порядка указывает на то, что вершина параболы не совпадает с началом координат. Ось параболы параллельна одной из осей координат, но вершина кривой не совпадает с началом координат.

Ось параболы в первом случае параллельна оси  $y$ , а во втором — оси  $x$ . Наконец, для параболы, вершина которой совпадает с началом, а ось с одной из осей координат, мы имеем каноническое уравнение:

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} Ax^2 + 2Ey &= 0 \\ Cy^2 + 2Dx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6) \quad (7)$$

Уравнение (6), в котором  $y$  входит только в первой степени, соответствует параболе с осью симметрии, совпадающей с осью  $y$ . Уравнение (7), имеющее  $x$  только в первой степени, отвечает параболе с осью симметрии, совпадающей с осью  $x$ . Из общих форм (6) и (7) уравнения парабол получают наиболее простые и удобные для геометрического выражения канонические уравнения. Для этого переписываем (6) и (7):

$$y = -\frac{A}{2E} x^2 \quad (8)$$

и

$$x = -\frac{C}{2D} y^2. \quad (9)$$

Введем для (8) и (9) обозначения:

$$-\frac{A}{2E} = \frac{1}{2p}, \quad (10)$$

$$-\frac{C}{2D} = \frac{1}{2p}. \quad (11)$$

Теперь, принимая во внимание возможность разных знаков у величины  $\frac{1}{2p}$ , мы можем написать четыре канонических уравнения парабол:

$$y = \frac{x^2}{2p}, \quad (12)$$

$$y = -\frac{x^2}{2p}, \quad (13)$$

$$x = \frac{y^2}{2p}, \quad (14)$$

$$x = -\frac{y^2}{2p}. \quad (15)$$

Уравнение (12) описывает кривую, которая лежит выше оси абсцисс, касаясь ее вершиной. Ординаты точек такой параболы имеют

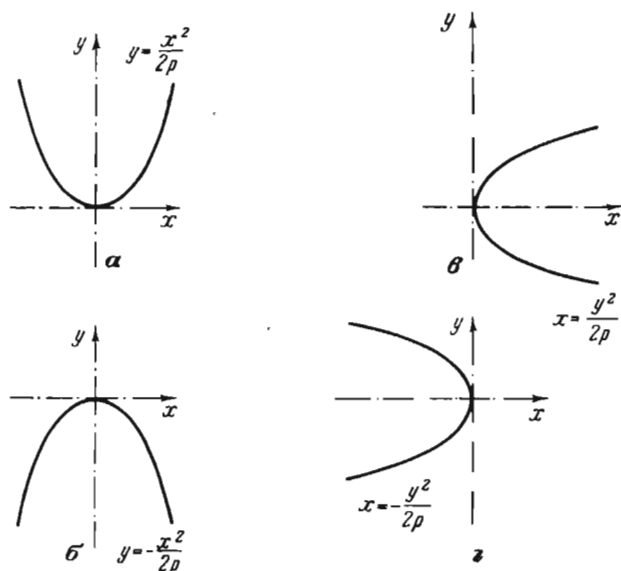


Рис. 23. Различно ориентированные параболы, соответствующие разным уравнениям

только положительные значения, так как при любом знаке  $x$  величина  $x^2$  положительна. Ось параболы совпадает с осью  $y$ . Парабола соответствует синклинали (рис. 23, а).

Уравнение (13) описывает параболы, расположенные ниже оси абсцисс, так как ординаты кривой имеют лишь отрицательные значения. Парабола соответствует антиклинали (см. рис. 23, б).

Уравнение (14) передается кривой, симметричной относительно оси  $x$ , которая расположена в области положительных значений  $x$  (рис. 23, в). Она сопоставляется с лежащей складкой.

Уравнение (15) геометрически выражается аналогичной кривой, расположенной в области отрицательных значений  $x$  (см. рис. 23, г).

Рассмотрим основные геометрические элементы параболы на примере кривой, соответствующей уравнению (12) и изображенной на рис. 24. Вершина параболы совпадает с началом координат. Ось параболы является положительная часть оси  $y$ . От начала координат вдоль оси  $y$  в обе стороны отложим по отрезку, равному  $\frac{p}{2}$ . Точку  $F$  с координатами  $x=0, y=+\frac{p}{2}$  называют фокусом. Через точку с координатами  $x=0; y=-\frac{p}{2}$  проведем прямую, перпендикулярную оси параболы. Эта прямая называется директрисой. Эта прямая называется директрисой.

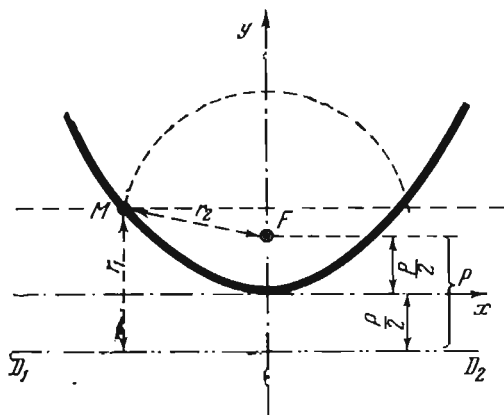


Рис. 24. Основные элементы параболы: директриса  $D_1D_2$ ; параметр  $p$ ; фокус  $F$ ; равенство расстояний от точки  $M$  до директрисы ( $r_1$ ) и до фокуса ( $r_2$ )

Итак, расстояние от фокуса параболы до ее директрисы равно величине  $p$ , которая называется параметром параболы.

Основная геометрическая особенность параболы заключается в том, что любая ее точка находится на одинаковом расстоянии от директрисы и от фокуса. Отрезки  $r_1$  и  $r_2$ , показанные на рис. 24, равны одному другому:

$$r_1 = r_2. \quad (16)$$

Форма параболы зависит всего лишь от одной величины — ее параметра  $p$ . В частном случае при  $p=+\frac{1}{2}$  кривая проходит через точки, в которых  $x=+1, y=+1$  и  $x=-1, y=+1$ . Чем  $p$  меньше  $\frac{1}{2}$ , тем кривая располагается ближе к оси параболы, являясь как бы более вытянутой, и тем меньше минимальный радиус ее кривизны. Чем параметр  $p$  больше, тем шире парабола расходуется от своей вершины, тем больше минимальный радиус кривизны параболы. Этот радиус определяет кривизну параболы около ее вершины и равен  $p$ .

Если известен параметр параболы  $p$ , то построить кривую очень просто. Откладываем  $p$  от начала координат вдоль оси будущей параболы. Точка, лежащая в середине этого отрезка, есть фокус. На расстоянии  $\frac{p}{2}$  по другую сторону от начала координат перпендикулярно оси проводим прямую — директрису. Теперь в области построения параболы на произвольном расстоянии  $r_1$  (большем  $\frac{p}{2}$ ) проводим пря-

мую, параллельную директрисе. Затем из фокуса  $F$  проводим дугу с радиусом  $r_1=r_2$ , которая пересекает последнюю прямую в двух точках. Эти точки лежат на параболе. Многократно производя такую же операцию с различной величиной отрезка  $r_n$ , мы получим любое число точек параболы.

Касательную и нормаль к параболе в любой ее точке находят следующим образом (рис. 25). Через выбранную точку  $M$  проводят две пересекающиеся прямые. Одна —  $A_1A_2$  — параллельна оси параболы. Другая —  $FR$  соединяет точку  $M$  с фокусом параболы. Биссектрисы углов между этими прямыми являются касательной  $K_1K_2$  и нормалью  $N_1N_2$ .

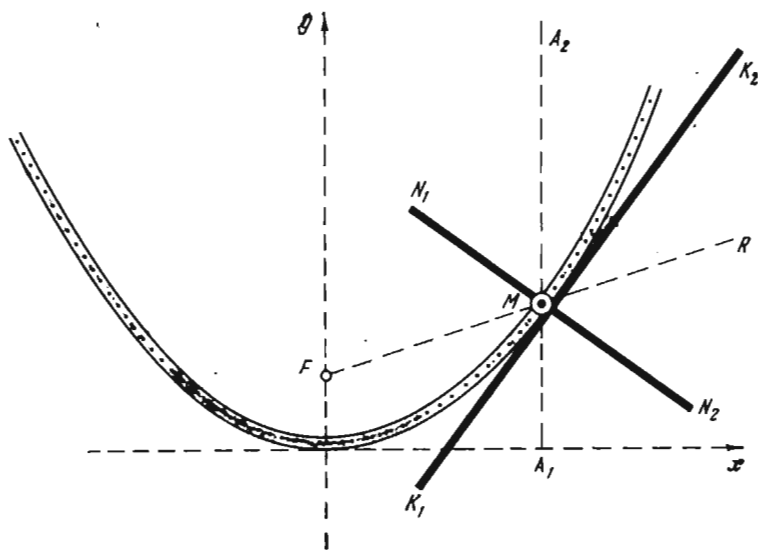


Рис. 25. Построение касательной  $K_1K_2$  и нормали  $N_1N_2$  к параболе в произвольной точке  $M$

$FM$  — прямая, соединяющая точку  $M$  с фокусом параболы  $F$ . Проходящая через точку  $M$  прямая  $A_1A_2$  параллельна оси параболы

**Составление уравнения параболической складки.** На рис. 26, *a* приведена фотография задернованного правого склона долины р. Кичик-Чайвай в Ферганском хребте. Долина выработана рекой в мощной угленосной толще алевролитов, песчаников и конгломератов юрского возраста. В середине фотографии видна дугообразная полоса скопления деревьев (арчи), которая приурочена к выходу пачки слоев песчаников и конгломератов. Детальное обследование многочисленных мелких выходов песчаников внутри этой полосы подтвердило предположение, что дугообразная форма выходов обусловлена тем, что пачка слоев залегает в виде антиклинали. Складка прослежена по простиранию на расстояние около 20 км. На фотографии (см. рис. 26, *a*), сделанной вдоль направления оси складки, вдали на горизонте видно антиклинальное залегание пластов песчаников и конгломератов. В дальнем сечении форма складки несколько отличается от той, которая видна на переднем плане.

Форма выхода песчаников и конгломератов позволяет допустить, что антиклиналь на профиле может рассматриваться как квадратная парабола. Во-первых, кривизна максимальна около оси складки. Во-вторых, с удалением от оси кривизна крыльев непрерывно уменьшается. В-третьих, увеличивающаяся крутизна падения слоев по мере удаления по долине от оси антиклинали позволяет ожидать, что с глубиной наклон песчаников возрастает, и слои все более приближаются к поло-



жению, параллельному осевой поверхности складки. Эти три особенности морфологии делают параболу подходящей кривой для аппроксимации складки.

На рис. 26, б изображен профиль этой антиклинали. Составление ее параболического уравнения начинается с проведения оси симметрии, которую принимаем за одну из осей местной промежуточной системы координат. Обозначаем ее осью  $y$ . Перпендикулярно к ней через точку ее пересечения с антиклинальной кривой проводим вторую ось координат  $x$ . Оси оказались наклонными, отклоняющимися от вертикального и горизонтального направлений на угол  $10^\circ$ .

Величину единственного параметра  $p$ , полностью определяющего форму всей параболической кривой, можно определить двумя способами. Используем оба.

Первый способ основан на том, что радиус кривизны параболы в точке ее пересечения с осью симметрии (в данном случае с осью  $y$ ) равен параметру  $p$ . На рис. 26, б проведена окружность радиусом  $r$ ,

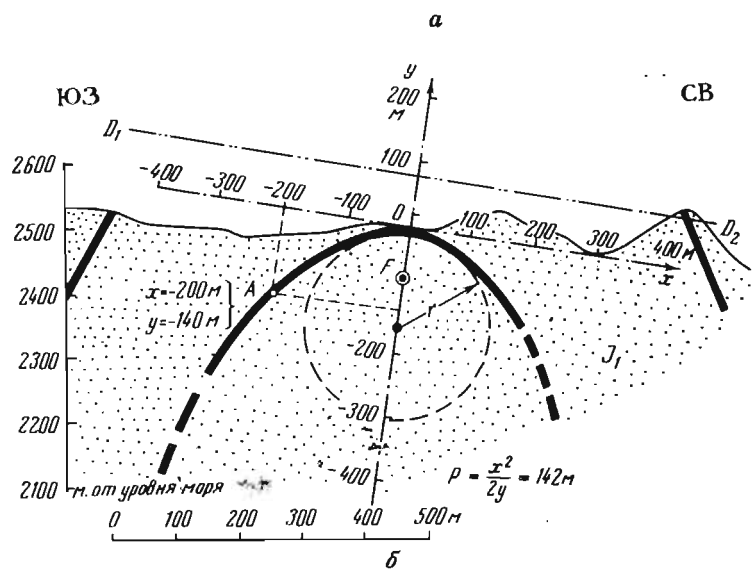


Рис. 26. Параболическая антиклиналь в  
а — природная складка; б — геологический профиль складки; в — точки,

она приблизительно соответствует кривизне антиклинали в точке ее пересечения с осью  $y$ . Такая прикидка дает представление о порядке величины  $p=r$ .

Второй способ вытекает из того, что квадрат координаты  $x$  и координата  $y$  любой точки параболы связаны единственным коэффициентом пропорциональности, равным  $2p$ . Предполагая, что антиклиналь имеет форму параболы, пишем для нее уравнение:

$$y = -\frac{x^2}{2p}. \quad (17)$$

Из него следует возможность определения  $p$  по координатам  $x$  и  $y$  любой точки:

$$p = -\frac{x^2}{2y}. \quad (18)$$

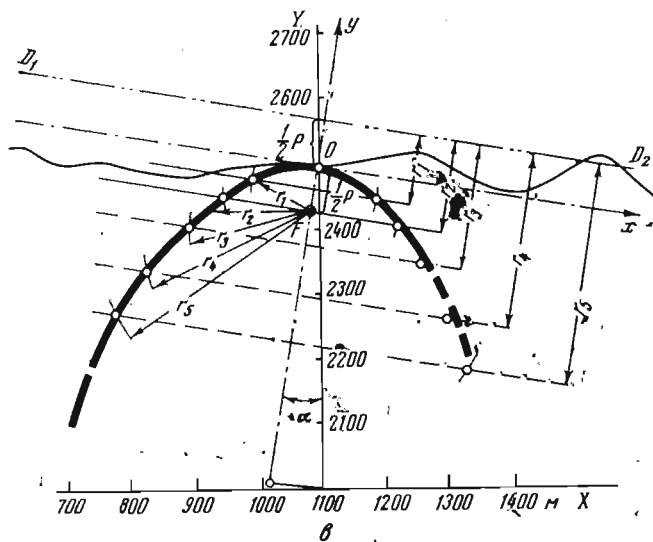
Возьмем произвольно точку  $A$ . Ее координаты по введенной нами местной системе с наклонными осями:  $x=-200$  м;  $y=-140$  м. Следовательно:

$$p = \frac{200^2}{2 \cdot 140} = 142.$$

В первом приближении параболическое уравнение рассматриваемой антиклинали принимается:

$$y = -\frac{x^2}{284}. \quad (19)$$

Теперь надо построить параболу, соответствующую данному уравнению, и сравнить ее с природной складкой, чтобы убедиться в том, что уравнение действительно описывает складку с удовлетворяющей нас точностью. На рис. 26, в сначала были нанесены оси местных координат  $x$  и  $y$ . Затем на расстоянии  $\frac{1}{2}p=71$  м от начала координат изображены директриса  $D_1-D_2$  и фокус  $F$  будущей параболы. Потом параллельно директрисе в области построения параболы проведено не-



юрских отложениях Ферганского хребта

построенные по уравнению параболы  $y = -\frac{x^2}{284}$  и их сопоставление с природной складкой

сколько прямых на произвольных расстояниях  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$  от директрисы  $D_1 - D_2$ . Наконец, проведены дуги радиусами  $r_1, r_2, r_3, r_4$  и  $r_5$  из центра  $F$ . Отмечены точки пересечения дуги радиусом  $r_1$  с линией, удаленной от директрисы на ту же величину  $r_1$ . Так последовательно отмечались все точки пересечения «одноименных» дуг и прямых. Эти точки лежат на параболе, удовлетворяющей уравнению (19).

Наложив на тот же чертеж изображение природной антиклинали, мы убеждаемся в том, что построенные точки достаточно хорошо совпали со складкой.

Таким образом, получено уравнение антиклинали в местных осях координат. Его можно преобразовать так, чтобы складку описывали координаты, общие для значительного участка, включающего ряд складок.

### **Аппроксимация складок степенными, показательными и тригонометрическими кривыми**

Графики функций, в которых хотя бы одна из координат возводится в степень выше второй или в дробную степень, не рассматриваются в аналитической геометрии; последняя ограничивается анализом многочленов первой и второй степени. Многочлены высших степеней исследуются алгебраической геометрией. Кривая простейшей степенной функции:

$$y = x^2 \quad (1)$$

уже была рассмотрена выше под названием параболы. Если обратиться к уравнениям

$$y = x^3, \quad (2)$$

$$y = x^4 \quad (3)$$

и другим степеням, то кривые окажутся существенно отличающимися от обычной (квадратной) параболы.

Необходимо различать функции нечетных [типа (2)] и четных [типа (3)] степеней; показатели степеней могут быть также дробными; наконец, показатели бывают положительными и отрицательными.

Показательными (или экспоненциальными) называются такие функции, уравнения которых содержат переменную величину аргумента в показателе степени. Простейшим примером может служить

$$y = c^x. \quad (4)$$

Особенно интересной для геотектоники является более сложная функция, содержащая три постоянных параметра  $a, b, c$ .

$$y = ac^{-\frac{x^2}{b^2}}. \quad (5)$$

Она позволяет одним уравнением описать целую складку, включая прилежащие к ней участки ненарушенного залегания слоя.

Большое значение для тектонофизики имеют формулы типа

$$y = ac^{-\frac{x}{b}}, \quad (6)$$

$$y = a\left(1 - c^{-\frac{x}{b}}\right), \quad (7)$$

которые используются для описания изменения напряжений (6) и деформаций (7) в земной коре с течением времени, обозначенного в данном случае  $x$ . Эти формулы могут применяться и для описания структуры отдельных частей складок.

Кривые показательных функций значительно упрощаются, если перейти к их логарифмам. Функции, которые после логарифмирования включают аргумент только в первой степени, изображаются простыми прямолинейными графиками. Это делает их очень удобными при выражении различных зависимостей, например, описывающих основные для тектонофизики свойства горных пород — вязкость и прочность.

Тригонометрические величины, особенно синусы и косинусы, выражаются кривыми, форма которых совпадает с очертаниями многих складок. Одно тригонометрическое уравнение может описать не только одну складку довольно сложной формы, но и серию сходных по форме и величине складок. Это может быть достигнуто с помощью тригонометрического ряда.

## Степенные кривые

### Нечетные параболы высоких порядков

Уравнение, содержащее аргумент, возведенный в нечетную степень, например в третью, удобно записать в форме:

$$y = x^{2m+1} = x^3 \text{ при } m = 1, \quad (1)$$

где  $m$  — любое число, в данном случае  $m=1$ . Благодаря нечетности степени такое уравнение приводит к появлению положительных зна-

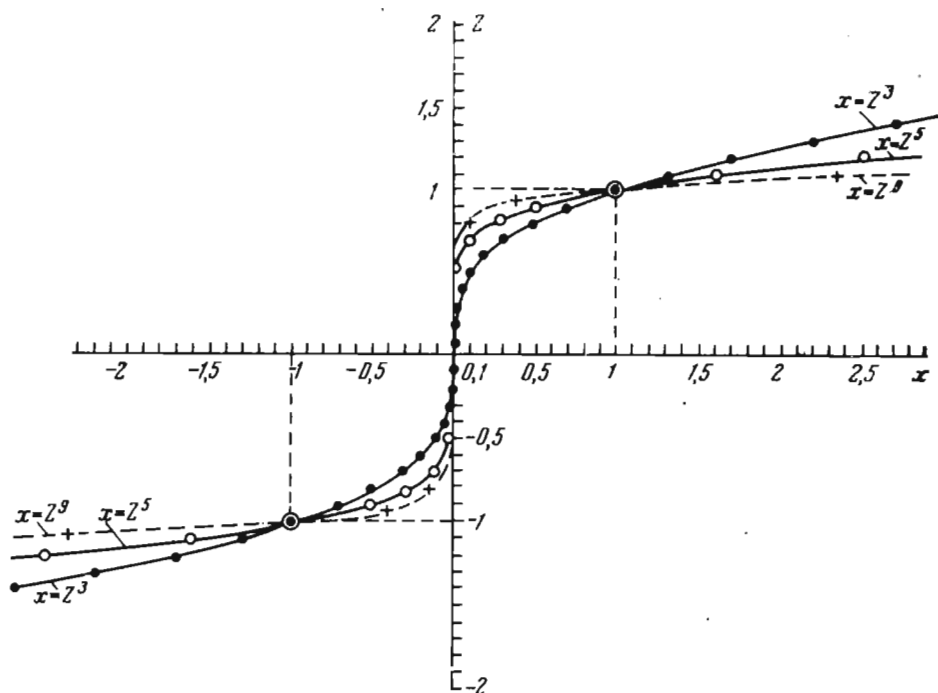


Рис. 27. Простейшие кривые парабол 3, 5 и 9-го порядков. Точки, кружки и крестики — результаты вычислений

чений функции  $y$  только при положительных величинах аргумента  $x$ . При отрицательных величинах аргумента  $x$  функция  $y$  оказывается также отрицательной. В итоге уравнениям типа (1) отвечают кривые, пригодные для описания формы стулообразных складок, а также флек-

сур, если в куб возводится координата, отсчитываемая в вертикальном направлении, например  $z$ :

$$x = z^3. \quad (2)$$

Такие кривые называются кубическими параболоми. Складки этой формы будем обобщенно называть коленообразными. Сходный вид имеют параболические нечетные кривые более высоких степеней — пятой, седьмой и т. д. (рис. 27).

Чем выше степень, тем больше область, занятая коленообразным перегибом кривой. При любой нечетной степени, в том числе при третьей, в описываемой складке, в середине смыкающего крыла, слои должны быть перпендикулярны общему залеганию слоев.

Если флексура имеет обратное направление по сравнению с рис. 27, следует перед правой частью формулы поставить знак минус. Тогда кривые станут зеркально отраженными, по сравнению с показанными на рис. 27.

При использованной выше наиболее простой форме написания степенной зависимости (1) все кривые обязательно проходят через две общие для них точки с координатами  $x=1, y=1$  и  $x=-1, y=-1$ . Это обусловлено тем, что при аргументе, равном единице, он, будучи возведенным в любую степень, дает в результате величину функции, также равную единице. В итоге оказывается, что расстояние между точками с координатами  $x=1, y=1$  и  $x=-1, y=-1$  у всех кривых является постоянным. Для того чтобы избежать такой скованности кривой, в ее уравнение вводится множитель:

$$y = ax^{2m+1}. \quad (3)$$

Такой же множитель удобен и в уравнении (2):

$$x = az^3. \quad (4)$$

При равенстве аргумента 1 функция  $y$  в (3) или  $x$  в (4) становится равной  $a$ . Таким образом можно подобрать кубические параболы к стулообразным складкам и флексурам с любой амплитудой.

### Четные параболы высоких порядков

Эта кривая соответствует простейшему уравнению типа:

$$y = ax^{2m}, \quad (1)$$

где  $m$  — любое целое и положительное число. Благодаря тому что одна из координат  $x$  возводится в четную степень, вторая координата  $y$  оказывается только положительной (как при положительной, так и при отрицательной величине первой координаты). Поэтому парабола четвертого порядка в общем похожа на параболу второго порядка. Существенно отличным оказывается закон изменения кривизны. У параболы второго порядка кривизна наибольшая кривизна отмечается только в одном месте — в точке пересечения кривой с ее осью. У параболы четвертого порядка кривизна достигает максимума в двух местах. В точке пересечения параболы с ее осью кривизна не является максимальной. Поэтому кривая приобретает форму сундучной складки с плоским замком и крутыми крыльями, соединяющимися с замком двумя дугами с резко увеличенной кривизной. Если мы будем рассматривать параболы четных порядков — 4, 6, 8 и т. д., то по мере увеличения порядка отметим усиление коробчатости формы складок.

Уплощенная форма замка складки возникает от того, что при значениях аргумента  $x$ , меньших единицы, возведение дроби в степень, т. е. умножение ее самой на себя несколько раз, приводит к получению величины, которая всегда будет меньше исходной. Например, возьмем за исходную величину 0,2. Возведем ее в квадрат, т. е. умно-

жим ее на 0,2;  $0,2 \cdot 0,2 = 0,04$ . Получилась величина, меньшая исходной. Поэтому малым значениям аргумента  $x$  соответствуют намного меньшие величины функции  $y$ , что и выражается в уплощенной форме замка складки.

При простейшей форме уравнения четной параболы высокого порядка (1), когда  $a=1$ , кривая обязательно проходит через точки с координатами  $x=1, y=1$  и  $x=-1, y=-1$ . Это вызывается тем, что  $-1$  в любой четной степени равняется  $+1$ .

После того как аргумент становится больше единицы, его возведение в четную степень дает в результате величину, большую исходной. Количественное нарастание аргумента приводит после 1 к качественно иному результату. Для примера используем исходную величину 2. В четвертой сте-

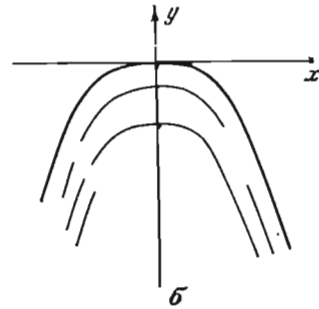
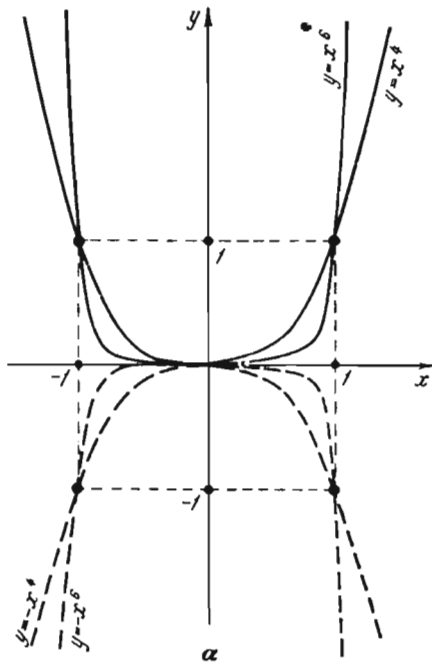


Рис. 28. Кривые частных парабол (а) — положительных (сплошные линии) и отрицательных (прерывистые линии) и вид природной антиклинали (б), описываемой уравнением  $y = -x^4$

пени она составит 16, т. е. величину, намного превышающую исходную. Небольшое приращение аргумента  $x$ , превышающего 1, приводит к очень сильному возрастанию функции  $y$ . Поэтому обсуждаемой параболой можно изобразить резкий переход от плоского свода к крутым крыльям (рис. 28, а). Введя в формулу (1) справа знак минус, получаем уравнение для воспроизведения антиклинали:

$$y = -ax^{2m}. \quad (2)$$

Имеет смысл описывать четными параболой высоких порядков такие складки, которые обладают формой, близкой к изоклиальной при корбчатом характере свода. Такие складки довольно широко распространены во многих районах, особенно там, где преобладает складчатость промежуточного типа — корбчатая или гребневидная.

Пример складки типа параболы четвертого порядка приведен на рис. 28, б. Эта подробно изученная антиклиналь, содержащая полиметаллическое оруденение, находится в Байджансайском антиклинории хр. Каратау (Гзовский, 1963<sub>1</sub>).

### Параболы дробных порядков

Показатель степени, в которую возводится аргумент, может быть не только целым (четным или нечетным), но и дробным:

$$y = x^{\frac{m}{n}}. \quad (1)$$

Величины  $m$  и  $n$ , образующие числитель и знаменатель дробного показателя степени, имеют простой смысл. Читатель помнит, что числитель  $m$  указывает, сколько раз величина аргумента  $x$  умножается сама на себя. Отрицательный показатель степени соответствует возведению  $\frac{1}{x}$  в ту же степень  $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ ; знаменатель дробного показателя степени указывает, какой корень извлекается из рассматриваемого значения аргумента  $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ .

Уравнение с простейшим дробным показателем степени  $\frac{1}{n}$  аргумента:

$$y = x^{\frac{1}{n}} \quad (2)$$

легко можно привести к рассматривавшемуся выше обычному параболическому виду, если возвести обе части равенства в степень  $n$ . Тогда:

$$(y)^n = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n \quad (3)$$

и оказывается очевидным, что данная зависимость равносильна обычной параболической с показателем степени  $n$ :

$$x = y^n. \quad (4)$$

В итоге аргумент  $x$  и функция  $y$  по сравнению с обычной параболической формой зависимости меняются ролями: аргументом надо считать  $y$ , функцией  $x$ . График функции  $y = x^{\frac{1}{n}}$  такой же по форме, как и у функции  $y = x^n$ , но только его надо строить около оси, повернутой на  $90^\circ$  вокруг точки начала координат.

Следовательно, показатель степени в виде простой дроби указывает, что с аргументом надо произвести две операции: возвести в степень  $m$  и извлечь корень  $n$ -ой степени:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Уравнение (1) можно представить как одновременное проявление двух функций:

$$y = x^m \text{ и } y = x^{\frac{1}{n}}, \text{ т. е. } x = y^n. \quad (5)$$

В зависимости от того, какая величина больше,  $m$  или  $n$ , кривая, отражающая их совместное влияние, примет параболическую форму с осью симметрии, совпадающей с осью  $y$  (если  $m > n$ , т. е.  $\frac{m}{n} > 1$ ) или осью  $x$  (если  $n > m$ , т. е.  $\frac{m}{n} < 1$ ). В случае  $m = n$  уравнение (1) описывает прямую — биссектрису угла между осями координат (рис. 29, а).

Заметим, что отношение  $\frac{m}{n}$  может быть выражено не только в виде простой дроби, но и в форме десятичного числа. Например, вместо  $y = x^{\frac{3}{2}}$  можно написать  $y = x^{1.5}$ , или вместо  $y = x^{\frac{3}{4}}$  написать  $y = x^{0.75}$ . Геологу следует обратить внимание на то, что при дробном

показателе степени в уравнении типа (1) можно получить кривые, совпадающие по форме с килевыми складками. Например, функция

$$y = x^{\frac{2}{3}} \tag{6}$$

в силу того что она имеет  $\frac{m}{n} < 1$ , должна быть обращена вогнутой стороной к оси  $x$ . Благодаря четному числителю,  $y$  может иметь только положительные значения при положительных и отрицательных величинах  $x$ . В итоге она обладает графиком в форме синклинали с заостренным узким замком и выпуклыми кверху крыльями (см. рис. 29, б).

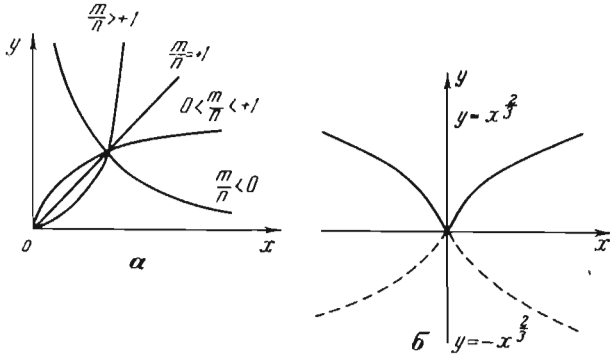


Рис. 29. Вид кривых степенной функции  $y = ax^{\frac{m}{n}}$   
 а — общий вид; б — при  $y = x^{\frac{2}{3}}$  и  $y = -x^{\frac{2}{3}}$

Если брать обратные по знаку значения  $y$ :

$$y = -x^{\frac{2}{3}}, \tag{7}$$

то при любых величинах  $x$  ордината будет только отрицательной, и кривая приобретает форму, соответствующую антиклинали. Поскольку корень извлекается большей степени  $n$ , чем степень  $m$ , в которую возводится аргумент  $x$ , т. е. знаменатель меньше единицы, крылья антиклинали обращены кверху вогнутой стороной. Замок антиклинали острый, вырожденный в одну точку, совпадающую с началом координат (см. рис. 29, б). В природе известны такие складки. Они противопоставляются по форме тем, которые соответствуют четным параболам высоких порядков (см. рис. 28).

Для описания складок обсуждаемой формы требуется ввести в уравнение множитель  $a$ , тогда вместо (1) будет общее уравнение:

$$y = ax^{\frac{m}{n}}. \tag{8}$$

Задача сводится к тому, чтобы подобрать величины  $a$ ,  $m$ ,  $n$ , соответствующие конкретной складке.

### Кривые многочленов высших степеней

Для описания складок сложной формы можно использовать кривые, уравнения которых имеют вид многочлена в степени выше второй, например:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3, \tag{1}$$

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4. \tag{2}$$

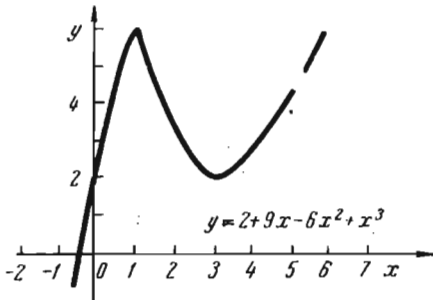


Примеры таких кривых с указанием значений коэффициентов описывающих их уравнений приведены на рис. 30.

С помощью многочлена высшей степени можно описать несколько соседних складок, имеющих неодинаковую форму.

### Показательные кривые

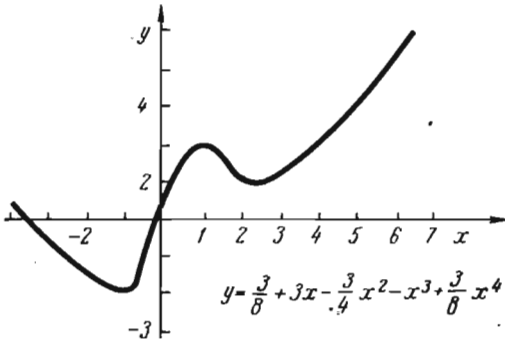
Показательными кривыми являются графики функций, в которых имеются одна переменная (аргумент), входящая в показатель степени, и некоторый постоянный параметр  $c$ . В простейшем виде это выглядит так:



$$y = c^x. \quad (1)$$

Более общий вид функции содержит три постоянных параметра:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$y = ac^{bx}. \quad (2)$$



Параметры  $a$  и  $b$  количественно преобразуют основную кривую, соответствующую простейшей форме показательной функции (1). Рассмотрим график последней. В качестве основания  $c$  можно выбрать любое действительное число, однако практически имеет смысл брать 10 или основание натуральных логарифмов  $c = 2,71828$ , так как для этих оснований существуют таблицы логарифмов, облегчающие вычисления. Выбор основания  $c$  не столь существен, поскольку всегда можно перейти от одного основания к другому, не изменяя формы кривой.

Рис. 30. Примеры кривых многочленов высших порядков

График показательной кривой целиком располагается по одну сторону от оси координат, одноименной с координатой-аргументом, входящей в показатель степени. В рассматриваемом примере (1) кривая ложится выше оси  $x$  (т. е. в области положительных значений  $y$ ). Если бы мы имели функцию с обратным знаком:

$$y = -c^x, \quad (3)$$

то кривая расположилась бы ниже оси  $x$  в области отрицательных значений  $y$ . Поменяв  $x$  и  $y$  местами в формулах (1) и (3), получим кривые, лежащие правее или левее оси  $y$ .

Вернемся к формуле (1). Ее кривая при любых значениях  $c$  пересекает ординату  $y$  в точке с координатами  $x=0$ ,  $y=1$ . Это вызывается тем, что при  $x=0$  в формуле (1) показатель степени равен 0. Известно, что любое число в нулевой степени равно 1. Если основание  $c > 1$ , то по мере роста аргумента  $x$  кривая поднимается вправо — вверх, обладая кривизной одного знака (одного направления). Левее начала координат при отрицательных значениях  $x$ , по мере их приближения к 0, кривая возрастает от  $y=0$  (при  $x=-\infty$ ) до  $y=+1$  (при  $x=0$ ). Затем, по мере роста аргумента правее начала координат, кривая круто уxo-

дит вверх вправо, стремясь к  $y = +\infty$  (при  $x = +\infty$ ). Чем больше  $c$ , тем кривая располагается ближе к оси ординат (рис. 31, а).

Если основание  $c < 1$ , то возведение его в любую положительную целую степень  $x$ , т. е. умножение самого на себя  $x$  раз, приводит к получению меньшей величины. Поэтому при  $c < 1$  кривая спускается: слева направо, сохраняя один и тот же знак кривизны (см. рис. 31, а).

График показательной кривой рассматриваемого типа годен для описания структуры отдельных просто построенных участков. Чаше он:

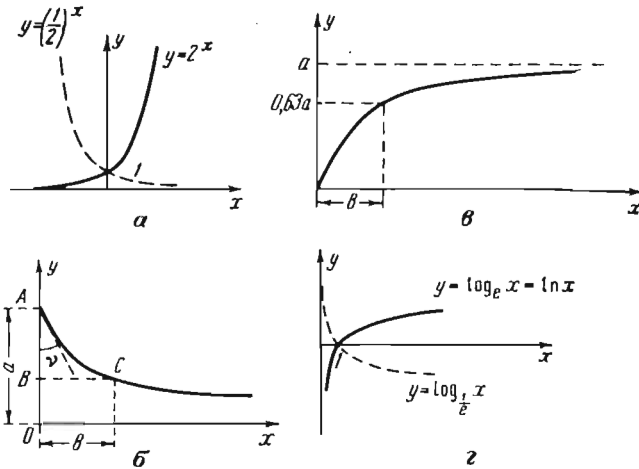


Рис. 31. Кривые: простейшие показательные (а); Максвелла (б); Кельвина (в); логарифмические (г)

используется для сопоставления различных экспериментальных данных. В качестве примера возьмем формулу, предложенную Б. В. Залесским и И. П. Тимченко для описания соотношений между прочностью карбонатных пород на сжатие ( $P_c$ ) и их объемным весом ( $\gamma$ ):

$$P_c = e^{b\gamma}. \quad (4)$$

Коэффициент  $b$  имеет для разных пород величину от 2,6 до 3,0.

Формулы типа (1) и (2) неудобны в тех случаях, когда аппроксимируемые ими эмпирические кривые подходят по форме, но проходят через начало координат, а не через точку с координатой  $x=0$  и  $y=a$  (в частности,  $a=1$ ). В этих случаях добиваются того, чтобы при  $x=0$  был бы и  $y=0$ , вводя в формулу  $-a$  (в частности  $-1$ ):

$$y = c^x - a. \quad (5)$$

Коэффициенты  $a$  и  $b$ , входящие в формулу (2), подбираются путем последовательных приближений. Коэффициент  $a$  из (2) равен ординате в точке пересечения кривой с осью ординат при  $x=0$ .

### Кривая Максвелла для описания релаксации напряжений

В настоящее время большое значение для тектонофизики имеют показательные кривые с отрицательным значением  $b$ . Они позволяют при  $x > 0$  описать важные явления релаксации напряжений в горных породах. Это явление заключается в постепенно замедляющемся во времени ослаблении напряжений в горных породах, в которых возникла и поддерживается постоянная по величине деформация. Такое ослабление напряжений принято называть «релаксацией напряжений». Оно исследовалось в твердых телах выдающимся английским физиком

Ж. Максвеллом, которым была найдена формула, позволяющая описывать экспериментальные кривые релаксации. Поэтому данную кривую и ее формулу мы будем называть именем Максвелла, или релаксационной. Другим важным для тектонофизики применением релаксационной кривой может явиться описание снижения вязкости горных пород по мере увеличения касательных напряжений.

Релаксационная кривая Максвелла изображается в I координатном квадранте (см. рис. 31, б). Кривая реального физического явления начинается в определенной точке на одной из координатных осей, отходя от нее под углом  $\nu^*$ . Кривая как и равносторонняя гипербола, обращена выпуклостью в сторону начала координат. Постепенно опускаясь и уменьшая свою кривизну, релаксационная кривая асимптотически стремится к слиянию с осью абсцисс при  $x = +\infty$ . Эта форма отличается от равносторонней гиперболы своей асимметрией и тем, что кривая асимптотически приближается только к одной оси координат, тогда как на другой оси она начинается в определенной точке. Форма релаксационной кривой дается уравнением

$$y = ae^{-\frac{x}{b}}, \text{ при } x \geq 0, \quad (1)$$

содержащим аргумент (в данном случае  $x$ ) в показателе степени. В уравнении имеется два постоянных параметра, регулирующих форму кривой  $a$  и  $b$ . Вообще говоря, показатель степени может писаться и в форме  $-dx$ . Тогда  $d = \frac{1}{b}$ .

Величина  $a$  является ординатой  $y$  начальной точки рассматриваемой части кривой (1). В этой точке при  $x=0$  показатель степени равен 0 и поэтому весь второй множитель равен единице:

$$\left. \begin{aligned} e^{-\frac{x}{b}} &= 1 \\ y &= a \end{aligned} \right\} \text{ при } x = 0. \quad (2)$$

Величина  $b$  регулирует быстроту снижения кривой и ее кривизну. Чем  $b$  больше, тем медленнее спускается кривая и тем меньше ее кривизна, постепенно уменьшающаяся с увеличением  $x$ .

Если мы располагаем кривой, форму которой принимаем за релаксационную, то для подбора величин  $a$  и  $b$  поступаем следующим образом. Сперва измеряем ординату  $OA$  начальной точки  $A$  и приравниваем ее  $a$  ( $a=OA$ ).

Затем делим численное значение длины отрезка  $OA$  на 2,7. Найдим на оси ординат точку  $B$ , координата которой численно равна результату деления. Из точки  $B$  проводим прямую, параллельную оси  $x$ , до пересечения с кривой. Обозначаем точку пересечения  $C$ . Длина отрезка  $BC$  численно равна величине искомого параметра  $b$ ; ( $b=BC$ ). Такое определение  $b$  вытекает из того, что при  $x=b$ :

$$y = ae^{-\frac{x}{b}} = ae^{-1} = \frac{a}{e}. \quad (3)$$

Значит, при абсциссе  $x=b$  точка на кривой имеет ординату, которая в  $e$  раз меньше ординаты  $a$  начальной точки.

### Кривая Кельвина для описания последействия

С помощью уравнения, имеющего аргумент в отрицательном показателе степени, можно описывать не только функции, уменьшающиеся с ростом аргумента при  $x \geq 0$ , но и увеличивающиеся. Так поступил

\* Кривая, выражающая математическую закономерность, бесконечно протягивается в обе стороны от этой точки.

крупнейший английский физик Кельвин, описавший постепенно замедляющееся со временем нарастание деформации упругого последействия. Такая кривая может быть с успехом использована и при описании структуры. Форма кривой показана на рис. 31, в. Линия выходит из начала координат под определенным максимальным углом. Затем угол наклона поднимающейся кривой постепенно уменьшается, и линия приближается к горизонтальному положению, асимптотически стремясь к горизонтальной прямой, которая пересекает ось ординат на уровне  $y=a$ .

Уравнение Кельвина пишется так:

$$y = a \left( 1 - e^{-\frac{x}{b}} \right). \quad (1)$$

Если раскрыть скобки, получим

$$y = a - ae^{-\frac{x}{b}}. \quad (2)$$

Таким образом, уравнение Кельвина представляет собой разность между некоторым начальным уровнем  $a$  и непрерывно изменяющимся значением величины  $ae^{-\frac{x}{b}}$ . При  $x=0$  имеем  $e^{-\frac{x}{b}}=1$ , следовательно разность равна нулю. По мере увеличения  $x$  вычитаемое становится меньше и разность возрастает. При очень большом аргументе  $x$  вычитаемое стремится к нулю, а разность приближается к величине  $a$ . Таким образом, кривая Кельвина имеет такую же форму, как и кривая Максвелла, только расположение этих кривых по отношению к осям координат различное. Кривая Кельвина является как бы перевернутой кривой Максвелла.

Если имеющуюся кривую мы хотим описать уравнением Кельвина, то требуется найти величину параметров  $a$  и  $b$ .

Сначала, глядя на ход имеющейся кривой, следует наметить прямую линию, параллельную оси  $x$ , играющую роль асимптоты, т. е. того горизонтального уровня, к которому стремится кривая. Ордината этого уровня — точка его пересечения с осью ординат — есть параметр  $a$ .

Приравняв абсциссу  $x$  второй искомой величине  $b$ , получим:

$$y = a - ae^{-\frac{b}{b}} = a - \frac{a}{e} = a \left( 1 - \frac{1}{e} \right) = 0,63a. \quad (3)$$

Значит, требуется умножить найденную численную величину  $a$  на 0,63 и отложить результат вниз от уровня  $a$  — так найдем нижний уровень. Он пересекает кривую в точке, абсцисса  $x$  которой численно равна параметру  $b$ . Короче говоря,  $b$  равняется абсциссе точки кривой, ордината которой равна  $0,63a$ .

### Логарифмическая кривая

В некоторых случаях для описания эмпирических графиков бывает удобна логарифмическая функция. В общей форме ее записывают так:

$$y = \log_a x, \quad (1)$$

где  $a$  — основание логарифма, которым может служить 10,  $e=2, 7, \dots$ ,  $\frac{1}{e}$  и другие числа. Наиболее употребительны десятичные и натуральные логарифмы

$$y = \lg x \quad \text{и} \quad y = \ln x. \quad (2)$$

Логарифмическая функция существует только при  $a > 0$ . Если  $a > 1$ , функция растет с увеличением  $x$ , если  $a < 1$ , то убывает (рис. 31,  $\varepsilon$ ). Логарифмическая кривая  $y = \log_a x$  является зеркальным отображением показательной кривой  $y = a^x$  относительно биссектрисы угла между положительными направлениями осей координат  $x$  и  $y$ .

### Квадратная показательная кривая при отрицательном показателе степени

Обсуждаемая кривая представляет большой интерес для описания отдельных антиклинальных и синклиналиных складок, так как в едином коротком уравнении можно отразить форму залегания слоя в пределах всей складки, а также в области ненарушенного положения слоя.

Предлагаемое уравнение близко к уравнению крупнейшего немецкого математика и физика Гаусса, которое широко используется для характеристики распределения случайных ошибок. Рассматриваемое ниже уравнение отличается от уравнения Гаусса тем, что дает большую свободу в описании складок различной формы, поскольку оно включает два независимых параметра  $a$  и  $b$ .

Для описания антиклинальной складки используют уравнение

$$y = a e^{-\frac{x^2}{b^2}}, \quad (1)$$

полагая, что ось ординат проводится по вертикальной оси симметрии антиклиналя, а ось абсцисс — по уровню ненарушенного залегания слоя за пределами складки.

Благодаря отрицательному показателю степени кривая снижается по мере удаления от оси ординат. Это происходит симметрично в обе стороны, так как абсцисса  $x$  возводится в квадрат, и  $y$  оказывается положительным как при положительных, так и при отрицательных значениях  $x$ .

При  $x=0$  множитель  $e^{-\frac{x^2}{b^2}} = 1$  и, соответственно, достигается максимальная высота антиклинальной кривой, которая является параметром  $a$ .

Введение параметра  $b$  в квадрате обеспечивает его одинаковую размерность с аргументом  $x$ , который стоит в уравнении во второй степени. Если величина  $x=b$ , то множитель  $e^{-\frac{x^2}{b^2}} = \frac{1}{2,71} = 0,37$ . Следовательно, при  $x=b$  точка кривой имеет ординату  $y=0,37a$ . Поступая в обратной последовательности, мы можем находить точку кривой с ординатой, равной  $0,37$  максимальной высоты кривой, а затем абсциссу этой точки приравнять величине  $b$ .

Для описания синклиналей надо ввести знак минус перед правой частью уравнения (1):

$$y = -a e^{-\frac{x^2}{b^2}}. \quad (2)$$

Благодаря этому форма кривой (2) симметрична относительно кривой (1). Осью симметрии для них служит ось  $x$ .

Уравнения (1) и (2) подходят для описания симметричных складок с округлыми (не угловатыми) замками и постепенно выполаживающимися крыльями. Точки перегиба крыльев имеют координаты:

$$x = \pm \frac{b}{\sqrt{2}} = \mp 0,7b, \quad y = \frac{a}{\sqrt{e}} = \frac{a}{1,65} = 0,61a.$$

Тангенс угла  $\varphi$  наклона касательных в них:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{a}{b} \sqrt{\frac{2}{e}}. \quad (3)$$

В качестве примера для разнообразия воспользуемся не природной складкой, каких много, а складкой, полученной на модели (рис. 32, а). Будем описывать форму верхней поверхности модели. Соответственно одну ось координат (абсциссу) совместим с линией поверхности недеформированной части модели, другую ось (ординату) проведем по оси симметрии через точку с наибольшей высотой поверхности модели. Эта высота принимается за параметр  $a$  (в данном случае  $a=10$  см). Теперь находим величину  $0,37a$   $a=3,7$  см. Проводим вспомогательную прямую на расстоянии  $0,37a$  от оси абсцисс. Отмечаем точку пересечения прямой с поверхностью модели. Абсциссу этой точки, равную  $9,3$  см, принимаем за параметр  $b$ . Итак,  $a=10$ ,  $b=9,3$ . Уравнение верхней поверхности антиклинали в модели:

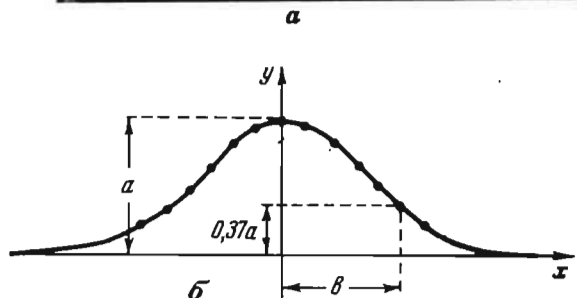


Рис. 32. Антиклиналь в модели (а) и наблюдаемый профиль ее поверхности (б) с точками, вычисленными по формуле  $y = ae^{-\frac{x^2}{b^2}}$

$$y = 10 \cdot e^{-\frac{x^2}{9,3^2}}. \quad (4)$$

На рис. 32, б изображены отдельные точки, соответствующие уравнению (4). Видно, что они хорошо согласуются с формой описываемой складки.

### Тригонометрические кривые

**Синусоида.** Геологам давно известно, что в природе часто встречаются складки, похожие на синусоиду — кривую, состоящую из многочисленных одинаковых прямых волн.

Наиболее общая форма уравнения синусоиды:

$$y = a \sin(\omega x + \varphi_0). \quad (1)$$

В простейшем случае при  $a=1$ ,  $\omega=1$ ,  $\varphi_0=0$ :

$$y = \sin x. \quad (2)$$

Последнее уравнение изображается волнистой кривой, проходящей через начало координат и поднимающейся в сторону увеличения  $x$  (рис. 33, а). При  $x = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$  кривая имеет максимум, соответствующий гребню антиклинали. Ордината этой точки  $y=1$ . Далее кривая спускается, пересекает ось абсцисс в точке  $x=\pi \approx 3,14$ , где изменяется знак кривизны. Потом синусоида спускается до уровня  $y=-1$  в точке с  $x = \frac{3}{2}\pi \approx 4,71$ . После этого она снова идет вверх и пересекает ось абс-

цисс в точке  $y=0$ ,  $x=2\pi \approx 6,28$ . От этой точки кривая повторяет только что описанный ход сколько угодно раз. Прослеженный первый отрезок кривой, тянущийся от  $x=0$  до  $x=2\pi \approx 6,28$ , занимает на оси ординат промежуток, называемый периодом синусоиды  $T$ . Расстояние между абсциссами соседних перечисленных характерных точек кривой (пересечения с осью  $x$  и экстремальные значения  $y$ ) одинаково и равно  $\frac{\pi}{2} = 1,57$ . Точки пересечения с осью  $x$  следуют через интервалы, равные  $\pi = 3,14$ . Их координаты:  $y=0$ ;  $x=k\pi$ , где  $k$  — любое целое число. В этих точках угол наклона синусоиды к оси абсцисс максимален и равен  $45^\circ$ . Экстремальные точки — места максимумов и минимумов кривой — имеют ординаты  $y=+1$  или  $y=-1$ , что записывается так:  $y=1^k$ , абсциссы этих точек  $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ , где  $k$  — любое целое число.

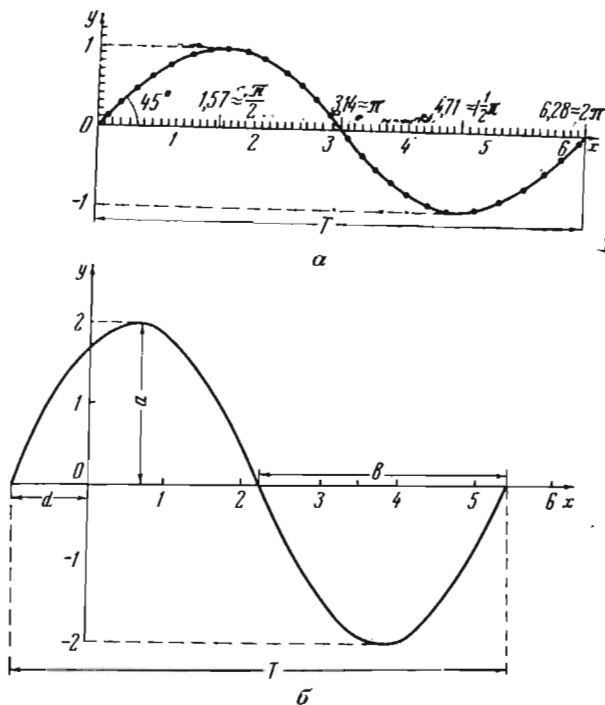


Рис. 33. Простейший (а) и общий (б) вид синусоиды

оси  $x$ . Частота  $\omega$  находится делением  $\pi = 3,14$  на ширину полуволны  $b = \frac{T}{2}$ , изображающей одну складку:

$$\omega = \frac{\pi}{b} = \frac{3,14}{b}. \quad (3)$$

Наконец, величина  $\varphi_0$  — начальная фаза — смещает всю кривую влево при положительном значении  $\varphi_0$ , не изменяя ее формы (см. рис. 33, б). Величина  $d$  смещения кривой влево вдоль оси  $x$  равна:

$$d = \frac{\varphi_0}{\omega}; \quad \varphi_0 = \frac{3,14d}{b}. \quad (4)$$

При смещении на  $d = \frac{\pi}{2} = 1,57$  ось  $y$  пересекается кривой в одной из ее экстремальных точек, т. е. ось  $y$  совпадает с плоской осевой поверхностью изображаемой складки. Такая кривая может быть записана двояко:

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x. \quad (5)$$

Кривая, соответствующая этому уравнению, называется косинусоидой.

Перечисленные величины  $a$ ,  $b$ ,  $d$ , которые характеризуют форму синусоиды и ее уравнение (1), при описании складки, имеющей вид синусоиды, получаются путем непосредственного измерения на геологическом профиле. Используя величины  $b$  и  $d$ , легко по (3) вычислить  $\omega$ , а затем  $\varphi_0$  по формуле (4). Обозначим измеренные на профиле отрезки  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{d}$ .

Для того чтобы построить точки теоретической синусоиды, соответствующие измеренным на профиле отрезкам  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$  и  $\tilde{d}$ , нужно величины этих отрезков, выраженные в определенных размерных единицах длины (см, м, км), преобразовать в безразмерные. Последние должны численно совпадать с радианными величинами углов. Тогда можно находить в таблицах значения синуса, соответствующие каждой величине  $x$ . Чтобы получить безразмерные значения  $x$ , следует параллельно оси  $x$  с размерным масштабом построить ось  $x$  с безразмерным масштабом, на котором ширина каждой складки равнялась бы  $\frac{\pi}{2} = 1,57$ .

Величину единицы безразмерного масштаба легко найти, разделив измеренную ширину одной складки  $b$  на 3,14. Этот же безразмерный масштаб надо изобразить и параллельно оси  $y$ . Тогда по безразмерной шкале величина  $b = 3,14$ ,  $\omega = 1$ ; абсолютные значения ординат экстремальных точек равны  $a$ ; смещение кривой влево от начала координат составляет  $d = \varphi_0$ . Смещение вправо должно обозначаться как  $-\varphi_0$ . Именно эти безразмерные значения  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $x$  и  $y$  следует использовать, строя теоретическую синусоиду, которая изображает составленное уравнение складки. Сопоставляя построенную кривую с исходным профилем, мы оценим, насколько точно он описывается синусоидой.

Величина  $\sin x$  берется из обычных тригонометрических таблиц, в которых указывается значение синуса для углов, измеренных в радианах. При построении синусоиды фактически об углах можно не думать и рассматривать  $x$  только как расстояние от начала координат вдоль оси  $x$ . В тригонометрической таблице соответствующие величины  $\sin x$  даются до  $x = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$ , при которой  $\sin x$  достигает 1. При большем  $x$  следует вычесть из него максимальное число  $n$  целых величин  $\frac{\pi}{2} = 1,57$ . Затем взять остающуюся положительную разность  $\alpha$  ( $\alpha$  — это излишек сверх  $n \frac{\pi}{2}$ ), которая должна быть меньше 1,57.

Построив кривую в диапазоне от  $x=0$  до  $x=1,57$ , можно воспользоваться ею для изображения остальной части синусоиды.

**Кривые, описываемые тригонометрическими рядами.** Кривые весьма разнообразной и сложной формы, если они периодически повторяются, могут быть представлены как многочлены, содержащие синусы и косинусы  $x$ , написанные согласно определенным закономерностям. Иначе говоря, геометрически сложив несколько синусоид с различными периодами  $T$ , амплитудами  $a$  и начальными фазами  $\varphi_0$ , мы получаем кривую сложной формы. Уравнения этих кривых называются тригонометрическими рядами, или рядами Фурье. В общем виде ряд выглядит так:

$$y = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \dots + a_n \cos n\omega x + \dots + b_1 \sin \omega x + b_2 \sin 2\omega x + \dots + b_n \sin n\omega x \dots \quad (6)$$

Простыми разновидностями таких формул удается выражать сложно искривленные периодические кривые и прерывистые или непрерывные линии, состоящие из прямолинейных отрезков. В качестве приме-



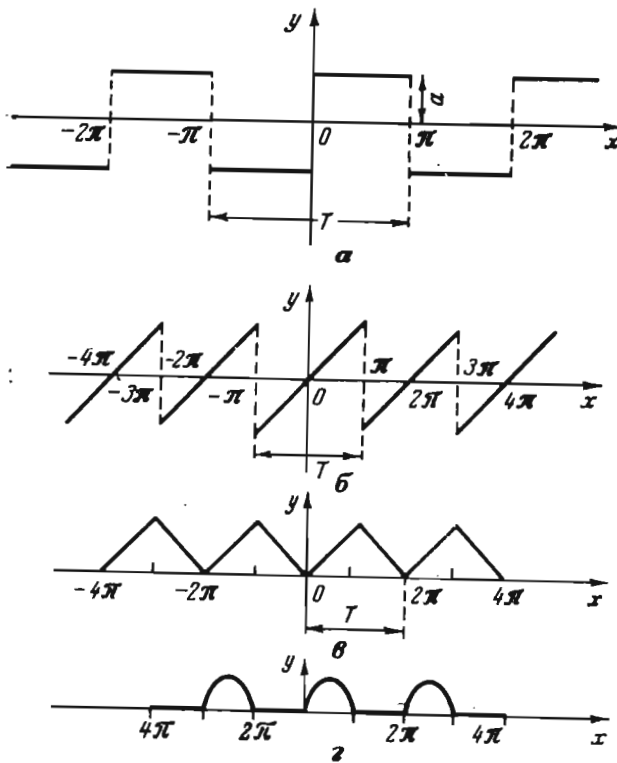


Рис. 34. Примеры форм залегания слоев, которые могут быть описаны тригонометрическими рядами

ров на рис. 34, а, б, в, г показаны графики, соответствующие следующим рядам:

$$а) y = \frac{4a}{\pi} \left( \frac{1}{1} \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right),$$

$$б) y = 2 \left( \frac{1}{1} \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right),$$

$$в) y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{1^2} \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right),$$

$$г) y = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right).$$

В пределах одного периода функция выражается еще более простой зависимостью. Так, для рассматриваемых примеров это:

$$а) \begin{cases} y = a & \text{для } 0 \leq x \leq \pi, \\ y = -a & \text{для } -\pi \leq x \leq 0, \end{cases}$$

$$б) y = x \quad \text{для } -\pi \leq x \leq \pi,$$

$$в) y = |x| \quad \text{для } -\pi \leq x \leq \pi,$$

$$г) \begin{cases} y = \sin x & \text{для } 0 \leq x \leq \pi, \\ y = 0 & \text{для } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Возможны иные зависимости в пределах периода, определяющие, например, параболы, части синусоиды или другие криволинейные формы, сочетающиеся на границах периодов путем искривления, излома или разрыва.

Математическая операция составления тригонометрического ряда, который описывает данную нам кривую, называется гармоническим анализом. Каждый член ряда — слагаемое суммы — графически выглядит в виде синусоиды, называемой гармоникой. Гармонический анализ приводит к получению нескольких гармоник. Чем их больше, тем точнее воспроизводится исходная кривая.

Гармонический анализ особенно эффективен, когда исходная кривая периодична. Но и непериодичную сложную кривую можно выразить тригонометрическим рядом. Существуют приборы, облегчающие получение рядов. Они называются гармоническими анализаторами. Гармонический анализ проще всего применить к складчато-разрывным структурным формам, не имеющим перевернутого залегания слоев. При перевернутом залегании одному значению  $x$  соответствует несколько (2 и более) значений  $y$ . Возможность описания перевернутых крыльев охарактеризована ниже в связи с асимметричными складками.

Гармонический анализ подробно изложен в книгах А. Н. Крылова (1954), Г. П. Толстова (1951), А. М. Лопшица (1948) и др.

### Описание асимметричных складок

Подавляющее большинство приводившихся уравнений описывает симметричные складки различной формы. Но в природе часто встречаются не только симметричные, но и асимметричные складки (рис. 35).

Их поперечное сечение соответствовало бы многим из приводившихся выражений, если бы складки были симметричными. В асимметричных складках встречаются перевернутые крылья, при которых одному значению абсциссы соответствуют 2—3 значения ординаты одного и того же пласта.

Для аналитического описания асимметричных складок предлагается следующий метод. Вводится третья ось координат  $t$ , параллельная оси  $x$  и имеющая такую же шкалу отсчета расстояний. Ординаты точек, лежащих на линии частной складки, записываются в форме той функции  $f_1(t)$  ординаты  $t$ , которая удовлетворительно описала бы складку, если бы она имела симметричную форму. При симметричной форме можно вместо  $t$  считать за аргумент  $x$ . При асимметричной форме ордината  $x$  считается функцией  $f_2(y)$  ординаты, которая прибавляется к величине  $x=t$ . В итоге получается два уравнения:



Рис. 35. Синклиналь в палеогеновых отложениях Вахшского хребта (Таджикистан)

$$y = f_1(t),$$

$$x = t + f_2(y). \quad (1)$$

Принимая различные функции в качестве  $f_2(y)$ , можно получить разнообразные формы наклонных прямых или изогнутых линий, изображающих осевые поверхности асимметричных складок.

На рис. 36 линией, проходящей через черные точки, изображен простейший пример шарнирной антиклинали с уравнением:

$$y = f_1(t) = -|t|. \quad (2)$$

Для того чтобы придать складке асимметрию, при которой сохраняется плоская форма осевой поверхности, достаточно ввести для координаты  $x$  прямую пропорциональность ординате  $y$ , т. е. считать:

$$x = t + f_2(y) = t + ay. \quad (3)$$

Поскольку складка, согласно (2), располагается в области отрицательных значений  $y$ , для положительного наращивания величины  $x$  с удалением от начала координат коэффициент  $a$  нужно взять отрицательным. Пусть  $a = -0,5$ . Тогда:

$$x = t - 0,5y. \quad (4)$$

Система уравнений, состоящая из (2) и (4), изображается асимметричной складкой, проходящей на рис. 36 через кружки.

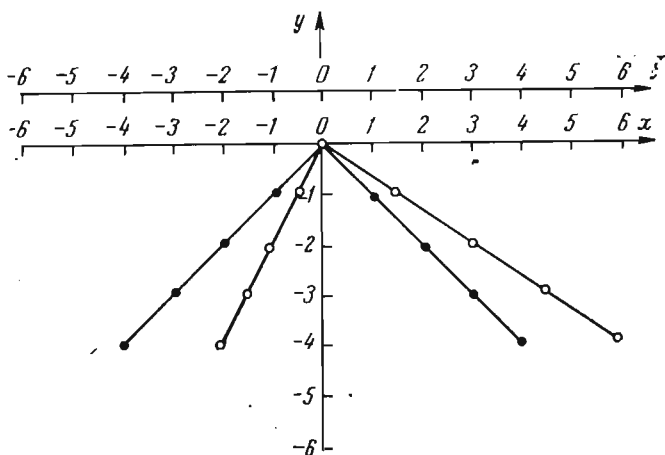


Рис. 36. Преобразование симметричной антиклинали в асимметричную. Пояснения в тексте

Другой более сложный пример приведен на рис. 37. На нем слева тонкой сплошной линией изображена кривая, соответствующая сим-

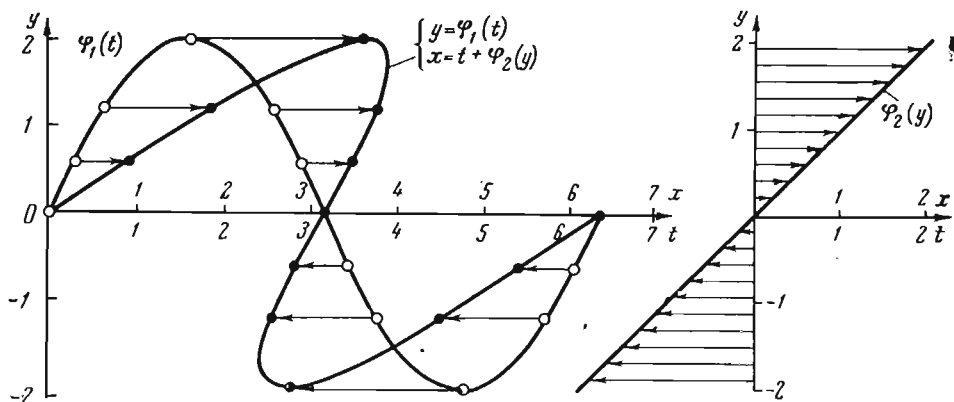


Рис. 37. Преобразование синусоиды в кривую, соответствующую опрокинутым складкам

метричным антиклинали и синклинали, имеющим форму синусоиды с уравнением

$$y = 2 \sin x. \quad (5)$$

Эта синусоида превращается в асимметричную кривую, изображающую складки с перевернутым залеганием слоев, если мы введем параметрическую зависимость. Для ординат сохраняется закон синусоиды:

$$y = \varphi_1(t) = 2 \sin t, \quad (6)$$

а для абсцисс вводится простейшая форма второй параметрической зависимости  $\varphi_2(y) = y$ , графически изображенная на рис. 37 справа. Тогда координата  $x$  любой точки кривой будет записана выражением:

$$x = t + \varphi_2(y) = t + y = t + 2 \sin t. \quad (7)$$

Графическое сложение исходной синусоиды с геометрическим выражением функции  $\varphi_2(y)$  приводит к получению асимметричной кривой, показанной толстой линией.

Таким образом выясняется, что аналитическое описание в принципе можно распространить на опрокинутые складки.

## СКЛАДКИ В ПРОСТРАНСТВЕ

### *Аналитическое описание складок*

Уравнения, описывающие расположение плоскостей поверхностей и линий в пространстве, в общем случае выражают зависимость между тремя переменными, поскольку положение точки в пространстве определяется тремя координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Однако при особом расположении плоскостей, поверхностей и прямых линий некоторые из координат выпадают из уравнения, поскольку они могут иметь любую величину, и тогда уравнение поверхности формально имеет вид уравнения одной из линий, изображаемых на плоскости. Так, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

описывающее эллипс на плоскости, является также уравнением цилиндра с поперечным сечением в виде этого эллипса и осью, совпадающей с координатной осью  $Oz$ .

**Плоскость.** Уравнение плоскости легко узнать по тому, что ее координаты входят в него только в первой степени. В общем виде это:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2)$$

Разделив все члены суммы на  $-D$  и обозначив  $-\frac{D}{A} = a$ ;  $-\frac{D}{B} = b$ ;  $-\frac{D}{C} = c$ , получают уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (3)$$

Величины  $a$ ,  $b$ ,  $c$  являются отрезками, отсекаемыми плоскостью на осях координат. Если плоскость проходит через начало координат,  $D=0$ ; если  $C=0$ , плоскость параллельна оси  $Oz$  (т. е.  $z$  может быть любой величины); если  $B=0$  — плоскость параллельна оси  $Oy$ ; если  $A=0$  — плоскость параллельна оси  $Ox$ ; если, наконец, только один коэффициент не равен нолю, то плоскость проходит через начало координат и перпендикулярна оси, соответствующей единственному написанному члену уравнения (2):

если  $Ax=0$  — координатная плоскость  $yOz$ ,  
 если  $Bu=0$  — координатная плоскость  $xOz$ ,  
 если  $Cz=0$  — координатная плоскость  $xOy$ .

Две плоскости с уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (4)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (5)$$

параллельны друг другу, если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (6)$$

Две плоскости перпендикулярны одна другой, если

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (7)$$

Если две плоскости пересекаются не под прямым углом  $\varphi$ , то его величина:

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}. \quad (8)$$

Уравнения плоскостей, делящих пополам углы между двумя плоскостями, например осевой плоскости шарнирной складки и нормальной к ней плоскости, имеют вид:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} + \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) x + \left( \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} + \right. \\ & \left. + \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) y + \left( \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} + \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) z + \\ & \left. + \left( \frac{D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} + \frac{D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) = 0, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} - \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) x + \left( \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} - \right. \\ & \left. - \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) y + \left( \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} - \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) z + \\ & \left. + \left( \frac{D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} - \frac{D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

если (4) соответствует одному, а (5) — другому крылу складки.

**Прямая.** Запись прямой сложнее уравнения плоскости, так как прямую определяют как геометрическое место точек пересечения двух плоскостей. Поэтому общее выражение для прямой состоит из двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

**Поверхности 2-го порядка.** Общие уравнения поверхностей второго порядка являются наиболее простыми по форме и называются каноническими, если центр каждой поверхности совмещен с началом координат, а линии пересечения плоскостей симметрии приняты за оси координат. Координаты поверхностей второго порядка и их канонические уравнения следующие.

Эллипсоид (рис. 38, а) с полуосями  $a, b, c$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (12)$$

Сфера с радиусом  $a$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \quad (13)$$

Гиперboloид однополостной (см. рис. 38, б) с действительными полуосями  $a, b$  и мнимой полуосью  $c$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (14)$$

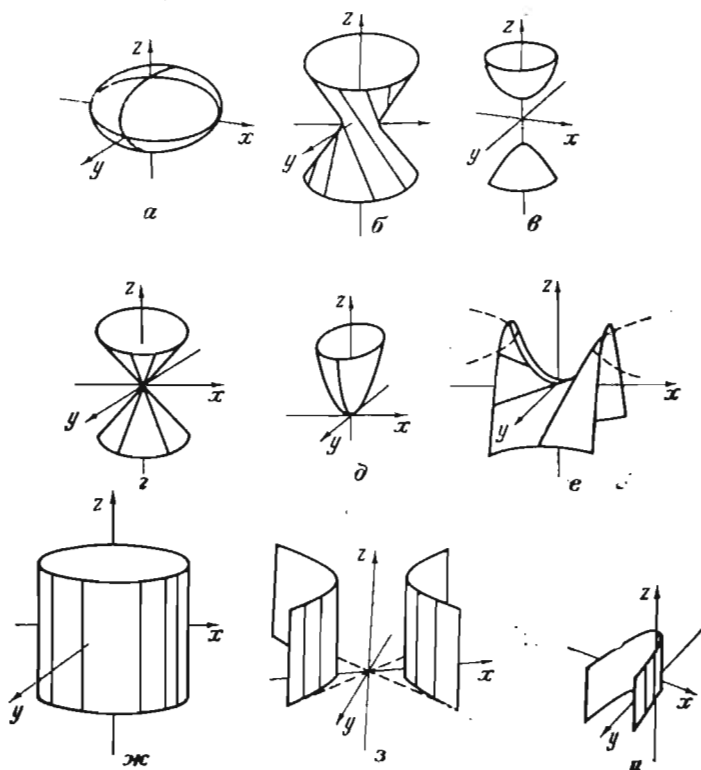


Рис. 38. Поверхности второго порядка. Пояснения в тексте

Гиперboloид двуполостной (см. рис. 38, в) с мнимыми полуосями  $a, b$  и действительной полуосью  $c$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (15)$$

Эллиптический конус (см. рис. 38, г) с эллиптическим сечением, перпендикулярным оси  $z$  (на расстоянии  $s$  от начала координат полуоси эллипса имеют величину  $a$  и  $b$ )

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (16)$$

Этот конус является асимптотическим для двух гиперboloидов (14) и (15).

Параболоид эллиптический (см. рис. 38, д) имеет сечения, параллельные оси  $Oz$ , в форме парабол, а сечения, перпендикулярные этой оси, — в виде эллипсов. Уравнение:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (17)$$

Вершина параболоида совмещена с началом координат.

Параболоид гиперболический (см. рис. 38, е) обладает сечениями, параллельными плоскости  $yOz$ , в виде одних парабол и в форме других парабол, в сечениях, параллельных плоскости  $xOz$ . Сечения, параллельные плоскости  $xOy$ , — гиперболы. Уравнение:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad (18)$$

параметры  $a$  и  $b$  характеризуют параболы в сечениях по плоскостям  $xOz$  и  $xOy$ .

Цилиндр эллиптический (см. рис. 38, ж) с осью, совпадающей с координатной осью  $Oz$ , и эллиптическим поперечным сечением (с полуосями  $a$  и  $b$ ):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (19)$$

Цилиндр гиперболический (см. рис. 38, з) с такой же осью и поперечным сечением в виде двух гипербол:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (20)$$

Параметры  $a$  и  $b$  определяют форму гиперболических сечений.

Цилиндр параболический (см. рис. 38, и) с такой же осью имеет поперечное сечение в форме параболы:

$$x^2 = 2py, \quad (21)$$

где  $p$  — параметр параболы.

**Применение пространственного аналитического описания складок в геотектонике.** Уравнения плоскостей имеют значения для записи пространственного расположения моноклиналей, плоских участков крыльев и осевых поверхностей, если они имеют плоскую форму. Запись линий пересечения двух плоскостей выразит положение шарнира и оси складки.

Уравнение эллипсоида удобно для фиксации простых по форме брахиантиклиналей и брахисинклиналей при записи условия, что реально существует только верхняя (или нижняя) половина эллипсоида. Структурные купола и чаши бывают близки по форме к части сферы.

Уравнение однополостного гиперboloида, если его записать так, чтобы ось полости совпала с осью  $x$  (рис. 39, а):

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (22)$$

сможет описать структурную седловину — участок локального погружения шарнира. Для однополостного гиперboloида характерно существование двух семейств прямых линий, совпадающих с его поверхностью. На рис. 38, б показано одно семейство линий. Линии второго семейства наклонены в противоположную сторону.

Двуполостной гиперboloид, особенно его нижняя часть, близок по форме к некоторым куполам и диапировым ядрам. Сходным яв-

ляется и эллиптический параболоид, если он обращен вершиной кверху, а не вниз, как обычно изображают (см. рис. 38, д). На рис. 39, б вершина параболоида показана наверху, как у антиклинальной складки, благодаря следующему написанию его уравнения:

$$z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \quad (23)$$

Если осью, пересекающей двуполостной гиперболоид и эллиптический параболоид, будет не  $Oz$ , а  $Ox$ , тогда эти поверхности окажутся близкими к периклинальным и центроклинальным окончаниям складок.

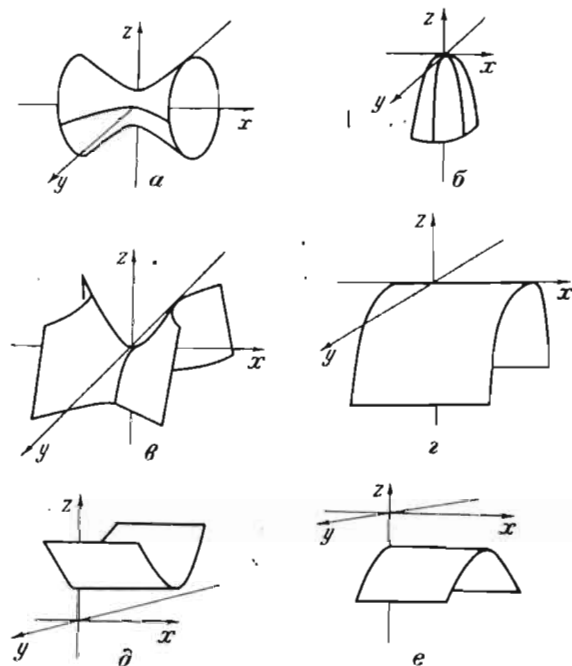


Рис. 39. Поверхности второго порядка, сходные с природными складками

Гиперболический параболоид, соответствующий уравнению (18) (см. рис. 38, е и 39, в), обрисовывает структурные седловины с небольшим отличием формы их сечения от однополостного гиперboloида в верхней части рис. 39, а. Однако параболоид позволяет продлить крылья складки на значительную глубину.

Эллиптический цилиндр с горизонтальной осью может явиться выражением формы верхних частей антиклиналей. Его уравнение:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (24)$$

Особенно перспективны уравнения гиперболических и параболических цилиндров с горизонтальным направлением их прямолинейных образующих. Вероятно, многие складки Донбасса, Кузбасса и других районов удастся изобразить как на рис. 39, г, д, е. Для этого параболический цилиндр (см. рис. 39, г) следует написать не как в уравнении (21), а так:

$$y^2 = -2pz. \quad (25)$$



Гиперболический цилиндр имеет вид синклинали (см. рис. 39, д), если он выражен уравнением:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{при } z > 0 \quad (26)$$

и антиклинали, если уравнение:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{при } z < 0. \quad (27)$$

Складки в виде гиперболического цилиндра отличаются от параболических тем, что их крылья приближаются к положению двух различных наклоненных плоскостей, тогда как крылья параболических складок стремятся занять положение, параллельное осевой плоскости.

Перечисленные поверхности, если принять наклонное положение их осей, опишут складки с наклонными шарнирами. Введя дополнения, приведенные выше для асимметричных складок, мы значительно расширим число складок, поддающихся аппроксимации с помощью уравнений 2-го порядка. Перейдя к параболическим цилиндрам 4-го, 6-го и других четных порядков, мы получим складки с коробчатым профилем.

Аналитическое описание складки станет более полным, если, во-первых, будет написано уравнение поверхности, располагающейся наиболее близко к природному слою, и, во-вторых, будет дана статистическая характеристика существующих отклонений слоя от этой поверхности.

В работах по региональной тектонике иногда встречаются упоминания о цилиндрических и конических складках. Однако в структурной геологии эти термины, как правило, не поясняются. Важно применять их, не искажая геометрического смысла понятий о цилиндре и конусе.

В общем случае цилиндрической считается такая поверхность, которую описывает движущаяся прямая-образующая, остающаяся параллельной некоторой данной прямой и скользящая вдоль пересекающей ее определенной линии. Последняя называется направляющей. Она может быть замкнутой или незамкнутой, в частности, быть окружностью, эллипсом, гиперболой, параболой и любой другой кривой самой прихотливой формы. Цилиндр имеет замкнутую направляющую.

Конической называется такая поверхность, которую описывает движущаяся прямая, во всех положениях проходящая через одну неподвижную точку — вершину конуса — и скользящая вдоль пересекаемой ею кривой. Скользящая прямая называется образующей, а кривая — направляющей. Она может быть не только окружностью или эллипсом, но и другой кривой, в том числе незамкнутой. Конус — это коническая поверхность с замкнутой направляющей.

Прежде чем называть складку цилиндрической или конической, необходимо убедиться в том, что она обладает свойством соответствующей поверхности.

М. Д. Белониным и И. М. Жуковым (1968) приведен пример аналитического описания структуры Алексеевского поднятия в Куйбышевской области по различным горизонтам. Располагая относительно небольшим числом опорных высотных точек, полученных при бурении скважины, они путем вычислений построили предполагаемые стратонизогипсы, захватив площади, не имеющие скважин. Стратонизогипсы каменноугольных и девонских отложений выглядят как эллипсы, а пермских — как гиперболы. Математическое рассмотрение формы полученных поверхностей, аппроксимирующих залегание слоев, помогло найти места и направления наибольшей кривизны слоев, что привело к прогнозу направлений и интенсивности трещиноватости. Эти прогнозы представляют большой интерес при разведке нефтяных месторождений.

## Описание складок топографическими поверхностями

В геометрии существует разделение всех поверхностей на два больших класса — геометрически правильные и неправильные. Первые считаются поверхности, геометрические законы образования которых известны и могут быть выражены аналитически в форме простых уравнений, как это делалось выше. Геометрически неправильными поверхностями называются такие, для которых неизвестны аналитические законы образования. К числу неправильных относятся топографические поверхности. Они характеризуются тем, что любой перпендикуляр к плоскости, на которую проектируется поверхность, пересекает поверхность только один раз. Топографические поверхности графически изображаются в виде изолиний расстояния точек поверхности от определенной плоскости. В геометрии недр, используемой при разведке и разработке месторождений, топографические поверхности находят очень широкое применение (Рыжов, 1964).

В 1900 г. П. К. Соболевский составил первую карту месторождения угля в изолиниях высоты залегания пласта в Харцызско-Донецком районе. В 1913 г. И. М. Губкин составил структурную карту в изогипсах Майкопского нефтяного месторождения на Кавказе. В дальнейшем этот метод получил чрезвычайно широкое распространение не только в целях характеристики структуры отдельных месторождений, но и для описания структуры обширных регионов. Изолинии высоты залегания пласта — стратонизогипсы — изображены на платформенных частях обзорных тектонических карт СССР. Стратонизогипсами изображается структура не только платформенных, но и высокоподвижных областей горообразования. Структура детально изученных районов с интенсивной складчатостью и большим числом разрывов также изображалась с помощью стратонизогипс (Гзовский, 1959). В. В. Бронгулееву (1967) удалось стратонизогипсы использовать для изображения не только нормальных, но и опрокинутых крыльев складок с перевернутым залеганием слоев. Строго говоря, поверхность при этом является более сложной, чем топографическая.

Кроме складок, топографические поверхности изображают строение общекоровых элементов — антиклинориев, синклинориев, антеклиз, синеклиз, антитекториев, синтекториев и др., а также строение разрывов.

Графическое изображение топографических поверхностей с помощью изогипс осуществляется в широком диапазоне масштабов от 1 : 10 000 000 до 1 : 1000.

Изображенные на карте изогипсы топографической поверхности являются проекциями на одну плоскость (обычно горизонтальную) кривых линий, полученных в результате пересечения топографической поверхности рядом мысленных плоскостей, параллельных той, на которую осуществляется проектирование. Расстояние между этими плоскостями называется сечением изогипс ( $h$ ). Кратчайшее расстояние между смежными изогипсами на карте называют заложением изогипс ( $l$ ). Сечение и заложение изогипс связаны с углом  $\delta$  наклона поверхности в данном месте соотношением

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{h}{l}. \quad (1)$$

На рис. 40 приведен простой пример топографической поверхности, изображающей одну частную складку.

Топографические поверхности обладают важными свойствами.

1. Конечность — любая точка поверхности имеет конечную отметку, т. е. не может быть ни бесконечно большой, ни бесконечно малой.

2. Однозначность — каждому сочетанию координат  $x$  и  $y$  соответствует только одно значение третьей координаты  $z$ .

3. Плавность — изогипсы в плане и поверхность в любом разрезе обладают плавными очертаниями без изломов.

Каждая точка топографической поверхности характеризуется двумя координатами в плане ( $x$  и  $y$ ) и третьей величиной ( $z$ ), которую изобра-

жают изогипсы. Эта величина может быть выражена числами, написанными около многочисленных точек на карте.

Практически данные числа, относящиеся к определенным точкам или отрезкам линий на карте (как на рис. 40), являются основными исходными данными. По этим числовым отметкам путем интерполирования и экстраполирования проводятся изогипсы.

В геологии опорные точки и отрезки немногочисленны. Поэтому формальное интерполирование допускается лишь в пределах однообразно наклоненных крыльев. При переходе от одного крыла складки к другому

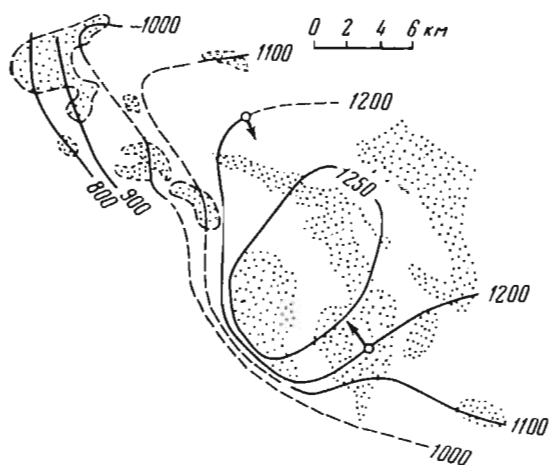


Рис. 40. Изображение альпийской структуры Байджансайского района Каратау с помощью стратозогипс. Точки — останцы пенеплена, по которому изображается структура. Стрелки — направление и величина градиента высоты пенеплена

и пересечении оси складки производить формальную интерполяцию нельзя. Высоту изображаемой поверхности следует находить здесь, построив геологический профиль, проходящий через опорные точки и секущий ось складки. Полезно при этом построить и другой профиль, идущий вдоль оси складки. На нем легко определить высоту точки пересечения секущего профиля с шарниром складки.

С топографическими поверхностями, если они относятся к одному и тому же участку плана, производят различные математические действия. Подробная теория их была разработана П. К. Соболевским (Рыжов, 1964).

**Сложение и вычитание** поверхностей проще всего выполняется, если изолинии одной поверхности пересекаются изолиниями другой. Тогда в точках пересечения производится сложение (или вычитание) отметок изолиний. Затем проводятся третьи изолинии, отражающие результаты вычислений. Если исходные изолинии не пересекаются и более или менее параллельны одна другой, требуется уметь находить на плане точки, в которых сумма (или разность) рассматриваемых поверхностей равна целым числам. Для этого строятся профили обеих поверхностей вдоль одной прямой, идущей на плане приблизительно перпендикулярно изогипсам. Затем на профиле к нижней поверхности прибавляют такое целое число, которое поднимает всю линию профиля этой поверхности. Поднять ее надо так, чтобы она стала пересекаться с линией профиля верхней поверхности. Точки пересечения верхней поверхности с поднятой нижней дают в сумме (или разности) отметок целые числа. Эти точки с профиля переносят на карту. Затем строят другие аналогичные профили, с которых точки пересечения переносят на карту. Наконец, строят изолинии полученных чисел. Если изолинии исходных поверхностей на карте имеют сложную конфигурацию, удобно построить квадратную сетку вспомогательных точек. Для каждой

из них путем интерполяции следует найти отметки исходных поверхностей и произвести сложение или вычитание. После этого просто провести новые изолинии результата вычислений.

Сложение и вычитание топографических поверхностей используется в структурной геологии для того, чтобы по структурной карте высокого опорного пласта, зная расположение изолиний мощности, построить структурную карту в изогипсах для пласта, залегающего на большой глубине. Кроме того, сложение и вычитание поверхностей производятся в целях определения глубины залегания тела полезного ископаемого при неровном рельефе дневной поверхности, а также при решении других геологических задач.

**Дифференцирование и интегрирование** одной топографической поверхности станет читателю понятным после прочтения той части данной книги, которая посвящена дифференциальному и интегральному исчислению. Для дифференцирования надо задаться сеткой опорных точек. Потом следует в каждой точке найти направление наиболее быстрого изменения высоты топографической поверхности. Оно ориентировано по нормали к соседним изолиниям. Далее для каждой опорной точки вычисляется отношение приращения высоты (сечения) к заложению между соседними изогипсами. Это отношение равно тангенсу угла наклона топографической поверхности в рассматриваемой точке. Градиент является вектором, который принято начинать в рассматриваемой точке и направлять в сторону восстания поверхности (см. рис. 40). После вычисления градиента в каждой опорной точке на карте проводятся изолинии величины градиента. Изоградиентная поверхность является производной от исходной поверхности. Подробнее о градиентах говорится в части книги, посвященной векторному исчислению.

Интегрирование является действием, обратным дифференцированию.

Дифференцирование и интегрирование топографических поверхностей применяют при изучении структуры месторождений, деформаций горных пород, определении запасов полезных ископаемых и в других случаях.

Использование топографических поверхностей является очень важным методом пространственного описания частных складок и других элементов структуры, поскольку их строение часто отличается большой сложностью и лишь приближенно передается геометрически правильными поверхностями, например различными цилиндрами, эллипсоидами, гиперболоидами, параболоидами и др.

### *Описание наложенных складок*

В метаморфических породах, испытавших неоднократное интенсивное деформирование, в одном и том же месте присутствуют складки различной величины, формы и направления. Происходящее при этом наложение складок друг на друга приводит к своеобразным сложным формам залегания слоев. Наиболее детально форма таких складок изучалась рядом геологов в метаморфических породах Шотландии, обобщение полученных результатов было опубликовано Саттоном (Satton, 1960, 1962), Вейссом (Weiss, 1959) и Рамсеем (Ramsay, 1960, 1962). В СССР такие исследования проводили Ю. И. Лазарев (1966) и В. В. Эз (1967, 1968). При этом выяснилось широкое развитие складок, наложившихся на более древнюю изоклиналиную складчатость.

При повторной складчатости происходит изменение формы предыдущих складок и их элементов. Повторная складчатость, будь она даже самой простой, приводит в итоге к сложным структурным формам. Наблюдаемая нами сейчас форма складки суммирует деформации раз-

ного возраста и не является непосредственным выражением ни первоначальной, ни наложенной складчатости.

Так возникает задача восстановить и первоначальную, и наложенную складчатость в чистом виде.

Следуя установившимся в микроструктурном анализе основным представлениям и терминологии, у каждой простой складки различают три оси:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Для простоты изложения представим себе, что складка образовалась в слоях, первоначально лежавших горизонтально, и что шарнир возникшей складки имеет горизонтальное положение. Тогда с шарниром совмещается ось  $b$ , перпендикулярно шарниру и первоначальному горизонтальному положению слоев устанавливается ось  $a$ . Перпендикулярно этим осям, т. е. вкрест простирается складки и в плоскости первоначального залегания слоев, проводится ось  $c$ .

Представим себе теперь, что произошла деформация, ничем не отличающаяся от только что рассмотренной. Единственной особенностью является то, что в исходном положении слои залегали не горизонтально, а с некоторым наклоном. Кинематическая схема движений и деформаций остается прежней, эта схема сводится к указанию кинематических осей  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ , связанных с мысленной горизонтальной плоскостью  $s$ . Оси  $a_k$  и  $b_k$  этой мысленной идеальной складки обозначают буквами  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. Наблюдаемые в обнажении чисто структурные оси такой складки  $a_s$  и  $b_s$  не будут параллельны  $\alpha$ ,  $\beta$  и не являются правильным выражением произошедшей складчатой деформации, наложенной на уже имевшееся наклонное залегание слоев.

Если в результате предыдущих деформаций, испытанных породами, в слое имелись некоторые направления преимущественной ориентации минералов (так называемые линейности), то в результате наложенного складкообразования направление линейности перестает быть постоянным. Из-за различного поворота слоев в разных частях складки точки, соответствующие линейности, измеренной во многих пунктах, изображаются на круговой стереографической диаграмме лежащими на определенном малом круге. Геометрический центр этого круга принимается за ось поворота линейности, которая параллельна оси  $b_k$  (Weiss, 1959). В случае параллельности линейности оси  $b_k$ , поворота линейности при образовании параллельных складок наблюдать не удастся.

Подобная складчатость, как принято считать, образуется в итоге неравномерного по амплитуде скольжения по плоскостям скальвания, пересекающим слои в определенном направлении. Поворота отдельных частей слоев при этом не происходит. Поэтому направления «линейности» сохраняются постоянными и располагаются под определенными углами к осям складки. В метаморфических породах большинство складок, как считают, являются подобными, т. е. складками скальвания.

Сопоставляя направление линейности с осевой поверхностью наблюдаемой складки получают кинематическую ось складки  $a_k$ . Отсчитав от оси  $a_k$  угол в  $90^\circ$  в осевой плоскости складки, находят на диаграмме точку, соответствующую другой оси складки, которую принимают за ось  $b_k$ . Теперь нахождение третьей кинематической оси  $c_k$ , перпендикулярной плоскости первых двух осей, представляет простейшее геометрическое построение (см. рис. 50).

Изучая отдельные складки с веерообразным расположением кливажа, можно нанести на стереографическую диаграмму положения плоскостей кливажа, измеренные в разных частях складки. Теоретически все эти плоскости (при правильной веерообразности кливажа) должны пересекаться на диаграмме вдоль одной оси, которая является осью  $b_k = \beta$  складки. Поэтому такое построение именуется  $\beta$ -пересечением. Кроме того, предполагается, что имеется кливаж, простирающийся поперек и наискось складки таким образом, что все его плоскости пере-

секаются на диаграмме вдоль оси, которая является осью  $a_k$ . Максимум на диаграмме, соответствующий  $b_k$  оси, должен увязываться с более распространенными трещинами, чем максимум, отождествляемый с осью  $a_k$ . Последний максимум вообще может отсутствовать. Осью  $b_k$  считается еще линия пересечения плоскостей сланцеватости, наложенной на смятые в складки слои, а также осевых плоскостей мелких складочек, осложняющих рассматриваемую более крупную складку.

Наконец, наблюдая в плохо обнаженных районах или в шахтах многочисленные отдельные небольшие выходы с наклонным залеганием слоев, которое оказывается различным в разных выходах, можно найти наиболее вероятное положение оси  $b_s$ , путем следующего простейшего построения. На стереографическую сетку, типа изображенной на рис. 3, в виде больших кругов наносится большое число элементов залегания слоев. Если линии пересечения всех изображенных плоскостей пересекаются вблизи от некоторой точки, соответствующей среднему положению определенной линии, то последнюю можно принять за ось  $b_s$ , т. е. за среднее положение шарниров складок.

В этом месте необходимо заметить, что полевые исследования и лабораторные опыты с моделями привели автора настоящей работы к выводу, что традиционное разделение складок на параллельные и подобные с присвоением каждому типу одного определенного внутреннего механизма является чрезмерно схематичным и явно устарело.

Форма складок, возникающих при многократном смятии слоев, часто бывает весьма сложной и своеобразной. Особенно сильные искажения формы определяются величиной угла между осевыми поверхностями первоначальных складок и наложенных складок, а также величиной угла между осью  $a_k$  и плоскостью слоистости  $s$  (рис. 41).

На рис. 42—43 приведены примеры складок, сочетающих в себе формы первоначальных и наложенных деформаций.

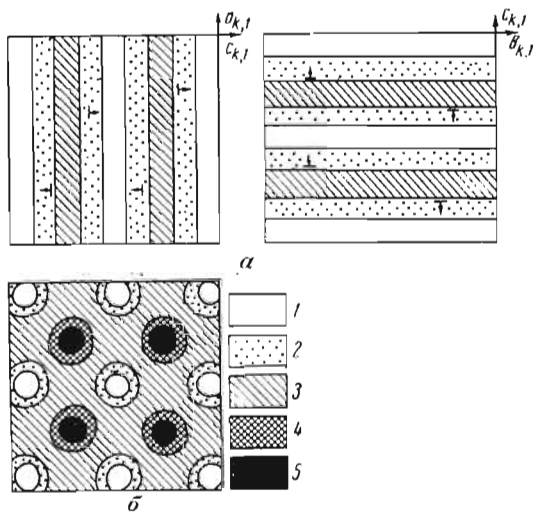


Рис. 41. Схематизированные геологические карты районов двух независимых складчатостей (а) и района совместного проявления обеих складчатостей (б)

1—5 — возрастная последовательность отложений от молодых к древним

## РАЗРЫВЫ

Использование количественных характеристик и математического описания и анализа тектонических разрывов требует четкости и однозначности применяемых понятий и терминов. В геотектонике пока еще не выработано достаточно строгой системы понятий и терминов, связанных с разрывами, несмотря на то что разрывы играют важную роль в теории и практике, так как они сильно влияют на поисковые, разведочные и эксплуатационные работы на месторождениях полезных ископаемых. От правильного понимания современного развития разрывов многое зависит в оценках сейсмической опасности, которые определяют стоимость крупных строительных работ на значительной части территории нашей страны.

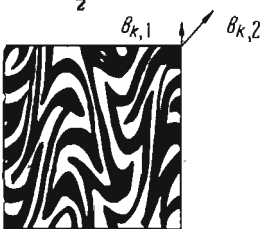
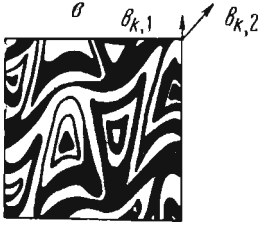
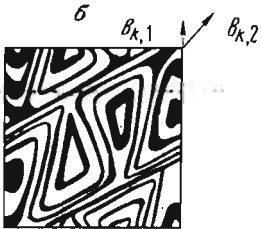
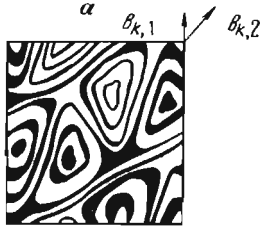
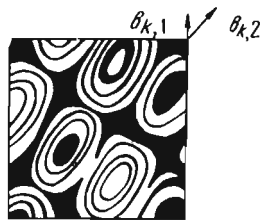


Рис. 42. Формы выходов слоев в плане при сочетании первоначальной складчатости (горизонтальная ось  $\theta_{к,1}$  и вертикальная ось  $\theta_{к,2}$ ) с наложенной складчатостью (горизонтальная ось  $\theta_{к,2}$  и наклонная на северо-запад ось  $\theta_{к,1}$ ).

$\alpha$  — ось  $\theta_{к,2}$  вертикальна;  $\beta$  —  $\theta_{к,1}$  наклон;  $\gamma$  — наклон оси  $\theta_{к,2}$  уменьшается (Ramsay, 1962).

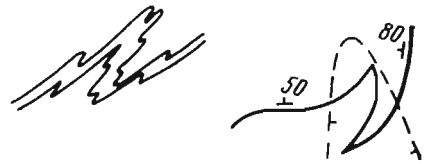


Рис. 43. Формы выходов в плане складок, испытавших повторное смятие (Лазарев, 1966). Прерывистая линия — форма наложенной синклинали

## ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О РАЗРЫВАХ

### Определение разрывов

Понятие о тектоническом разрыве весьма широкое и нередко исследователи вкладывают в него различный смысл. С тектонической точки зрения разрывом является зона, в которой прерывается и обязательно смещается некоторый структурный элемент, причем этот перерыв сопровождается физическим разрушением горных пород, т. е. прекращением взаимодействия между ионами и атомами кристаллической решетки, находящимися на разных сторонах этой зоны.

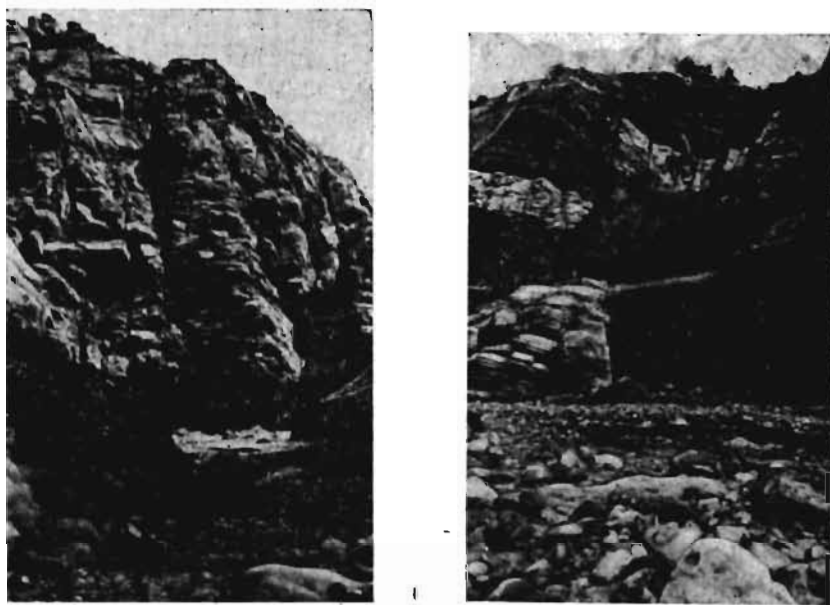
Используя электронный микроскоп, можно видеть разрывы в кристаллах, смещающие пакеты слоев кристаллической решетки. При этом 1 см фотографии соответствует 1 м, т. е. в  $10^8$  раз больше, чем в кристалле. Рассматривая в оптическом микроскопе шлифы горных пород с увеличением до  $10^2$ , мы также видим разрывы и смещения зерен и прожилков. В образцах и обнажениях пород визуально наблюдаются прерывающие мелкие слои разрывы, называемые геологами трещинами, которые изображаются нами в масштабе  $1:1 = 10^0$ . Далее идут результаты наблюдения местности с самолетов, аэрофотоснимки, детальные и региональные геологические карты, на которых разрывами считаются нарушения, прерывающие крупные слои и соизмеримые с ними тела и поверхности. Они изображаются на чертежах с уменьшением от  $10^{-3}$  до  $10^{-6}$  раз. Наконец, рассматривая Землю на картах полушарий с уменьшением  $10^{-8}$  раз, мы снова различаем разрывы длиной в несколько тысяч километров, обрезающие значительные части материков, прерывающие и смещающие такие крупные и сложно построенные структурные элементы, как, например, Срединно-Ат-

лантический вал. Прекрасно выраженные разрывы такой величины известны в восточной части Тихого океана.

Итак, говоря о разрывах, геологи имеют дело с объектами, величина которых лежит в диапазоне  $10^{16}$  от соизмеримых с земным шаром до сопоставимых с крупными молекулами. Несмотря на очевидные большие различия физических и геологических причин возникновения, разрывы разной величины обладают поражающим геометрическим сходством морфологии, что указывает на существование у них некоторых общих особенностей формирования.

Основные понятия о геометрических элементах разрывов и их типах развиваются в геологии независимо от величины разрывов. Однако, используя эти понятия, следует четко указывать, о каких по величине разрывах мы говорим.

Лишь немногие тектонические разрывы выглядят сейчас как разрывы в буквальном смысле слова, т. е. в виде щелевидных полостей (рис. 44). В большинстве случаев эти полости заполнены или обвалив-



а

б

Рис. 44. Фотографии тектонического разрыва, рассекающего однородные (а) и неоднородные (б) песчаники мела возле северо-западной границы Памира

шимися в них обломками окружающих пород, или минеральными зернами, выкристаллизовавшимися из просочившихся по разрывам подземных вод, или закристаллизовавшимися магматическими расплавами. Поэтому часто разрыв предстает перед нами в виде пластинообразного тела, которое отличается от окружающей среды меньшей или большей прочностью, а также другими физическими свойствами. На местности одни разрывы проявляются в виде цепочек озер, долин и иных понижений рельефа. Другие разрывы, наоборот, выглядят гребнями в рельефе. Немало разрывов, даже крупных, которые практически никак не выражены в рельефе и обнаруживаются только при сопоставлении многочисленных обнажений горных пород или проходке горных выработок. Автору не раз приходилось тратить по несколько дней, чтобы обнаружить на местности точное положение большого разрыва, отчетливо выраженного на геологической карте.

Ввиду большого практического и теоретического значения разрывов описанию их элементов и типов посвящено много работ. Среди оте-



чественных исследований известны книги и статьи геологов и маркшейдеров: В. И. Баумана (1907), П. К. Соболевского (1925), М. А. Усова (1933), Е. В. Милановского (1933), И. А. Молчанова (1939), А. В. Пейве (1945, 1956), А. А. Белицкого (1952), В. В. Белоусова (1952, 1962), М. В. Гзовского (1954, 1963), В. А. Букринского (Рыжов, 1964) и др.

В этих работах разрывы анализируются с различных теоретических позиций и с разными практическими целями. Одни и те же понятия и термины нередко имеют разный смысл. Поэтому читатель встречается со многими противоречиями, разбор которых имеется в специальной статье автора (Гзовский, 1964), пришедшего к следующим представлениям, в справедливости которых он теперь убежден еще больше, чем в 1954 г.

1. Основное определение и название разрыва каждого типа должно полностью вытекать из его объективно устанавливаемой морфологии. Дискуссионные представления о генезисе разрыва (его механизме и причинах образования) не должны влиять на основные понятия о сбросах, взбросах, надвигах, сдвигах и т. д.

2. Морфологическая классификация разрывов должна быть независимой от генетической и в качестве основных признаков в ней следует использовать характеристики разрыва как такового, а не особенности структуры рассеченных им геологических тел. Взаимоотношения геометрии разрыва с геометрией рассеченных им тел являются важными, но все же второстепенными признаками.

3. Генетическая классификация разрывов необходима, она должна быть независимой от морфологической и состоять из двух частей. В первой — физико-генетической — самостоятельно характеризуется механизм (способ) формирования разрыва. Во второй — геолого-генетической — отражаются геологические процессы, вызвавшие образование разрыва.

4. Полная характеристика разрыва состоит из понятий (терминов) трех групп: морфологической, физико-генетической и геологогенетической, которые могут комбинироваться между собой различным образом.

В данной работе обсуждается математизация морфологической характеристики разрывов. Генетические вопросы относятся к тектонофизике (Гзовский, 1963).

Наибольшее количество данных имеется по внутрикоровым разрывам, поэтому геометрическое рассмотрение имеет смысл основывать главным образом на этом материале. Многие понятия, выработанные для внутрикоровых разрывов, по-видимому, могут распространяться на пока еще менее изученные общекоровые и подкоровые разрывы.

Во введении в математический анализ имеются определенные представления о разрывах функций, которые графически выражаются в виде разрывов различного рода кривых. Среди таких разрывов выделяют следующие типы:

1) бесконечные разрывы — при значениях аргумента приближающихся к таким разрывам, хотя бы с одной стороны функция обращается в бесконечность одного знака. При подходе с другой стороны функция уходит в бесконечность другого знака или прерывается при некотором конечном значении;

2) конечные разрывы — при соответствующих им значениях аргумента происходит скачкообразный переход функции от одного конечного значения к другому. Очевидно, все тектонические разрывы являются конечными в математическом смысле;

3) устранимые разрывы — соответствуют интервалам значений аргумента, при которых функция не существует, однако в этих интервалах значения ее можно установить, введя дополнительные условия.

Такого рода структуры нередко наблюдаются на геологических профилях и картах в тех местах, где слой прерывается магматическим интрузивным телом, а затем снова продолжается. Такого рода структуры в геотектонике разрывами не называют.

Выше говорилось о возможности описания вертикальных и горизонтальных конечных разрывов с помощью сигнума. Однако в целом математическая теория разрывов, насколько известно автору, разработана не настолько широко, чтобы ее можно было бы использовать в геотектонике с заметной пользой. Создается впечатление, что существующие в геотектонике и тектонофизике представления о разрывах намного более содержательны и разнообразны, чем имеющиеся математические образы.

### Строение разрыва

Одни и те же физические объекты, в зависимости от масштаба их рассмотрения и существа решаемых задач, предстают перед нами в качественно различном виде. Как уже говорилось, в астрономии Земля считается точкой, в геотектонике мы смотрим на нее как на крупный шар или эллипсоид, а в строительном деле она является уже полупространством. Так и каждый разрыв, в зависимости от масштаба его рассмотрения, выглядит различным образом. Обсудим это на примере длительно изучавшегося автором Главного Каратауского разрыва в Средней Азии.

На обзорных картах, охватывающих значительную часть территории СССР, данный разрыв выглядит прямой линией (средняя на рис. 45, а). На картах, масштаб которых раз в 10 крупнее, разрыв изображается одной линией сложной формы, сочетающей плавные изгибы с резкими изломами (см. рис. 45, а). Так начинает выявляться своеобразная крупная волнистость разрыва вдоль его простираания. Ее можно количественно охарактеризовать средней длиной полуволны ( $l$ ) и размахом ( $w$ ) волны. Кроме того, качественно волны различаются своей формой — синусоидообразной, зигзагообразной и гирляндообразной (чередование дуг с резкими изломами, напоминающее циклоиду). Встречаются различные сочетания этих форм, но часто на значительных отрезках разрыва преобладает какая-нибудь определенная форма.

Знание волнистости разрыва и ее количественных показателей имеет существенное значение в геологоразведочной практике при прослеживании разрыва по простираанию и на глубину. Как недавно выяснилось на моделях (Гзовский, 1970), волнистость и ее размах ( $w$ ) могут иметь значение при оценке сейсмической опасности на участках строительства, так как ими определяются места концентрации напряжений на расстоянии от  $0,5 w$  до  $1 w$  в стороне от линии разрыва.

Изучая небольшой отрезок разрыва в еще более крупном масштабе, например, исследуя отмеченную овалом на рис. 45, а часть Главного Каратауского разрыва в пределах Байджансайского района, мы выясняем, что имеется не одна поверхность разрушения горных пород, а сложная система (см. рис. 45, б). Поэтому следует говорить уже не об одном разрыве, а о зоне разрывов, которые сложно ветвятся, сливаются и пересекают друг друга. Зона имеет форму тела, вытянутого вдоль простираания и уходящего на глубину (судя по данным геофизической разведки и буровых скважин). Соответственно, необходимо выяснить габариты зоны разрывов: 1) протяженность зоны по простираанию  $L$ ; 2) мощность зоны  $M$ ; 3) протяженность зоны по падению  $D$ . Большие буквы применены для того, чтобы подчеркнуть, что раз-

рыв считается не одной поверхностью разрушения, а зоной, содержащей большое их число.

Рассмотрение разрыва в виде одной волнистой поверхности разрушения или в форме зоны, содержащей много поверхностей, зависит от существа решаемой задачи и детальности исследования. В Байджансайском районе имеется рудник, отмеченный на рис. 45, б кружком. Он лежит на одной из одиночных линий разрыва. Но, увеличив масштаб изучения и изображения этого одиночного разрыва по данным шахты, штолен, скважин и других горных выработок, мы обнаружим целую зону более мелких разрывов, которая прослеживается и по падению (см. рис. 45, в), и по простираанию (см. рис. 45, г).

Дальнейшее увеличение детальности изучения и изображения разрыва приводит к тем же результатам. Таким образом, мы должны от-

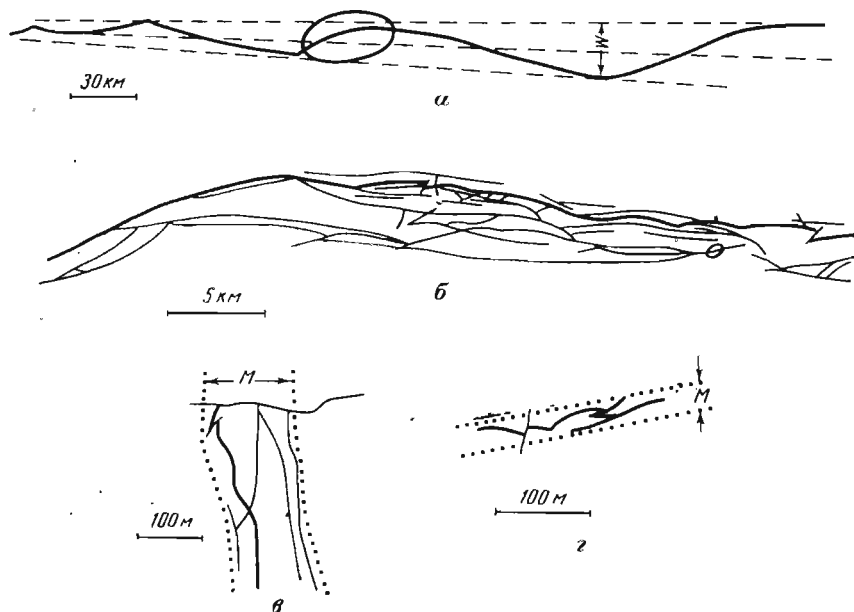


Рис. 45. Строение тектонического разрыва при различной детальности его рассмотрения

а — на обзорной карте; б — на детальной карте (участок, обведенный овалом на а); в — на вертикальном разрезе шахты (участок, обведенный кружком на б); г — на плане шахтного горизонта (участок, обведенный кружком на б). Буквенные обозначения поясняются в тексте

давать себе отчет, что морфологию каждого разрыва представляем себе с большей или меньшей степенью упрощения, аппроксимируя его плоскостью, одной волнистой поверхностью, или зоной, содержащей много поверхностей определенной величины.

Внутреннее строение разрывов является следствием главных особенностей их развития. В тектонофизике выяснено, что формирование наблюдаемых сейчас разрывов состоит из нескольких этапов, на протяжении каждого из которых на данную часть земной коры действовала определенная система усилий. В течение одного этапа усилия неравномерны, и поэтому рост разрыва происходит в виде многократных импульсов, которые геологи часто называют подвижками. Одна подвижка в наиболее общем случае состоит из следующих стадий: 1) возникновение сети мелких подготовительных трещин; 2) объединение части трещин в единую волнистую поверхность разрушения и возникновение сопряженных с нею поверхностей скалывания; при этом

происходит основное изменение напряженного состояния окружающих пород; 3) главное смещение по относительно крупной поверхности разрушения, которое вызывает образование сопутствующих мелких трещин, связанных с трением между крыльями разрыва; 4) длительное скольжение вдоль разрыва; 5) залечивание образовавшихся полостей минеральным веществом (образование жил); при этом восстанавливается сплошность среды и усиливается неоднородность строения данного участка земной коры (Гзовский, 1970).

Тектонофизический анализ поверхностей разрушения, составляющих зону разрывов, позволяет восстанавливать сложную историю ее формирования и породивших ее усилий.

### *Элементы разрыва*

Полное математическое описание разрыва, особенно в виде уравнений, представляет чрезвычайно сложную задачу, оно весьма громоздко и вряд ли целесообразно. Основное значение имеет геометрическое изображение разрыва в более или менее упрощенном виде. Наименьшим упрощением является аппроксимация в виде зоны разрывов, большим — в форме одной волнистой поверхности и максимальным — в виде плоскости.

Характерными элементами зоны разрыва служат: *общая протяженность* зоны по простиранию ( $L$ ), *средняя протяженность* полуволн или расстойний между соседними изломами зоны ( $L$ ), *размах волнистости* зоны ( $W$ ), *мощность* зоны ( $M$ ), *протяженность* зоны по падению ( $D$ ).

Таким образом очерчиваются общие контуры зоны. Далее следуют элементы, характеризующие ее внутреннее строение.

*Главная поверхность* — та из поверхностей разрушения, по которой произошло наибольшее смещение. Она часто приближена к одной из границ зоны разрывов. На рис. 45, б, в главная поверхность указана утолщенной линией. Форму главной поверхности лучше всего передают изолинии ее высоты (глубины).

*Срединная поверхность* мысленно проводится таким образом, чтобы сумма отклонений от нее обеих границ зоны была бы минимальной. Она приобретает особенно большое значение, когда распределение смещений по отдельным поверхностям разрушения неизвестно. Так, например, обстоит дело со многими зонами разрывов, устанавливаемыми на глубине по скоплениям гипоцентров землетрясений. Форма срединной поверхности лучше всего изображается изолиниями ее высоты (глубины). Сглаживающая срединная поверхность может быть проведена и по отношению к одной поверхности разрыва, обладающей значительной волнистостью.

*Условная плоскость*, служащая наибольшим упрощением структуры разрыва. Ее следует проводить так, чтобы сумма отклонений границ зоны от нее была бы минимальной. Можно также провести ее с минимальной суммой отклонений от главной поверхности. Для изображения условной плоскости достаточно показать линию ее пересечения с рельефом местности и указать направление и угол падения. Для практических целей и ряда геометрических построений имеет смысл провести также прямые линии равной глубины ее залегания.

*Экстраполяционная плоскость*, являющаяся продолжением на глубину (или наверх) того небольшого участка разрыва, который нам удалось наблюдать и представить в виде плоскости. На многих геологических профилях и предварительных структурных картах разрывы изображаются в виде таких плоскостей. В ходе последующего вскрытия разрыва горными выработками может оказаться, что он систематически и сильно отклоняется от экстраполяционной плоскости.

*Элементы залегания* перечисленных плоскостей, т. е. азимуты и углы их падения, служат весьма важными характеристиками разрыва.

Поверхности и плоскости разрыва, изображенные изолиниями **высоты (глубины)** их залегания, используются как основа многих геометрических построений, имеющих практическое и теоретическое значение. Они необходимы для установления следующих элементов разрыва, которые характеризуют произошедшее смещение разделенных участков земной коры, именуемых крыльями разрыва.

*Направление перемещения* по разрыву. Если мы можем обнаружить на противоположных крыльях около самого разрыва две точки, которые до возникновения разрыва располагались одна рядом с другой, то соединяющая их прямая указывает направление перемещения крыльев. Часто говорят об относительном направлении перемещения, условно считая одно крыло неподвижным. Однако существует немало разрывов, у которых устанавливается абсолютное направление перемещения — выясняется, какое из крыльев поднималось или опускалось относительно уровня моря. Многие разрывы, особенно крупные, развиваются длительно, многочисленными импульсами, в течение ряда этапов. Поэтому необходимо различать направление перемещения при одном импульсе и направление общего суммарного перемещения крыльев. Наконец, рассматривая зону разрывов, следует ожидать различные направления перемещения по разным поверхностям разрушения, входящим в данную зону. Ниже будут указаны методы выявления направления перемещения.

Направление перемещения может быть различным образом ориентировано относительно поверхности разрыва. Если оно совпадает с ней, разрыв называется сколом. Если оно перпендикулярно поверхности — отрывом. Существуют разрывы с перемещением, направленным наискось к поверхности разрушения. Особого названия они еще не получили. Данный вопрос относится к физике тектонических разрывов. Соотношение между направлением перемещения и элементами залегания поверхности разрыва — направлениями его падения и простираения — служит основным признаком в рассматриваемой ниже геометрической классификации разрывов.

*Амплитуда перемещения* равна длине отрезка, который соединяет две точки, лежащие в разных крыльях разрыва и находившиеся до разрушения одна рядом с другой. Следует различать амплитуды отдельных импульсов ( $a_1, a_2 \dots a_n$ ) и суммарную амплитуду всех перемещений по данной поверхности разрушения ( $a$ ), которая получается из предыдущих путем их векторного суммирования. Далее мы будем отличать суммарную амплитуду по отдельной поверхности разрушения ( $a$ ) от общего перемещения по зоне разрывов в целом ( $A$ ). Соотношения между ними могут быть разными. Важно, что одна и та же крупная зона разрывов из-за длительности своего развития характеризуется различной величиной амплитуды (и даже направлением перемещения), измеренной по разным структурным поверхностям, пересеченным данной зоной. На рис. 46 приведен схематизированный профиль через Главную Каратаускую зону разрывов в пределах Байджансайского района. Прослеживая подошву верхнего девона, мы констатируем относительную опущенность крыла с выходами протерозоя и суммарную амплитуду зоны  $A_p$ . Однако, рассматривая кровлю протерозоя, приходится делать обратный вывод о поднятости того же крыла с амплитудой  $A_{pt}$ .

Для того чтобы отличать разрывы разной величины, геологи часто прибегают к терминам трещина, разрывное смещение, разлом и др. Однако это нередко относится к объектам различных масштабов (от месторождения и меньше до крупного региона). Например, трещинами именуются разрывы, амплитудой перемещения которых можно пре-

небрежь при используемом масштабе изображения. В итоге один и тот же разрыв (хотя бы Главный Каратауский) на карте полушарий будет считаться трещиной, на карте Средней Азии — разрывным смещением, а на карте Байджансайского района его, подчеркивая большую величину и сложность строения, назовем мы разломом. В силу неопределенности такой терминологии необходимо иметь систему терминов, характеризующих не относительную, а абсолютную величину

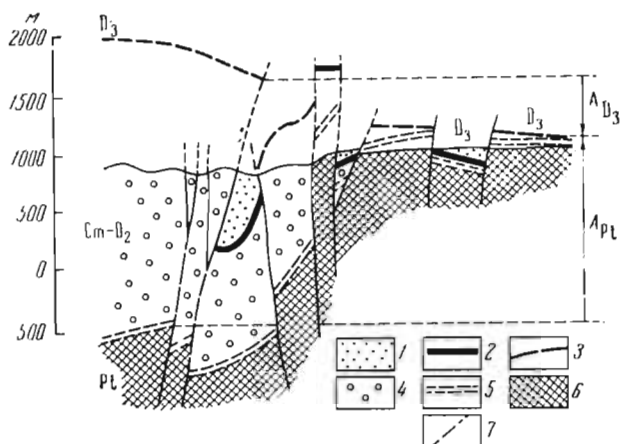


Рис. 46. Схематизированный профиль через крупный тектонический разрыв

1 — верхнедевонские отложения ( $D_3$ ); 2 — подошва верхнего девона под землей; 3 — подошва верхнего девона до размытия; 4 — отложения, отделяющие верхний девон от протерозоя ( $Cm-D_2$ ); 5 — кровля протерозоя; 6 — породы протерозоя ( $Pt$ ); 7 — тектонические разрывы;  $A_{D_3}$  — амплитуда перемещения подошвы верхнего девона по крупному разрыву;  $A_{Pt}$  — амплитуда перемещения кровли протерозоя по крупному разрыву

разрывов. В качестве основной характеристики в такой системе наиболее удобна суммарная амплитуда ( $a$  или  $A$ ). Автор предлагает, в зависимости от амплитуды, различать: 1) скрытоамплитудные трещины — амплитуда не поддается измерению даже с помощью оптического микроскопа; 2) мелкоамплитудные трещины — амплитуда измеряется и не превышает 1 мм; 3) среднеамплитудные трещины — от 1 мм до 1 см; 4) крупноамплитудные трещины — от 1 до 10 см; 5) мелкоамплитудные разрывные смещения — от 10 см до 10 м; 6) среднеамплитудные разрывные смещения — от 10 до 100 м; 7) крупноамплитудные разрывные смещения — от 100 до 1000 м; 8) весьма крупноамплитудные разрывные смещения — более 1000 м.

**Составляющие (компоненты) перемещения.** Рассматривая перемещение как прямую линию с определенной длиной и расположением в пространстве, мы можем разложить ее, как вектор, на составляющие. Наибольший интерес для практики и в целях геометрической классификации разрывов имеют его составляющие: вертикальная, горизонтальная вдоль простирания разрыва и горизонтальная вкрест простирания разрыва.

Следующие элементы разрыва характеризуют его соотношения с внутренней структурой рассеченного им массива горных пород.

**Отход (условная амплитуда).** В практике разведки и разработки пластовых месторождений часто сравнивают между собой расположение в пространстве двух плоскостей, с которыми совпадают вблизи от разрыва разьединенные им части одного пласта. Кратчайшее расстояние между этими плоскостями (по нормали) называют нормальной или

стратиграфической условной амплитудой, расстояние по вертикали — вертикальной, расстояние по горизонтали — горизонтальной условной амплитудой и кратчайшее расстояние вдоль разрыва — полной условной амплитудой.

Все эти величины не дают физической характеристики разрыва. Они являются условными, так как вектор, принимаемый за вектор перемещения одного крыла относительно другого, соединяет две находящиеся в разных крыльях точки, которые до возникновения разрыва не располагались рядом. Такое их положение может оказаться лишь случайным совпадением в редких случаях. Этот заведомо упрощенный подход к определению амплитуды разрыва значительно облегчает многие горно-геометрические построения и дает результаты, вполне удовлетворяющие требованиям горной практики (Рыжов, 1964). Для того чтобы не смешивать истинную амплитуду с условной, автор предлагает последнюю называть не амплитудой, а отходом: нормальным полным, горизонтальным и вертикальным, как это делается в ряде работ по горному делу.

Важно иметь в виду, что рассеченный разрывом моноклинально залегающий пласт в непосредственной близости от разрыва может быть практически недеформированным (хрупкие разрывы) или сильно деформированным (пластические, или вязкие разрывы). Около разрыва пласты отгибаются либо в сторону относительного перемещения крыла, либо в противоположном направлении. Такие загнутые около разрыва части пластов, если по ним производить геометрические построения, приводят к сильно искаженным оценкам величины отхода.

*Линия скрещения.* Если разрыв пересекает и заметно смещает структурную поверхность, прослеживающуюся через оба его крыла, можно провести две линии пересечения разрыва с этой структурной поверхностью. Они называются линиями скрещения. Для их нахождения используются разные методы. Один из них заключается в сопоставлении изолиний высоты залегания разрыва с изолиниями высоты залегания структурной поверхности. Линия скрещения является геометрическим местом точек пересечения равновысотных изолиний разрыва и структурной поверхности.

*Зияние.* Рассеченные разрывом части пласта после перемещения могут расположиться таким образом, что между линиями скрещения появится промежуток, в котором горные выработки не будут встречать этого пласта. Такое вызванное разрывом местное отсутствие пласта называется зиянием. Различают зияние в вертикальном и горизонтальном направлениях.

*Сдвоение.* Другим результатом разрыва может оказаться повторное пересечение горной выработкой одного и того же пласта. В этих случаях говорят о сдвоении, которое бывает в вертикальном и горизонтальном направлениях.

Зияние и сдвоение имеют большое значение при поисковых, разведочных и эксплуатационных работах на месторождениях полезных ископаемых.

### ***Безразмерные габаритные коэффициенты разрыва***

Для чисто геометрического сопоставления разрывов различной величины, а также в целях акцентирования морфологических особенностей разрывов одинаковой величины имеет смысл привлекать безразмерные коэффициенты, являющиеся отношениями характеристик с одинаковой размерностью. В качестве эталона длины в большинстве случаев удобно брать длину зоны разрыва по простиранию ( $L$ ), так как она выявляется наиболее часто и достаточно.

Коэффициентом рассеянности зоны разрыва  $K_M$  является отношение мощности зоны  $M$  к общей протяженности  $L$ .

$$K_M = \frac{M}{L}. \quad (1)$$

Эта величина, например, для Курило-Камчатской зоны разрыва составляет  $\frac{50 \text{ км}}{1500 \text{ км}} \approx 3 \cdot 10^{-2}$ .

В Гиндукушской зоне глубокофокусных землетрясений имеем  $\frac{150 \text{ км}}{700 \text{ км}} \approx 2 \cdot 10^{-1}$ . Для зоны Главного Ферганского разрыва, пересекающего наискось Тянь-Шань,  $\frac{15 \text{ км}}{200 \text{ км}} \approx 1 \cdot 10^{-1}$ . Разрывы с большой величиной этого коэффициента называются рассеянными, а с малой — сосредоточенными. Какие именно величины считать малыми и большими — предстоит установить.

Коэффициент погруженности зоны разрыва —  $K_D$  составляет отношение протяженности разрыва по падению  $D$  к его общей протяженности по простиранию  $L$ :

$$K_D = \frac{D}{L}. \quad (2)$$

Для той же Курило-Камчатской зоны разрывов, прослеживающейся на глубину до 700 км по гипоцентральной землетрясений, он равен  $\frac{700 \text{ км}}{1500 \text{ км}} \approx 5 \cdot 10^{-1}$ . Для Гиндукушской зоны глубокофокусных землетрясений  $\frac{250 \text{ км}}{750 \text{ км}} \approx 3 \cdot 10^{-1}$ . Зона разрыва, ограничивающая с юга Тянь-Шань, не прослеживается по очагам землетрясений глубже 40–50 км при длине 1500 км. Следовательно, для нее коэффициент погруженности равен  $\frac{50 \text{ км}}{1500 \text{ км}} \approx 3 \cdot 10^{-2}$ , т. е. в 10 раз меньше, чем для Гиндукушской и Курило-Камчатской зон.

Коэффициент волнистости зоны разрыва —  $K_W$  — это отношение размаха волнистости зоны  $W$  к протяженности полуволн  $L$ :

$$K_W = \frac{W}{L}. \quad (3)$$

Принято считать, что сдвиги должны обладать существенно меньшей величиной данного отношения, чем взбросы и сбросы.

Коэффициент амплитудности зоны разрыва —  $K_A$  есть отношение общей амплитуды зоны  $A$  к общей протяженности ее по простиранию  $L$ :

$$K_A = \frac{A}{L}. \quad (5)$$

Далее возможно рассмотрение отношений между амплитудой и мощностью, амплитудой и погруженностью зоны разрывов.

Коэффициент нелинейности —  $K_n$ . Для характеристики волнистости отдельного разрыва можно использовать отношение среднего размаха волны  $\omega$  к средней длине полуволны  $l$ :

$$K_n = \frac{\omega}{l}. \quad (4)$$

Данный коэффициент является тангенсом угла среднего отклонения простирания разрыва от прямой линии. Можно вычислить также



коэффициент нелинейности разрыва по падению. Результаты при этом получаются иными. В Байджансайском районе Каратау у различных по происхождению разрывов коэффициент нелинейности по простиранию имеет величину от  $5 \cdot 10^{-2}$  до  $1 \cdot 10^{-1}$ .

*Коэффициент интенсивности развития разрывов внутри зоны* —  $I_F$  представляет собой сумму абсолютных величин амплитуд всех разрывов данной зоны  $\Sigma |a|$ , деленную на мощность зоны  $M$ :

$$I_F = \frac{\Sigma |a|}{M}. \quad (6)$$

Для приведенного на рис. 46 профиля через Главную Каратаускую зону разрывов  $I_F=2$ . Можно в одном коэффициенте интенсивности  $I_{gF}$  отразить совокупное проявление складок  $I_g$  и разрывов  $I_F$ . Для этого расстояние между краями профиля, измеренное вдоль одной структурной поверхности (включая амплитуды всех разрывов, которые смещают эту поверхность), делится на длину прямой, соединяющей концы профиля. Для Главной Каратауской зоны разрывов  $I_{gF}=4$ .

Фактический материал о безразмерных коэффициентах разрывов еще не обобщался. Это — дело ближайшего будущего.

### *Измерение истинной амплитуды разрыва*

При разведке и разработке месторождений, в которых скопления полезных ископаемых напоминают линзы, цилиндры и другие тела, непреходящие на плоские плиты, для практики необходимо знать истинное направление и величину перемещения одного крыла разрыва относительно другого. Это же требуется и при физическом изучении тектонических разрывов. Истинное направление и величина перемещения становятся ясными, если нам удастся найти расположение двух таких прилежащих к разрыву точек (находящихся в разных крыльях), которые до возникновения разрыва лежали рядом. Пути нахождения таких точек разнообразны.

А. А. Трофимов (1958) предложил и осуществил изучение распределения различных характеристик горных пород в каждом крыле исследуемого разрыва. Ими могут быть, например, зольность углей, песчаность известняков, концентрация рассеянных рудных зерен и т. п. Распределение величины рассматриваемой характеристики изображается изолиниями на поверхности обреза разрывом одного крыла. Затем также поступают и с поверхностью, обрезающей другое крыло. Рассматривая узоры, образуемые изолиниями на обеих обрезах, можно найти участки пород, располагавшиеся первоначально рядом один с другим и смещенные разрывом. Соединив прямыми пары таких участков, разобщенных разрывом, мы найдем направление и величину суммарного перемещения по разрыву. Следует помнить, что наблюдаемые в природе значительные перемещения, достигающие десятков, сотен и тысяч метров, в действительности являются суммарным результатом многочисленных небольших по величине отдельных смещений, происходивших по различным направлениям.

И. А. Молчанов (1935) для определения истинных направления и амплитуды смещения предложил использовать любые структурные линии, пересеченные и смещенные разрывом. Роль таких линий могут играть шарниры складок, линии пересечения пластов, даек, жил, границ крупных интрузий. Итак, если имеются две какие-либо структурные плоскости, пересекающиеся между собой по прямой линии, то смещенные разрывом части этой линии дают возможность найти истинное направление и величину амплитуды смещения. Выполняемые при этом

геометрические построения были рассмотрены И. А. Молчановым (1935), А. С. Забродиним (1951), И. П. Кушнаревым (1960) и В. Д. Парфеновым. Построения разделяются на три этапа, которые распадаются на ряд операций.

*Первый этап.* В каждом из крыльев разрыва отмечается одна и та же пара различно наклоненных структурных плоскостей. В каждом крыле находится линия пересечения этих двух плоскостей.

*Второй этап.* Определяются точки, в которых найденная линия пересекается с плоскостью разрыва, при подходе к ней как со стороны одного, так и со стороны другого крыла. Прямая, соединяющая эти точки, является истинной суммарной амплитудой.

*Третий этап.* Определяются направление и величина истинной суммарной амплитуды. Производится разложение ее на различные, представляющие для нас интерес составляющие: вертикальную, горизонтальную вкрест простирания разрыва и горизонтальную вдоль простирания разрыва.

На конкретном примере рассмотрим два метода определения истинной амплитуды разрыва. Исходным фактическим материалом служит геологическая карта, на которой показаны выходы разрыва и смежных им двух различно наклоненных структурных поверхностей. На рис. 47, а такими поверхностями являются подошва известнякового маркирующего пласта (падающего по азимуту  $135^\circ \angle 35^\circ$ ) и граница диабазовой дайки с ее лежащим боком (падение на запад  $270^\circ \angle 60^\circ$ ). Нам должна быть известна указанная на карте высота обнажений *A, B, C, D*, в которых рассматриваемые структурные поверхности срезаются разрывом (500, 600, 700 и 800 м, соответственно). Все эти исходные данные геолог всегда может получить в поле. Задача определения истинной амплитуды решается в том случае, если разрыв и прилегающие к нему части рассматриваемых структурных поверхностей можно приближенно заменить плоскостями.

*Первый метод.* Зная масштаб карты, высоту различных выходов разрыва, а также азимут и угол его падения (в данном случае  $180^\circ \angle 60^\circ$ ), строим на карте изогипсы его плоскости. Их положение на плане определяется углом падения разрыва, высотами обнажений разрыва в точках *A, B, C* и *D*, масштабом карты и произвольно выбираемым расстоянием между изогипсами по высоте (сечением), которое мы в данном случае приравняем 100 м. Такое же сечение принимается для изогипс подошвы известнякового пласта и лежащего бока дайки. Угол  $35^\circ$  наклона известняка определяет расстояние в 150 м между его стратозогипсами (см. рис. 47, б). Угол  $60^\circ$  наклона дайки приводит к 50 м расстояния между изогипсами ее лежащего бока (см. рис. 47, в).

Для того чтобы изогипсы не «забивали» одна другую, на отдельном чертеже (см. рис. 47, г) изображаем изогипсы разрыва и структурных поверхностей в одном северном крыле: подошву пласта известняка (начиная с точки *A*) и лежащего бока дайки (от точки *D*). Через точки пересечения одноименных изогипс разрыва и известняка проходит линия их скрещения  $AS_N$ , за которую на юг пласт известняка не продолжается. Точки пересечения одноименных изогипс разрыва и дайки лежат на линии их скрещения  $DS_N$ , южнее которой дайка не распространяется. Пересечение одноименных изогипс пласта известняка и дайки определяет линия  $S_N E$  скрещения известняка и дайки. Точка  $S_N$  пересечения этой линии с разрывом необходима для определения истинной амплитуды смещения по разрыву. Эта точка является «тройной» в том смысле, что ее высота ( $-150$  м) будет одинаковой по какой бы из трех систем изогипс мы ее ни определяли.

Такие же построения производим для южного крыла разрыва (см.

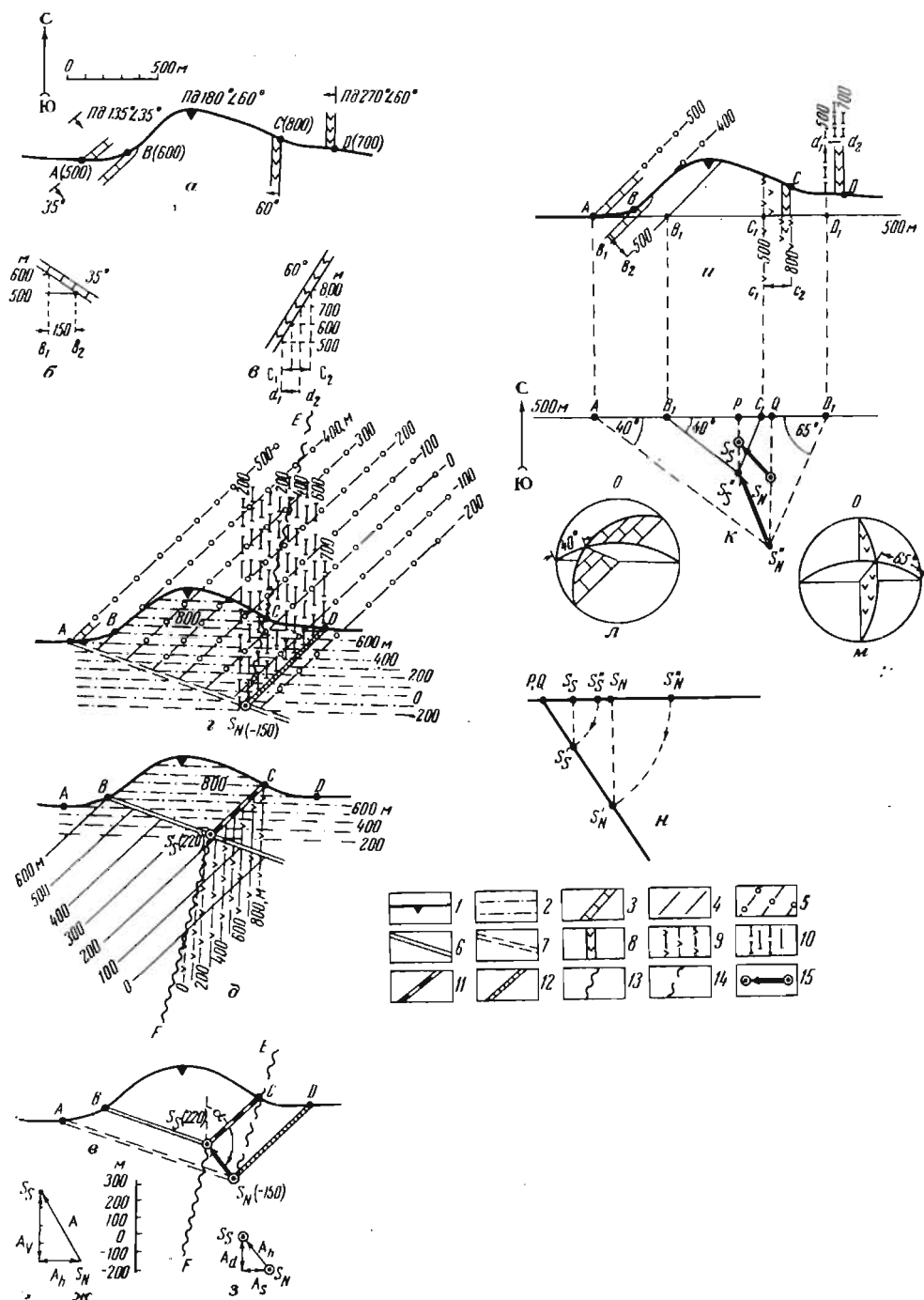


Рис. 47. Схема определения истинной амплитуды смещения по разрыву

1 — выход разрыва; 2 — изогипсы плоскости разрыва; 3 — выходы пласта известняка; 4 — изогипсы подошвы пласта известняка в южном крыле разрыва; 5 — то же, в северном крыле; 6 — линия скрещения разрыва с подошвой известняка в южном крыле разрыва; 7 — то же, в северном крыле; 8 — выход дайки; 9 — изогипсы лежачего бока дайки в южном крыле; 10 — то же, в северном крыле; 11 — линия скрещения разрыва с лежачим боком дайки в южном крыле; 12 — то же, в северном крыле; 13 — линия скрещения подошвы известняка с лежачим боком дайки в южном крыле; 14 — то же, в северном крыле; 15 — горизонтальная проекция истинной амплитуды смещения. Буквенные обозначения поясняются в тексте

рис. 47, д). Изогипсы известняка строим от точки  $B$ , изогипсы дайки — от точки  $C$ . Линия  $BS_S$  скрещения известняка с разрывом ограничивает распространение известнякового пласта на север.  $CS_S$  — линия скрещения разрыва с дайкой — служит границей последней на севере. Прямая  $FS_S$  получается при пересечении известняка с дайкой, в точке  $S_S$  она обрывается разрывом. Точка  $S_S$  является «тройной»: в ней сходятся три линии скрещения. По всем трем системам изогипс точка  $S_S$  имеет одну высоту (220 м). До возникновения разрыва точки  $S_S$  и  $S_N$  сливались в одну.

На рис. 47, е показано наблюдаемое сейчас положение точек  $S_N$  и  $S_S$ , а также сходящихся в них линий скрещения в обоих крыльях разрыва. Прямая, соединяющая  $S_N$  с  $S_S$ , есть горизонтальная проекция  $A_h$  истинной амплитуды разрыва  $A$ . Построим профиль вдоль линии  $S_N S_S$  (см. рис. 48, ж). Разница в высоте точек  $S_N$  и  $S_S$  равна вертикальной составляющей полной амплитуды  $A_v = 370$  м. Изображение линии  $S_N S_S$  на плане  $A_h = 240$  м разлагаем на две горизонтальные составляющие  $A_s = 150$  и  $A_d = 190$ . Первая из них параллельна простиранию разрыва, а вторая — его падению (см. рис. 47, з). Перечисленные составляющие связаны между собой и с полной амплитудой  $A$  формулами

$$A = \sqrt{A_h^2 + A_v^2} = 460 \text{ м}, \quad (1)$$

$$A_h = \sqrt{A_s^2 + A_d^2} = 240 \text{ м}. \quad (2)$$

Тангенс угла  $\delta$  наклона линии смещения  $S_N S_S$ :

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A_v}{A_h} = \frac{370}{240} = 1,5 \quad (3)$$

Значит, угол  $\delta = 58^\circ$ . Азимут  $\alpha$  наклона этой линии измеряется на карте. Он равен  $140^\circ$ .

*Второй метод.* В. Д. Парфенов предложил определять истинное смещение по разрыву, используя стереографическую проекцию. Сначала проводим одну опорную изогипсу разрыва. Удобна изогипса, близкая к наиболее низким обнажениям разрыва. Поэтому проведем ее через точку  $A$  (см. рис. 47, и). Затем находим точки пересечения опорной изогипсы разрыва с одноименными изогипсами известняка ( $A$ ) и дайки ( $D_1$ ), залегающих в северном крыле, и известняка ( $B_1$ ) и дайки ( $C_1$ ), подходящих к разрыву из южного крыла.

Рассмотрим плоскость, по которой лежачее крыло срезано разрывом. Совместим ее с плоскостью чертежа и мысленно отбросим висячее крыло. Проведем построенную ранее линию  $AB_1C_1D_1$  (фиг. 47, к). Из точки  $A$  вниз вправо должна проходить линия пересечения подошвы известняка с плоскостью разрыва. Угол, который эта линия составляет с  $AB_1C_1D_1$ , найдем, используя стереографическую проекцию (см. рис. 47, л). На нее наносим плоскость разрыва, наклоненную на  $180^\circ$  под углом  $60^\circ$ , и подошву известняка, падающую на  $135^\circ$  под углом  $35^\circ$ . Линия их пересечения на диаграмме образует с горизонтальной линией простирания разрыва угол  $40^\circ$ . (Эта величина отсчитывается по стереографической сетке вдоль дуги большого круга, изображающей разрыв). Поэтому из точки  $A$  (см. рис. 47, к) проводим прерывистую линию под углом  $40^\circ$ .

На рассматриваемую плоскость, срезающую лежачее крыло разрыва, выходит также линия пересечения разрыва с дайкой, проходящая через точку  $D_1$ . На стереографической диаграмме (см. рис. 47, м) нанесены плоскости разрыва с падением  $180^\circ$  под углом  $60^\circ$  и дайки с падением  $270^\circ$  под углом  $60^\circ$ . Линия их пересечения образует с линией простирания разрыва угол около  $65^\circ$ . Проведем на рис. 47, к под таким

углом прерывистую линию через точку  $D_1$ . Эта линия пересекается с прямой, выходящей из точки  $A$ . Обозначим  $S'_N$  точку пересечения двух построенных прямых. Индекс  $N$  отмечает, что данная точка лежит в северном крыле разрыва. Она указывает в каком месте со стороны северного крыла к разрыву подходит линия пересечения плоскости подошвы известняка с плоскостью контакта дайки с ее лежащим боком.

Теперь надо найти где находится точка, аналогичная  $S'_S$  в южном крыле разрыва. Прямая, соединяющая эти точки, даст нам истинные направление и величину перемещения по разрыву. Будем смотреть на рис. 47, *к*, как на изображение плоскости, обрезающей южное крыло разрыва. На ней через точку  $B_1$  должна проходить линия пересечения разрыва с подошвой пласта известняка. На рис. 47, *л* уже было определено, что эта линия проходит под углом  $40^\circ$  к простиранию разрыва. Проводим ее сплошной линией. Через точку  $C_1$  следует провести прямую пересечения разрыва с контактом дайки. На рис. 47, *м* было найдено, что она образует с простиранием разрыва угол около  $60^\circ$ . Строим ее и изображаем сплошной линией. Точка  $S'_S$  пересечения двух сплошных прямых является искомым местом, в котором линия пересечения дайки с известняком подходит к разрыву с юга.

Прямая, соединяющая точки  $S'_N$  и  $S'_S$ , является истинной величиной амплитуды суммарного смещения по разрыву. В результате этого смещения точка  $S'_S$  южного крыла оказалась выше точки  $S'_N$  северного крыла. Поскольку разрыв падает на юг, такое смещение является взбросовым. Однако крылья перемещались не строго вкрест простирания разрыва. Небольшое отклонение от этого направления обязывает нас назвать разрыв правым сдвиго-взбросом. Правым, так как прослеживая линию пересечения известняка с дайкой из одного крыла в другое, мы, перейдя через разрыв, должны повернуть направо.

Осталось, используя рис. 47, *к*, содержащий полную амплитуду, определить азимут и угол падения истинной амплитуды и ее вертикальную и горизонтальные составляющие. Для этого рис. 47, *к* надо повернуть вокруг линии простирания  $AB_1C_1D_1$  так, чтобы плоскость разрыва приобрела свойственный ей наклон в  $60^\circ$ , и после этого найти проекции точек  $S'_N$  и  $S'_S$  на горизонтальную и вертикальную плоскости.

Представим себе изображенную на рис. 47, *н* вертикальную плоскость, проходящую перпендикулярно простиранию разрыва через точки  $Q$  и  $S'_N$  на рис. 47, *к*. От точки  $Q$  на рис. 47, *н* в горизонтальном направлении отложим отрезок  $QS'_N$  взятый с рис. 47, *к*. Затем осуществим поворот этого отрезка из горизонтального положения в наклонное под углом  $60^\circ$  и найдем точку  $S'_N$ . Спроектируем ее вверх на горизонтальную плоскость — так получаем  $S_N$ . Значит, на геологическую карту точка  $S'_N$  проектируется с наклонного разрыва на расстоянии  $QS'_N$ . Это расстояние отложим на рис. 47, *к* вниз от точки  $Q$  по нормали к линии  $AD_1$  и поместим точку  $S_N$  на данном чертеже.

Действуя в той же последовательности, проведем вертикальную плоскость по линии  $PS'_S$  на рис. 47, *к*. Пометим на рис. 47, *н* точку  $P$  (она совпадает здесь с  $Q$ ). Отложим горизонтально отрезок  $PS'_S$  взятый с рис. 47, *к*. Переведем этот отрезок в наклонное положение под углом  $60^\circ$  и отметим точку  $S'_S$ . Ее проекцию на горизонтальную плоскость обозначим  $S_S$ . Так находится длина отрезка  $PS'_S$ , который откладывается на рис. 47, *к* вниз от точки  $P$  по нормали к линии  $AD_1$ . Отметим точку  $S_S$  на рис. 47, *к*.

Итак, мы нашли проекции  $S_N$  и  $S_S$  на геологическую карту двух точек  $S'_S$  и  $S'_N$  лежащих на концах линии, изображающей перемеще-

ние одного крыла (будем считать южного) относительно другого (северного). Обе эти точки лежат в плоскости разрыва. Различие между ними по высоте, видное на рис. 47, *н*, есть вертикальная составляющая амплитуды, равная (согласно масштабу карты) 380 м. Горизонтальная составляющая истинной амплитуды равна отрезку  $S_N S_S$  на рис. 47, *к*. Эту составляющую можно разложить на горизонтальное смещение вдоль простирания разрыва и горизонтальное смещение вкрест простирания разрыва, как на рис. 47, *з*.

Азимут  $\alpha$  наклона вектора истинного смещения определяется на рис. 47, *к* по углу между направлением на север и линией  $S_S S_N$ . Он равен  $140^\circ$ . Угол падения вектора можно найти, построив прямоугольный треугольник, у которого известны горизонтальный катет, длина отрезка  $S_S S_N$  и гипотенуза (отрезок  $S_S^* S_N^*$ ).

Мы рассмотрели два метода измерения истинной амплитуды разрыва для того, чтобы результаты использования одного метода могли быть проверены с помощью другого.

Необходимо помнить, что рассмотренные геометрические построения являются строгими лишь в той мере, в какой можно разрыв и смещенные им структурные поверхности считать плоскими. В действительности и разрыв, и смещенные структурные поверхности не являются абсолютно плоскими. Поэтому геометрически строгое по выполнению построение дает приближенный результат тем более грубый, чем сильнее природные поверхности отличаются от плоскостей.

Другое осложнение при определении истинной амплитуды возникает из-за того, что одна и та же структурная поверхность в первом крыле разрыва часто имеет один азимут и угол падения, а во втором крыле — несколько иные.

Осложнения могут быть вызваны также разным возрастом пар анализируемых поверхностей (слоев, интрузий, даек), которые формировались одновременно с увеличением смещения по разрыву.

Наконец, производя определение истинной амплитуды в разных частях одного и того же разрыва, мы всегда получаем различные результаты. Это вызывается тем, что крылья разрыва перемещаются не как абсолютно твердые тела, а испытывают значительные пластические деформации. Поэтому результат каждого определения амплитуды следует относить не ко всему разрыву в целом, а только к тому его месту, в котором производилось геометрическое построение.

В качестве примера используем результаты специального исследования по определению истинной амплитуды одного из крупных рудопосных разрывов в Средней Азии — Бирюзового разрыва в Карамансарских горах Тянь-Шаня. В. Д. Парфенов, выполняя это исследование, провел детальную геологическую съемку прекрасного обнаженного района. К разрыву, имеющему длину около 50 км, подходят следующие срезаемые им структурные поверхности, использованные при построениях: 1) восточный контакт зоны ороговикования у гранодиоритового массива; 2) северная граница Джамантай-Канташского широтного горста; 3) северная граница Окуртауского широтного горста; 4) подошва осадочного горизонта токмакской толщи нижнего карбона; 5) подошва порфиритового горизонта токмакской толщи нижнего карбона; 6) подошва осадочного горизонта джамансайской толщи среднего карбона; 7) подошва липаритовой караханской толщи среднего карбона; 8) тектонический контакт алмалысайской порфиритовой толщи верхнего карбона с караташской осадочно-порфиритовой толщей верхнего карбона; 9) подошва порфиритового горизонта караташской толщи.

Взяв различные пары этих поверхностей, В. Д. Парфенов нашел

величины составляющих истинной амплитуды: вертикальной и горизонтальной вдоль простирания разрыва, приведенные в табл. 1.

Таблица 1  
Составляющие амплитуды Бирюзового сбросо-сдвига,  
определенные по различным структурным поверхностям

Пары структурных поверхностей	Составляющие амплитуды, м		Угол между вектором смещения и простиранием, градусы
	вертикальная	горизонтальная вдоль простирания разрыва	
6—7	100 + 350	1800 ÷ 2500	3,5 + 8,5
2—4	650 + 1200	2200 + 2500	18 + 26
2—5	750 + 1050	2100 ÷ 2500	20 + 24
2—7	450 + 500	2250 ÷ 2550	11 + 13
1—6	50 + 200	2500 + 3200	2,5 ÷ 4
8—9	50 + 300	2500 + 2700	0 + 7

Несомненное превышение горизонтальной составляющей вдоль простирания разрыва над вертикальной составляющей указывает на то, что Бирюзовый разрыв является крупным сбросо-сдвигом (левым) с горизонтальным смещением до 1800 ÷ 3200 м.

Обращает на себя внимание то, что горизонтальная составляющая амплитуды вдоль простирания разрыва оказывается приблизительно одинаковой при использовании и более древних, и более молодых стратиграфических поверхностей, а также контакта гранодиоритовой интрузии и горстов, поперечных к Бирюзовому разрыву. Из этого следует, что крупное сбросо-сдвиговое смещение произошло после накопления толщ, использованных для геометрических построений, после внедрения гранодиоритов и после образования широтных разрывов.

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТИПЫ ОТДЕЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ

**Основные морфологические типы разрывов.** Единственным признаком для их выделения нужно считать истинное направление относительного перемещения крыльев нарушения. Сохраняя этот широко распространенный принцип и учитывая все предложения, внесенные в прошлое различными исследователями, можно выделять:

1) разрывы, всячие крылья которых испытали относительные перемещения вверх по направлению восстания их швов. Для разрывов, падающих под углом 45° и круче, имеет смысл сохранить термин *взброс*. Для разрывов, падающих под углом менее 45°, широко распространено название *надвиг*. Сдвиговая и раздвиговая составляющие полюной амплитуды у взбросов и надвигов ничтожно малы по сравнению со взбросовой составляющей;

2) разрывы, всячие крылья которых испытали относительное перемещение вниз по направлению падения их швов, чаще всего называют *сбросами*. При вертикальном положении разрыва нельзя выделить ни лежащего, ни всячего крыла. Такие нарушения, лежащие на границе между взбросами и сбросами, можно условиться относить к сбросам и называть *вертикальными сбросами*. Сбросовая составляющая практически равна амплитуде сброса;

3) разрывы, крылья которых испытали горизонтальные относительные перемещения, удобно обозначить наиболее обычным для них названием *сдвиги*. Среди сдвигов различают левые и правые в зависимости от того в какую сторону перемещалось крыло, находящееся на противоположной стороне разрыва по отношению к наблюдателю. Полная амплитуда сдвига практически совпадает со сдвиговой составляющей;

4) разрывы с перемещениями в перпендикулярном к шву направлении, у которых полная амплитуда совпадает с раздвиговой составляющей, называют *раздвигами*.

Перемещения по разрывам каждого из перечисленных типов параллельны или почти параллельны одному из трех координатных направлений: падению шва, простиранию шва и нормали ко шву. Эти разрывы будут ниже называться разрывами с «чистыми» перемещениями. Условимся относить к ним разрывы, у которых направление перемещения отклоняется от одного из координатных направлений не более чем на  $10^\circ$ .

Широко распространены разрывы со смешанными перемещениями, значительно превосходящими от координатных направлений. У них существенное значение имеют не одна, а две или три составляющие полной амплитуды. Название разрыва со смешанным перемещением получается путем перечисления тех составляющих, на которые может быть разложена его полная амплитуда. Название наибольшей составляющей ставится на последнее место.

Выделение разрывов со смешанными перемещениями, у которых раздвиговая составляющая полной амплитуды соизмерима с другими ее составляющими, оправдывается не формальными соображениями, а тем, что такие разрывы широко распространены в природе и обычно заполнены жильным материалом. Возникают они либо в результате относительного перемещения крыльев, совпадающего по направлению с вектором наблюдающейся сейчас полной амплитуды, либо вследствие разновременных перемещений, имевших сначала одно, а затем другое направление. Первый тип смешанных перемещений наблюдается, например, у отдельных небольших нарушений в карбонатных породах, создающих в совокупности кулисообразные ряды трещин, заполненных карбонатными жилами. Со вторым типом связаны многие жилы и дайки. Характерные примеры наблюдались автором в Средней Азии. Здесь некоторые палеозойские взбросы в мезозое и кайнозое испытали многократное раскрывание (раздвигание) швов, заполнившихся при этом карбонатными жилами с шестоватой друзовой текстурой. В результате наблюдающееся в настоящее время перемещение является раздвиго-взбросовым.

**Дополнительное разделение разрывных смещений.** Рассмотрим соотношения элементов залегания шва разрыва с рассеченными им слоями. Разрывные смещения вызывают разнообразное изменения расположения слоев в пространстве. Они наиболее часто наблюдаются в плане (дневная поверхность, горизонты горных выработок) или в вертикальном сечении (скважины, шахты).

В горизонтальном сечении вследствие разрывных перемещений могут наблюдаться:

1. Повторение выходов определенных слоев, аналогичное увеличению горизонтальной мощности некоторой пачки слоев (сдвоение).

2. Исчезновение выходов части слоев, что равносильно уменьшению горизонтальной мощности определенной пачки слоев (зияние).

3. Разделение выхода части слоев на разобщенные участки, смещенные один по отношению к другому. В результате таких смещений на некоторых частях горизонтальной плоскости выходы либо вообще отсутствуют (зияние), либо оказываются в удвоенном количестве (сдвоение). Относительные смещения выходов в горизонтальном направлении могут происходить так, что, двигаясь вдоль пласта и пройдя место его срезания разрывом, нужно повернуть направо для того, чтобы найти продолжение того же слоя по другую сторону разрыва (правое смещение выхода слоя). Наряду с правыми бывают и левые смещения выходов слоев.



В вертикальном сечении также наблюдаются выпадение части слоев из разреза скважины или их сдвоение. Направление смещения слоев может быть разным.

Все эти изменения в залегании слоев имеют большое практическое значение при поисковых, разведочных и эксплуатационных работах. Важно подчеркнуть, что в горизонтальном и вертикальном сечениях изменения часто бывают неодинаковыми. Для того чтобы предусмотреть, какие изменения в расположении слоев вызывает каждый разрыв, недостаточно знать, к какому из упоминавшихся выше типов он относится, так как эти изменения определяются не только типом разрыва, но и соотношениями элементов залегания его шва с элементами залегания слоев (рис. 48).

Обращает на себя внимание то, что влияние разрывов на расположение выходов слоев в плане и в вертикальном сечении бывает различным. Сдвоение или зияние в плане совершенно не обязательно должно сопровождаться аналогичным явлением и в вертикальном сечении. Согласные продольные и косые надвиги, взбросы, сбросы и сдвиги вызывают однозначные изменения выходов слоев на горизонтальной плоскости и в вертикальной горной выработке. С несогласными же нарушениями связаны противоположные по знаку изменения.

Необходимо подчеркнуть, что изображенные на рис. 48 закономерности в проявлении зияний и сдвоений справедливы лишь по отношению к горизонтальной плоскости и вертикальной выработке. В наклонных скважинах условия сдвоения слоев или их выпадения зависят от соотношений наклона скважины с наклонами слоев и разрыва. В одном и том же участке рядом с зиянием в вертикальной скважине может происходить сдвоение в наклонной. Могут быть и обратные случаи. Условия проявления различных сочетаний зияний и сдвоений в наклонных и вертикальных скважинах легко определить, пользуясь схемами, приведенными на рис. 48.

Предлагаемая классификация разрывных смещений отличается большой подробностью и, как нам кажется, последовательным применением принципов систематики разрывов, поддерживаемых большинством отечественных геологов.

## ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВА РАЗРЫВОВ

Тектонические разрывы широко распространены в природе. В пределах больших участков коры встречается много однотипных разрывов, подчиняющихся общим закономерностям, благодаря чему многочисленные разрывы в совокупности рассматриваются как единое целое. Такие объекты в математике называются множествами.

В геологии давно существуют приемы качественного описания множеств разрывов, при этом основное внимание обращается на расположение разрывов в плане. Так выделяют: пучки — узкие полосы с разрывами, почти параллельными оси полосы; ряды кулисообразно расположенных разрывов, однообразно тянущихся наискось к оси узкой длинной полосы; виргации — пучки с расходящимися у их концов разрывами, разрывы могут расходиться либо в две стороны от оси пучка, либо отклоняться в одну сторону (структура конского хвоста); сигмюиды — пучки, имеющие в плане S-образную форму; концентрично-кольцевые и радиальные системы разрывов.

В зависимости от закономерности направления смещения крыльев говорят о: ступенчатых разрывах — относительно опущены одинаково ориентированные висячие крылья; чешуйчатых — относительно опущены одинаково ориентированные лежащие крылья; грабенах — относительно опущены крылья, ближайšie к оси пучка; горсты — относительно опущены крылья, более далекие от оси пучка. Грабены и горсты

бывают рифтовыми (образованы сбросами) и рамповыми (состоят из взбросов).

Области развития определенных множеств следует характеризовать габаритными величинами: длиной, шириной, глубиной.

Весьма широко распространены разрывы, следующие двум определенным направлениям или большему их числу. Такие как бы однородные участки можно выделить и в пределах упоминавшихся сложных разрывов, например, концентрично кольцевых и радиальных виргаций и сигмоид. В каждом участке разрывы различных направлений создают сеть или пространственную решетку, строение которой удастся описать количественно, обратив внимание, во-первых, на характерные направления разрывов; во-вторых, на типичные расстояния между параллельными разрывами (такие исследования часто проводят над трещиноватостью); в-третьих, на соотношение количеств разрывов различной величины.

**Направления разрывов.** Закономерности ориентировки разрывов выявляются статистически с использованием стереографической проекции. Особенно часто статистически обрабатывают данные о трещинах. В поле измеряются элементы залегания всех наблюдающихся в обнажении или горной выработке трещин в пределах структурно однообразного участка. Одновременно фиксируются их морфологические, генетические и возрастные признаки. Затем каждая трещина изображается в виде точки на стереографической диаграмме (см. стр. 28). Как правило, множество трещин отражается на одной диаграмме всего лишь несколькими скоплениями точек. Со статистической точки зрения желательно, чтобы одна диаграмма содержала более 100 точек. Геологические условия не всегда позволяют добиться этого, особенно при изучении крупных разрывов.

Центр каждого скопления точек является средним направлением однолинейных трещин. Возможные отклонения трещин от среднего направления выражаются разбросом точек вокруг центра скопления. Одному центру скопления точек соответствуют трещины определенного морфологического и генетического типа и возраста. Если на одну часть диаграммы ложатся точки трещин различных типов, их следует изобразить раздельно.

Для сопоставления скоплений точек между собой на диаграмме проводятся линии равного числа точек, приходящихся на площадку, составляющую 1% от площади диаграммы. Тогда каждое скопление обрисовывается изолиниями с различными числами на периферии и в центре. Так оказывается возможным сравнивать «высоты» разных максимумов (скоплений точек). В целях сопоставления нескольких диаграмм, составленных по разным количествам трещин, на изолиниях пишут не абсолютное число трещин, а соответствующий процент от общего числа трещин, нанесенных на каждую диаграмму.

Тектонофизический анализ и практическое использование стереографических диаграмм ориентировки трещин включает ряд измерений и геометрических построений, выполняемых на стереографической сетке.

Часто на многих диаграммах полезно произвести сопоставление центров скопления трещин каждого возраста с элементами залегания слоистости, нанесенными на те же диаграммы. Можно при этом производить преобразование географической системы стереографических координат в систему, жестко связанную с направлением и углом падения слоя. Рядом исследователей различных районов были обнаружены трещины, сохраняющие определенную ориентировку по отношению к элементам залегания слоистости (Гзовский, 1964; Кноринг, 1968). Существует несколько типов такой ориентировки трещин: I — трещины, перпендикулярные слоистости и параллельные ее простиранию; II — трещины, перпендикулярные слоистости и параллельные ее паде-

нию; III — трещины, перпендикулярные слоистости и совпадающие с двумя направлениями, симметрично отклоняющимися от падения слоистости на определенный угол; IV — трещины, параллельные простиранию слоистости и отклоняющиеся от плоскости слоистости в две стороны на определенный угол. В зависимости от направления перемещений по трещинам в III, IV и V типах выделяется по два подтипа.

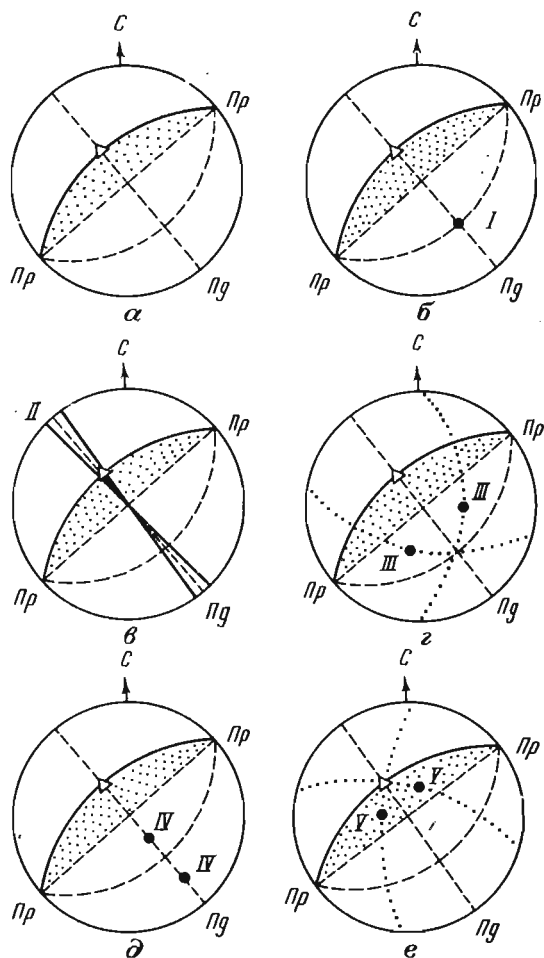


Рис. 49. Типичные соотношения трещин (челные круги) со слоистостью (треугольник)

*a* — характерные линии больших кругов простирания (*Pr*) и плоскости падения слоистости (*Pg*); *b* — трещины типа I; *v* — трещины типа II; *z* — трещины типа III; *d* — трещины типа IV; *e* — трещины типа V. Плоскость слоистости покрыта точечной штриховкой.

гу большого круга, проходящую через эту точку — это плоскость слоистости. При том же положении восковки находим на сетке второй большой круг, отстоящий от первого на  $90^\circ$ . Изображаем и его — это след плоскости перпендикулярной слоистости. Проводим диаметр диаграммы, на который опираются проведенные дуги двух больших кругов, т. е. линию простирания слоистости. Наконец, прочерчиваем диаметр, перпендикулярный простиранию слоистости, являющийся вертикальной плоскостью, которая проходит через линию падения слоистости (см. рис. 49, *a*). Перечисленные типы трещин определенным образом сочетаются с только что построенными линиями.

Тип I имеет центр скопления на пересечении второго круга (пер-

Перечисленные типы являются наиболее распространенными. Их изображение на стереографической диаграмме указано на рис. 49. Каждый тип и подтип возникает в определенных условиях напряженного состояния горных пород. Это позволяет давать физическую интерпретацию наблюдаемой трещиноватости. Зная, что в исследуемом районе существует трещиноватость одного из упомянутых типов, мы можем прогнозировать направление трещин на глубине и в плохо обнаженных участках, располагая данными о направлении и угле падения слоев, получаемыми по небольшому числу обнажений или горных выработок, а также путем геофизической разведки. Прогноз трещиноватости важен при разведке и разработке месторождений и решении инженерно-геологических вопросов.

Чтобы проанализировать соотношения трещин с залеганием слоистости, на трещинную диаграмму следует нанести плоскость слоистости в виде точки. Затем, не сдвигая восковки, поднять на нее ду-

пендикулярного слоистости) с плоскостью падения слоев (см. рис. 49, б). Тип II представляют точки в центре диаграммы, и трещины изображаются вертикальными плоскостями (прямыми линиями на диаграмме), совпадающими с линией падения (см. рис. 49, в). Тип III изображается двумя скоплениями, центры которых лежат симметрично по обе стороны от вертикальной плоскости падения, и с точкой падения слоя образуют вершины равнобедренного треугольника. Большие круги, проходящие через центры этих скоплений, пересекаются в точке пересечения плоскости падения слоистости со вторым большим кругом (см. рис. 49, г). Тип IV изображается двумя скоплениями точек, центры которых лежат на плоскости падения слоистости на одинаковом угловом расстоянии от точки пересечения второго большого круга с плоскостью падения слоистости (см. рис. 49, д). Тип V выглядит в виде двух скоплений, расположенных симметрично относительно плоскости падения слоистости. Большие круги, проходящие через центры этих скоплений, пересекаются в точке пересечения плоскости слоистости с первым большим кругом — слоистостью (см. рис. 49, е).

Тектонофизическая интерпретация трещин обычно требует следующих построений на диаграммах:

1. Нахождения направления, перпендикулярного трещинам отрыва (рис. 50, а). Оно совпадает с осью наибольшего растяжения ( $\sigma_1$ ) горных пород. Центр скопления точек I, изображающих на стереографической диаграмме трещины отрыва, совмещаем с вертикальным диаметром сетки. Вдоль этого диаметра от центра скопления отсчитываем  $90^\circ$ , здесь лежит точка A — пересечение полусферы с осью, перпендикулярной трещинам отрыва.

2. Нахождения линии пересечения двух направлений трещин скалывания. Данная линия совпадает с осью промежуточных главных нормальных напряжений ( $\sigma_2$ ) и используется при последующих построениях. Линия пересечения определяется для таких двух направлений скалывания, которые считаются сопряженными, т. е. возникшими при одном напряженном состоянии, что устанавливается в процессе полевого изучения. Сначала один центр скопления — IIIа — рассматриваемых трещин совмещают с вертикальным диаметром сетки и обводят тот большой круг, на который он ложится. Затем центр второго скопления точек — IIIв — помещают на вертикальный диаметр сетки и на восковку поднимают проходящий через него большой круг. Точка пересечения двух больших кругов B является искомой стереографической проекцией линии пересечения трещин двух направлений (см. рис. 50, б, в).

3. Нахождения направлений, совпадающих с двумя плоскостями трещин скалывания IIIа, IIIв и перпендикулярных линии пересечения трещин. Искомые линии указывают направление истинного перемещения по поверхности скалывания. Чтобы их найти, надо один из только что приведенных на диаграмме больших кругов совместить с совпадающим с ним большим кругом на сетке. От точки пересечения двух кругов отсчитать по сетке  $90^\circ$  вдоль рассматриваемого круга. Найденная точка C является стереографической проекцией одного из искомых направлений (см. рис. 50, в). Для наглядности ее можно соединить с центром диаграммы. Затем такие же построения производятся со вторым большим кругом. Так находят проекцию второго направления смещения D (см. рис. 50, г).

4. Измерения телесных углов между двумя поверхностями скалывания и построения их биссектрис. Величина угла между сопряженными поверхностями скалывания помогает найти оси наибольшего ( $\sigma_3$ ) и наименьшего ( $\sigma_1$ ) сжатия, а также оценить величину всестороннего давления при образовании трещин и степень пластической деформированности горных пород. Начинаем с того, что точку B пересечения

двух больших кругов, соответствующих поверхностям скалывания, помещаем на вертикальный диаметр сетки (см. рис. 50, *а*). Вдоль этого диаметра отсчитываем от точки *В* по сетке  $90^\circ$  до точки *Е*. Поднимаем

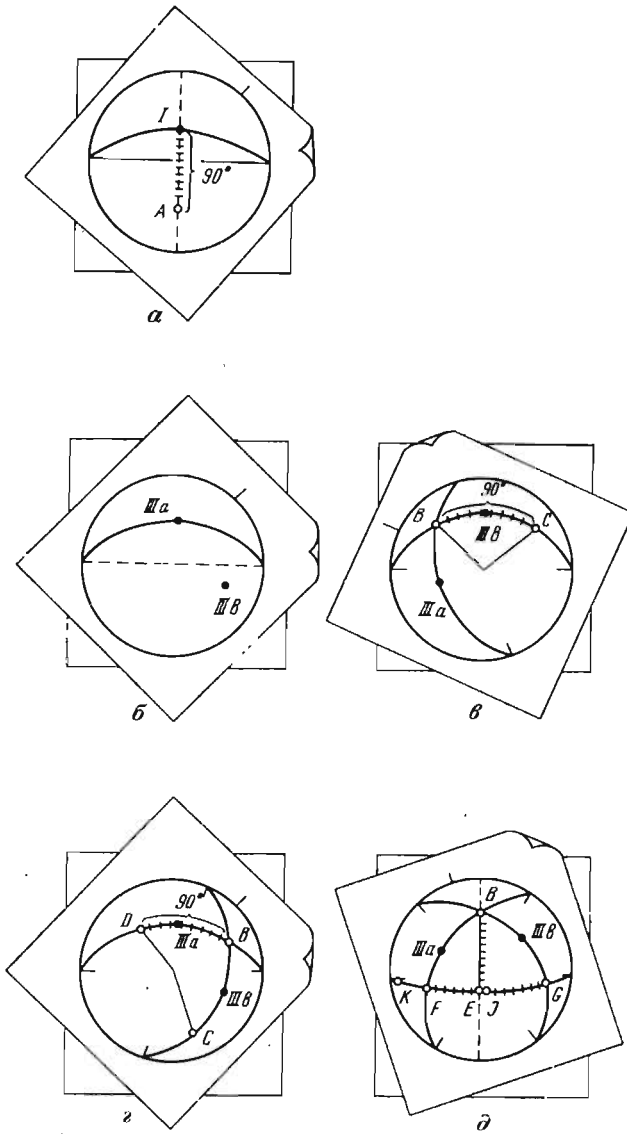


Рис. 50. Геометрические построения на диаграммах трещиноватости

*а* — нахождение перпендикуляра (*А*) к трещинам отрыва *I*; *б*, *в* — нахождение линии пересечений (*В*) трещин скалывания двух направлений *IIIa* и *IIIb*; *в*, *г* — нахождение направлений смещения (*С*, *Д*) по двум трещинам скалывания *IIIa* и *IIIb*; *д* — нахождение биссектрис (*I*, *К*) телесных углов между двумя сопряженными трещинами скалывания *IIIa* и *IIIb*. Пояснения в тексте

большой круг, проходящий через точку *Е*. Отмечаем точки *F* и *G* его пересечения с большими кругами поверхностей скалывания. Теперь по сетке вдоль дуги *FEG* считаем величину угла между точками *F* и *G* — это и есть один из телесных углов между поверхностями скалывания. Второй угол является дополняющим до  $180^\circ$ . Зная чему равны полови-

ны найденных углов, откладываем их от  $F$  и  $G$  вдоль большого круга  $FEG$  и таким образом находим точки  $I$  и  $K$ , являющиеся проекциями биссектрис двух телесных углов между поверхностями скальвания  $IIIa$  и  $IIIb$ . С одной из биссектрис совпадает ось напряжений  $\sigma_1$ , с другой —  $\sigma_2$ .

**Густота разрывов.** Среднее число параллельных трещин, приходящееся на единицу расстояния (в направлении, перпендикулярном трещинам), часто называют густотой, или плотностью, трещин. Это понятие относится к любым разрывам. В узком смысле густотой считают число точек (трещин), изображенных на 1% площади диаграммы (приблизительно  $20^\circ$  по азимуту и  $20^\circ$  по углу падения). Плотностью в узком смысле слова называют то же число точек на 1% площади диаграммы, но выраженное в виде процента от общего количества трещин, изображенных на диаграмме.

Рассматривая стереографическую диаграмму множества трещин для структурно однородного участка земной коры, на которой проведены изолинии плотности трещин, мы сможем сравнивать наибольшие плотности, соответствующие центрам скопления точек. Соотношения чисел этой плотности дают относительную характеристику того, насколько часто встречаются трещины разных направлений в пределах описываемого участка.

Более конкретное представление дает среднее число трещин, приходящихся на единицу расстояния (перпендикулярно трещинам) или среднее расстояние между трещинами. Для получения этих чисел достаточно знать: 1) расстояние  $l$ , которое мы прошли вдоль обнажения, фиксируя трещины; 2) угол  $\alpha$  между направлением измерения  $l$  и направлением падения трещин; 3) угол  $\delta$  падения трещин; 4) число  $n_{<}$  встреченных параллельных трещин. В. А. Букринский и А. В. Михайлова (1963) рекомендуют число трещин  $n_{\perp}$  в направлении, перпендикулярном к трещинам, на расстоянии  $l$  находить из числа  $n_{<}$  по формуле

$$n_{\perp} = \frac{n_{<}}{\sqrt{\cos^2 \delta + \sin^2 \delta \cos^2 \alpha}} = Kn_{<}. \quad (1)$$

Разделив  $n_{\perp}$  на  $l$ , получим среднее число трещин на единицу расстояния, перпендикулярного трещинам. А разделив  $l$  на  $n_{\perp}$ , найдем среднее расстояние между трещинами (по нормали к ним). Величина коэффициента  $K$  из формулы (1), вычисленная В. А. Букринским и А. В. Михайловой, приведена в табл. 2.

Расчеты густоты, плотности и среднего числа на единицу расстояния производятся для трещин определенной величины. Каждый максимум на трещинной диаграмме может получить такие характеристики.

**Связь густоты разрывов с их величиной.** При решении инженерных вопросов важно, описывая разрывы каждого направления, указать связь их количества с величиной. Известно, что крупных разрывов меньше, чем мелких. На примерах рудных районов Каратау (Гзовский, 1963), угленосных районов Ферганского хребта (Сунь Вэн-пен) и Донбасса (М. И. Пугачев), сейсмически активных областей северной Турции (Н. В. Шебалин) было выяснено, что прирост логарифма числа разрывов  $\Delta \lg n$  прямо пропорционален уменьшению логарифма длины разрывов  $\Delta \lg l$ . Коэффициент пропорциональности между этими величинами в изученных районах оказался от  $-1,0$  до  $-1,3$ ;

$$\Delta \lg n = -(1,0 \div 1,3) \Delta \lg l. \quad (2)$$

График этого соотношения приведен на рис. 51.

В любом районе для разрывов, соответствующих каждому максимуму на стереографической диаграмме, можно составить график типа

Таблица 2  
 Величина поправочного коэффициента  $K$  при вычислении числа трещин в направлении, перпендикулярном к трещинам (пояснения в тексте)

$\alpha$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
90	1	1,02	1,03	1,06	1,10	1,15	1,22	1,30	1,40	1,56	1,76	2,00	2,38	2,94	3,85	5,79	11,1	$\infty$
80	1	1,02	1,03	1,06	1,10	1,15	1,20	1,30	1,39	1,51	1,70	1,92	2,22	2,70	3,83	4,17	5,26	5,79
70	1	1,01	1,03	1,05	1,09	1,14	1,19	1,25	1,33	1,45	1,56	1,72	1,92	2,13	2,38	2,70	2,86	2,94
60	1	1,01	1,03	1,04	1,08	1,12	1,15	1,20	1,26	1,33	1,43	1,51	1,61	1,72	1,82	1,92	1,96	2,00
50	1	1,01	1,02	1,03	1,05	1,09	1,11	1,15	1,19	1,23	1,30	1,35	1,39	1,45	1,49	1,51	1,54	1,56
40	1	1,01	1,01	1,02	1,04	1,05	1,08	1,10	1,12	1,15	1,18	1,20	1,23	1,25	1,28	1,30	1,30	1,30
30	1	1	1,01	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,09	1,10	1,11	1,12	1,14	1,14	1,15	1,15	1,15
20	1	1	1	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,06	1,06
10	1	1	1	1	1	1	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02

типа рис. 51 и его эмпирическое уравнение (2). Конкретное значение численного коэффициента в (2) и среднее расстояние между разрывами какой-то одной величины позволяют вычислить среднее число разрывов любой другой величины. Такие прогнозы представляют значительный интерес при разведке и разработке месторождений, а также при инженерно-геологических изысканиях в местах крупного строительства.

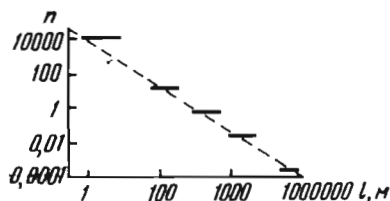


Рис. 51. Соотношения между средним числом разрывов на  $1 \text{ км}^2$  ( $n$ ) и их длиной ( $l$ ) в Байджансайском антиклинории

В. А. Букринским, В. М. Зыковым, М. И. Пугачевым и А. П. Судоплатовым было установлено, как приходится на  $1 \text{ км}^2$  количество разрывов, имеющих длину по простиранию до  $100 \text{ м}$ , сказывается на механизации добычи угля в шахтах. Оказалось, что при слабой нарушенности шахтных полей ( $0-10$  разрывов на  $1 \text{ км}^2$ ) возможна любая степень механизации и средняя длина выемочного поля по простиранию доходит до  $0,7 \text{ км}$ . При средней нарушенности ( $10-20$  разрывов на  $1 \text{ км}^2$ ) возможна ограниченная механизация — до  $50\%$  работ, и средняя длина выемочного поля падает до  $0,4 \text{ км}$ . Сильная нарушенность ( $20-30$  разрывов на  $1 \text{ км}^2$ ) делает механизацию почти невозможной, она сохраняется для  $10\%$  работ, а средняя длина выемочного поля составляет  $0,15 \text{ км}$ . Это приводит к необходимости слишком частого демонтажирования и новой сборки сложного оборудования для механизированной добычи угля. Наконец, при  $50$  и более разрывах на  $1 \text{ км}^2$  строительство шахты становится экономически неоправданным.

## ОБЩЕКОРОВЫЕ СТРУКТУРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Наиболее крупные элементы структуры коры соответствуют материкам и океанам в рельефе поверхности Земли. Под материками подошва коры находится на глубине от 30 до 70 км от уровня моря. Под океанами она опускается менее чем на 30 км, а во многих местах лишь на 10 км. Кроме того, под океанами земная кора не содержит гранитного слоя. Каких-либо математических приемов описания материковых и океанических частей коры до сих пор не использовалось.

### ОКЕАНИЧЕСКИЕ ЧАСТИ КОРЫ

Океанические части коры разделяют на более мелкие элементы: валы (хребты), расположенные в разных местах океанов, в том числе срединные, равнинные глубоководные области (котловины), глубоководные желоба (рвы), островные дуги. В последних появляется гранитный слой. Все эти элементы рельефа поверхности, как теперь установлено, сопровождаются определенными изменениями в положении подошвы осадочного покрова (который часто распадается на верхнюю и нижнюю части) и границы Мохоровичича. Кроме того, при переходе от одного элемента к другому несколько изменяются физические свойства слоев коры. К общекоровым элементам структуры океанических частей коры относятся также крупные зоны разрывов, рассекающие кору и мантию и образующие границы с материковыми частями коры. Многие зоны разрывов достоверно прослеживаются значительно глубже подошвы коры — на 700 км внутрь мантии. Имеются данные для предположения, что и остальные перечисленные элементы структуры проявляются не только во всей коре, но и в нижележащей мантии (Белоусов, 1968).

### МАТЕРИКОВЫЕ ЧАСТИ КОРЫ

Материковые части коры имеют многостепенное разделение на общекоровые структурные элементы. Однако единой системы понятий и терминов пока не существует. Прежде всего в пределах материков различают складчатые, платформенные и активизированные области. Границы их с течением геологического времени перемещаются в пространстве. Поэтому всегда указывается (или подразумевается) вполне определенное время, которому соответствует каждая граница.

**Складчатые области** подразделяются на собственно геосинклинальные и парагеосинклинальные. Далее их можно делить на антиклинории и синклинории, причем эти элементы бывают различного порядка. Наиболее крупные называют мегантиклинориями и мегасинклинориями. Они состоят из более мелких антиклинориев и синклинориев, имеющих вытянутую форму длиной от 30 до 500 км и шириной от 10 до 100 км. Этим делением можно было бы ограничиться, однако есть антиклинории и синклинории, для которых стали традиционными менее определенные названия: массив, поднятие, впадина, бассейн, прогиб и т. п.

Антиклинориями называются участки коры, к середине которых около поверхности Земли слои горных пород поднимаются, обладая общим антиклиналеобразным залеганием, сильно осложненным значительно более мелкими складками и разрывами. Во внутренней части антиклинория обнажаются более древние породы, чем на его периферии. Породы эти чаще всего соответствуют верхней или нижней частям гранитного слоя:  $\gamma_1$  или  $\gamma_2$ , охарактеризованным выше. Внутри парагеосинклинальных антиклинориев может быть встречен и осадочный покров  $\sigma$ . На периферии всех антиклинориев обычно присутствует осадочный покров. Нижняя часть гранитного слоя образует доступный



непосредственным наблюдениям «кристаллический фундамент». Таким образом, у поверхности Земли в строении антиклинория обычно выделяется три структурных этажа:  $\sigma$  — слабдеформированные и рыхлые толщи, иногда вулканогенные, включающие молассовую формацию;  $\gamma_2$  — сильно деформированные осадочные и вулканогенные породы с магматическими интрузиями;  $\gamma_1$  — метаморфические и магматические породы кристаллического фундамента и крупные магматические интрузии типа батолитов.

Если первоначальная мощность пород, лежащих выше фундамента (особенно слоя  $\gamma_2$ ), увеличивается к внутренней части антиклинория, его можно называть обращенным и считать возникшим на месте зоны опускания земной коры. Если же мощность пород, покрывающих фундамент, в том числе и слоя  $\gamma_2$ , уменьшается к оси антиклинория, его следует называть необращенным, так как он возник на месте длительного развивавшегося поднятия земной коры (Гзовский, 1948).

Под многими антиклинориями, сформировавшимися в альпийском тектоническом этапе (в мезозое и кайнозое), установлено значительное опускание подошвы земной коры. Таким образом, антиклиналеобразной форме залегания слоев в верхней части коры соответствует синклиналеобразная форма подошвы коры (рис. 52, а). Такие антиклинории напоминают двусторонние складки. Сейчас еще не ясно, существуют ли

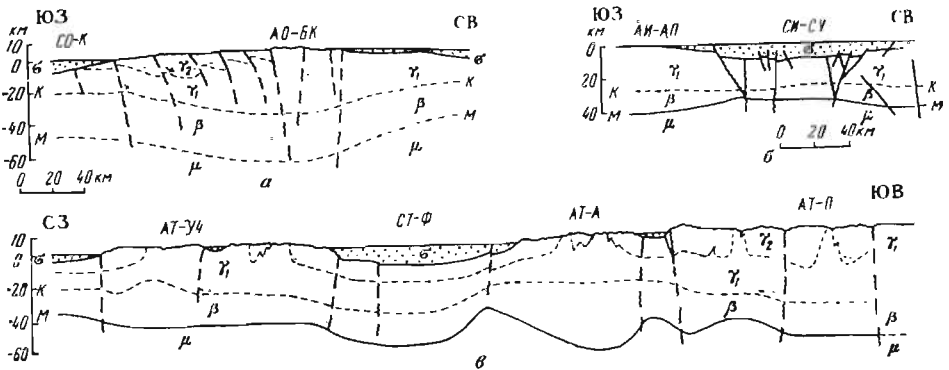


Рис. 52. Строение земной коры

На месте: антиклинория Большого Кавказа (АО-БК); синклинория Куринского (СО-К); антиклизы Азово-Подольской (АН-АП), синеклизы Северо-Украинской (СН-СУ); антиклинория Угамско-Чаткальского (АТ-УЧ), Алайского (АТ-А), Памирского (АТ-П), синектория Ферганского (СТ-Ф). Сплошные линии — вполне достоверные границы; прерывистые — границы, положение которых установлено менее точно. Волнистые линии — крупные зоны разрывов. Профили отражают данные многочисленных исследователей.  $\sigma$  — осадочный слой,  $\gamma_2$  — верхняя часть гранитного слоя,  $\beta$  — базальтовый слой,  $\mu$  — мантия, К — граница Конрада, М — граница Мохоровичича

антиклинории, обладающие антиклиналеобразной формой подошвы коры, которые можно было бы по аналогии со складками назвать односторонними.

Синклинориями считаются участки коры, в которых у поверхности Земли слои опускаются к середине, обладая общим синклиналеобразным залеганием. Благодаря этому во внутренней части синклинория обнажаются более молодые породы, чем на периферии. Эти породы относятся или к осадочному слою ( $\sigma$ ), или к верхней части гранитного ( $\gamma_2$ ). Общая складкообразная форма синклинория осложняется более или менее многочисленными складками и разрывами.

В строении синклинория можно различать три ( $\sigma$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_1$ ) или два ( $\sigma$ ,  $\gamma_1$ ) структурных этажа, которые где-либо выходят на поверхность. Если к середине синклинория общая мощность слоев  $\sigma$  и  $\gamma_2$  или  $\sigma$  (при отсутствии  $\gamma_2$ ) увеличивается, синклинорий считается необращенным, т. е. возникшим на месте опускания коры в течение тектонического этапа, последовавшего за временем возникновения кристаллического

фундамента. Бывают синклинии, у которых мощность слоя  $\gamma_2$  увеличивается к периферии. Это свидетельствует о том, что синклиний возник на месте предшествовавшего поднятия коры (в данном тектоническом этапе). Под таким синклинием — обращенным — поверхность кристаллического фундамента (кровля  $\gamma_1$ ) может иметь антиклиналеобразную форму.

Под многими синклинориями подошва земной коры поднимается вверх, наподобие антиклинали. Такие синклинии являются двусторонними. Существуют ли односторонние синклинии, под которыми подошва коры синклиналеобразна, еще не выяснено.

Дальнейшая характеристика строения антиклинориев и синклинориев может быть развита по ряду признаков. Прежде всего имеет смысл обратить внимание на степень симметричности поперечного вертикального сечения. Одно крыло часто бывает намного уже другого. Далее важно соотношение интенсивности развития складок и разрывов в разных крыльях. Известны антиклинории с большей деформированностью узкого крыла (Большой Кавказ), но существуют антиклинории с большей деформированностью широкого крыла (Восточные Карпаты). Давно обращают внимание на направление опрокидывания складок и наклона разрывов. Оно иногда одинаково на обоих крыльях. Чаще на разных крыльях направление наклона различное. Если складки наклонены в сторону внутренней части антиклинория или синклинория, то их называют синвергентными (веерообразными). Если они наклонены от внутренней к внешней части антиклинория или синклинория, их называют антивергентными. Наконец, имеет смысл отмечать наличие или отсутствие тектонических покровов (шарьяжей). Так учитывается внутренняя структура верхних структурных этажей ( $\sigma$  и  $\gamma_2$ ).

Нижележащий этаж — кристаллический фундамент ( $\gamma_1$ ) — также имеет определенную форму своих границ и характерную внутреннюю структуру. Последняя в значительной мере зависит от структуры верхних частей древних антиклинориев и синклинориев, из которых образовался кристаллический фундамент ( $\gamma_1$ ). Таким образом, внутри него имеются реликты структуры древних антиклинориев и синклинориев, направление которых или совпадает с простиранием складок и разрывов в верхней части рассматриваемого структурного элемента, или направлено наискось или даже поперек.

О внутренней структуре базальтового слоя ( $\beta$ ) сейчас судить еще трудно. По сейсмическим данным удастся установить в нем лишь крупные зоны разрывов.

**Платформенные области** отличаются от складчатых значительно более простой формой верхней поверхности гранитного слоя, срезающей разные участки его внутренней структуры. Гранитный слой образует так называемый фундамент, возраст пород которого меняется от района к району. Вышележащий осадочный покров значительно слабее деформирован и однообразно залегает на гораздо больших площадях, чем в складчатых областях. Таким образом, в верхней, поддающейся непосредственному наблюдению части земной коры отличие платформенных областей от складчатых является количественным. В типичных случаях это количественное различие предстает в виде разных качеств. Однако между крайними случаями можно расположить длинный ряд промежуточных примеров, демонстрирующих постепенный переход от типичной платформы к типичной складчатой области. Это делает необходимым разработку объективных количественных критериев, позволяющих отличать платформенные области от складчатых.

Платформенные области в простейшем варианте разделяются на антеклизы — места более высокого уровня залегания верхней поверхности фундамента, и синеклизы, в которых фундамент залегает глубже. Можно встретить более сложные многостепенные системы деления

платформ на щиты, массивы и плиты, внутри которых ограничиваются синеклизы и антеклизы. Вместо последних названий используются также менее однозначные термины — бассейн, впадина, опускание, свод, купол, поднятие и др.

В данной книге нет возможности обсуждать целесообразность той или иной системы понятий и терминов. Важно, что все они относятся к таким структурным элементам, которые в совокупности заполняют всю платформенную область. Кроме того, важно, что каждый из перечисленных структурных элементов может быть прослежен на глубину вплоть до подошвы коры. Это возможно в течение того времени, когда происходит развитие данного элемента.

Обычно под элементами, характеризующимися подъемом фундамента платформы в верхней части коры, подошва коры опущена несколько ниже своего среднего уровня. Под элементами, отличающимися опусканием верхней части коры, отмечается более высокое положение подошвы коры относительно среднего уровня (см. рис. 52, б). Таким образом, двусторонние формы типичны для платформенных общекоровых структурных элементов. Может быть, существуют и одно-сторонние.

Форма антеклиз и синеклиз в плане менее вытянутая, чем антиклинориев и синклинориев, и нередко приближается к изометричной. Размеры антеклиз и синеклиз часто во много раз больше размеров антиклинориев и синклинориев.

Соотношения между внутренней структурой фундамента и строением антеклиз и синеклиз (в широком смысле слова) в осадочном покрове определяются прежде всего теми антиклинориями и синклинориями, которые составляют внутреннюю структуру гранитного слоя (фундамента). Весьма важно, что платформенные структурные элементы во много раз больше структурных элементов геосинклинального типа, образующих фундамент. Поэтому под одной антеклизой или синеклизой в фундаменте различаются реликты многих антиклинориев и синклинориев, сейчас уже не имеющих четкого выражения в более глубоких частях коры. Известны примеры совпадения простираций этих реликтов в фундаменте с общим простираением антеклизы или синеклизы. Это типично для молодых (эпигерцинских) платформ. Во многих случаях реликты простираются наискось или поперек. Такое несоответствие чаще встречается на древних платформах с докембрийским фундаментом.

Качественным признаком антеклиз и синеклиз (в широком смысле этих терминов) является то, что они соответствуют, как говорят математики, «полному разбиению» платформы, т. е. расчленению ее на части без остатка. Кроме того, на платформах существуют так называемые валы, рвы, авлакогены (грабены) и другие крупные платформенные складки, наблюдаемые в осадочном покрове и так или иначе сказывающиеся на поверхности фундамента. Эти складки встречаются группами или поодиночке и в совокупности они не составляют платформу. Между ними остаются значительные по величине участки, не являющиеся складками. Следовательно, выделением таких складок мы не достигаем полного разбиения платформы. Крупные платформенные складки соизмеримы с реликтами антиклинориев и синклинориев в фундаменте. Имеются основания предполагать, что данным складкам могут соответствовать определенные отклонения от среднего уровня залегания структурных поверхностей в глубоких частях коры и, в частности, ее подошвы. Поэтому некоторые крупные платформенные складки, вероятно, могут быть отнесены к общекоровым структурным элементам, тогда как складки геосинклинальных областей являются внутрикоровыми элементами.

На платформе существуют и другие более мелкие складки, кото-

рые, несомненно, должны считаться внутрикоровыми. Таковы, например, соляные купола и мелкая складчатость платформ, описанная В. В. Бронгулевым (1951).

**Области активизации.** В ряде регионов отмечена активизация тектонических движений, наступившая после более или менее продолжительного платформенного развития (Тянь-Шань, Алтай, Саяны, Становой хребет, Восточная Африка). Частично области активизации охватывают и геосинклинально развивающиеся части земной коры (Памир, Гиндукуш, Гималаи). В результате активизации в строении земной коры появляются новые структурные элементы, напоминающие по величине антиклинории и синклинории геосинклинальных областей. Однако от последних новые элементы отличаются большим значением разрывов, более угловатой формой в плане, почти полным отсутствием обращенных форм и составом осадочного покрова, непохожим на геосинклинальный. Крупные, сложно построенные участки антиклиналеобразной формы в верхней части коры, которые аналогичны антиклинориям, автор предложил назвать антитекториями, а участки, аналогичные синклинориям — синтекториями (Бунэ, Введенская, Гзовский, 1968).

Выделяя антитектории и синтектории, мы осуществляем полное разбиение коры. При этом в общей мощности коры и в структуре ее глубоких частей прослеживаются определенные изменения, связанные с наблюдаемой на поверхности структурой. Таким образом выясняется, что антитектории и синтектории являются общекоровыми структурными элементами, как и широко развитые на их границах зоны разрывов.

Складчатость и разрывы внутри осадочного покрова развиты в общем слабее, чем в геосинклинальных областях, хотя в некоторых местах они обладают значительной интенсивностью (таджикская часть Афгано-Таджикского синтектория). Чаще и заметнее, чем в геосинклинальных областях, совместно проявляются продольные и поперечные нарушения.

Антитектории характеризуются увеличенной мощностью земной коры и погруженностью поверхности Мохоровичича, иными словами, они являются двусторонними структурными элементами (см. рис. 52, в). Увеличение мощности коры у них происходит снизу за счет наращивания базальтового или гранитного слоя на глубине. Для объяснения этого существуют различные гипотезы.

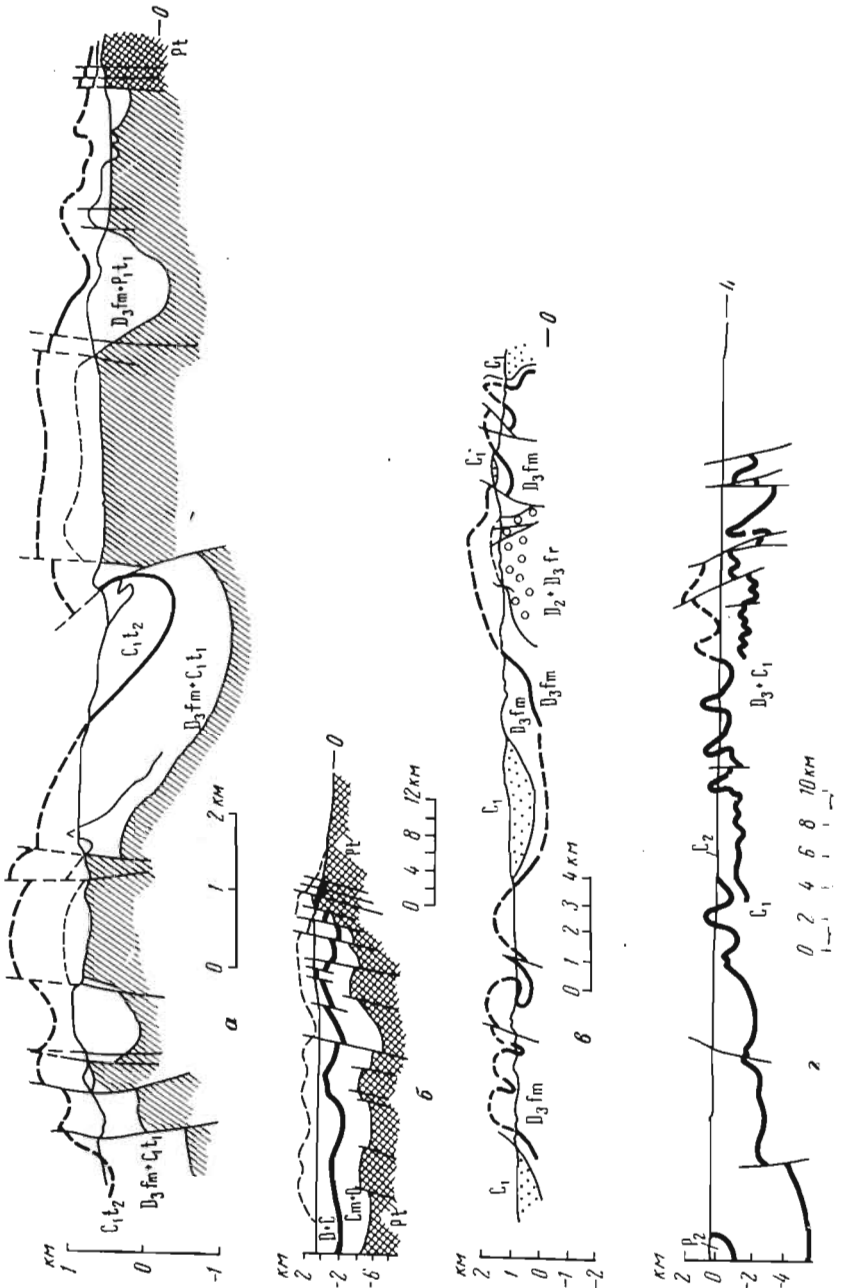
Синтектории, насколько сейчас известно, также имеют увеличенную мощность коры, но за счет отложения наверху больших толщ осадочного покрова. Таковы односторонние синтектории Ферганский и Афгано-Таджикский. По-видимому, распространены также и двусторонние синтектории, в которых мощность коры сокращена, а ее подошва может подниматься (Красное море, Байкал).

Внутренняя структура гранитного слоя — простираение складок, разрывов, интрузий, реликтов древних антиклинориев и синклинориев — бывает самым различным образом ориентирована относительно общего простираения антитекториев и синтекториев, складчатости и разрывов в осадочном покрове: вдоль, наискось и поперек.

О внутреннем строении базальтового слоя пока известно очень мало, а имеющиеся сведения недостаточно достоверны.

Для всех общекоровых структурных форм геосинклинальных, платформенных и активизированных областей существенное значение имеет изостатическая оценка расположения земной коры. Она показывает, находится ли земная кора в изостатически равновесном положении, или располагается ниже него и должна будет со временем всплыть (либо уменьшить свою мощность за счет глубоких слоев); или кора занимает слишком высокое положение и должна опуститься (либо увеличить

мощность за счет глубоких слоев). Большой интерес представляет сопоставление изостатических оценок положения коры с наблюдаемым направлением ее новейших современных движений. Так, выявляется существование двух типов движений, по-видимому, имеющих различные



причины: 1) движений, совпадающих по знаку с ведущими к изостатическому уравниванию и 2) антиизостатических движений (Гзовский, 1963, 1961; Артемьев, 1962, 1964; Артемьев, Артюшков, 1967).

В целях повышения достоверности изостатических оценок и для графического изображения общих черт структуры земной коры на всю ее мощность рекомендуется составлять особые карты глубинно-структурного районирования.

**Математическое описание общекоровых структурных элементов.** Для численного выражения морфологических особенностей общекоровых структурных элементов могут быть использованы все те приемы, которые были описаны выше для складок. В первую очередь следует вычислять габаритные размерные и безразмерные характеристики. Они должны быть привязаны к определенным структурным поверхностям. К аналитическому выражению структурных поверхностей прибегать еще рано, так как их форма известна недостаточно точно и достоверно. Весьма перспективно использование топографических поверхностей.

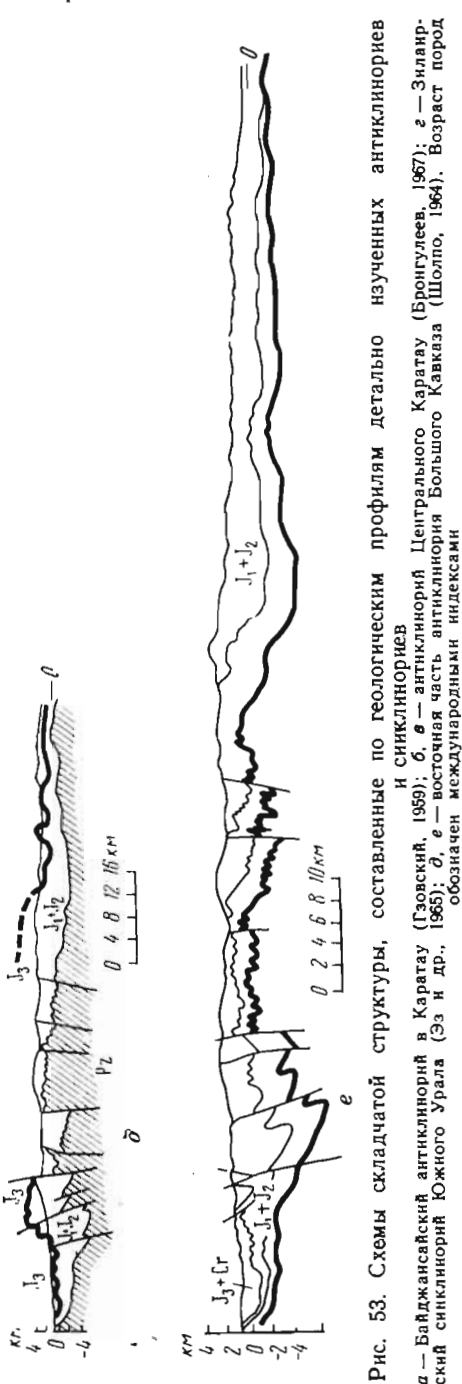


Рис. 53. Схемы складчатой структуры, составленные по геологическим профилям детально изученных антиклинориев и синклинориев в Караатау (Гзовский, 1959); б, в — антиклинорий Центрального Караатау (Бронгулеев, 1967); г — Зилаирский синклинорий Южного Урала (Эз и др., 1965); д, е — восточная часть антиклинория Большого Кавказа (Шолпо, 1964). Возраст пород обозначен международными индексами

Наиболее сложна структура антиклинориев и синклинориев, обладающих сложной складчатостью осадочного покрова. В течение последних 20 лет в СССР были проведены специальные тектонические исследования складчатости ряда наиболее обнаженных и детально геологически изученных антиклинориев и синклинориев.

На рис. 53 приведены примеры складчатой структуры в осадочном покрове. Первый пример Байджансайского антиклинория в Караатау (см. рис. 53, а) представляет случай сходной формы залегания двух структурных поверхностей, одна из которых относится к верхним слоям осадочного покрова (граница между нижним  $C_{1t_1}$  и верхним  $C_{1t_2}$ , турне), а другая — к нижним (подошва фаменского яруса  $D_3fm$ ). В этом антиклинории, наряду со складчатостью, большое значение имеют разрывы (Гзовский, 1959).

Антиклинорий Центрального Караатау (см. рис. 53, б, в) относится к числу тех, в осадочном покрове которых разрывы развиты меньше, чем складчатость (Бронгулеев, 1967). В Центральном Караатау описано резкое усиление складчатости в фаменских отложениях ( $D_3fm$ ) средней части осадочного покрова. Выше по разрезу в нижнем карбоне и ниже — в среднем девоне нет таких интенсивных складок, как в фаменских слоях. Это отчасти видно на рис. 53, в.

На рис. 53, г, по данным В. В. Эза, Д. Е. Гафт, Б. И. Кузнецова (1965), изображена складчатая структура в девонских и каменноугольных отложениях Зилаирского синклинория на Урале.

Складчатость на Кавказе изучалась В. В. Белоусовым, А. А. Сорским, И. В. Кирилловой, А. М. Шурыгиным, В. Н. Шолпо, Н. Б. Лебе-

девой, А. В. Вихертом, В. В. Эзом, В. И. Шевченко и др. На рис. 53, *д, е*, по данным В. Н. Шолпо (1964), изображено строение восточной части антиклинория Большого Кавказа. Форма залегания поверхности палеозоя, являющегося фундаментом этого антиклинория, изображена с меньшей достоверностью, чем залегания слоев, находящихся вблизи поверхности. Несмотря на это, общее увеличение мощности осадочного покрова во внутренней части антиклинория не вызывает сомнений. На рис. 53, *е* видна складчатая структура осадочного покрова с большими деталями, которые достоверны вблизи дневной поверхности. На глубине детали структуры показаны предположительно.

Большой материал накоплен о развивающихся сейчас складках Афгано-Таджикского синтетория (Сафьян и др., 1969).

Важной характеристикой структуры каждой поверхности служит геометрическая интенсивность складчатости  $I_g$ , интенсивность разрывов  $I_F$  и совокупная интенсивность  $I_{gF}$  складчатости и разрывов, определения которых были даны выше. Последняя характеристика равна отношению длины между двумя точками, измеренному вдоль одного слоя и смещающих его разрывов, к расстоянию между теми же точками по прямой. В Байджансайском антиклинории для подошвы фаменских отложений  $I_{gF}=1,7$ . В антиклинории Центрального Каратау внутри наиболее деформированных фаменских отложений для маркирующего горизонта (показан на рис. 53, *в* утолщенной линией) интенсивность складчатости и разрывов  $I_{gF}=1,8$  для полного пересечения. В местах наибольшего развития складок достигается  $I_{gF}=2,1$ . В Зилаирском синклинии для среднего карбона  $I_{gF}=1,5$ , для нижнего карбона  $I_{gF}=1,7$ . На Большом Кавказе для подошвы юрских отложений, согласно профилю рис. 53, *е*, получается  $I_{gF}=1,5$  для полного пересечения. В центральной части этого пересечения антиклинория  $I_{gF}=1,9$ .

Эти численные характеристики важны при сравнениях природных складчатых зон и складок с получаемыми в моделях.

Существуют перспективы перехода от таких характеристик к величине деформации коры в физическом смысле этого термина (Гзовский, 1970).

## II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СТРУКТУРЫ И ТЕКТОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ЗЕМНОЙ КОРЫ

Дифференциальное и интегральное исчисления, основы которых были созданы в XVII в. гениальным английским физиком И. Ньютоном в целях решения физических проблем того времени и, независимо от него, великим немецким математиком славянского происхождения Г. Лейбницем (Лубенец)\*, часто объединяются под названием математического анализа, хотя для далекого от математики человека выражение «математический анализ» имеет гораздо более широкий смысл. Изложение дифференциального и интегрального исчислений со всеми определениями, доказательствами и следствиями имеется в многочисленных учебниках высшей математики (Смирнов, 1951). Повторять их здесь нет смысла, однако геологу полезно напомнить часть главных представлений.

### ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

#### *Бесконечно малая и бесконечно большая величины*

В целях математически строгого решения многих вопросов в формулах используются такие величины, которые не являются числами и реально не измеряются. Представление о них формируется так. Пусть у нас есть последовательность чисел, при которой переход к каждому следующему числу происходит согласно некоторой закономерности таким образом, что каждое следующее число по абсолютной величине (т. е. без учета знака) меньше предыдущего. Эта последовательность является характеристикой какой-либо переменной величины, скажем, всестороннего давления. Если эта переменная ( $P_n$ ) может последовательно изменяться от  $P_1$  к  $P_2 \dots P_n$  таким образом, чтобы становиться меньше любой наперед заданной величины, то такую переменную называют бесконечно малой и говорят, что она стремится к нулю:  $P_n \rightarrow 0$ . Можно сказать также, что пределом переменной  $P_n$  при  $n \rightarrow \infty$  является ноль, что запишется так:

$$\lim P_n = 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Нередко мы встречаемся с последовательностями чисел, характеризующими такие переменные величины, абсолютные значения которых могут становиться больше любой наперед заданной сколь угодно большой величины  $N$ . Например, всестороннее давление можно мысленно поднимать все выше и выше; расстояние, которое пройдет тело, летящее через Вселенную, также можно представлять больше любой определенной величины. Такого рода переменные называют бесконечно

\* См. В. Грэнвилль и Н. Лузин, 1931.



большими, что изображают запись  $P \rightarrow \infty$  и говорят: « $P$  стремится к бесконечности», или «пределом  $P$  является бесконечность».

$$\lim P_n = \infty.$$

Последняя запись условна, так как бесконечность ( $\infty$ ) не выражает собой определенного числа.

Между бесконечно малой величиной и бесконечно большой существует связь. Если  $x$  бесконечно большая величина, то обратная ей  $\frac{1}{x}$  есть бесконечно малая. Если же  $x$  бесконечно малая, то обратная величина  $\frac{1}{x}$  бесконечно велика.

Без доказательств ясно, что произведение бесконечно малой на постоянную величину бесконечно мало, алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин бесконечно мала.

### *Ничтожно малая и очень большая величины*

При использовании математических формул и геометрических построений очень широко применяют представления о ничтожно малых величинах, которыми можно пренебрегать, а также об очень больших, к которым допустимо относиться как к бесконечно большим (по сравнению с определенными эталонами). В зависимости от содержания решаемой задачи, точности ответа, которая нам необходима, и точности имеющихся исходных данных один и тот же физический объект при математическом его рассмотрении может приниматься и за ничтожно малую, и за малую, и за большую, и за очень большую величину.

Например, Земля с ее диаметром около 3 000 км вращается вокруг Солнца по почти круговой орбите диаметром 300 000 000 км, т. е. диаметр Земли составляет около 1 : 30 000 или  $3 \cdot 10^{-5}$  диаметра орбиты. При таком соотношении Земля в астрономии считается материальной точкой, геометрическими размерами которой можно в расчетах пренебрегать, считая их ничтожно малыми.

Однако мы изменим свой взгляд на Землю, изучая ее взаимосвязь с Луной, имеющей около 3 500 км в диаметре (почти 1/4 диаметра Земли) и находящейся на расстоянии почти 400 000 км от Земли (30 диаметров Земли). В этом случае Земля представляется нам шаром. А при полетах искусственных спутников на высотах близких к 200 км приобретает значение отклонение Земли от шара в сторону эллипсоида, разница в длинах полуосей которого составляет 21 км 382 м. Это различие всего на один порядок меньше высоты полета орбитальных космических кораблей. Кроме того, как и в геодезии, становятся существенными отклонения уровня моря даже от столь слабо сплюснутого эллипсоида, придающие Земле форму так называемого геоида. Поверхность геоида, по сравнению с эллипсоидом, имеет местные отклонения в сторону к центру и от центра Земли 50 ÷ 150 м. В глобальной геотектонике до сих пор не возникло практической необходимости в том, чтобы смотреть на Землю не как на шар, а как на эллипсоид или геоид. Но в геофизике это бывает нужно.

Наконец, перейдя к изучению небольших районов и месторождений, применяя геотектонику и разведочную геофизику, мы смотрим на Землю как на полупространство, бесконечно простирающееся вниз от дневной поверхности.

Итак, в практике математической обработки одних и тех же тектонических данных они могут рассматриваться как качественно различные величины, в зависимости от полноты и точности имеющихся данных и существа решаемого вопроса.

## Предел функции

Переменные величины могут иметь самые различные пределы, а не только упоминавшиеся ноль и бесконечность. В общем случае пределом переменной  $x$  называется постоянная  $a$ , если разность между ними (при непрерывном и бесконечном последовательном изменении  $x$ ) является бесконечно малой величиной. Переменная величина не может иметь двух различных пределов. Предел суммы конечного числа переменных равен сумме их пределов. Предел произведения конечного числа переменных равен произведению их пределов.

Большое значение имеют пределы некоторых важных функций\*. О пределе функции  $y$  говорят только при условии, что задан предел аргумента  $x$  этой функции. Из многочисленных примеров, приводимых в учебниках, остановимся на пределе функции:

$$y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (1)$$

Аргументом является  $n$  и принимается, что пределом  $n$  служит бесконечность. Пределом функции  $y$  при  $n \rightarrow \infty$  является величина, которую обозначают  $e$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (2)$$

Вычисления показывают, что при  $n=1$  имеем  $y=2$ , при  $n=2$  получаем  $y=2,25$ , затем с ростом  $n$  продолжается увеличение  $y$ , но оно все замедляется и при  $n=1000$  оказывается  $y=2,717$ . При бесконечном увеличении  $n$  функция  $y$  стремится к некоторому числу, обозначаемому  $e$ , которое с точностью до четырех значащих цифр будет:  $e \approx 2,718...$

В математическом анализе значение  $e$  столь же велико, как  $\pi=3,14$  в геометрии. Величину  $e$  принимают за основание натуральных, или непервых (от имени шотландца Непера), логарифмов. Иначе говоря, любое число  $N$  представляют как  $e$ , возведенное в степень  $q$ :

$$N = e^q.$$

Число  $q$  называется натуральным логарифмом числа  $N$ .

Известно, что на практике очень распространены десятичные логарифмы  $r$ , являющиеся показателем степени, в которую надо возвести 10, чтобы получить то же число  $N$ :

$$N = 10^r.$$

Следовательно:

$$10^r = e^q.$$

Прологарифмировав обе части последнего равенства по основанию 10, получаем:

$$r \lg 10 = q \lg e.$$

Но  $\lg 10=1$ , и поэтому

$$r = q \lg e.$$

Поскольку  $r = \lg N$ , а  $q = \ln N$ , имеем:

$$\lg N = \ln N \cdot \lg e.$$

\* Напомним, что функцией называется переменная величина  $y$ , которая принимает одно или несколько определенных значений, если задано значение другой переменной величины  $x$ , именуемой аргументом (или независимой переменной).

По таблице десятичных логарифмов находим, что  $\lg 2,718 = \lg e = 0,4343$ .

В итоге:  $\lg N = 0,43 \ln N$ ,  $\ln N = 2,303 \lg N$ .

Эти соотношения настолько часто используются в тектонофизике, что геологи их необходимо помнить.

### *Первая производная функции*

В геотектонике используется большое число величин, являющихся в математическом отношении функциями. Например, высота  $h$  залегания слоя от уровня моря, достоверно изображенная на геологическом профиле месторождения, есть функция пространственных координат. Ее аргументом служит расстояние  $x$  в горизонтальном направлении вдоль профиля, отсчитанное от определенной точки. Находясь в конкретной точке пласта, мы характеризуем ее координатами  $x_1$  и  $h_1$ . Переместившись вдоль профиля в горизонтальном направлении по поверхности земли (или по горной выработке) в расположенную поблизости другую точку, мы констатируем ее координату  $x_2$ . Разность между первоначальным значением аргумента  $x_1$  и его новым значением  $x_2$  называется приращением аргумента и обозначается с помощью греческой буквы дельта большой —  $\Delta x$ . Величину  $x_2$  можно называть наращенным значением аргумента. Ясно, что приращение аргумента может быть положительным или отрицательным (если мы передвинулись в противоположную сторону).

Если высота залегания пласта  $h$  является функцией величины  $x$  и связана с нею однозначно, приращению аргумента соответствует определенное приращение функции, обозначаемое  $\Delta h$ . Его мы найдем, вычтя первоначальное значение  $h_1$  (связанное с координатой  $x_1$ ) из нового значения  $h_2$ , которое соответствует наращенному значению аргумента  $x_2$ :

$$\Delta h = h_2 - h_1. \quad (1)$$

Ясно, что при одинаковой величине приращения аргумента  $\Delta x$  в разных частях профиля, в зависимости от крутизны, сложности и направления наклона залегания пласта, могут быть получены приращения функции  $\Delta h$  разных величин и знака (рис. 54).

Отношение величины приращения функции к приращению аргумента, т. е.  $\frac{\Delta h}{\Delta x}$  является весьма важной характеристикой каждого участка профиля. Однако эта характеристика зависит от величины приращения аргумента  $\Delta x$  и от характера изменения  $h$ . Если, например, увеличить приращение  $\Delta x$  над участком с изменяющейся крутизной падения или над гребнем антиклинали, отношение  $\frac{\Delta h}{\Delta x}$  изменяет свою величину. На рис. 54, *a* показано приращение  $\Delta x$  около точки *A*, при котором приращение функции  $\Delta h$  положительно. При той же величине  $\Delta x = (\Delta x)_3$  между точками *F* и *G* приращение функции  $(\Delta_3 h)$  отрицательно. Между точками *C* и *D* все то же приращение аргумента  $\Delta x = \Delta_1 x$  сопровождается нулевым приращением функции, т. е. отношение  $\frac{\Delta h}{\Delta x} = 0$ . Однако при большей величине приращения аргумента  $(\Delta_2 x)$  равной *CE*, получается значительное отрицательное приращение функции —  $\Delta_2 h$ . Наконец, измеряя приращения  $\Delta_3 x$  и в два раза больше  $\Delta_4 x$  от точки *F*, мы получаем приращение функции  $\Delta_3 h$  и  $\Delta_4 h$ , отношения которых к приращениям аргумента имеют разную величину:

$$\frac{\Delta_3 h}{\Delta_3 x} > \frac{\Delta_4 h}{\Delta_4 x}.$$

Для того чтобы избежать указанных неопределенностей, в математическом анализе используется представление о пределе отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. В обозначениях, использованных на профиле, это запишется так:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x}.$$

Читается: «лимит дельта аш к дельта икс, при дельта икс стремящемся к нулю».

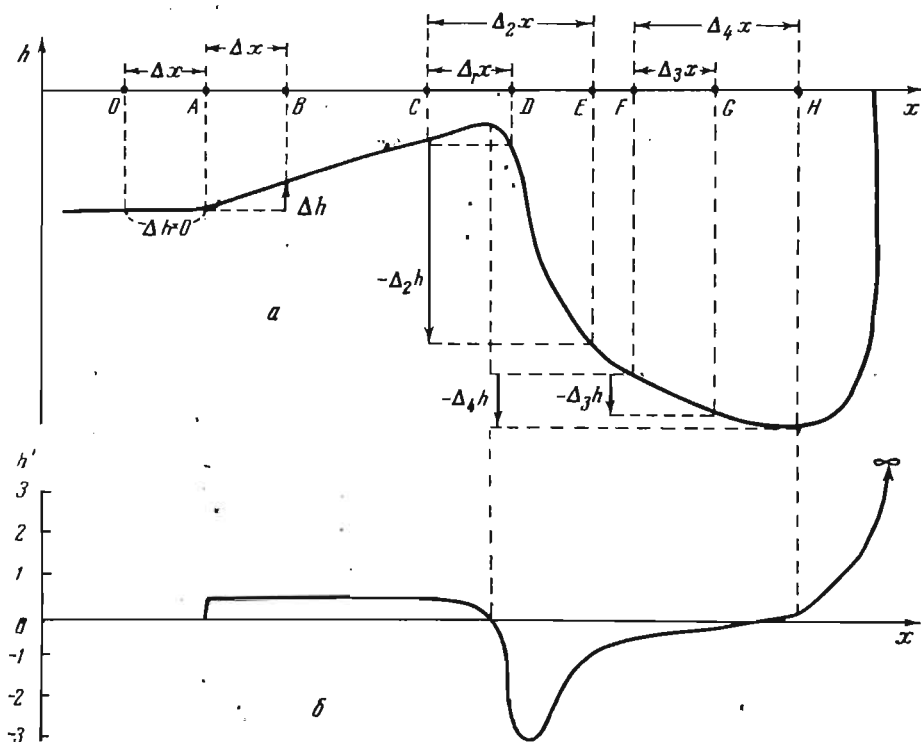


Рис. 54. Геологический профиль (а) и кривая его первой производной (б). Пояснения в тексте

Этот предел является одним из основных понятий в математическом анализе и называется «первая производная функции». Для первой производной функции  $y$  (при аргументе  $x$ ) используются различные обозначения:  $y'$  — «игрек штрих»,  $y_x$  — «игрек штрих по икс»;  $f'(x)$  — «эф штрих от икс», и  $\frac{dy}{dx}$  — «дэ игрек по дэ икс».

Вернемся к рассмотрению первой производной на примере профиля. Ясно, что первая производная относится не к какому-то отрезку произвольной длины  $\Delta x$  на профиле, а является характеристикой поведения профиля в точке с определенными координатами  $x$  и  $h$ . Поскольку  $h$  и  $x$  однозначно связаны, производную можно привязать к конкретному значению  $x$ .

Таким образом,  $y'$  — первая производная функции  $y$  при аргументе  $x$  сама является также функцией, получающей различные значения в зависимости от величины аргумента  $x$ .

Используя производную при решении конкретных задач, часто подразумевают, что при некотором достаточно сильном уменьшении приращения  $\Delta x$  (пределом которого являются ноль), приращения функции  $\Delta h$  настолько мало отличаются от прямопропорциональных  $\Delta x$ , что таким отличием мы можем пренебречь и считать  $\frac{\Delta h}{\Delta x}$  практически величиной постоянно. В этом случае рассматриваемый достаточно малый отрезок пласта представляется нам как прямолинейный. Тогда в его пределах производная  $h'$  является тангенсом его угла падения

$$h' = \frac{\Delta h}{\Delta x} = \operatorname{tg} \delta = k, \quad (2)$$

где  $\delta$  — угол падения пласта на профиле,  $k$  — угловой коэффициент уравнения прямого участка пласта на профиле.

Если же требуется столь малое приращение аргумента, что оно на профиле практически сливается в точку, производная  $h'$  приобретает геометрический смысл тангенса угла  $\delta$  наклона прямой касательной к пласту в рассматриваемой точке. Определение производной как тангенса наклона касательной к кривой является математически строгим определением геометрического образа производной. Это позволяет легко делать заключения о знаке и характере изменения величины производной, глядя на кривую исходной функции, называемой первообразной, роль которой для нас сейчас играет геологический профиль.

Там, где в направлении увеличения аргумента  $x$  (т. е. в положительном направлении оси  $x$ ) функция увеличивается, первая производная функции  $h'$  положительна. Причем, чем больше наклон пласта, тем производная больше. При постоянстве угла падения пласта производная постоянна. Если пласт доходит до вертикального положения, первая производная становится бесконечно большой величиной.

В тех местах геологического профиля (или математического графика), где увеличение аргумента  $x$  сопровождается снижением пласта  $h$  (уменьшением функции), первая производная функции отрицательна. При непрерывности пласта на профиле (функции на графике) переход от участка подъема к участку снижения часто осуществляется через более или менее широкую полосу горизонтального залегания. Эту полосу в пределе можно сводить к точке кривой, в которой касательная горизонтальна. Важно отметить, что в таких местах происходит переход от положительного к отрицательному знаку производной. Значит точки на плавных отрезках кривой, отделяющие места увеличения функции от мест ее уменьшения, характеризуются нулевым значением первой производной. При прохождении в направлении роста аргумента через антиклиналь (которая соответствует максимуму на любом графике) знак производной изменяется с плюса на минус. Пересекая синклиналь (минимум на любом графике), мы должны отметить смену знака производной с минуса на плюс. Необходимо помнить, что первая производная равна нулю и в местах горизонтального залегания пласта на фоне моноклинали. По обе стороны такой структурной террасы знак производной одинаковый.

В итоге, глядя на профиль или любой график какой-либо функциональной зависимости, можно сразу нарисовать кривую, качественно отражающую изменение производной (откладываемой вдоль оси ординат) в зависимости от аргумента  $x$ . В местах горизонтального положения пласта или в точках плавного перехода от подъема к спуску пласта величина производной должна быть равна нулю, а кривая производной совпадать с осью абсцисс или пересекать ее. Качественные соотношения первой производной с различными элементами профиля показаны на рис. 54, б. Конечно, для каждой абсциссы профиля может

быть вычислено точное значение производной, которое изобразится более точной кривой, имеющей качественное сходство с рис. 54, б.

Приведенные на рис. 54 примеры изменения производной характеризуют плавные изгибы исходной кривой. При резких ее изломах значения производной изменяются скачкообразно, и на кривой производной появляются разрывы. Если максимум или минимум на исходной кривой имеет вид шарнирной или килевидной складки (например, как на рис. 10, а, 29, б, 34, в) значение производной в точке максимума (верхней точке) становится неопределенным. Оно оказывается различным по знаку в зависимости от того, с какой стороны мы приближаемся к максимуму, следуя вдоль кривой. При вертикальном положении частей кривых линий, сходящихся в максимуме, производной можно приписать значение и  $+\infty$  и  $-\infty$ , а не 0, как при плавном перегибе. Но, как и в местах плавного перегиба кривой, производная в точках излома, называемых особенными, сохраняет главное свойство максимумов и минимумов исходной кривой — здесь производная изменяет свой знак с плюса на минус в максимумах и с минуса на плюс в минимумах (если мы движемся в направлении возрастания аргумента).

Ряд характерных примеров производных для геологических профилей изображен на рис. 55.

Кроме рассмотренного геометрического существует и аналитический способ отыскания первой производной  $y'$  функции  $y$  по аргументу  $x$ , который является основным. Он состоит в следующем:

- 1) задаются приращением аргумента, обозначаемым  $\Delta x$ ;
- 2) находят наращенное значение функции, т. е.  $y + \Delta y$ ;
- 3) определяют приращение  $\Delta y$  как разность между первоначальным и наращенным значениями функции;
- 4) выписывают отношение приращения функции к приращению

аргумента  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

5) наконец, выявляют предел этого отношения при  $\Delta x$ , стремящемся к нулю.

Весь этот процесс нахождения производной называется дифференцированием функции. Раздел высшей математики, решающий вопросы, связанные с нахождением производной, называется дифференциальным исчислением.

Аналитическим методом выводятся следующие основные формулы: Производная постоянной величины  $c$  равна нулю:

$$(c)' = 0. \quad (3)$$

Производная алгебраической суммы нескольких функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , имеющих общий аргумент  $x$ , равна алгебраической сумме производных каждой из этих функций:

$$(u + v - w)' = u' + v' - w'. \quad (4)$$

Производная произведения двух функций  $uv$ , имеющих общий аргумент  $x$ , равна сумме произведений первой функции  $u$  на производную второй  $v'$  и второй функции  $v$  на производную первой  $u'$ :

$$(uv)' = uv' + vu'. \quad (5)$$

На основании (5) и (3) получается производная произведения постоянной  $c$  на функцию  $u$ , равная произведению постоянной на производную функции:

$$(cu)' = cu', \quad (6)$$

Производная степени  $y = x^m$  равна

$$(x^m)' = mx^{m-1} \quad (7)$$

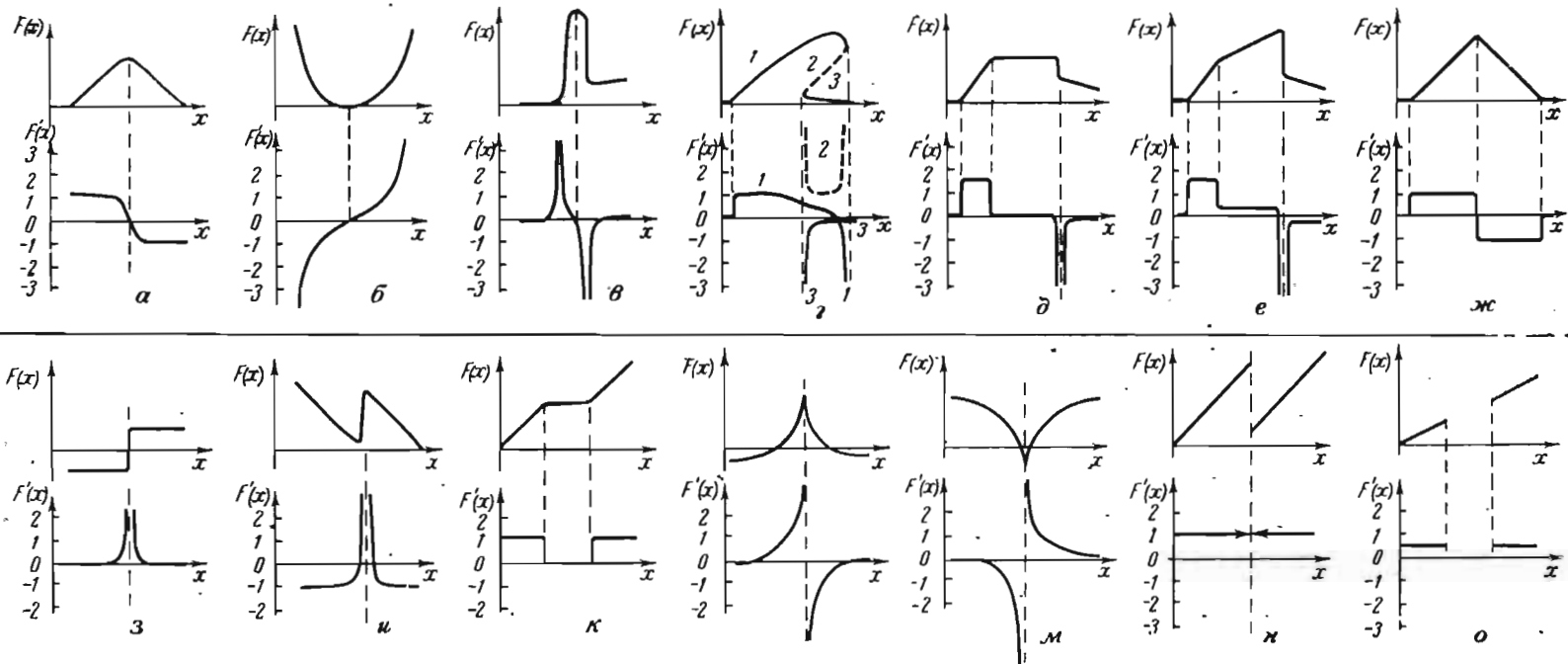


Рис. 55. Графики первой производной  $F'(x)$  от первообразных кривых  $F(x)$ , изображающих частные складки и разрывы различной формы (а—о)

произведению показателя степени на основании  $x$  в степени на единицу меньше.

Производная дроби  $y = \frac{1}{x}$  может быть представлена как производная функции  $y = x^{-1}$ , для которой, согласно последней формуле:

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}, \quad (8)$$

т. е. равна отрицательной дроби, равной единице, деленной на квадрат знаменателя.

Производная отношения двух функций  $\frac{u}{v}$ :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (9)$$

равна дроби, в знаменателе которой стоит квадрат делителя, а в числителе разность между произведением делителя на производную делимого и произведением делимого на производную делителя.

Отметим еще производные некоторых основных функций:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (10)$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (11)$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (12)$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (13)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (14)$$

$$(\lg x)' = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x} \approx \frac{0,4343}{x} = \frac{1}{x} \lg e, \quad (15)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (16)$$

В частном случае  $a = e$  получаем:

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x. \quad (17)$$

Практически весьма важна формула дифференцирования функции от функции  $y = f[\varphi(x)]$ . Обозначая функцию  $\varphi(x)$  переменной  $u = \varphi(x)$ , формулу для производной от  $y$  по  $x$  получают в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}. \quad (18)$$

Существует много специфических особенностей аналитического метода дифференцирования всевозможных функций, излагаемых в соответствующих учебниках.

Следует напомнить, что производную можно найти не для всех функций.

Если функция имеет производную (т. е. существует конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента), то функция является непрерывной. Однако не всякая непрерывная функция имеет производную. Например, функция  $y = |x|$ , типа изображенной на рис. 10, в, непрерывна всюду, т. е. при любых значениях  $x$ . Однако в точке  $x = 0$  функция не имеет производной, в том смысле, что нет одного определенного значения производной. Приближаясь к точке  $x = 0$  из области отрицательных значений  $x$ , мы для производной в этой точке получим  $-k$ , а устремляясь к 0 из области положительных зна-



чений  $x$ , мы будем считать производную равной  $+k$ . Следовательно, в этой точке производная не существует.

Вопрос о производной осложняется в местах профиля, имеющих складки с опрокинутыми крыльями. Здесь надо каждому крылу давать свою характеристику производной, так как одному значению аргумента могут соответствовать несколько разных значений производной (см. рис. 55, г).

В рассматривавшемся на рис. 54 геометрическом примере геологического профиля функция (высота залегания пласта  $h$ ) ставилась в зависимость от одной единственной переменной  $x$  — расстояния по направлению профиля. Однако профиль можно построить по различным направлениям. Чем больше профиль будет отклоняться от направления вкрест простираения пласта, тем больше будет наклон пласта на профиле, т. е. тем меньше будет первая производная. Разные азимуты возможного построения профиля являются как бы разными переменными (аргументами), функцией которых оказывается высота залегания пласта.

Во многих случаях мы имеем дело с переменными величинами, являющимися функциями не одной, а нескольких аргументов. Так, следя за высотой залегания пласта угля в пределах месторождения, мы в качестве двух независимых аргументов должны рассматривать два горизонтальных координатных направления: широтное и меридиональное или вкрест простираения и вдоль простираения. Если для удобства рассмотрения мы следим за приращением функции в зависимости от бесконечно малого изменения лишь одного из нескольких переменных аргументов, сохраняя остальные аргументы неизменной величины, получающаяся производная называется частной и обозначается  $\partial$  («круглой» курсивной русской буквой «дэ»).

Если, например, на плане месторождения мы установили ортогональные направления двух осей координат: широтное  $x$  и меридиональное  $y$ , то частные производные по ним для высоты залегания пласта  $h$  будут  $\frac{\partial h}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial h}{\partial y}$ .

В наиболее общем случае производная должна отражать изменения функции, вызываемые совместно происходящими приращениями всех аргументов. Если эти приращения стремятся к нулю, и мы рассматриваем предел отношения приращения функции к совместному результату изменения всех аргументов, тогда получающаяся производная называется полной.

Из одной точки на местности можно провести много пар ортогональных направлений. Для любой пары сохраняют силу соотношения между производной высоты по направлению наибольшего наклона пласта  $\frac{\partial h}{\partial z}$  (по падению, вкрест простираения) и производными по ортогональным направлениям  $\frac{\partial h}{\partial x}$  и  $\frac{\partial h}{\partial y}$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = + \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}.$$

Здесь буквой  $z$  мы обозначили расстояния в направлении вкрест простираения слоев.

Следовательно, при чтении формул очень важно обращать внимание на то, какие курсивные буквы «дэ» использованы для обозначения производных — круглые русские или латинские. Частная производная появляется, если функция зависит от двух или нескольких аргументов, а мы рассматриваем влияние на нее лишь одного из этих аргументов.

В структурной геологии используются простые геометрические методы нахождения наибольшей из производных по направлениям, если известны частные производные по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Так, например, на двух различно ориентированных соседних стенках шурфа измеряют видимые на них различные наклоны пласта под углами  $\epsilon$  и  $\Upsilon$ , т. е. частные производные по двум направлениям. Затем на чертеже находят горизонтальную линию, проходящую через выходы пласта на обеих стенках шурфа. После этого строят перпендикулярную к ней прямую, выходящую из точки, где пересекается и пласт, и обе стенки шурфа. Тангенс угла наклона этой прямой и есть частная производная по направлению наибольшего наклона.

### *Дифференциал*

Выше было рассмотрено представление о производной как о пределе отношения приращения функции  $\Delta y$  к приращению аргумента  $\Delta x$ , при  $\Delta x$ , стремящемся к нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'. \quad (1)$$

Если  $y'$  конечна, тогда ясно, что  $\Delta y$  одного порядка с  $\Delta x$ , который стремится к нулю и, следовательно, оба приращения бесконечно малые величины. Производная  $y'$  связана с определенной точкой на кривой функции  $y$  и одним из значений аргумента  $x$ . Являясь тангенсом угла наклона касательной к оси аргумента, производная может иметь и малую, и большую величину в диапазоне от минус бесконечности, проходя через ноль, до плюс бесконечности.

Затем мы начали использовать обозначение первой производной в виде

$$y' = \frac{dy}{dx}. \quad (2)$$

Из этой записи следует, что  $dy$ ,  $dx$  могут считаться какими-то определенными отрезками фиксированной величины, количественное соотношение между которыми равно производной  $y'$ . Как представить себе эти отрезки? Каковы их соотношения с приращениями  $\Delta x$  и  $\Delta y$ ?

Величины  $dy$ ,  $dx$  именуется дифференциалами.

Когда в математике вводят понятие о дифференциалах, то начинают с того, что дифференциалом аргумента  $dx$  называют просто его приращение  $\Delta x$ . Затем приращение функции  $\Delta y$  представляют в качестве суммы двух частей этого приращения. Первая главная часть (т. е. наибольшая), если ее можно считать линейно связанной с приращением аргумента, называется дифференциалом функции и обозначается  $dy$ . Вторая часть должна быть бесконечно малой высшего порядка относительно первой части.

Представление о дифференциалах имеет следующее наглядное графическое выражение. Найдем отрезки, соответствующие дифференциалам, если на формулу (2) смотреть как на уравнение линии. Ясно, что это уравнение первой степени описывает прямую линию. Формулу (2) можно написать так:

$$dy = y'dx. \quad (3)$$

Здесь  $dy$  является ординатой точки на прямой,  $dx$  — ее абсциссой, а производная  $y'$  играет роль углового коэффициента (см. рис. 56).

Будем считать за начало координат точку  $M$  на кривой (с координатами  $x_1$  и  $y_1$ ), к которой относится производная  $y'$ . Поскольку  $x$  является аргументом, начнем с того, что отложим в направлении оси  $x$

от точки  $M$  произвольный отрезок, являющийся приращением аргумента  $\Delta x$ . Припишем ему вместе с тем и второе название — дифференциал аргумента, обозначаемый  $dx$ :

$$dx = \Delta x. \quad (4)$$

Это приращение аргумента не будем в данном случае устремлять к нулю.

Произвольно взятому приращению аргумента  $dx$ , согласно формуле (3), соответствует приращение ординаты (по сравнению с ординатой точки  $M$ ) на величину, прямо пропорциональную производной  $y'$ , относящейся к точке  $M$ . В результате получаем точку  $L$  с координатами  $(x_1+dx)$  и  $(y_1+dy)$ . Разница в ординатах точек  $M$  и  $L$  является отрезком  $dy$ , который называется дифференциалом функции.

Линейная связь между отрезками  $dx$  и  $dy$  и пропорциональность между ними, равная производной  $y'$  в точке  $M$ , являются основными свойствами дифференциалов. На кривой функции есть точка  $N$ , соответствующая аргументу  $(x_1+dx)$ .

Если основная рассматриваемая (дифференцируемая) функция прямолинейна, то дифференциал функции  $dy$  полностью совпадает с приращением функции  $\Delta y$ , по существу никакой разницы между ними нет — это лишь два разных обозначения одного отрезка:

$$dy = \Delta y. \quad (5)$$

Однако при криволинейной форме графика рассматриваемой функции  $y=f(x)$  разница между  $dy$  и  $\Delta y$  становится все больше и больше по мере увеличения дифференциала аргумента  $dx$ , сохраняющего свое равенство приращению  $\Delta x$ , так как они являются синонимами.

По мере увеличения дифференциала аргумента точка  $L$  скользит вдоль прямой, сохраняя постоянную пропорциональность между  $dx$  и  $dy$ . А приращение функции  $\Delta y$ , следуя криволинейному графику, с ростом  $dx=\Delta x$  увеличиваются или быстрее, чем  $dy$  (если кривая отклоняется вверх) или медленнее (если кривая отклоняется вниз; рис. 56). Основное значение теперь приобретает разность между дифференциалом и приращением функции, которую обозначим  $\zeta$ :

$$dy - \Delta y = \zeta. \quad (6)$$

При увеличении дифференциала аргумента  $dx=\Delta x$  до тех пор, пока величиной разности  $\zeta$  можно пренебречь, мы вправе считать:

$$dy = \Delta y \quad (7)$$

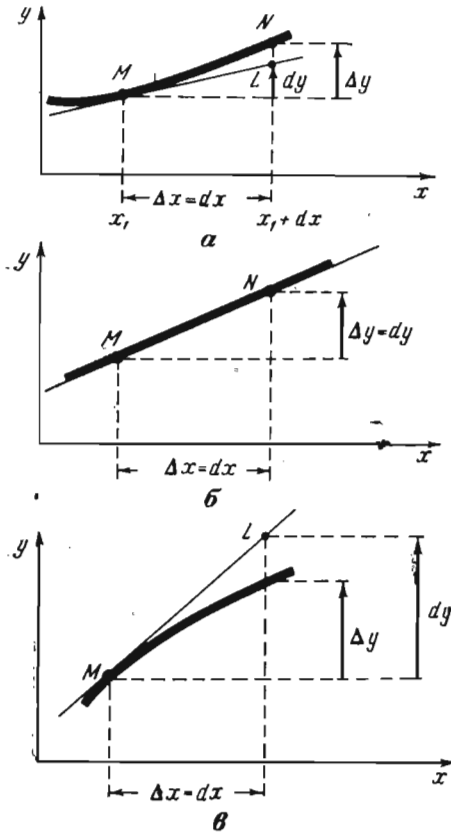


Рис. 56. Схема трех различных возможных соотношений между приращением функции ( $\Delta y$ ) и ее дифференциалом ( $dy$ ) при одинаковой величине приращения (дифференциала) аргумента ( $\Delta x=dx$ )

и соответственно сохранять в силе обозначение первой производной

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}. \quad (8)$$

Как только разность  $\zeta$  станет существенной и ею пренебрегать будет нельзя, формула (7) становится недействительной. Иначе говоря, последняя формула справедлива пока мы оперируем с достаточно малыми отрезками  $dx = \Delta x$ , позволяющими криволинейную функцию аппроксимировать (приближенно заменять) прямолинейной.

Наибольшая величина  $dx$ , до которой можно формулу (7) считать справедливой, зависит от характера решаемой задачи и точности оценок остальных использованных в ней величин.

Если, подобно высоте (аппликате) пласта  $h$ , обсуждаемая функция является зависимой от нескольких, скажем, двух переменных  $x$  и  $y$ , можно рассматривать ее частные производные либо по одной переменной  $\frac{\partial h}{\partial x}$  либо по другой переменной  $\frac{\partial h}{\partial y}$ .

Взяв приращение одного из аргументов произвольной величины  $dx$  и  $dy$  и умножив каждое из них на соответствующую частную производную, мы получим величины:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \cdot dx \quad \text{и} \quad \frac{\partial h}{\partial y} \cdot dy, \quad (9)$$

каждая из которых является частным дифференциалом, т. е. главной частью приращения функции, которая соответствует линейной зависимости. Алгебраическая сумма частных дифференциалов называется полным дифференциалом  $dh$ :

$$dh = \left( \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \right). \quad (10)$$

Геометрический смысл полного дифференциала — это приращение функции (аппликаты  $h$ ) при приращениях аргументов абсциссы  $dx$  и ординаты  $dy$ , которое происходит, если функция в трехмерном пространстве изображается плоскостью, иначе говоря, если зависимость  $h$  от  $x$  и  $y$  можно принять за линейную.

На практике нередко приходится сопоставлять большие по величине приращения аргумента  $(x_2 - x_1)$  с соответствующими им приращениями функции  $(y_2 - y_1)$ . Отношение этих величин, которое обозначим  $q$ :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = q \quad (11)$$

выражает среднюю быстроту изменения интересующей нас функции  $y$  от изменения аргумента  $x$ . Величина  $q$  указывает среднее изменение  $y$  на единицу аргумента.

Так, например, по редко расположенным скважинам находят величину среднего погружения пласта на единицу расстояния. Таким же образом оценивают многие физические свойства горных пород — модуль упругости, коэффициент эффективной вязкости и др. Первоначальными значениями часто считают  $x=0$  и  $y=0$ , а для  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$  берут немного отсчетов. Получаемая при этом формула

$$q = \frac{y}{x} \quad (12)$$

показывает, что мы сочли зависимость линейной, но не доказывает этого.

В приведенных формулах для средних соотношений между функцией и аргументом подразумевается линейная связь. Найденный при этом условный коэффициент пропорциональности  $q$  называется «эффективным» значением  $q$ . В действительности зависимость может быть и нелинейной. Истинный график часто обладает изогнутостью в одном направлении или многочисленными переломами и пергибами в разные стороны.

Формулы, дающие среднюю зависимость, не отражают в явном виде этих отклонений графика от прямолинейной формы. Однако отклонения сильно влияют на среднюю связь, что становится ясным при изменении диапазона осреднения, т. е. интервала между  $x_2$  и  $x_1$ . Беря его в разных местах оси абсцисс, или изменяя его величину, при нелинейной зависимости  $y$  от  $x$  получим разные величины эффективного значения коэффициента  $q$ .

Сопоставим среднюю зависимость  $q$  с дифференциальным отношением  $\frac{dy}{dx}$  и производной  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} y'$ .

Первая величина  $q$  из (11) относится к большому диапазону аргумента  $x$  со сложной, заведомо нелинейной зависимостью, которую она заменяет эквивалентной для данного диапазона линейной зависимостью.

Вторая величина  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  из (4) и (5) относится к столь малому диапазону значений аргумента  $x$ , что в нем зависимость  $y$  от  $x$  практически можно принимать за линейную и данное отношение приравнять к первой производной  $y'$ .

Третья величина  $y'$  связана уже не с каким-то диапазоном значений аргумента, а только с одним его значением, которому соответствует одна точка на графике зависимости  $y$  от  $x$ , имеющей в общем случае нелинейную форму. Эта величина, называемая первой производной, является пределом для предыдущих двух величин, при стремлении приращения аргумента к нулю. Четкое понимание рассмотренных соотношений между  $y'$ ,  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  и  $q$  имеет большое значение при решении многих тектонических и тектонофизических вопросов. Ясно, что чем меньше интервал осреднения, тем величина  $q$  ближе к производной  $y'$ . Несмотря на простоту этих представлений, исследователи неоднократно в них ошибались.

### **Вторая производная функции**

Первая производная является функцией того же аргумента, который определяет величину основной исходной функции  $y$ . Получив графическое или аналитическое выражение зависимости первой производной  $y'$  непосредственно от аргумента  $x$ , можно рассматривать ее как самостоятельную, как бы новую функцию  $x$ , не думая о том, что она была получена путем дифференцирования. Такую функцию в свою очередь можно подвергнуть дифференцированию. В результате этого для каждого значения аргумента  $x$  получается величина, называемая второй производной от исходной функции, или производной второго порядка. Ее также можно продифференцировать и получить производную третьего, а затем и более высоких порядков. Однако ограничимся производными второго порядка.

Для обозначения второй производной используются различные формы записи, например:

$$y'', \quad y_x'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (1)$$

Первое обозначение: «игрек два штриха». Последнюю формулу читают так: «дэ два игрек по дэ икс квадрат». Величина  $d^2y$  является дифференциалом второго порядка для функции. Величина  $dx^2$  — это квадрат дифференциала аргумента.

Из равенства

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (2)$$

следует:

$$d^2y = y'' dx^2 = y' dx dx. \quad (3)$$

Вторая производная является характеристикой изменчивости величины первой производной в данной точке. Если функция — высота, ее первая производная — угол (измеренный тангенсом), то вторая производная — изменчивость угла. Размерности функции и ее производных различны.

Соотношения производной второго порядка с производной первого порядка определяются теми же графическими правилами и формулами, которые связывают первую производную с исходной функцией. Графически вторая производная является тангенсом угла наклона графика первой производной. На рис. 57 вверху дано схематическое изображение геологического профиля, на котором выделен один пласт, образующий складки синусоидообразной и коробчатой формы в одной из долин в Ферганском хребте.

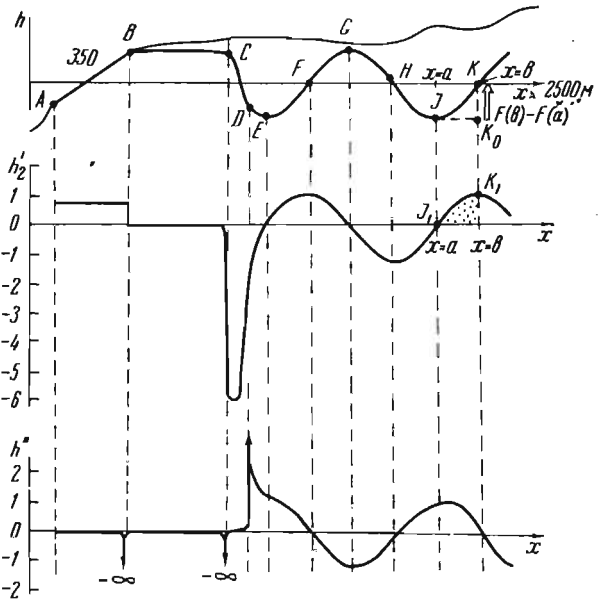


Рис. 57. Схематичный геологический профиль участка в Ферганском хребте и кривые первой ( $h'$ ) и второй ( $h''$ ) производных высоты залегания ( $h$ ) пласта

Ниже показаны графики соответствующего ему хода кривых первой производной высоты пласта  $h'$  и второй производной  $h''$ .

Выходы пласта начинаются на склоне главной долины в точке А и отсюда прослеживаются вдоль склона второстепенной долины притока. Здесь пласт имеет плоскую форму залегания, угол его падения  $35^\circ$ . С увеличением аргумента  $x$  (расстояния) пласт поднимается. Соответственно, первая производная постоянна, положительна и равна  $\text{tg } 35^\circ = 0,7$ . Так она и показана под отрезком АВ на кривой первой производной. Вторая производная  $h''$  при постоянстве первой производной  $h'$  равна нулю, что и показано на нижней кривой. В точке В пласт перегибается к горизонтальному положению. Значит, тангенс угла падения резко падает до нуля и сохраняет это значение до точки С. Это и показано вертикальным уступом на среднем графике первой производной. В уступе графика первой производной тангенс угла доходит до бесконечности. Поскольку с ростом аргумента первая производная уменьшается с 0,7 до нуля, мы должны устремить вторую производную к минус бесконечности ( $-\infty$ ). В таких случаях говорят

также, что производная не существует (теряет смысл). На отрезке  $BC$  первая производная постоянна (равна нолю), поэтому вторая производная равна также нолю.

В точке  $C$  профиля пласт переходит к плоскому залеганию до точки  $D$  с крутым наклоном  $80^\circ$ , при котором высота пласта уменьшается с ростом аргумента  $x$ . Значит, первая производная на участке  $CD$  резко переходит к отрицательному значению с постоянной величиной  $h' = \operatorname{tg} 80^\circ = -6$ .

Вертикальный уступ на кривой первой производной отражается устремлением кривой второй производной в минус бесконечность в точке  $C$ . Горизонтальный отрезок кривой первой производной под наклонным плоским отрезком  $CD$  выражается на кривой второй производной горизонтальной линией на нолевом уровне.

На отрезке профиля  $DE$  продолжается замедляющийся спуск пласта. Первая производная остается отрицательной, но ее абсолютная величина уменьшается. Быстрому подъему кривой первой производной между  $D$  и  $E$  соответствует асимметричный максимум второй производной, уходящий далеко вверх.

От  $E$  до  $F$  пласт на профиле поднимается с нарастанием угла падения. Это приводит к положительному знаку и увеличивающейся первой производной. Ее замедляющийся рост определяет положительную, постепенно уменьшающуюся вторую производную.

Точка  $F$  на профиле замечательна в двух отношениях: 1) наклон пласта на крыле  $EFG$  достигает максимума; 2) кривизна пласта изменяет свой знак на противоположный. Поэтому: 1) первая производная достигает наибольшей величины и 2) вторая производная проходит через ноль и изменяет свой знак.

От  $F$  до  $G$  продолжается замедляющийся подъем пласта при постоянстве знака кривизны. В точке  $G$  высота пласта имеет максимальное значение. В результате первая производная, оставаясь положительной, уменьшается по величине и в точке  $G$  доходит до ноля. Вторая производная (из-за уменьшения первой) имеет отрицательный знак и наибольшую отрицательную величину в точке  $G$ .

От  $G$  до  $H$  пласт снижается, постоянно увеличивая угол падения, который в точке  $H$  максимален. Первая производная поэтому отрицательна и принимает наибольшую абсолютную величину в точке  $H$ . Вторая производная отрицательна, поскольку первая уменьшается с ростом аргумента. Уменьшение наклона кривой первой производной с приближением к точке  $H$  вызывает уменьшение абсолютной величины второй производной.

Точка  $H$  похожа на точку  $F$ , поскольку в ней имеется наибольший наклон пласта в пределах крыла и происходит изменение знака кривизны. В силу того, что выпуклость вверх сменяется выпуклостью книзу, первая производная в точке  $H$  имеет минимум, а не максимум, как в точке  $F$  (в которой последовательность кривизны обратная).

От  $H$  до  $I$  пласт продолжает снижаться с замедлением, и в точке  $I$  мы имеем очередной минимум высоты залегания пласта. Первая производная отрицательна, но к точке  $I$  ее абсолютная величина уменьшается и доходит до ноля. Этот убыстряющийся подъем кривой первой производной вызывает положительный знак и возрастание величины второй производной до ее максимума в точке  $I$ .

В последнем отрезке  $IK$  полностью повторяются соотношения, уже охарактеризованные на примере отрезка  $EF$ .

В руководствах и справочниках приводится много различных форм основной кривой и соответствующих им значений первой и второй производной.

В рассмотренном примере вторая производная бралась по той же переменной  $x$ , по которой получали и первую производную. Это

весьма распространенный случай. Общеизвестным представителем его служит ускорение  $j$  — вторая производная от пути  $x$  по времени  $t$  или первая производная от скорости  $V$  (которая является первой производной от пути  $x$  по времени  $t$ ):

$$j = \frac{dV}{dt}; \quad V = \frac{dx}{dt}; \quad j = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (4)$$

Однако рассматриваемая основная функция (допустим, высота залегания пласта  $h$ ) не обязательно зависит лишь от одной переменной  $x$ . На нее могут влиять и другие переменные, например  $y$ . Тогда возникает возможность сначала продифференцировать основную функцию  $h$  по одному аргументу  $x$ , а затем полученную первую частную производную  $\frac{\partial h}{\partial x}$  продифференцировать по другой переменной  $y$ . В итоге получается производная второго порядка, которую называют смешанной:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}. \quad (5)$$

При определенных условиях, накладываемых на функцию и ее первые производные величина смешанной производной не зависит от последовательности дифференцирования: сначала по  $x$ , а потом по  $y$  или наоборот. Поэтому

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}. \quad (6)$$

По отношению к рассматривавшемуся профилю на рис. 57 вторая производная  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  характеризует, как изменяется угол наклона пласта вдоль линии профиля, который в данном случае проходит вкрест простирания складок и слоев. Можно ввести пространственную ось координат  $y$ , направленную вдоль простирания складок. Теперь можно вторым дифференцированием выяснить изменение угла наклона поперек складок и вдоль них. Эти вторые производные вдоль осей  $x$  и  $y$  имеют смысл частных производных  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$ . При таком пространственном представлении складок наибольшее изменение угла наклона может быть и в каком-то направлении, не совпадающем ни с  $x$ , ни с  $y$ .

### **Приложения производных**

Понятия о производных от функций очень широко используются при решении многих математических задач, возникающих в ходе самых различных практических и научных работ. Исходными данными при этом являются и графические, и аналитические выражения функций.

Используя производные, выполняют разнообразные расчеты по формулам, вытекающим из основных свойств производных. Если первая производная в некотором промежутке значений аргумента положительна, то функция в этом промежутке с ростом аргумента увеличивается. Если первая производная отрицательна, значит функция уменьшается.

При первой производной, равной нулю, функция либо постоянна, либо переходит через максимум, либо через минимум, либо испытывает перегиб с изменением знака кривизны, при котором касательная



располагается горизонтально. Все эти случаи можно различить благодаря тому, что при переходе через максимум первая производная изменяет знак плюс на минус, а в точке, соответствующей минимуму функции  $y$ , знак первой производной меняется с минуса на плюс.

Максимумы на кривой функции отличаются также тем, что вторая производная при этих значениях аргумента отрицательна. В точках минимума функции вторая производная положительна. При местном выполаживании кривой функции до горизонтального положения, которое не является ни максимумом, ни минимумом, знак первой производной не изменяется после того, как она в точке или участке выполаживания была равна нулю.

В местах, где кривая функции  $y$  обращена выпуклостью вверх, вторая производная отрицательна, если кривая обращена выпуклостью вниз — положительна. В точках перегиба, отделяющих участки кривой, выпуклых в одну сторону, от участков, выпуклых в другую сторону, вторая производная равна нулю и изменяет свой знак.

Математические методы вычислений, позволяющие находить значения аргумента и функции, которые определяют все упоминавшиеся выше точки, излагаются во всех учебниках высшей математики.

Формулы, содержащие первую и вторую производные, позволяют вычислять кривизну кривой при выбранном значении аргумента. Кривизной кривой в данной точке называется предел, к которому стремится средняя кривизна дуги при неограниченном ее уменьшении и стягивании к данной точке. Средней кривизной дуги называется отношение  $\frac{\Delta\delta}{\Delta S}$ . Здесь  $\Delta\delta$  — приращение угла наклона касательной при переходе от данного конца дуги к другому, а  $\Delta S$  — длина дуги. Итак, кривизна  $K$  в точке кривой линии:

$$K = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta S} = \frac{d\delta}{dS}. \quad (1)$$

После ряда преобразований из последней формулы получают очень важную для техники формулу:

$$K = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (2)$$

которая широко используется при расчетах, связанных с изгибанием балок, и важна при изучении изгиба слоев.

Через рассматриваемую точку кривой можно провести окружность, имеющую такую же кривизну. Радиус этой окружности  $R$  называется радиусом кривизны, а центр окружности — центром кривизны для рассматриваемой точки кривой:  $R = \frac{1}{K}$ . Поэтому кривизну определяют также как величину, обратную радиусу кривизны.

Уравнения, содержащие производные от искомой функции или ее дифференциалы, широко используются в самых различных областях науки и техники. Они называются дифференциальными уравнениями.

Многие важнейшие физические процессы и технические задачи при их описании приводятся к дифференциальным уравнениям. Лишь простейшие процессы и задачи записываются в виде соотношений между конечными значениями переменных. Поэтому нет ничего удивительного в том, что решение многих тектонофизических вопросов оказывается невозможным без применения представлений дифференциального исчисления.

## ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ГЕОТЕКТОНИКЕ И ТЕКТОНОФИЗИКЕ

В геотектонике и тектонофизике есть много представлений, широко используемых геологами в различных целях, которые с математической точки зрения являются производными 1-го или 2-го порядка от функций, описывающих перемещения, деформации и напряжения в земной коре. Соответственно, незнание свойств производных может оказаться причиной ошибочных геологических заключений.

Мы уже рассмотрели ряд примеров из структурной геологии. Вспомним, что, анализируя геометрические элементы складок, мы использовали то значение аргумента (абсциссы), при котором достигается максимальное значение первой производной аппликаты залегания пласта в складке поверхности, чтобы отделить внутреннюю часть складки от внешней.

В геотектонике и тектонофизике большое внимание уделяется деформациям горных пород. Количественной мерой деформации служит первая производная перемещения материальных точек пространства от расстояния.

Не меньшую роль играет скорость тектонических движений, которая является первой производной от пространственных координат материальной точки по времени. На ее обсуждении мы остановимся несколько ниже.

К первым производным относятся, например, такие важные характеристики физических свойств горных пород, как их модули упругости: Юнга ( $E$ ), сдвига ( $G$ ), объемного сжатия ( $K$ ).

Эти характеристики часто представляют в крайне простом виде. Например, модуль Юнга рассматривают как постоянный коэффициент пропорциональности между величиной нормального напряжения и упругой деформацией удлинения (или укорочения) в одноосно нагруженном образце. При этом упругая деформация  $\epsilon$  считается линейной функцией напряжения  $\sigma$ , выражающейся на графике «напряжение — упругая деформация» прямой, угловой коэффициент которой численно равен модулю Юнга. При тщательном рассмотрении фактических данных выясняется, что по отношению к горным породам такое представление должно считаться чрезвычайно упрощенным. В связи с практическими задачами горного дела и геофизики рядом исследователей было установлено, что более точный график «напряжение — упругая деформация» представляет собой для горных пород не прямую а изогнутую линию, наклон которой в разных частях графика различен. Поэтому оказывается невозможным говорить о каком-либо одном угловом коэффициенте кривой, численно равном модулю Юнга, и приходится вводить три разных по смыслу величины, играющих роль модуля упругости.

Первый модуль упругости, который условно назовем «начальным»  $E_0$ , представляет собой предел отношения приращения напряжения  $\Delta\sigma$  к приращению упругой деформации  $\Delta\epsilon$  при деформации, стремящейся к нулю:

$$E_0 = \lim_{\Delta\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon} = \frac{d\sigma}{d\epsilon}.$$

при  $\Delta\epsilon = \epsilon \rightarrow 0$ .

Этот модуль соответствует угловому коэффициенту начального участка кривой упругой деформации, который можно считать прямолинейным и надо связывать с весьма малой величиной напряжений. Часто такие упругие деформации горных пород изучаются методами геоакустики с применением ультразвука, когда продолжительность действия напряжений чрезвычайно мала. При ультразвуке она всегда

меньше  $5 \cdot 10^{-5}$  сек и доходит до  $5 \cdot 10^{-8}$  сек. Это оказывает влияние на развитие упругой деформации. В итоге модули упругости, определенные с помощью ультразвука, обычно бывают выше, чем модули упругости, установленные рассматриваемыми ниже статическими методами (до 10% и более; Воларович, Фан Вэй-цин, 1962; Левыкин, 1962; Воларович, Гзовский и др., 1969).

Второй модуль условно называют «касательным»  $E_K$ . Он представляет собой предел отношения приращения напряжения  $\Delta\sigma$  к приращению упругой деформации  $\Delta\varepsilon$  при стремлении последнего приращения к нулю:

$$E_K = \lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}.$$

при  $\Delta\varepsilon \rightarrow 0$

Данный модуль в отличие от начального определяется для точек кривой, находящихся на любом удалении от начала графика, т. е. при больших напряжениях. Это характерно для испытаний статическими методами на прессах, когда длительность действия напряжений во много раз больше, чем при прохождении ультразвука. При обычных испытаниях напряжения действуют несколько секунд или минут, но существуют опыты на ползучесть, в которых напряжения действуют несколько месяцев, а упругая деформация продолжает развиваться в течение нескольких недель. Графическим выражением рассматриваемого модуля является тангенс угла наклона касательной к точке графика, изображающей регистрируемые значительные деформации и напряжения.

Третий модуль упругости условно называют «секущим»  $E_c$ . Его можно назвать также эффективным. Он соответствует среднему значению модуля упругости для всего интервала упругих деформаций и напряжений от нуля до наблюдаемых величин. Его вычисляют как отношение наибольших достигнутых величин напряжений и деформаций:

$$E_c = \frac{\sigma}{\varepsilon},$$

которые сохраняются в горных породах в течение длительного времени. Графическим выражением секущего модуля является измеренный тангенсом угол наклона прямой, соединяющий начало координат с точкой на кривой, соответствующей рассматриваемым напряжению и деформации. Для одной и той же горной породы секущий модуль часто бывает промежуточным по величине между начальным и касательным.

Геологам, занимающимся тектонофизикой, важно четко различать рассмотренные три вида модулей упругости и пользоваться тем из них, который отвечает физическому существу решаемого вопроса. Аналогичное разделение необходимо и для модулей сдвига, и для модулей объемного сжатия. Такой же подход должен быть и к вязкости горных пород, которая характеризуется особенно большой изменчивостью своей величины.

Из вторых производных, интересующих нас в геотектонике и тектонофизике, прежде всего должно быть названо ускорение силы тяжести  $g$ . Оно связывает вертикальное перемещение  $l$  падающего тела с временем  $t$ :

$$g = \frac{d^2l}{dt^2}.$$

Ускорение силы тяжести вместе с плотностью горных пород определяет силу тяжести, действующую на все тела на Земле и играющую чрезвычайно важную роль в тектонических процессах. Ускорение силы

тяжести зависит от географической широты местности, высоты над уровнем моря, скорости вращения Земли и распределения масс внутри Земли. Последняя зависимость широко используется для выяснения глубинной структуры, при поисках полезных ископаемых, а также имеет значение при попытках объяснения причин тектонических движений.

Изменение скорости тектонических движений с течением времени также является ускорением (второй производной тектонического перемещения по времени). На рис. 58

приведены кривые изменения во времени средней скорости тектонических движений в геосинклинальных, платформенных и материковых областях, по А. Б. Ронову (1961). Скорости на этом графике средние для десятков млн. лет. Ускорение тектонических движений определяется тангенсом угла наклона кривой с учетом единиц измерения времени (аргумента) и скорости (функции). Наибольшее ускорение оказывается порядка  $10^{-19}$  м/сек<sup>2</sup>, на 18 порядков меньше ускорения силы тяжести  $g$ , стандартная величина которого на широте  $45^\circ$  около уровня моря составляет  $9,80665$  м/сек<sup>2</sup>. Ускорение современных тектонических движений с измеряемыми геофизически скоростями средними для одного года, достигает лишь  $10^{-8}$  м/сек<sup>2</sup>, т. е. в  $10^9$  раз меньше  $g$ . Ясно, что этими ускорениями в тектонике можно пренебречь.

Весьма важной величиной является скорость деформации — вторая производная смешанного типа. К ней близки скорость изменения наклона, измеряемая специальными геофизическими приборами (Бончковский, 1959; Островский, 1963), и градиент скорости вертикальных тектонических движений. Три последних величины также относятся к смешанным производным второго порядка.

Остановимся подробнее на двух примерах — скорости тектонических движений и ее градиенте. Будем при этом обращать особое внимание на исключительно важные соотношения между понятиями о средних величинах, отношении дифференциалов и производных.

### Скорость тектонических движений

Для измерения скорости прежде всего требуется зафиксировать определенную материальную точку, установить ее пространственно-временные координаты. Затем найти разность двух положений (координат) — начального и конечного, т. е. приращение координат  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta h$  за определенный промежуток времени  $\Delta t$ .

Средними скоростями точки в направлениях координат называют отношения приращений координат  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta h$  к приращению времени  $\Delta t$ :

$$V_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad V_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad V_h = \frac{\Delta h}{\Delta t}. \quad (1)$$

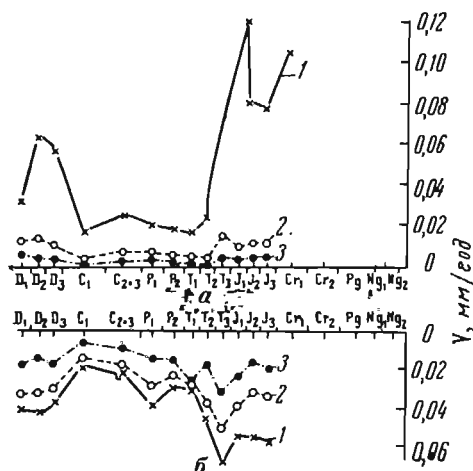


Рис. 58. Изменение во времени средних скоростей  $V$  поднятия (а) и погружения (б) геосинклиналей (1), материков (2) и платформ (3), по А. Б. Ронову, 1961)

Обычно координатные направления  $x$  и  $y$  целесообразно брать горизонтальными — одно меридионально, другое — широтно, или — одно вдоль, а другое поперек тектонической зональности. Третье направление  $h$  — вертикально. Зная эти три величины и то, что они являются составляющими одной истинной скорости движения, направленной как-то нансось к ним и отличающейся наибольшей величиной, легко найти ее значение  $V$  по формуле:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_h^2}. \quad (2)$$

при  $\Delta t \rightarrow 0$

Истинная величина скорости является пределом, к которому стремится средняя скорость при стремлении  $\Delta t$  к нулю. Нетрудно определить и направление  $V$ .

Полная характеристика скорости включает ее величину и направление. Поэтому скорость есть вектор.

На практике такие определения скорости тектонических движений выполняются пока еще очень редко. Обычно измеряют какую-то одну заранее выбранную составляющую, чаще всего вертикальную. Вопрос о направлении в дальнейшем уже не ставится, и речь идет только о величине скорости, которая рассматривается в качестве скаляра. К скорости как вектору мы вернемся позднее.

При геофизических инструментальных исследованиях следят за перемещениями в пространстве специально заложенных реперов и повторяют измерения в зависимости от метода через разные промежутки времени, которые могут достигать года, но бывают и намного меньшими. Перемещения репера определяются изменениями температуры (суточными, погодными, сезонными), колебаниями атмосферного давления, приливами, вызываемыми Луной, атмосферными осадками, изменением уровня моря или озера на разных его берегах из-за ветра, и т. д. В итоге точные инструментальные геофизические оценки скорости даются обычно как средние для времени не меньше одного года или месяца. Такие оценки для тектоники являются наибольшим приближением приращения аргумента к нулю. Если учесть, что обычно мы оперируем интервалами времени в миллионы и десятки миллионов лет, т. е. величинами в  $10^6 \div 10^7$  раз большими, можно говорить о пренебрежимо малой величине приращения аргумента к рассматриваемому интервалу его значений. Вспомним, что Земля в небесной механике считается точкой, т. е. ее диаметр приравнивается нулю, поскольку орбита Земли имеет в  $10^5$  раз больший диаметр. Соответственно, геофизически измеренные скорости, средние для одного года или месяца, при решении тектонических вопросов можно принимать за весьма близкие к первым производным.

Геодезические определения редко выполняются ежегодно. Обычно они повторяются лет через 10—50. Считается допустимым повторять их через 10—20 лет (Мещеряков, 1963; Матцкова, 1963). В этом случае скорость еще близка к отношению дифференциалов перемещения и времени. Из-за периодичности вертикальных перемещений во времени более продолжительные промежутки между измерениями дают уже другие величины, которые по смыслу не могут быть дифференциальными, а являются средними.

Величины скорости, измеренной геофизически и геодезически, в тектонически спокойных платформенных областях часто составляют единицы миллиметра в год, в наиболее подвижных областях доходят до единиц сантиметра в год, в пределе бывают около 10 *см/год*. Более высокие скорости до 40 *см/год* возникают при наложении на глубинные тектонические процессы действия поверхностных явлений, например уплотнения верхних слоев под весом зданий вследствие усадки пород после откачки воды, нефти, и других причин.

Движения, характеризуемые геофизическими и геодезическими методами для промежутков 1—100 лет, называются современными. К ним близки движения, определяемые для последних сот и нескольких тысяч лет по различным историческим и археологическим данным. Реперами для измерения их скорости служат древние поселения людей, остатки зданий, дорог, древние карты, летописи (Горшков, Якушова, 1962). Все количественные оценки при изучении движений исторических реперов менее точны, чем при геодезических измерениях.

Далее следуют скорости для отдельных эпох четвертичного периода, прежде всего для голоцена, называемые молодыми (по Ю. А. Мещерякову), а также для этого периода в целом (до 0,5—1,0 млн. лет). Главную роль при измерении этих скоростей играют высоты террас, следы оледенения и другие геоморфологические реперы. При этом скорости получаются явно уменьшенными и неточными, по сравнению с получаемыми предыдущими методами.

Следующими идут так называемые новейшие движения, за четвертичный и неогеновый периоды совместно, часто с включением и части позднего палеогена. Это составляет всего 30—40 млн. лет. Определения скорости ведутся тектоническими методами, о которых речь будет ниже. Очевидно, эти скорости являются средними для таких больших промежутков времени, что в них включаются многократные изменения не только величины, но и знака скорости. В малоподвижных тектонических областях скорость достигает лишь сотых долей *мм/год*, а в наиболее подвижных в пределе составляет десятые доли *мм/год*.

Очень большое влияние на изучение новейших движений оказали работы В. А. Обручева, С. С. Шульца и Н. И. Николаева. Теперь эти движения многими исследователями изучены на всей территории СССР. Это позволило достоверно вычислить значения средней скорости.

Наконец, мы пришли к оценкам скорости тектонических движений древних геологических периодов. Продолжительность их основных подразделений, определяемая методами абсолютной геохронологии (по радиоактивному распаду химических элементов), составляет десятки млн. лет. Эти промежутки разделяются на несколько частей чисто формально. Таким образом, продолжительность геологических веков, составляющая единицы или первые десятки млн. лет, оценивается с ошибкой лишь в 2—3 раза. Таковы минимальные приращения времени, с которыми мы имеем дело, изучая движения, происходившие до появления человека на Земле.

Репером при изучении древних движений служит площадка на определенной структурной поверхности, за перемещениями которой мы следим мысленно, интерпретируя разрезы пород, отложившихся поверх нее, оценивая глубину происходивших размывов, принимая во внимание глубину бывших здесь морей (глубинная характеристика фаций осадков), мощность (толщину) накопившихся слоев, наконец современную высоту залегания выбранной нами площадки. Изучая древние движения, необходимо четко различать две величины, которые изменяются во времени: 1) высоту  $h$  репера, дающего нам искомую скорость  $V$  тектонических движений; 2) высоту  $f$  твердой поверхности земли (суши или дна водного бассейна). Последняя изменяется за счет тектонических движений, поверхностных процессов размыва горных пород или отложения осадков.

Фактической основой определения скорости древних вертикальных движений служит чаще всего стратиграфическая колонка. Она позволяет выделить приращения времени  $\Delta t$ , соответствующие однообразному протеканию геологических процессов и предполагаемому постоянству средней скорости тектонического движения. Далее сопоставляются высоты репера и поверхности земли в конце смежных прира-

щений времени. Так находятся приращения высоты поверхности земли  $\Delta f$  для каждого приращения времени  $\Delta t$ . Знак  $\Delta f$  положительный при увеличении высоты (уменьшении глубины дна бассейна) и отрицательный при уменьшении высоты (увеличении глубины).

Глубины осадконакопления в конце образования каждого литологически однородного подразделения стратиграфической колонки устанавливаются по остаткам растений и животных с использованием палеонтологических признаков, по специфическим минералам и образованиям в породах, т. е. по геохимическим и литологическим критериям. Н. М. Страховым (1948) приведено много таких признаков, позволяющих узнавать породы, образовавшиеся на глубинах  $0 \div 10$  м (угли, соли),  $30 \div 50$  м (известковые губки, колониальные рифостроющие кораллы),  $100 \div 150$  м (определенные виды губок, мшанок, фосфориты, глауконит) и т. д. Например, оолиты: кальцитовые образуются на глубине от 0 до 10 м, из гидроокислов алюминия — от 0 до 50 м, из гидроокислов марганца — до 100 м.

Оценив  $\Delta f$ , которое может составлять не только десятки, но и сотни, а весьма редко и тысячи метров, обращаемся к мощности  $m$  толщи пород, образовавшейся за рассматриваемое приращение времени. Приращение высоты  $\Delta h$  выбранного репера выражается формулой

$$\Delta h = \Delta f - m \quad (3)$$

Если глубина осадконакопления увеличилась, т. е.  $\Delta f$  величина отрицательная, то, подставив ее в формулу (3), получаем суммирование отрицательных величин, которое отражает движение в сторону отрицательного направления — опускание.

Если глубина осадконакопления уменьшилась,  $\Delta f$  положительна, и величина тектонического перемещения  $\Delta h$  определяется разностью абсолютных величин  $\Delta f$  и мощности  $m$ . В зависимости от отношения этих величин разность может оказаться или отрицательной — значит произошло тектоническое опускание, или равной нулю, или положительной — при тектоническом поднятии.

При определении  $\Delta h$  по основной формуле (3) необходимо отчетливо представлять точность определений обеих величин, входящих в разность. Вывод о знаке и величине приращения  $\Delta h$  можно делать лишь в том случае, если разность существенно больше ошибок измерения  $\Delta f$  и  $m$ . Ошибки в определениях  $\Delta f$  часто составляют десятки метров. Во всех таких случаях соизмеримые мощности стратиграфических подразделений не позволяют выполнять вычисление перемещения  $\Delta h$  и скорости  $V$ . Для определения этих величин следует переходить к более крупным приращениям времени  $\Delta t$ , которым соответствуют большая мощность  $m$ . К сожалению, в ряде геологических исследований это требование не соблюдалось; перемещения и скорости анализировались по весьма малым мощностям в несколько метров или десятков метров.

Искомая средняя скорость получает тот же знак, что и тектоническое перемещение  $\Delta h$  (подъем +, опускание —) и вычисляется по формуле

$$V = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\Delta f - m}{\Delta t} \quad (4)$$

При значительном превышении мощности  $m$  над приращением уровня осадконакопления  $\Delta f$  последней величиной можно пренебречь. Многие исследователи (М. М. Тетяев, В. В. Белоусов, В. Е. Ханн, А. Б. Ронов и др.), оперируя с толщами значительной мощности, справедливо поступают, принимая  $\Delta h \approx m$ .

Однако помнить о  $\Delta f$  всегда следует, так как ею не всегда можно пренебречь. Известны острые дискуссии, в которых величина  $\Delta f$  использовалась как доказательство невозможности оценивать тектонические перемещения  $\Delta h$  по мощности  $m$ . Формулы (3) и (4) отражают необходимость совместного использования  $\Delta f$  и  $\Delta m$ .

На рис. 59 приведена составленная автором кривая изменения во времени высоты залегания поверхности докембрийского фундамента, находящегося под Москвой. Кривая начинается со времени, для кото-

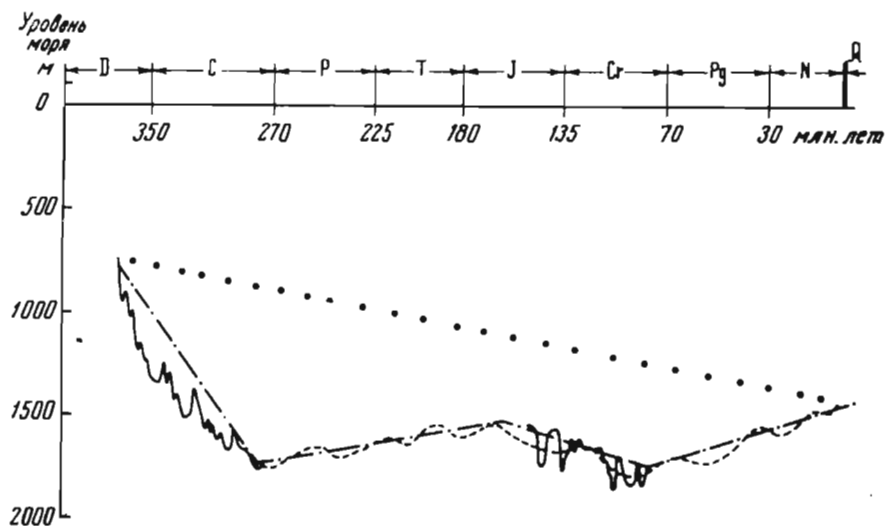


Рис. 59. Кривая вертикальных движений земной коры в районе Москвы за 400 млн. лет — с девонского периода до настоящего времени

рого имеются достаточно точные дробные определения возраста осадков — с девонского периода (D). В это время фундамент был на глубине от 700 до 800 м ниже тогдашнего уровня моря. Затем, используя данные буровых скважин и выходов горных пород в окрестностях Москвы, можно было проследить за сложным ходом погружения коры, происходившего до конца карбона (C). Начиная с пермского (P) и кончая первой третью юрского (J) периодов земная кора неравномерно во времени поднималась. В течение значительной части юрского (J) и мелового (Cr) периодов происходило новое неравномерное опускание, сменившееся происходившим в палеогене (Pg) и неогене (N) поднятием, продолжающимся и в четвертичном (Q) периоде. Для каждого из этих крупных этапов опускания и поднятия коры можно указать среднюю скорость, которая равна тангенсу угла наклона прямой, соединяющей точки кривой для начала и конца этапа. Эти прямые линии даны на рис. 59 штрих-пунктиром. Показанная точками линия среднего опускания от девона до наших дней имеет совсем небольшой наклон, которому соответствует скорость в тысячные доли  $мм/год$ . Для наиболее коротких промежутков времени с самыми крутыми наклонами кривой средняя скорость достигает десятой доли  $мм/год$ .

Скорости древних тектонических движений исследовались В. В. Белоусовым (1948, 1964), А. Б. Роновым (1949, 1961) и другими тектонистами. Наибольшие значения средней для десятков млн. лет скорости древних движений не превышают 0,3  $мм/год$  в самых подвижных областях. На платформах они не более 0,1  $мм/год$ .

Специальное рассмотрение влияния продолжительности времени осреднения (приращение времени  $\Delta t$ ) на получаемые средние скорости выполнялось неоднократно (Гзовский, 1963; Гзовский, Никонов,



1968). Оно позволяет выразить наиболее общее среднее соотношение между величиной скорости  $V$  и продолжительностью времени осреднения  $t$  формулой:

$$\lg V = \lg V_0 - b \lg t, \quad (5)$$

где  $V_0$  — скорость, средняя для единиц лет.

Сказанное выше показывает, насколько внимательно следует относиться к использованию величины скорости тектонических движений. При изучении неотектоники СССР требовалось определить высоту  $\Delta h$  подъема Балтийского щита за последние 30 млн. лет. Максимальная скорость  $V$  современных движений здесь известна: 10 мм/год. Некоторые исследователи предложили умножить эту скорость на продолжительность времени  $\Delta t = 30$  млн. лет и получить искомую высоту подъема. Она оказалась:

$$\Delta h = V \Delta t = 10 \cdot 3 \cdot 10^7 = 3 \cdot 10^8 \text{ мм} = 300 \text{ км.}$$

Результат явно абсурдный: подъем Балтийского щита не мог составить 300 км и быть в несколько десятков раз больше, чем подъем Памира, Тянь-Шаня, Тибета, Анд и других наиболее поднятых областей мира. Геологические данные показывают, что подъем был в 100 раз меньше вычисленного. Это свидетельствует о том, что соотношение, найденное как среднее для малых приращений аргумента, нельзя подставлять в формулы для вычислений вместе со средними данными для намного больших приращений аргумента.

### **Градиент скорости тектонических движений**

При чисто теоретическом подходе примером отношения дифференциалов второго порядка или второй производной (смешанного типа), которая недавно стала использоваться в геотектонике и тектонофизике, является градиент скорости тектонических движений. Однако на практике понимание градиента скорости должно быть поставлено в зависимость от имеющихся фактических данных и решаемой задачи.

Если полный вектор скорости глубинных движений изменяет в пространстве только величину, сохраняя неизменным направление, то изменение скорости  $\Delta V$ , приходящейся на единицу расстояния  $\Delta l$ , равно изменению модуля вектора скорости, т. е. изменению его абсолютной величины. Такое изменение на единицу расстояния называется средним градиентом. Градиент выражен в виде среднего значения для расстояния длиной  $l_{AB}$ . Кроме того, этот градиент является средним и для некоторого времени  $t$ , так как скорости в точках  $A$  и  $B$  вычисляются путем деления их перемещений  $\Delta h_A$  и  $\Delta h_B$  на конечный промежуток времени  $t$ :

$$V_A = \frac{\Delta h_A}{t}; \quad V_B = \frac{\Delta h_B}{t}. \quad (1)$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta V}{\Delta l} = \frac{V_A - V_B}{l_{AB}} = \frac{\Delta h_A - \Delta h_B}{t l_{AB}} = |\text{grad } V|_m. \quad (2)$$

Прямые скобки указывают на то, что вычисляется лишь модуль (абсолютная величина) градиента, а индекс  $m$  напоминает, что вычисляется среднее значение величины градиента. Размерность градиента скорости обратна времени, т. е. равна 1/время (при делении скорости на расстояние).

Если полный вектор скорости глубинных движений изменяет в пространстве не только величину, но и направление, то при этом могут иметь место как деформация, так и вращательное перемещение рас-

смаатриваемого участка. Используя известные математические соотношения, характеризующие вращательное движение, можно выяснить, какая часть изменения вектора скорости в пространстве обусловлена вращением и какая вызвана деформацией коры.

В настоящее время лишь в немногих районах известно направление полного вектора скорости тектонических движений и, кроме того, регистрация изменения этого вектора может производиться нами только в горизонтальном направлении. Наиболее полные данные получаются сейчас для вертикальной составляющей скорости движения. Во многих районах эта составляющая считается главной, т. е. близкой по направлению к полному вектору. Дальнейшее изложение относится к таким районам, где это установлено или предполагается. Величина градиента вертикальной составляющей скорости измеряется в горизонтальном направлении, поэтому она была приравнена скорости деформации сдвига в вертикальном направлении (Гзовский, 1957). Излагаемые ниже представления легко можно будет видоизменить и использовать в районах со значительной величиной горизонтальной скорости движения после того, как она будет достаточно изучена.

Для вычисления величины градиента скорости вертикальных движений в горизонтальном направлении следует располагать картой с изображением этой скорости в форме изолиний. Наибольшее изменение скорости движения происходит вкост простирающихся изолиний. В этом направлении измеряется расстояние  $l_{AB}$  между изолиниями. Разность отметок изолиний ( $V_A - V_B$ ) делится на расстояние  $l_{AB}$ , выраженное в тех же единицах длины, которые использованы для характеристики скорости. Иными словами, вычисление производится по формуле (2).

Карты средней величины градиента скорости вертикальных движений являются вполне объективными документами, надежными в такой же мере, в какой надежны карты скорости движений. Для новейших движений значения градиента могут быть даже точнее данных о скорости. Дело в том, что на вычисленную величину скоростей могут влиять почти не изученные эвстатические колебания уровня моря, а на величину градиента они не влияют.

Карты градиента вертикальной составляющей скорости движений не зависят от каких бы то ни было гипотез о глубинных процессах. Первые такие карты были опубликованы для Тянь-Шаня и Северного Памира М. В. Гзовским, В. Н. Крестниковым и Г. И. Рейснером (1959). Затем вышел ряд работ, описывающих градиент скорости (Рейснер, 1960; Гзовский, 1967; Николаев, Шенкарева, 1967 и др.). Для СССР была составлена первая обзорная карта большой территории, которая разделена на четыре типа областей, различающихся верхним пределом средней величины градиента скорости новейших движений (Гзовский, 1963). На существующих картах проведены изолинии современной высоты залегания ( $h$ ) подошвы неогеновых слоев или поверхности равнинного рельефа суши, существовавшей в начале неогена. Они первоначально располагались вблизи уровня моря. Уровень моря начала неогена, вероятно, незначительно отличался от современного на величину  $x$ . Поэтому перемещения точек  $A$  и  $B$  за неоген и четвертичный период составляют  $(h_A + x)$  и  $(h_B + x)$ . Продолжительность неогена с четвертичным периодом составляет около 30 млн. лет. Следовательно, скорости в точках  $A$  и  $B$  равны:

$$V_A = \frac{h_A + x}{30}, \quad V_B = \frac{h_B + x}{30}. \quad (3)$$

Средняя для 30 млн. лет величина градиента скорости, согласно (2), равна:

$$|\text{grad } V|_{3 \cdot 10^7} = \frac{V_A - V_B}{l_{AB}} = \frac{h_A - h_B}{l_{AB} \cdot 3 \cdot 10^7}. \quad (4)$$

Величины  $h_A$  и  $h_B$  изображены на карте неотектоники СССР; разность ( $h_A - h_B$ ) — высота сечения между соседними изолиниями;  $l_{AB}$  — кратчайшее расстояние между соседними изолиниями.

Таким образом, на картах неотектоники легко определить среднюю величину градиента скорости для любого района. Более детальная карта градиента скорости неоген-четвертичных движений была получена для территории СССР Н. И. Николаевым и Г. А. Шенкаревой (1967).

В итоге выяснилось, что на территории СССР можно выделить области, различающиеся по наибольшей величине среднего градиента скорости.

В пределах равнин и плоскогорий платформ градиент не превосходит величины  $\frac{3}{10^{10}}$  обратных лет, которую удобнее записать  $3 \cdot 10^{-10} \text{ год}^{-1}$ .

В горах средней высоты на Урале, в горах Бырранга и в других районах градиент доходит до величины в три раза большей, т. е. до  $1 \cdot 10^{-9} \text{ год}^{-1}$ .

В более высоких горах советской части Восточных Карпат, на Алтае, в Саянах и на Востоке СССР градиент в три раза больше и достигает  $3 \cdot 10^{-9} \text{ год}^{-1}$ .

Градиент в три раза больший измерен в наиболее высокогорных районах Кавказа, Тянь-Шаня, Памира и Камчатки — он доходит до  $1 \cdot 10^{-8} \text{ год}^{-1}$ .

Так выяснилось, что области, выделенные в последовательный ряд в пределах СССР, различаются изменением наибольшего градиента скорости на половину десятичного порядка (т. е. в три раза) при переходе к каждой следующей области.

Тектонофизическая интерпретация карт средней величины градиента скорости вертикальных движений зависит от того, какая схема глубинных процессов положена в основу. После выяснения характера глубинных процессов интерпретация карт градиента скорости станет вполне определенной и будет считаться констатацией факта. Поэтому карты градиента скорости следует составлять сразу независимо от отношения исследователя к той или иной схеме глубинных процессов. Главная ценность таких карт заключается в том, что они дают материал для суждения о скорости деформаций земной коры на глубине, а также в верхней мантии. Вопрос этот сложен и выходит за рамки данной работы.

При рассмотрении данных о средней величине градиента скорости возникает ряд важных вопросов, связанных с продолжительностью времени осреднения  $t$  и расстоянием осреднения  $l$ .

Градиент доходит до  $3 \cdot 10^{-10} \text{ год}^{-1}$  на платформах и до  $1 \cdot 10^{-8} \text{ год}^{-1}$  в сильно подвижных высокогорных областях. Эти данные получены как средние для 30 млн. лет. Если же обратиться к картам современных движений, то на платформах градиент скорости достигает  $1 \cdot 10^{-8} \text{ год}^{-1}$  и более, а в геосинклиналях  $1 \cdot 10^{-7} \text{ год}^{-1}$  и более. Такое расхождение вызвано тем, что характеристики современных движений получены как средние для десятков лет. При наклономерных геофизических наблюдениях (Бончковский, 1959; Островский, 1963 и др.) градиенты скорости определяются как средние величины для единиц лет и месяцев, в результате чего градиенты на платформах доходят до  $10^{-6} \text{ год}^{-1}$ , а в горных областях приближаются к  $10^{-4} \text{ год}^{-1}$ . По некоторым материалам можно ожидать и  $10^{-2} \text{ год}^{-1}$ .

Так выясняется, что средняя величина градиента скорости движений в значительной мере зависит от продолжительности времени осреднения. Давно известно, что скорость тектонических движений весьма неравномерна во времени. При общей постоянной направленно-

сти длительные движения нередко не только замедляются или ускоряются, но даже на некоторое время изменяют знак на обратный. Поэтому чем короче рассматриваемый промежуток времени, тем большие средние скорости для него могут быть отмечены. То же самое выявляется и для градиента скорости. Этот вопрос был рассмотрен в нескольких работах (Гзовский, 1963; Гзовский, Никонов, 1968, 1969), где проанализирован материал, имевшийся к 1968 г. по различным странам для последних 30—40 млн. лет. В итоге выявилось, что в среднем логарифм величины градиента скорости линейно уменьшается по мере увеличения логарифма времени осреднения, начиная с года ( $t=1$ ) и кончая десятками миллионов лет ( $t=10^7$ ). Уравнение передает эту связь:

$$\lg |\text{grad } V|_m = \lg |\text{grad } V|_0 - \frac{2}{3} \lg t \quad (5)$$

Здесь  $\lg |\text{grad } V|_0$  обозначает логарифм величины градиента при времени осреднения  $t$  порядка единиц лет, когда  $\lg t=0$ .

В тектонофизике такие оценки, относящиеся к минимальной продолжительности времени осреднения, могут рассматриваться как дифференциалы. Ясно, что приведенная средняя, весьма общая зависимость (5) в отдельных районах может нарушаться из-за изменения режима тектонических движений, появления и исчезновения покровного оледенения и других причин.

Была отмечена связь между сейсмичностью и численным значением  $\lg |\text{grad } V|_0$ . Районы с землетрясениями, у которых магнитуда 5 и более, энергия  $10^{14}$  Дж и более, максимальная интенсивность 8 и более баллов, имеют  $\lg |\text{grad } V|_0=4,5$  и более (если  $|\text{grad } V|$  измеряется в год<sup>-1</sup>). Это сейсмически весьма опасные районы. Малой опасностью (магнитуда менее 5, энергия  $10^{13}$  Дж и менее, интенсивность 7 и менее баллов) обладают районы, в которых  $\lg |\text{grad } V|_0=6,0$  и менее. При промежуточных значениях  $\lg |\text{grad } V|_0=(-4,5) \div (-6,0)$  районы бывают как сильно, так и мало сейсмически опасными из-за того, что кроме градиента скорости на сейсмичность влияет ряд других факторов, роль которых в этом диапазоне значений градиента особенно велика.

На примере оценок сейсмической опасности можно убедиться, что, используя величину градиента, необходимо обязательно принимать во внимание, для какого времени осреднения он вычислен.

Для вычисления величины градиента большое значение имеет и расстояние  $l_{AB}$  из формулы (4). В полевых условиях оно сильно варьирует и соответствует расстоянию между пунктами  $A$  и  $B$  измерения скорости  $V$ . По геологическим данным такие измерения возможны не менее чем через несколько километров (если нет разрывов). При использовании карт современных движений изолинии скорости проводятся через несколько километров или даже десятков километров, так как ошибки измерения не позволяют сгущать изолинии, переходя к меньшей величине сечения между ними. Поэтому мы вынуждены брать расстояние осреднения от 1 до нескольких десятков километров и относить вычисленную величину градиента к 1 км. Она рассматривается при этом как дифференциал функции или как средняя величина, в зависимости от фактических данных и решаемой задачи.

Между пунктами  $A$  и  $B$  измерения скорости нередко оказывается тектонический разрыв, и скорость сильно изменяется на расстоянии, меньшем 1 км. В таких случаях можно поступать двояко. Или, в целях единообразия, приращение скорости рассматривать на расстоянии 1 км. Это стоит делать при пересечении широких зон (до 30 км), состоящих из многочисленных разрывов, в которых отдельными разрывами пренебрегают и характеризуют зону в целом как единую деформацию коры. Или, имея дело с одиночным разрывом, вместо градиента (который на разрыве становится бесконечно большим и теряет

смысл) можно использовать скорость изменения амплитуды разрыва во времени. Эта величина в зависимости от конкретных условий будет являться либо дифференциалом, либо средней, так как движения по разрывам неравномерны и могут временами изменять свой знак.

В заключение заметим, что, имея дело с обширными территориями и продолжительными промежутками геологического времени, по-видимому, можно величину градиента скорости, вычисленную при минимальных расстояниях (единицы километров), и временах осреднения (единицы лет) рассматривать в качестве второй производной от перемещения коры по времени и расстоянию. О градиенте скорости речь будет идти ниже в связи с векторными величинами.

## ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Интегральное исчисление является сложным учением, содержащим много представлений и методов решения математических задач, в которых вычисляются длина линии, площадь фигуры, объем тела, количество вещества и многое другое. Занимаясь интегральным исчислением, недостаточно просто знать формулы, необходимы значительный опыт и определенная математическая изобретательность. Изложить интегральное исчисление на немногих страницах невозможно, для овладения им надо обращаться к объемистым учебникам. Однако тектонисту необходимо иметь представление о главных понятиях интегрального исчисления, чтобы знать, в каких случаях к нему следует прибегать и как понимать полученные с его помощью результаты.

Интегральное исчисление основывается на представлениях и формулах дифференциального исчисления. Основная задача интегрального исчисления является обратной по отношению к задаче дифференциального исчисления. Математическое действие интегрирования считается обратным по отношению к дифференцированию.

### *Неопределенный интеграл*

В дифференциальном исчислении рассматривается некоторая исходная (первообразная) функция  $y$  с аргументом  $x$ , которую обозначим  $F(x)$ . Она выражается графически или с помощью формулы (аналитически). На эту функцию мы можем смотреть как на нечто целое. Так, геологический профиль — это целое. В дифференциальном исчислении получают характеристики мельчайших составных частей целого: производные и дифференциалы аргумента и функции; закономерности их изменения в зависимости от аргумента  $x$  находят и выражают графически или аналитически. Производную функцию обозначают  $F'(x) = f(x)$ . На рис. 54 мы совершали переход от расположенного наверху профиля  $F(x)$  к построенной внизу кривой  $F'(x) = f(x)$ .

В интегральном исчислении решается обратная задача. Известной является закономерность изменения производной, т. е.  $f(x)$ , изображенная на рис. 54 внизу. Задача заключается в том, чтобы от нее перейти к той функции  $F(x)$ , которая на рис. 54 показана наверху и из которой имеющаяся функция  $f(x)$  получена в результате дифференцирования.

Известная нам величина производной, показанная на рис. 54, б, может быть записана различно:

$$F'(x) = f(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dh}{dx} = h'. \quad (1)$$

Выберем исходное значение аргумента  $x$ . Ему соответствует определенная величина производной, являющаяся тангенсом угла наклона искомой кривой  $F(x)$ . Примем теперь некоторое приращение аргумента

$\Delta x = dx$ . Ему соответствует определенное приращение ( $\Delta h$ ) искомой функции  $F(x)$ . О нем можно судить по величине дифференциала  $dy$  ( $dh = \Delta h$ , в обозначениях на рис. 54). Из формулы (1) следует, что этот дифференциал равен произведению производной на дифференциал аргумента:

$$dy = f(x) dx. \quad (2)$$

Это произведение дает нам возможность перейти от исходной точки  $M$  к следующей точке  $L$  (см. рис. 56). При бесконечно малой величине дифференциала аргумента точка  $L$  совпадает с точкой  $N$ , и мы таким образом восстанавливаем часть искомой кривой  $F(x)$ . Затем берем следующее значение аргумента ( $x + \Delta x$ ) и для него повторяем те же операции. В итоге многократного выполнения этих операций вырисовывается кривая, имеющая форму первообразной функции  $F(x)$  — геологического профиля, взятого в качестве примера. Такова принципиальная основа решения.

Рассмотренное математическое действие называется интегрированием; результат его — интегралом, точнее неопределенным интегралом. Он представляет собой графическое или аналитическое выражение всей первообразной функции, т. е. кривую (профиль), или формулу, по которым можно определить значение первообразной функции  $F(x)$  для каждой величины аргумента  $x$ . На верхнем профиле рис. 54 неопределенным интегралом является вся кривая высоты  $h$  залегания слоя, являющаяся первообразной функцией  $F(x)$  по отношению к нижней кривой  $h' = f(x)$ .

Главной характерной особенностью решаемой задачи является то, что дифференцирование первообразной функции, например определение тангенса угла наклона пласта в разных участках профиля, дает результат, который оказывается одинаковым для первообразных кривых, имеющих одну форму, но расположенных на различной высоте. Поэтому обратная задача интегрирования, например переход от кривой углов наклона к первообразной функции (геологическому профилю) всегда дает результат не вполне определенный. А именно, оперируя одной нижней кривой с рис. 54, мы воспроизведем форму профиля, но не будем знать, на каком гипсометрическом уровне его поместить. Этот результат изобразится одной кривой, построенной на произвольном уровне. Будет считаться, что данная кривая может быть целиком сдвинута параллельно оси ординат на какое-то расстояние  $C$ , называемое постоянной интегрирования. Вопрос о величине постоянной интегрирования требует решения.

Совокупность множества найденных первообразных функций — кривых, уровень расположения которых зависит от невыясненной еще постоянной интегрирования  $C$ , называется неопределенным интегралом. В нашем примере неопределенный интеграл — это форма профиля, уровень расположения которого пока еще не определен.

Подлежащая интегрированию функция  $f(x)$  часто выражена аналитически. Так, правую половину средней кривой на рис. 57 можно выразить формулой

$$h' = \cos x. \quad (3)$$

В данном случае обозначение высоты залегания пласта ( $h$ ) играет роль функции  $y$ , соответственно, первая производная  $h' = y'$ . В результате интегрирования мы переходим к начерченному выше профилю, т. е. к первообразной функции  $F(x)$ , которую выражает формула

$$h = \sin x. \quad (4)$$

Значит, неопределенный интеграл равен сумме

$$\sin x + C. \quad (5)$$

После того как удалось найти величину постоянной интегрирования  $C$  и найденный профиль оказался закрепленным на определенном гипсометрическом уровне, а также были указаны границы рассматриваемого отрезка профиля между  $x=a$  и  $x=b$  [границы существования функции  $f(x)$ ], мы получаем возможность извлечь еще один результат, который, как будет пояснено ниже, выражается одним числом для каждого интервала значений аргумента  $x$  и называется определенным интегралом. Этот результат по смыслу получается суммированием. Поэтому для обозначения интеграла применяется знак  $\int$ , похожий на растянутую латинскую букву  $S$ , с которой начинается слово «сумма». Более того, слова «интегральный» и «интегрирование» вне математики широко используются в смысле суммарный (общий, целый) и суммирование (обобщение, объединение в нечто целое), корнем их служит латинское слово *integer* (целый).

Теперь неопределенный интеграл можно в самой общей форме написать так:

$$F(x) + C = \int f(x) dx. \quad (6)$$

Здесь  $f(x)dx$  называется подинтегральным выражением,  $f(x)$  — подинтегральной функцией,  $dx$  — дифференциалом аргумента  $x$ .

Для различных весьма многочисленных подинтегральных функций выведены интегралы, сведенные в таблицы, занимающие много страниц в специальных справочниках. Примерами интегралов некоторых простейших функций при их аналитическом выражении могут быть:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (7)$$

при  $n \neq -1$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C, \quad (8)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (9)$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad (10)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (11)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad (12)$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C, \quad (13)$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C. \quad (14)$$

Дифференциалом неопределенного интеграла называется величина, равная подинтегральному выражению. Неопределенный интеграл от дифференциала функции  $dF(x)$  равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (15)$$

Постоянный множитель  $a$  можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx. \quad (16)$$

Интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов каждой из них:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx. \quad (17)$$

Таковы основные свойства неопределенного интеграла.

## Определенный интеграл

Представление об определенном интеграле имеет наглядный геометрический смысл при рассмотрении графика первой производной  $f(x)$ . Первообразная функция сначала не привлекается, и последующие формулы могут быть связаны лишь с одной функцией  $f(x)$ , причем во многих случаях нет никакой необходимости вспоминать, что она является производной какой-то другой функции  $F(x)$ .

На рис. 60 изображена антиклиналиальная складка одной структурной поверхности. Она является функцией  $f(x)$ . Весь последующий ход рассуждений будет таким же, если на рис. 60 смотреть как на графиче-

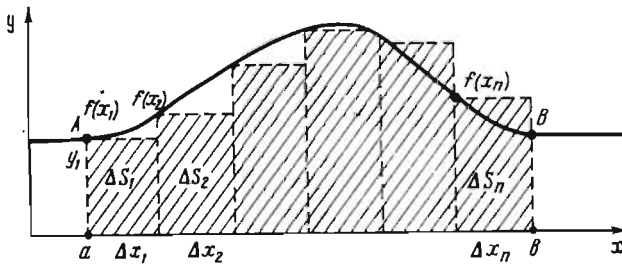


Рис. 60. Схема, поясняющая геометрический смысл определенного интеграла

ское выражение какой-то зависимости величины  $y$  от  $x$ . Зададимся определенными границами рассматриваемой части складки. Пусть это будут границы складки в целом. Обозначим их  $a$  и  $b$  на оси  $x$ . Значение  $x=a$  называется нижним пределом,  $x=b$  — верхним пределом интегрирования. Соответствующие им вертикальные линии ординат  $aA$  и  $bB$  вместе с частью оси  $x$  между  $a$  и  $b$  и отрезком  $AB$  данной кривой ограничивают площадь  $aABb$ . Величина этой площади численно равна определенному интегралу с пределами  $a$  и  $b$ . Находят его следующим образом. Общий интервал  $ab$  разбивается на большое число  $n$  «элементарных» интервалов  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ . Затем величина каждого интервала умножается на значение рассматриваемой функции  $y=f(x)$  в его пределах. Принято брать значение функции в начале элементарного интервала, обозначая его  $f(x_1), f(x_2) \dots f(x_n)$ . В принципе можно предпочесть и другие места интервалов.

В каждом интервале произведение его длины  $\Delta x_i$  на высоту  $f(x_i)$  (где индекс  $i$  от 1 до  $n$ ) равно площади элементарного столбца, которую обозначим  $\Delta S_i$ :

$$\Delta S_i = \Delta x_i f(x_i).$$

Если площади всех элементарных столбцов сложить, то получится площадь, близкая к площади  $aABb$ . Чем больше будет число  $n$  элементарных интервалов, тем меньше станет каждый интервал и тем меньше суммарная площадь всех столбцов будет отличаться от площади  $aABb$  — величины интеграла. Этот интеграл является пределом суммы площадей  $\Delta S_i$  при стремлении длины элементарного интервала к нулю, а числа интервалов к бесконечности:

$$\lim \sum f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

$$\Delta x_i \rightarrow 0$$

$$n \rightarrow \infty$$



Первая часть равенства читается так: «определенный интеграл от  $a$  до  $b$  эф от  $x$  дэ  $x$ ». В этой формуле у знака интеграла указаны нижний и верхний пределы  $a$  и  $b$ . Произведение  $f(x)dx$  — подинтегральное выражение,  $f(x)$  — подинтегральная функция,  $x$  — переменная интегрирования.

При перестановке пределов интеграл меняет знак на обратный. Общий интервал интегрирования можно разделить на части  $ac + cb = ab$ . После этого интеграл в пределах  $ab$  оказывается равным сумме интегралов для  $ac$  и  $cb$ . Интеграл от алгебраической суммы нескольких функций одного аргумента равен сумме интегралов от этих функций:

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] dx = \\ & = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

Итак, определенным интегралом данной функции  $f(x)$  называется число, которое является пределом суммы произведений приращений аргумента  $dx$  на соответствующие этим приращениям значения функции  $f(x)$ . Определенный интеграл находится для бесконечно большого числа приращений, каждое из которых бесконечно мало. Суммирование производится между определенными предельными значениями аргумента  $a$  и  $b$ . Вычисление таких математических величин бывает необходимо при решении многих научных и практических вопросов и составляет главную задачу всего интегрального исчисления. Однако до сих пор не существует общего метода получения точного значения определенного интеграла непосредственно из рассмотрения одной только данной функции  $f(x)$ . И. Ньютон и Г. В. Лейбниц нашли способ точного вычисления определенного интеграла, привлекая при этом неопределенный интеграл. Это считается одним из величайших математических открытий и делает центральным вопрос о соотношениях между определенным и неопределенным интегралами.

Основная теорема интегрального исчисления связывает определенный интеграл с неопределенным. Согласно этой теореме приращения  $F(b) - F(a)$  первообразной функции  $F(x)$  при изменении аргумента от  $x=a$  до  $x=b$  равно определенному интегралу с пределами  $a$  и  $b$ :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (3)$$

На рис. 57 дан пример, поясняющий смысл основной теоремы интегрального исчисления. Первообразной функцией  $F(x)$  служит кривая высоты  $h$  залегания пласта  $ABCDEFGHIK$  на геологическом профиле. На ней мы произвольно выбрали отрезок  $IK$ , который соответствует интервалу значений переменного аргумента от  $x=a$  до  $x=b$ . В этом интервале происходит приращение первообразной функции  $F(b) - F(a)$ , равное отрезку  $K_0K$ . Этот отрезок является одним из двух графических выражений величины определенного интеграла в пределах от  $x=a$  до  $x=b$ . Он соответствует правой части уравнения (3). На кривой первой производной  $F'(x) = f(x)$ , показывающей изменения тангенса угла наклона  $h'$  рассматриваемого пласта, тому же интервалу аргумента от  $x=a$  до  $x=b$  соответствует отрезок  $I_1K_1$ . Покрытая точками площадь, лежащая между отрезком  $I_1K_1$  на кривой первой производной и осью абсцисс, является вторым графическим выражением того же определенного интеграла. На рис. 60 показано, что данная площадь равна интегралу  $\int_a^b f(x) dx$ , который написан в левой части

уравнения (3). Оба графических выражения определенного интеграла имеют одинаковую численную величину и размерность.

Основная теорема служит для аналитического нахождения интеграла по известной подинтегральной функции. Пусть, например

$$y = f(x) = \frac{1}{x}. \quad (4)$$

Требуется определить величину интеграла в пределах от  $a$  до  $b$ . Сначала по формуле (8) со стр. 158 находим неопределенный интеграл:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|, \quad (5)$$

из которого следует, что первообразная функция [см. (6) на стр. 158]:

$$F(x) = \ln|x| + C. \quad (6)$$

Теперь в выражение  $F(x)$  подставляем  $x=a$  и  $x=b$  и их разность, согласно (3), приравняем искомому интегралу с заданными пределами

$$\ln b - \ln a = \int_a^b \frac{dx}{x}, \quad (7)$$

или окончательно:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}. \quad (8)$$

Для приближенного определения многих интегральных величин, в частности рассматриваемых в геотектонике и тектонофизике, большое значение имеет теорема о среднем значении, заключающаяся в следующем.

Если  $f(x)$  непрерывна в интервале  $ab$ , то внутри него имеется по меньшей мере одно такое значение  $f(x) = m$ , произведение которого на интервал  $ab$  численно равно определенному интегралу:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)m. \quad (9)$$

Число  $m$  называется средним значением для  $f(x)$  в интервале  $ab$ . Очевидно, произведение  $(b-a)m$  равно площади прямоугольника  $aA'B'b$ , имеющего тот же размер вдоль оси абсцисс, как и площадь, равная данному интегралу (рис. 61).

Описание техники вычисления определенных интегралов с различной точностью читатель найдет в соответствующей литературе. Большое значение имеют приближенные методы, сводящиеся к суммированию довольно крупных элементарных площадей в виде прямоугольников или трапеций, или иных фигур. Существуют специальные приборы, позволяющие измерить площадь, обведя ее по периметру (интеграторы).

Приложения определенных интегралов весьма разнообразны. Они используются для определения площади при известной форме, ограничивающей ее линии. При заданных габаритах объемных тел интегрирование приводит к определению площади их поверхности и объема. Если дан объем тела с переменной плотностью, интегрированием вычисляется масса тела. При переменной скорости движения интегрированием находится путь, пройденный за продолжительное время. Интегрированием находится работа силы, изменяющей свою величину.

Выше говорилось об интегралах таких функций, которые зависят от одной переменной  $x$ . Не менее важны интегралы функций, зависящих от двух и трех переменных. Такие интегралы называются кратными, или двойными и тройными, соответственно. Познакомимся с ними на примерах.

Если исслеуемая переменная (например, высота) является функцией двух переменных  $u=f(x, y)$  (допустим, координат по двум направлениям), то интегрирование производится по площади. Его геометрическим результатом является объем тела, высоту точек которого

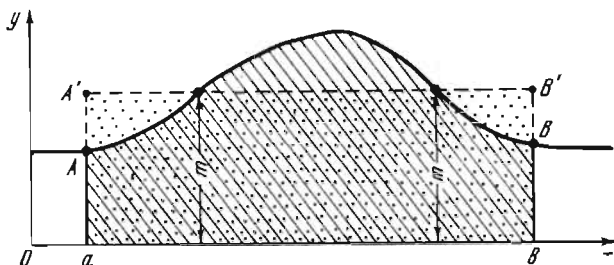


Рис. 61. Графическое изображение теоремы о среднем значении. Площади, покрытые точками и линейной штриховкой, одинаковы

мы приняли за функцию, а за основание площадь интегрирования  $S$ . Такой интеграл является двойным (или двукратным) и обозначается:

$$\int_S f(x, y) dS \quad \text{или} \quad \iint_S f(x, y) dS.$$

Если переменная  $u$  изменяется как функция трех переменных  $x, y, z$  (например, плотность внутри объема может зависеть от трех координат), тогда интегрирование осуществляется по объему тела  $V$ . Получаемая в результате масса выражается тройным (или трехкратным) интегралом, который обозначается

$$\int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) d\mathcal{V} \quad \text{или} \quad \iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) d\mathcal{V}.$$

Итак, общий принцип использования определенного интеграла для получения геометрических, физических и других величин состоит в том, что: 1) вычисляемая величина  $A$  разбивается на большое число малых величин  $a_i$  (например, вертикальных полос шириной  $\Delta x, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ , см. рис. 60); 2) каждая малая величина  $a_i$  заменяется близкой к ней величиной  $\tilde{a}_i$ , вычисление которой выполняется по более простой формуле (замена каждой полосы прямоугольником на рис. 60); 3) величину  $\tilde{a}_i$  выражают через переменную  $x$ , выбранную так, чтобы  $\tilde{a}_i$  приняла вид  $\tilde{a}_i=f(x_i)dx$ ; 4) искомая величина  $A$  находится при определенных граничных значениях  $x$  как предел суммы величин  $a_i$  при бесконечном увеличении их числа и стремлении  $dx$  к 0.

#### ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ГЕОТЕКТОНИКЕ И ТЕКТОНОФИЗИКЕ

Важнейшим результатом в широком смысле геологических работ и итогом поисков и разведки является подсчет запасов месторождения полезных ископаемых, который в математическом смысле есть не что иное как интегрирование по объему. Для вычисления геологического интеграла в процессе поисков и разведки геолог использует многие также интегральные представления, относящиеся, в частности, к геотек-

тонике и тектонофизике. При анализе процессов образования осадочного покрова и влиявших при этом тектонических факторов первостепенное значение имеет объективная количественная характеристика вертикальных движений земной коры на обширных территориях, которая осуществляется лучше всего объемным методом. Этот метод заключается в приближенном интегрировании. При изучении деформаций, достигающих в земной коре больших величин и развивающихся в течение длительного времени, требуется вводить особую интегральную форму измерения деформаций, которую называют истинной, или логарифмической. В технике необходимость в ней возникает реже, чем в геологии. Развитие теории глубинных процессов, служащих причиной наблюдаемых геологических явлений, требует энергетических характеристик тектонических движений и деформаций, получаемых с неоднократным использованием интегрирования. Ограничимся рассмотрением этих важных для геолога приложений интегралов.

### ***Объемная характеристика вертикальных тектонических движений***

Наиболее важные работы в этом направлении были выполнены В. В. Белоусовым (1948, 1962), А. Б. Роновым (1949, 1961), а также А. Б. Роновым и В. Е. Хайным (1957). Как известно, земная кора разделяется на зоны различной величины в плане, одни из которых испытывают поднятие и размыв, другие — опускание, сопровождающееся осадконакоплением. С течением времени изменяется расположение зон поднятия и опускания, а также количественное соотношение восходящих и нисходящих движений. Сравнение поднятий и опусканий в первом приближении производилось путем сопоставления площадей соответствующих зон, что по смыслу было сопоставлением интегралов. Во втором приближении, кроме площади, принимается во внимание и величина вертикального перемещения каждой зоны. Она оказывается различной в пределах тектонической зоны. Поэтому характеристикой вертикального перемещения служит сумма произведений перемещений на площадь элементарных участков, составляющих зону. При бесконечном уменьшении величины этих участков и увеличении их числа в пределе сумма становится интегралом, равным объему. В зонах поднятия такой объем оказывается сложенным размываемыми горными породами, выдвинутыми выше исходного уровня рельефа. В зонах опускания этот объем освобождается для накопления осадков ниже исходного уровня поверхности твердой земли. Это — тектонические объемы поднятия и опускания.

Для измерения вертикальных перемещений в зонах опускания используются мощности (толщина) отложившихся пород. Это должно сопровождаться фаціальными поправками, связанными с изменениями глубины осадконакопления. В зонах поднятия перемещения оцениваются по стратиграфической глубине размыва, по изменению высоты рельефа (неогеновые и четвертичные движения), по объему обломочных пород, возникших вследствие размыва, а также по другим признакам.

Объемы опускания и поднятия вычисляются приближенным методом, поскольку точность исходных данных невелика. В зонах опускания за исходные принимаются карты с изолиниями величины опускания. Если фаціальная поправка пренебрегают, то используют карты с изолиниями мощности отложений (изопахитами). Затем мысленно разрезают объем рассматриваемых отложений на горизонтальные слои постоянной толщины ( $m$ ), проходящие на уровнях, равных высотным отметкам на изолиниях мощности, начиная с нулевой. На профиле эти слои показаны на рис. 62.

В принципе не обязательно, чтобы мощности всех слоев были бы одинаковыми. Затем измеряют площадь  $S_n$  каждого слоя, т. е. области, окруженной изолинией. Это — первое интегрирование. Полученную площадь каждого слоя ( $S_n$ ) умножают на его толщину. Так находят объемы всех слоев, которые после суммирования образуют искомым тройной интеграл  $V$ :

$$V^o = (S_1 + S_2 + \dots + S_n) \cdot m. \quad (1)$$

Такая формула соответствует прямоугольно-ступенчатой форме вертикального сечения рассматриваемой толщи пород с одинаковой толщиной слоев, показанной на рис. 62, а. На рис. 62, б изображено

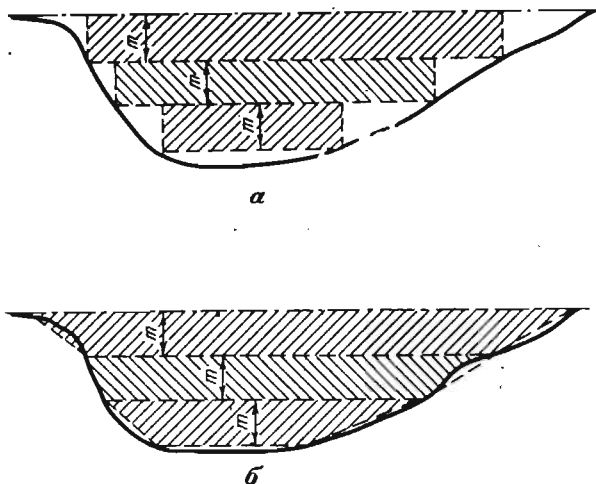


Рис. 62. Схемы двух способов вычисления объема опускания тектонической зоны. Пояснения в тексте

сечение толщи в виде совокупности трапеций, дающее несколько более точный результат по формуле

$$V^o = \left( \frac{S_1}{2} + S_2 + S_3 + \dots + \frac{S_n}{2} \right) \cdot m. \quad (2)$$

Таким же образом по картам с изолиниями мощности терригенной части стратиграфического разреза вычисляется объем обломочных пород, образовавшихся за счет размыва зон поднятий. Зная площадь последних, можно приблизительно оценить среднюю величину их подъема.

С помощью объемного метода были получены доказательства в пользу представления о планетарной периодичности тектонических движений — тектонических циклах. В геологической истории материков несмотря на большую ее сложность и асинхронность движений различных территорий А. Б. Роновым (1961) были выявлены периоды большей и меньшей роли опусканий земной коры по сравнению с поднятиями (рис. 63).

### **Логарифмическая деформация горных пород**

Наиболее простой и распространенной является следующая характеристика деформации удлинения. Приращение длины деформированного элемента  $\Delta l$ , который имел первоначальную длину  $l_0$  и приобрел длину  $l_k$  (ее называют конечной), составляет:

$$\Delta l = l_k - l_0. \quad (3)$$

Деформацию удлинения  $\epsilon$  считают равной отношению приращения к первоначальной длине:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_k - l_0}{l_0}. \quad (4)$$

Деформацию, вычисленную по этой формуле, называют относительным удлинением.

При больших, длительно развивающихся деформациях, представляющих собой сумму результатов многочисленных отдельных актов

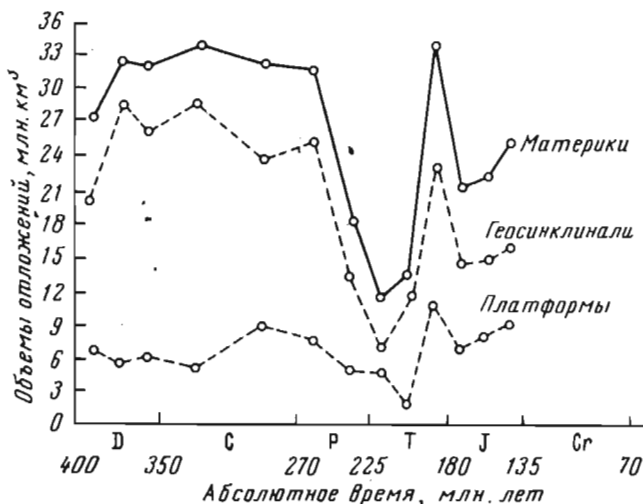


Рис. 63. Изменение во времени общих объемов отложений, накопленных в пределах современных материков и слагающих их платформ и геосинклиналей (по Ронову, 1961)

деформирования, физически более оправдана другая характеристика удлинения, часто называемая истинной (лучше — логарифмической) деформацией. Ее получают путем суммирования — в пределе интегрирования — весьма малых деформаций, которые на каждом  $i$ -том этапе деформирования представляют как отношение приращения на этом этапе  $\Delta l$  к длине в начале этапа  $l$ , т. е. как  $\frac{\Delta l}{l}$ . Величина  $l$  в отличие от  $l_0$  является переменной и равной длине элемента, полученной в результате всех предыдущих этапов удлинения. Поэтому конечный результат деформации  $\epsilon_{\text{ин}}$  представляет собой сумму деформаций на всех этапах, т. е. в пределе есть определенный интеграл от  $l_0$  до  $l_k$ :

$$\epsilon_{\text{ин}} = \int_{l_0}^{l_k} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_k}{l_0} = \ln \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \ln(1 + \epsilon). \quad (5)$$

Выраженная таким образом деформация (согласно свойству интеграла представлять сумму суммой интегралов) допускает деление ее на части, которые непосредственно можно алгебраически суммировать. Форма графиков развития логарифмической деформации может быть более простой, чем для обычного относительного удлинения. Логарифмическое выражение деформации весьма удобно при моделировании тектонических процессов.

## Энергия тектонических процессов

Энергия, потребляемая при деформации определенного объема горных пород, численно равна работе внешних сил, вызывающих эту деформацию. Эта энергия является интегралом, который суммирует работы внешних сил различной величины на каждом этапе деформации. Поскольку общая деформация представляет собой сумму упругой (обратимой) и пластической (остаточной) составляющих, и работа деформации, вычисляемая как интеграл  $A$ , может быть выражена в виде суммы интегралов, один из которых соответствует энергии, затраченной на упругую деформацию ( $A_e$ ), а другой — энергии пластической деформации ( $A_p$ ):

$$A = A_e + A_p. \quad (6)$$

Энергия упругой части деформации является потенциальной. Это значит, что за ее счет происходит упругое частичное восстановление формы рассматриваемого объема после прекращения действия деформирующих сил. Эта энергия равна определенной части работы внешних сил.

Энергия пластической части деформации не является потенциальной. Она переходит в тепловую энергию или «консервируется» в виде энергии кристаллической решетки в новых динамометаморфических минералах, возникающих в процессе пластического деформирования.

Энергии обеих деформаций — упругой и пластической — разделяются далее на части, связанные с изменениями объема и формы. В геотектонике и тектонофизике рассматриваются главным образом большие пластические деформации изменения формы горных пород, которые во много раз превышают изменения объема. Поэтому для тектонических процессов основное значение имеет энергия изменения формы, рассмотрением которой мы и ограничимся.

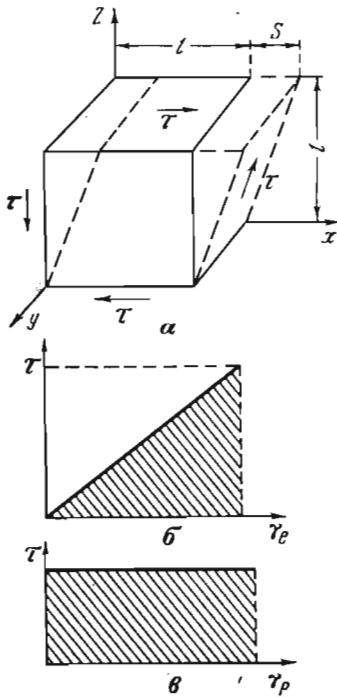


Рис. 64. Графическое выражение работы изменения формы единичного объема

$a$  — схема нагружения и деформации;  $b$  — работа упругой части деформации  $a_e$ ;  $c$  — работа пластической части деформации  $a_p$ . Работа равна заштрихованной площади

Представим себе мысленно выделенный в породе элементарный кубик с ребрами длиной  $l$ , которые первоначально параллельны осям координат (рис. 64,  $a$ ). При деформировании кубика оси  $x$  и  $y$  продолжают быть совмещенными с одной из граней кубика. В простейшем виде соотношения между деформирующими силами и его деформациями проявляются при нагружении по схеме плоского чистого сдвига. В этом случае силы представлены только равными по величине касательными напряжениями  $\tau$ , действующими на двух парах его граней, например, перпендикулярных осям  $x$  и  $z$ . На первой паре параллельных граней касательные напряжения имеют направление, перпендикулярное линиям пересечения граней данной пары с гранями второй пары (т. е. оси  $y$ ). На гранях второй пары касательные напряжения также перпендикулярны линиям пересечения граней (оси  $y$ ), но действуют в противоположном направлении. При такой системе нагруженный кубик изменяет свою форму, не испытывая общего вращения. Если бы напряжения на всех четырех гранях были бы одного знака, кубик стал бы вращаться. Последняя пара граней, перпендикулярная

оси  $y$ , свободна от напряжений. Нижнюю из граней, перпендикулярных оси  $z$ , будем считать относительно неподвижной.

Найдем теперь энергию упругого изменения формы при малой величине деформации кубика. Внешними силами, действующими на кубик, являются касательные напряжения  $\tau$ . Величина перемещения нижней грани, перпендикулярной оси  $z$ , принята за ноль. Перемещение верхней грани, перпендикулярной оси  $z$ , зависит от величины деформации сдвига. Известно, что сдвиг при малых деформациях измеряется тангенсом  $\gamma$  угла перекоса кубика. Сдвиг равен отношению относительного смещения  $s$  двух параллельных граней к расстоянию  $l$  между этими гранями:

$$\gamma = \frac{s}{l}. \quad (7)$$

Поэтому величина перемещения верхней грани выражается через сдвиг формулой

$$s = \gamma l. \quad (8)$$

Работа образования сдвига, согласно определению физического смысла работы, равна произведению величины силы  $P$  на перемещение места ее приложения в том направлении, по которому действует сила. Перемещение дается формулой (8), а сила равна произведению напряжения  $\tau$  (относящегося к единице площади) на площадь грани, т. е.

$$P = l^2 \tau. \quad (9)$$

Может показаться, что для вычисления работы образования упругого сдвига в кубике достаточно умножить  $l^2 \tau$  на  $\gamma l$ . Однако этого делать нельзя из-за того, что величины напряжений  $\tau$ , а значит и силы  $P$ , не являются постоянными. При небольшой упругой деформации сдвига  $\gamma_e$ , величина напряжений может считаться прямо пропорциональной этой деформации и модулю сдвига  $G$ , характеризующему упругие свойства горной породы (закон Гука):

$$\tau = G \gamma_e. \quad (10)$$

Следовательно, на каждом мысленно выделенном этапе увеличения перемещения следует его приращение  $\Delta s$  умножить на свойственную данному этапу величину силы  $P$ , которая, согласно (7), (9) и (10):

$$P = \tau l^2 = G l^2 \gamma_e = G l s. \quad (11)$$

Поэтому будем считать перемещение  $s$  за аргумент, а величину силы  $P$  за функцию перемещения  $f(s)$ . Для того чтобы узнать величину работы, совершаемой при достижении определенного смещения, необходимо разбить весь процесс на бесконечно большое число этапов и интервалов значений перемещения  $s$ . Для каждого из них надо найти произведение бесконечно малого приращения перемещения  $ds$  на величину силы  $P = f(s)$ , соответствующую данному интервалу. Затем надо найти предел суммы этих произведений, считая число интервалов бесконечно большим, а приращения перемещений бесконечно малыми. Иными словами, требуется вычислить определенный интеграл в пределах от 0 до наибольшей достигнутой величины перемещения  $s$ . Интеграл, равный искомой работе  $A_{ze}$  силы, действующей на грань, перпендикулярную оси  $z$ , записывается так:

$$A_{ze} = \int_0^s f(s) ds. \quad (12)$$



Зная из (11) и (8), что

$$f(s) = P = Gl^2\gamma_e; \quad ds = d(l\gamma_e) = l d\gamma_e, \quad (13)$$

интеграл (12) можно выразить через деформацию сдвига:

$$A_{ze} = \int_0^{\gamma_e} Gl^2\gamma_e \cdot l d\gamma_e = l^3 G \int_0^{\gamma_e} \gamma_e d\gamma_e; \quad (14)$$

$l$  вынесена за знаки дифференциала,  $Gl^2$  и  $l$  за знак интеграла поскольку они являются постоянными величинами. Согласно основной теореме интегрального исчисления (3) со стр. 160 и формуле (7) со стр. 158:

$$\int_0^{\gamma_e} \gamma_e d\gamma_e = \frac{\gamma_e^2}{2}. \quad (15)$$

Следовательно, искомый определенный интеграл (14):

$$A_{ze} = \frac{1}{2} Gl^3 \gamma_e^2. \quad (16)$$

Работа сил, действующих на остальных гранях кубика, равна нулю: нижняя из граней, перпендикулярных оси  $z$ , считается неподвижной; на обеих гранях, перпендикулярных оси  $x$ , перемещение происходит по нормали к направлению действия сил; на грани, перпендикулярной оси  $y$ , силы не действуют. Таким образом, найденная работа  $A_{ze}$  является полной характеристикой работы упругого изменения всего кубика, имеющего объем  $l^3$ . Ясно, что на деформирование единицы объема кубика, т. е. на упругое изменение формы единичного элемента объема, приходится работа  $a_e$ , равная  $A_{ze}$  разделенная на объем кубика  $l^3$ , т. е.:

$$a_e = \frac{1}{2} G\gamma_e^2. \quad (17)$$

Величина  $a_e$  имеет размерность работы, если предполагается, что правая часть содержит ненаписанный множитель  $l^3=1$  с размерностью объема.

По закону Гука (10), деформацию сдвига  $\gamma_e$  можно заменить в (17) на касательное напряжение  $\tau$  и получить:

$$a_e = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (18)$$

Двойка в знаменателе формул (17) и (18) интеграла работы упругой деформации формы появляется в результате того, что мы приняли во внимание нарастание напряжений от нуля до их конечной величины по мере увеличения деформации.

Графическим выражением работы упругой деформации единичного объема является треугольная площадь между прямой линией зависимости: деформации, напряжения и одной из осей координат (см. рис. 64, б).

В случае пластической деформации  $\gamma_p$  напряжение  $\tau$  в первом приближении остается постоянным пока происходит длительное непрерывное увеличение деформации с постоянной скоростью. При постоянном напряжении и сила  $P$  оказывается постоянной и может быть вынесена за знак интеграла. В результате интеграл работы выглядит так:

$$A_{zp} = \int_0^s P ds = P \int_0^s ds = Ps. \quad (19)$$

Учитывая (8) и (9) для всего кубика получаем:

$$A_{zp} = l^3 \tau \gamma_p, \quad (20)$$

а для единичного объема удельную работу пластического изменения формы:

$$a_p = \tau \gamma_p. \quad (21)$$

Пластическая деформация единичного объема развивается при постоянном напряжении, поэтому на графике зависимости между деформацией и напряжением она изображается прямоугольной площадью (см. рис. 64, *в*). Поскольку пластическая деформация развивается намного дольше чем упругая, временем подъема напряжений от 0 и установления их постоянной величины  $\tau$  можно пренебречь. Поэтому напряжение показано на рис. 64, *в* как бы мгновенно достигшим своей постоянной величины. В простейшем случае, если скорость деформации, т. е. ее производная по времени  $\frac{d\gamma_p}{dt}$ , является постоянной, мы можем, учтя длительность деформирования  $t$ , вычислить общую величину пластической деформации:

$$\gamma_p = \frac{d\gamma_p}{dt} t. \quad (22)$$

Затем можно привлечь коэффициент пропорциональности между напряжениями и соответствующей им скоростью пластической деформации, обозначаемый  $\eta$ :

$$\tau = \eta \frac{d\gamma_p}{dt}. \quad (23)$$

Этот коэффициент называется вязкостью, точнее эффективной вязкостью. Из (22) и (23) вытекает, что:

$$\gamma_p = \frac{\tau}{\eta} t. \quad (24)$$

Из выражения (24) работа пластической деформации единичного объема при постоянной скорости деформирования из (21) запишется так:

$$a_p = \frac{\tau^2}{\eta} t. \quad (25)$$

Возможна также и другая форма выражения работы, вытекающая из (21) и (24):

$$a_p = \tau \frac{d\gamma_p}{dt} t. \quad (26)$$

Эта формула наиболее удобна для оценок работы и энергии тектонической пластической деформации, поскольку ошибки при вычислениях по ней оказываются меньше, чем при использовании других приведенных формул. Переход от работы деформации единичного объема к работе деформации всего рассматриваемого геологического тела требует интегрирования удельных работ по объему тела.

В геологической практике обычно трудно осуществить строгое интегрирование, однако можно оценить среднюю величину работы упругой и пластической деформации в единичных объемах  $(a_e)_m$  и  $(a_p)_m$  (например, статистически, путем измерений деформаций и физических свойств материала в многочисленных случайных выбираемых точках). Тогда используется упоминавшаяся выше теорема о среднем значении (стр. 161), и общие работы упругой деформации  $A_e$  и пла-

стической  $A_p$  получаются умножением соответствующих средних значений на объем тела  $v$  (который также является интегралом):

$$A_e = (a_e)_m v; \quad A_p = (a_p)_m v. \quad (27)$$

Энергия, затраченная на деформацию всего тела, — упругая  $U_e$  и пластическая  $U_p$ , — численно и по единицам измерения равна этим работам, т. е.

$$U_e = A_e = (a_e)_m v; \quad U_p = A_p = (a_p)_m v. \quad (28)$$

Формулы (26) и (28) впервые были использованы при районировании территории СССР в зависимости от энергии современных тектонических процессов, а также при сопоставлении энергии тектонических процессов с энергией землетрясений (Гзовский, 1966, 1967, 1970). Оценка энергии тектонических процессов в пределах участков земной коры, соизмеримых с отдельными крупными месторождениями и очагами сильных землетрясений, показала, что человек в состоянии активно регулировать развитие тектонических процессов такого масштаба, используя имеющиеся сейчас крупнейшие электростанции.

### III. ВЕКТОРНОЕ И ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕКТОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ, ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ ЗЕМНОЙ КОРЫ

#### СКАЛЯРЫ, ВЕКТОРЫ, ТЕНЗОРЫ

В геотектонике и особенно в тектонофизике мы имеем дело с физическими величинами, для математического описания и рассмотрения которых требуются существенно разные математические исходные представления и последующие операции.

**Скаляры.** Это — величины, получающие достаточную количественную характеристику с помощью одного числа того или иного знака. Таковы: температура, всестороннее давление, угол (крутизна) наклона слоев, а также различные линейные размеры — мощность (толщина) определенных слоев, длина разрыва, амплитуда складки и многое другое. Говоря о линейном размере, мы не считаем существенным, в каком направлении производится измерение — мощность слоя одинаково можно отсчитывать и от подошвы к кровле и наоборот; ее определяют и в вертикальном направлении (если слои горизонтальны), и в горизонтальном (при вертикальном положении слоев), и в наклонном (в случае наклонного залегания слоев).

Размерность скалярных величин является чрезвычайно важным признаком, который учитывается при любом их использовании и всех вычислениях.

**Векторы.** Для описания многих физических явлений требуется использование величин, значения которых определяются не только их размером, но и направлением в пространстве. Так, мы вынуждены поступить, говоря о различных перемещениях слоев и крыльев разрывов, рассматривая скорость тектонического движения, силы, действующие на земную кору (включая силу тяжести), и др. Такие величины называются векторами. Направление вектора в пространстве можно охарактеризовать различными способами, однако всегда приходится приводить при этом два числа, например азимут и угол наклона. В математике обычно указывают косинусы углов, которые образуют данное направление с двумя из трех осей прямоугольных декартовых координат (направляющие косинусы). В итоге вектор требует для своего определения три числа.

На чертежах вектор изображается в виде прямой линии со стрелкой на одном конце, указывающей направление. Длина линии в определенном масштабе изображает величину вектора, называемую также его модулем. Лишенный стрелки конец линии принято совмещать с точкой, к которой относится данный вектор, однако это правило иногда невозможно соблюсти из-за графических осложнений.

В соответствии с физическим смыслом величин, считающихся векторами (сила, скорость и др.), их наделяют определенными математическими свойствами.

Векторы могут быть разделены на три класса, весьма существенные для геотектоники и тектонофизики. В зависимости от физического

смысла векторной величины и характера рассматриваемой задачи можно допустить существование у вектора следующих свойств.

I. Свободные векторы — векторы, которые можно перемещать в пространстве, сохраняя при этом их направление и величину неизменными. Результаты последующего использования свободного вектора не зависят от этих перемещений. Таков вектор падения слоев в пределах моноклинально залегающей толщи. Геолог изображает его на карте в любом месте, не боясь сместить ни по горизонтали (в плане), ни по вертикали (по стратиграфическому разрезу, или по склону рельефа). Свободными являются также векторы прямолинейного поступательного движения.

II. Скользящие векторы — векторы, которые допускается перемещать лишь вдоль той прямой линии, с которой они совпадают, сохраняя при этом величину неизменной. Таковы векторы сил, действующих на тело, которое рассматривается в качестве абсолютно твердого, т. е. неспособного к деформации в данных условиях. Это допущение оказывается необходимым и возможным при рассмотрении ряда вопросов в тектонофизике. Перемещения и ускорения твердых тел, возникающие под действием различных сил, во многих случаях оказываются одинаковыми и не зависят от того, что векторы сил мы произвольно перемещаем вдоль прямых линий их действия.

III. Связанные векторы — векторы, относящиеся к определенным точкам пространства. Любое перемещение приведет к иному результату действия вектора. Так происходит при действии сил на тела, могущие деформироваться и разрушаться разрывами. Такие векторы имеют особенно большое значение в тектонофизике и геотектонике. Например, вектор перемещения крыла тектонического разрыва из-за развития в породах деформаций и дополнительных разрывов оказывается разным в различных точках. Указывая вектор смещения по разрыву, мы обязаны отметить точку, к которой он относится. В качестве таких четко определенных точек служат пересечения трех структурных поверхностей: разрыва, определенного слоя и другого разрыва (дайки) или же поверхности магматической интрузии. Есть и другие методы определения вектора амплитуды разрыва в определенной точке.

Отнесение вектора к числу свободных, скользящих или связанных производится исходя из физических особенностей явления, которое абстрагируется в решаемой задаче в форме вектора.

Наиболее общим случаем задания векторных величин являются свободные векторы. Исследование скользящих и связанных векторов можно свести к изучению свободных. Поэтому в курсах векторного исчисления обычно изучаются только свободные векторы.

Существует также деление векторов на полярные (истинные) и псевдовекторы (аксиальные). Полярными считаются такие векторы, направление которых однозначно вытекает из физического существа рассматриваемой величины. Говоря о скорости или перемещении, мы можем указать лишь одно определенное их направление. Псевдовекторами называют физические величины с векторными свойствами, о направлении которых мы произвольно условливаемся. Например, вектор угловой скорости принято представлять себе направленным вдоль оси вращения. Из двух возможных направлений этой линии произвольно решено брать то, которое совпадает с перемещением винта, совмещенного с осью и поворачиваемого в сторону вращения. Псевдовекторы образуются при векторном умножении, которым приходится часто пользоваться в тектонофизике.

Если векторы располагаются параллельно одной прямой линии, их называют коллинеарными. Если они параллельны одной плоскости — компланарными.

Имея дело с векторными величинами, важно внимательно относиться к их размерности, которая бывает самой разнообразной и формально не отличается от размерности скаляров. Характеристики направления векторов безразмерны.

**Тензоры.** Имеются такие широко используемые в тектонофизике величины, для описания которых требуются характеристики, относящиеся к любым направлениям в пространстве. Одним вектором это передать нельзя. Необходима совокупность векторов, которые нельзя между собой суммировать. Такая совокупность, если она обладает определенными математическими особенностями, называется тензором. Деформации и напряжения в веществе, непосредственно окружающем точку, являются тензорами. Для описания этих тензоров следует указать 9 чисел. Другие тензоры требуют 27 чисел и т. д.

Можно сказать, что тензоры описываются  $3^n$  чисел, причем  $n$  равно 2, 3 и последующим целым числом. В соответствии с величиной  $n$  говорят о тензорах 2-го, 3-го и т. д. рангов. Поскольку векторы для своего описания требуют как минимум трех чисел, т. е.  $3=3^1$ , векторы называют тензорами 1-го ранга. Наконец, скаляры именуются тензорами нулевого ранга, поскольку 3, как и любое число, возведенное в нулевую степень, равно 1, а скаляр описывается одним числом.

Таким образом, понятие о тензоре в широком смысле слова обобщает качественно различные величины: скаляры, векторы, тензоры (в узком смысле слова). Важно заметить, что встречаются такие физические величины, описываемые многими числами, которые не являются тензорами, так как не обладают определенными математическими свойствами; о них будет сказано ниже.

Математическое учение о векторных и тензорных величинах в изложении разных авторов занимает по несколько томов. Поэтому мы остановимся лишь на основных понятиях, имеющих непосредственное отношение к геотектонике и тектонофизике\*. В векторном и тензорном исчислении используются различные системы обозначений и специфические математические операции.

При изучении одного и того же физического явления, в зависимости от целей и полноты рассмотрения, можно подходить к этому явлению по-разному, выражая его в одних случаях в качестве векторной величины, в других — скалярной. Например, изучая скорость тектонических движений, мы считаем ее вектором. Однако заранее ограничившись измерением одной вертикальной составляющей скорости и перестав думать о направлении, мы начинаем интересоваться только одним модулем скорости и обращаемся с ним, как со скаляром. В тектонофизике бывает так, что для нас безразлично направление скорости и важна лишь ее величина. Тогда снова скорость исследуется как скаляр. Так же рассматривается скорость различных видов транспорта — самолетов, автомобилей. Скорость этих машин оценивается независимо от направления движения, в котором достигается наибольшая скорость. Напряженное состояние в окрестностях точки при его полном рассмотрении является тензором 2-го ранга. Однако нередко ограничиваются лишь частью характеристик напряженного состояния, которые сводятся к наибольшему из растягивающих напряжений — вектору с размерностью, одинаковой с тензором, или к величине всестороннего давления, передаваемой скалярным числом с той же размерностью.

Таким образом, в соответствии с постановкой задачи исследователь должен четко формулировать, как он рассматривает в данном случае каждую физическую величину — как скаляр, вектор или тензор (в узком смысле слова).

---

\* Удобным для геологов кратким руководством является книга А. И. Борисенко и И. Е. Тарапова (1966). Классической считается книга Н. Е. Кочина (1951).

## Математические действия с векторами

Математические действия с несколькими векторами производятся, если эти векторы относятся к данной точке. Свободные векторы, находящиеся в различных местах пространства, можно переместить к одной точке. Со связанными векторами, относящимися к разным точкам пространства, рассматриваемые ниже математические операции не производятся.

**Обозначение векторов.** Существует несколько равноправных способов обозначения вектора: 1) две буквы, изображающие начало (на первом месте) и конец (на втором месте) вектора. Буквы могут быть большими (чаще) или маленькими. Над буквами проводится горизонтальная черта или стрелка. Например  $\overline{AB}$  или  $\overrightarrow{AB}$ ; 2) одна буква с чертой или стрелкой наверху, например,  $\overline{A}$ ,  $\overline{a}$ ,  $\vec{A}$ ,  $\vec{a}$ ; 3) в книгах векторы часто обозначаются большими и малыми буквами прямого жирного шрифта.

Мы будем обозначать вектор одной большой латинской буквой со стрелкой вверху, так как одной чертой над буквой отмечаются средние величины в статистике и тем же знаком характеризуется отрицание в математической логике. Последние обозначения имеют большое значение для геотектоники и тектонофизики.

Условно приняв один вектор за положительный, мы должны считать отрицательным всякий вектор, направленный вдоль той же линии в противоположную сторону.

**Сложение.** Если к одной точке относятся два или несколько векторов, результат их общего действия именуется суммой, а процесс взаимодействия называется сложением, которое обозначается тем же знаком  $+$ , что и сложение скалярных величин. Однако сложение производится иначе.

*Первый способ.* Изобразить выходящие из точки два вектора. Дополнить их линиями до образования фигуры параллелограмма. Провести из начальной точки диагональ параллелограмма. Она является исходящим из данной точки вектором, который представляет собой результат сложения (рис. 65, а).

*Второй способ.* Изобразить выходящий из данной точки один из суммируемых векторов. От его конца отложить любой следующий вектор и т. д. Когда все векторы будут изображены в виде ломаной линии (которая может вести себя в пространстве любым образом), из начальной точки проводится прямая, к концу ломаной линии. Она является результатом сложения и направлена в сторону от начальной точки (см. рис. 65, б).

Запись сложенных векторов,  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{C}$ , дающих сумму  $\vec{D}$ , такова:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{D}. \quad (1)$$

Сложение векторов обладает свойствами, присущими обычному алгебраическому суммированию:

1) коммутативностью, т. е. допускается перестановка слагаемых

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} &= \vec{A} + \vec{C} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} + \vec{C} = \vec{B} + \vec{C} + \vec{A} = \\ &= \vec{C} + \vec{A} + \vec{B} = \vec{C} + \vec{B} + \vec{A}; \end{aligned} \quad (2)$$

2) ассоциативностью, т. е. возможна группировка слагаемых:

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{B} + (\vec{C} + \vec{A}) = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}. \quad (3)$$

Сумма векторов неизменной величины зависит от их направления. Она максимальна, если векторы ориентированы одинаково. Если угол между двумя векторами тупой, их сумма может быть меньше каждого из слагаемых. При противоположном направлении двух векторов их сложение по существу превращается в вычитание модуля меньшего вектора из модуля большего вектора.

Суммировать и вычитать можно только векторы, имеющие одинаковую размерность. Нельзя складывать векторы со скалярами или тензорами 2-го и высших рангов, даже при совпадении размерностей характеризующих ими физических величин.

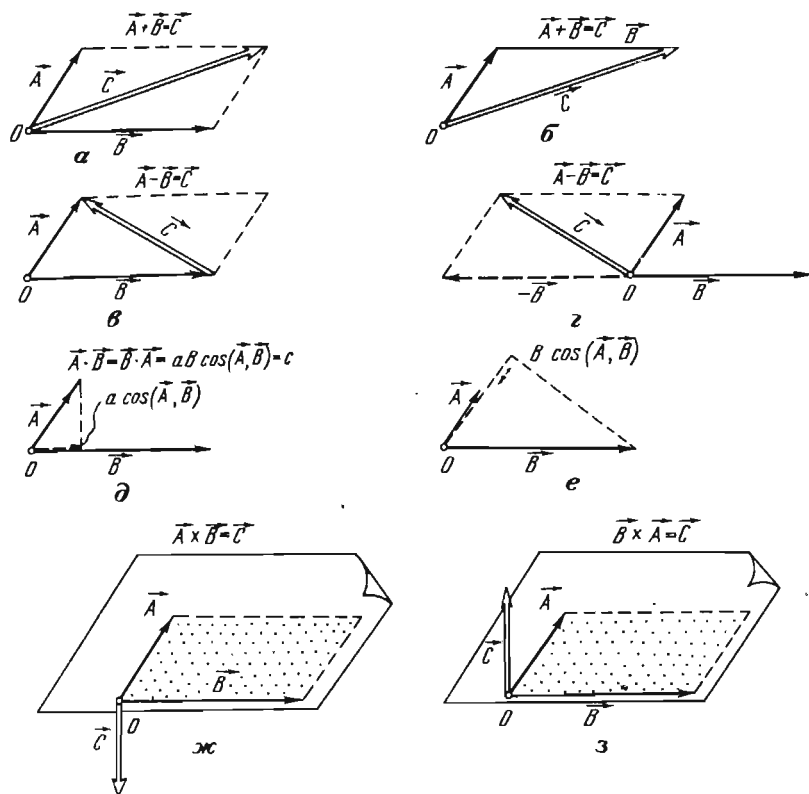


Рис. 65. Два способа сложения (а, б) и вычитания (в, г) векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  и их скалярное (д, е) и векторное (ж, з) умножения. Результаты изображены двойными линиями  $\vec{C}$ .

**Вычитание.** Если из вектора  $\vec{A}$  следует вычесть вектор  $\vec{B}$ , то оба они изображаются от общей начальной точки. Затем проводится прямая от конца вычитаемого  $\vec{B}$  к концу уменьшаемого  $\vec{A}$ . Этот отрезок — вектор  $\vec{C}$  — называется разностью. Он является той диагональю параллелограмма, построенного на исходных векторах, которая не проходит через начальную точку (см. рис. 65, в). Этот вектор надо представлять себе связанным с начальной точкой  $O$ .

Другой способ нахождения разности заключается в суммировании векторов  $\vec{A}$  и  $-\vec{B}$ . Вектор  $-\vec{B}$  равен по величине вектору  $\vec{B}$ , но направлен в противоположную сторону (см. рис. 65, г).

**Умножение вектора на скаляр.** Для того чтобы вектор ( $\vec{A}$ ) умножить на скаляр ( $\beta$ ), надо перемножить величину (модуль) вектора и



скаляр. Полученное произведение является величиной (модулем нового вектора  $\vec{C}$ , являющегося результатом умножения и направленного так же, как и вектор  $\vec{A}$ ):

$$\vec{A}b = \vec{C} = b\vec{A}. \quad (4)$$

Такое умножение обладает свойством коммутативности, т. е. множители  $\vec{A}$  и  $b$  можно менять местами, что при ином (векторном) умножении — недопустимо. Множители пишутся один за другим без какого-либо разделяющего знака. Размерность вектора-произведения  $\vec{C}$  изменяется, по сравнению с размерностью вектора-множителя, за счет размерности скалярного множителя.

**Скалярное умножение двух векторов.** Два вектора  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , выходящие из одной точки, в векторном исчислении могут быть перемножены двумя качественно различными способами, имеющими особые названия и приводящими к разной величине произведения, хотя размерность этих двух произведений одинаковая.

Первый способ умножения называется скалярным. Его результат является скаляром  $c$ . Он получается умножением величины (модуля) одного вектора  $\vec{A}$  на величину (модуль) проекции другого вектора  $\vec{B}$  на направление первого. Скалярное умножение часто обозначается жирной точкой:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = c. \quad (5)$$

Результат не зависит от того, какой из векторов-множителей будет взят за направление, на которое производится проектирование второго вектора. Скалярное умножение коммутативно (см. рис. 65, *д*, *е*).

Если угол между направлениями перемножаемых векторов обозначить  $(\vec{A}, \vec{B})$ , то скалярное произведение можно записать формулой

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = ab \cos(\vec{A}, \vec{B}), \quad (6)$$

где  $a$  и  $b$  обозначают модули векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ . Иными словами, скалярное произведение двух векторов равно произведению модулей этих векторов, умноженному на косинус угла между векторами. Последняя формула показывает, что величина произведения возрастает с уменьшением угла между векторами и достигает максимума при расположении обоих множителей вдоль одной прямой. При перпендикулярности одного множителя к другому скалярное произведение равно нулю.

Скалярное умножение имеет большое значение в тектонофизике, так как приводит к важнейшим физическим характеристикам тектонических процессов (например, работе сил).

**Векторное умножение двух векторов.** Второй способ умножения называется векторным. Его результатом является вектор  $\vec{C}$ . Величина (модуль) этого нового вектора равна площади параллелограмма, две стороны которого образуют выходящие из одной точки перемножаемые векторы  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ . Векторное умножение часто обозначается знаком  $\times$ . Абсолютная величина произведения может быть найдена по формуле

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = ab \sin(\vec{A}, \vec{B}) = c. \quad (7)$$

Прямые скобки указывают на то, что вычисляется именно абсолютная величина (модуль) вектора. Обозначение  $|\vec{C}|$  равносильно маленькой букве  $c$ .

Поскольку в формуле векторного произведения стоит  $\sin(\vec{A}, \vec{B})$  вместо  $\cos(\vec{A}, \vec{B})$ , фигурирующего при скалярном произведении, оказывается, что величина векторного произведения максимальна при взаимно перпендикулярном расположении векторов-множителей. При совпадении направлений этих векторов векторное произведение равно нулю. При скалярном произведении соотношения обратные.

Весьма важен вопрос о направлении вектора, полученного в итоге умножения. Условились направлять его из начальной точки перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы-множители. Из двух возможных направлений выбирается соответствующее движению винта при его вращении от первого множителя ко второму (рис. 65, ж, з). Это правило приводит к тому, что, поменяв множители местами, мы получим произведение противоположного знака, т. е. вектор-произведение будет направлен в обратную сторону. Следовательно, векторное произведение не обладает свойством коммутативности:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}. \quad (8)$$

Векторные произведения, в силу условности правила для выбора их направления, оказываются псевдовекторами. К их числу относятся такие важные физические величины, как момент силы относительно точки в пространстве, момент пары сил, угловая скорость вращения тела (она изображается отрезком вдоль оси вращения) и ротация — одна из важнейших характеристик векторного поля, рассматриваемая ниже.

**Деление векторов.** Под делением подразумевается операция, в которой делимым является вектор, а делителем скаляр. Тогда частное оказывается вектором, совпадающим по направлению с делимым. Операции, которые можно было бы назвать скалярным и векторным делениями вектора на вектор, считая их обратными одноименным умножениям, в векторном исчислении не существуют. Они не имеют смысла, так как результат их не может быть однозначным.

**Разложение вектора.** Для решения многих задач оказывается выгодным произвольно ориентированный в пространстве вектор заменить равной ему совокупностью из двух или трех векторов определенных направлений. Иначе говоря, исходный вектор рассматривается в качестве суммы нескольких слагаемых. Дальнейшие операции удобнее производить со слагаемыми, нежели с суммой.

Часто в качестве слагаемых берут векторы, ориентированные параллельно координатным осям. Величины этих слагаемых должны быть выбраны такими, чтобы в сумме все они составляли исходный вектор.

В векторном исчислении широко используются различные прямоугольные системы координат: сферическая, цилиндрическая, эллиптическая и другие криволинейные, но чаще всего применяют прямолинейную (декартову). В дальнейшем будем иметь в виду лишь последнюю систему. Ее оси обозначаются различно:  $x, y, z$  или  $x_1, x_2, x_3$ , или иными буквами. В векторном исчислении первую ось ( $x$  или  $x_1$ ) чаще всего направляют перпендикулярно чертежу в сторону читателя. Вторую ось ( $y$  или  $x_2$ ) ориентируют в плоскости чертежа горизонтально слева направо. Третья ось ( $z$  или  $x_3$ ) идет снизу вверх в плоскости чертежа. Эта система называется правой. Пользуются и иным расположением осей координат.

Через концы подлежащего разложению вектора  $\vec{A}$  проводятся две параллельные плоскости, перпендикулярные первой оси координат. Они отсекают на этой оси отрезок, называющийся проекцией вектора  $\vec{A}$  на первую ось ( $x$  или  $x_1$ ). Ее обозначают  $a_x$  или  $a_1$ . Она считается скаля-

ром. Величина проекции зависит от величины  $a$  разлагаемого вектора  $\vec{A}$  и косинуса угла между ним и осью координат  $\cos(\vec{A}, x)$ .

$$a_x = a \cos(\vec{A}, x). \quad (9)$$

Затем таким же образом находят проекции разлагаемого вектора на две другие оси ( $a_y$  и  $a_z$ ):

$$a_y = a \cos(\vec{A}, y), \quad (10)$$

$$a_z = a \cos(\vec{A}, z). \quad (11)$$

Для того чтобы иметь возможность использовать вместо исходного вектора эквивалентную ему систему векторов, параллельных осям координат, целесообразно каждую проекцию, т. е. модуль  $a_x$  (или  $a_y$ , или  $a_z$ ), умножить на направленный вдоль оси вектор, величина которого равна единице. Эта единица может иметь определенную размерность рассматриваемой векторной величины. Однако можно размерность приписать модулю, а вектор величиной в единицу считать безразмерным. Такой вектор называется базисным, масштабным, или единичным. Его изображают вдоль оси от начала координат. При прямоугольной (ортогональной) системе координат единичные векторы называются также ортами. Обозначаются орты различно:  $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ , или  $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$ , или  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Произведение скалярной проекции вектора на совпадающий с нею по направлению орт называется составляющей, или компонентой, вектора. Компонента является вектором:

$$\vec{A}_x = a_x \vec{i}_x; \quad A_y = a_y \vec{i}_y; \quad A_z = a_z \vec{i}_z.$$

Используя орты, векторную сумму компонент, составляющих вектор  $\vec{A}$ , пишут так:

$$\vec{A} = a_x \vec{i}_x + a_y \vec{i}_y + a_z \vec{i}_z.$$

Равенство исходного вектора векторной сумме его компонент изображается записью:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z, \quad (12)$$

которая иллюстрируется на рис. 66, а. Заметим, что алгебраически складывая модули проекций  $a_x + a_y + a_z$ , мы производим не векторное, а скалярное суммирование. Его результат представляет интерес при рассмотрении ряда вопросов.

Модуль суммарного вектора, обозначаемый  $a$ , получается из модулей составляющих  $a_x, a_y, a_z$  по формуле:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (13)$$

в которой имеется в виду не векторное, а скалярное сложение. В этом легко убедиться, рассматривая рис. 66, б. Сумма квадратов первых двух проекций, образующих катеты одного треугольника, равна квадрату его гипотенузы — отрезку  $d$ . Его квадрат в сумме с квадратом модуля последней составляющей  $a_z$ , поскольку они образуют два катета другого треугольника, равны квадрату величины  $a$  модуля суммарного вектора, которая совпадает с гипотенузой этого треугольника.

Три компоненты и исходный вектор изображаются выходящими из начала координат. Если рассматриваемый вектор является свободным,

то его и компоненты просто переносят в начало координат. Если вектор связанный, можно взять за начало координат ту точку, к которой он относится.

Часто имеется несколько различно ориентированных свободных векторов и требуется их сложить. Для этого сначала находят проекции каждого вектора на три оси координат. Затем суммируют все компоненты, совпадающие с первой осью, — они являются первой составляющей вектора-суммы. Потом суммируются компоненты, совпадающие со второй осью, — получается вторая составляющая суммы. Так же находится и третья составляющая суммы. Наконец, векторным сложением трех составляющих получается суммарный вектор. Проекция суммы векторов на любую ось равна алгебраической сумме их проекций на данную ось.

Мы остановились лишь на основных действиях с векторами. Многие другие действия и специфичные лаконичные способы записи различных математических операций с векторными величинами читатель найдет в соответствующих руководствах.

Читателю важно помнить, что вектор и его составляющие в направлениях осей координат (компоненты), также являющиеся векторами, строго говоря, знака не имеют. Правда, нормальные напряжения принято считать положительными, если они растягивающие, и отрицательными, если они сжимающие. Положительными и отрицательными условно считают коллинеарные векторы, имеющие противоположное направление, причем выбор того, какое направление принять за положительное, достаточно свободен. Не существует строгого правила для установления знака касательного напряжения. Вектор характеризуется его направлением и скалярным модулем. Последний также знака не имеет в том смысле, что всегда является положительной абсолютной величиной, которая может быть записана в прямых скобках или обозначена другим способом. Иное дело проекции вектора на координатные оси или другие направления. Как известно, проекции получаются умножением модуля вектора на косинус угла между осью проектирования и направлением вектора. Проекция вектора является скалярной величиной. В зависимости от знака косинуса она может быть положительной или отрицательной. Если быть вполне точным в выражениях, то положительными и отрицательными следует называть именно проекции растягивающих и сжимающих напряжений.

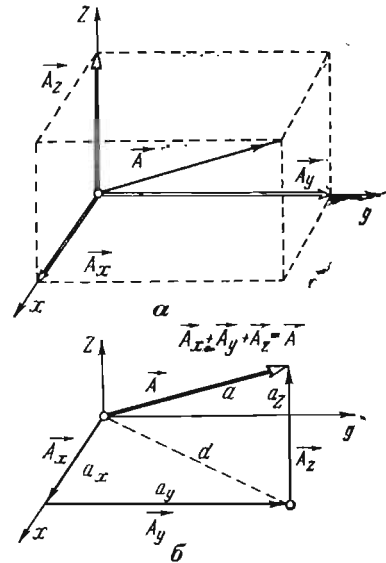


Рис. 66. Разложение (а) вектора  $\vec{A}$  на три компоненты и сложение (б) компонент  $\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z$ . Двойными стрелками показаны искомые векторы

### Математические действия с тензорами 2-го ранга

Тензором второго ранга называется совокупность векторов, выходящих из одной точки и ориентированных по всем направлениям. Тензором второго ранга является лишь такая совокупность, в которой можно вычислить величину вектора любого направления, зная всего лишь девять ( $3^2$ ) чисел. Такова основная математическая особенность тензора 2-го ранга. Ее можно выразить в виде различных формул. Весьма важные для тектонофизики распределения деформаций и напряжений в не-

посредственном окружении рассматриваемой точки описываются тензорами второго ранга. Это происходит в результате того, что существует такая физическая закономерность, связывающая величину вектора с его направлением, что достаточно знать девять величин, чтобы быть в состоянии вычислить вектор любого другого направления.

Аппарат тензорного исчисления был разработан на примере напряжений. Термин тензор происходит от латинского слова «напряжение». В дальнейшем этот аппарат нашел применение при описании электрических и магнитных явлений, в теории относительности и других областях физики.

При математических действиях с тензорными величинами широко используется матричное исчисление. Матрицами называют прямоугольные таблицы чисел. Существуют теория и специальные методы математических операций с матрицами. Они применяются при решении систем из большого числа линейных уравнений, при интегрировании систем дифференциальных уравнений в механике, электротехнике, квантовой механике, экономике и других областях знания.

Принципы и методы матричного исчисления излагаются во многих руководствах.

**Первый способ описания тензора 2-го ранга.** Обычно тензор 2-го ранга обозначается какой-нибудь одной большой буквой, например  $A$ ,  $T$ ,  $D$  или другой, которая сопровождается справа внизу индексом, состоящим из двух маленьких букв, чаще всего  $ij$  или  $ik$ , или  $kl$ :  $T_{ij}$ ;  $T_{ik}$ ;  $T_{kl}$ .

Смысл этих индексов будет разъяснен ниже. Девять величин, достаточных для характеристики тензора, указываются одним из двух способов.

При первом способе произвольно выбирают прямолинейную систему координат и регистрируют девять определенных векторов, связанных с этой системой координат. В частном примере описания напряжений для этого служат 9 векторов нормальных и касательных напряжений, параллельных осям координат и действующих на площадках, перпендикулярных осям координат.

Нормальные напряжения обозначают  $\sigma$ , касательные —  $\tau$ . Первой буквой индекса указывается ось, перпендикулярная площадке действия напряжения, второй буквой — ось координат, которой вектор параллелен. Всего возможны следующие девять напряжений, выбранных по данному принципу:  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$ .

Если оси координат обозначаются не  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , то те же напряжения получают и индексы (соответственно):  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{13}$ ,  $\tau_{21}$ ,  $\tau_{23}$ ,  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{32}$ .

Девять величин этих векторов называются компонентами тензора. Они записываются в виде таблицы (матрицы) в определенном порядке так, чтобы первый индекс соответствовал строке, а второй столбцу:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = T_{ik}. \quad (1)$$

Такая таблица равносильна обозначению  $T_{ik}$ , так как под индексами  $i$  и  $k$  подразумеваются цифры 1, 2, 3 во всех возможных их комбинациях, которых может быть 9.

Матрица тензора ограничивается двойными вертикальными линиями, чтобы отличить ее от матрицы определителя, который путем вычислений может быть превращен в одно число. Матрицу тензора нельзя приравнять одному числу.

В общем виде тензор  $T_{ik}$  изображается матрицей, содержащей пере-числение его компонент  $t_{ik}$  (величин характерных векторов):

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Описание тензора мы начали с произвольного выбора координатных осей, к которым привязаны компоненты тензора. Если взять другие направления осей координат, параллельные им компоненты тензора окажутся другой величины, однако тензор в целом и векторы, параллельные первоначальным осям координат, не изменят величины. Тензор как таковой не зависит от выбора осей координат.

**Второй способ описания тензора 2-го ранга, главные оси и главные значения тензора.** Каждый тензор 2-го ранга обладает одним весьма важным свойством: при одном единственном расположении осей координат у него оказываются равными нулю все компоненты, имеющие неодинаковые цифры в индексе, т. е.

$$t_{12} = t_{13} = t_{21} = t_{23} = t_{31} = t_{32} = 0.$$

Отличными от нуля остаются только три компоненты  $t_{11}$ ,  $t_{22}$  и  $t_{33}$ , которые называются главными значениями тензора 2-го ранга. Направления этих векторов именуется главными осями тензора. Они взаимно перпендикулярны. Если оси координат совпадают с главными осями тензора, его матрица принимает простейший вид, и вместо  $t_{11}$ ,  $t_{22}$ ,  $t_{33}$  вводятся особые обозначения  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ :

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

**Симметрия тензоров.** Понятие о симметрии распространяется на тензоры не ниже 2-го ранга. Симметричными по паре индексов называются тензоры, у которых компоненты, получающиеся при перестановке этих индексов, равны друг другу:

$$t_{12} = t_{21}; \quad t_{13} = t_{31}; \quad t_{23} = t_{32}.$$

В симметричном тензоре можно заменять компоненты согласно последним равенствам:

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Компоненты, имеющие два одинаковых индекса, всегда не равны нулю. В матрицу фактически входит шесть величин.

Антисимметричными называют тензоры с равными нулю компонентами, имеющими два одинаковых индекса, и с противоположными по знаку компонентами, получающимися при изменении последовательности индексов:

$$t_{12} = -t_{21}; \quad t_{13} = -t_{31}; \quad t_{23} = -t_{32}.$$

Антисимметричный тензор:

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} \\ -t_{13} & -t_{23} & 0 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Любой тензор 2-го ранга может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. Для нас важно, что тензоры деформаций и напряжений симметричны.

**Тензорная поверхность.** Компоненты любого симметричного тензора 2-го ранга  $T_{ik} = T_{ki}$  однозначно определяют поверхность 2-го порядка, т. е. концы всех векторов этого тензора располагаются на поверхности 2-го порядка (независимо от используемой системы координат). Главные оси тензора являются главными осями этой поверхности, называемой тензорной. Если все три главных значения тензора положительны, поверхность является эллипсоидом, полуоси которого равны  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$ , где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — три главных значения тензора. При равенстве всех трех главных значений  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  эллипсоид приобретает форму шара. Такие тензоры называются шаровыми. В шаровых тензорах все направления характеризуются одинаковой величиной вектора, и матрица может быть записана в виде:

$$T_{ik} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

**Инварианты тензора.** Компоненты тензора меняют свою величину при повороте осей координат. Однако существуют такие выражения, составленные из компонент тензора, величина которых остается неизменной независимо от направления осей координат. Эти выражения называются инвариантами тензора. Существуют три основных инварианта, из которых можно составить любые комбинации, оказывающиеся также инвариантными.

Первый инвариант (линейный):

$$I_1 = t_{11} + t_{22} + t_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{inv.} \quad (7)$$

Второй инвариант (квадратичный).

$$I_2 = \begin{vmatrix} t_{22} & t_{32} \\ t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{31} \\ t_{13} & t_{33} \end{vmatrix} = t_{22}t_{33} - t_{32}t_{23} + t_{11}t_{22} - t_{21}t_{12} + \\ + t_{11}t_{33} - t_{31}t_{13} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \text{inv.} \quad (8)$$

Третий инвариант (кубичный) равен определителю:

$$I_3 = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \text{inv.} \quad (9)$$

В этих выражениях  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  являются главными значениями тензора 2-го ранга.

Если мы рассматриваем симметричный тензор 2-го ранга, у которого все три главных значения положительны, этот тензор геометрически изображается эллипсоидом, полуоси которого составляют:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}; \quad b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}.$$

Сумма обратных квадратов осей этого эллипсоида является первым инвариантом  $I_1$ :

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \text{inv.} \quad (10)$$

Сумма обратных квадратов площадей эллипсов ( $F_1, F_2, F_3$ ), образованных тремя взаимно перпендикулярными плоскостями, каждая из

которых совпадает с двумя осями эллипсоида, пропорциональна второму инварианту  $I_2$ :

$$I_2 = \lambda_3 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 c^2} + \frac{1}{b^2 c^2} = \\ = \pi^2 = \left( \frac{1}{F_1^2} + \frac{1}{F_2^2} + \frac{1}{F_3^2} \right) = \text{inv.} \quad (11)$$

Объем  $V$  тензорного эллипсоида определяет величину третьего инварианта  $I_3$ :

$$I_3 = \frac{16\pi^2}{9V^2} = \text{inv.} \quad (12)$$

**Сложение и вычитание тензоров 2-го ранга.** Суммой (или разностью) тензоров одного ранга называется тензор того же ранга, компоненты которого равны сумме (или разности) соответствующих компонент:

$$S_{ik} + D_{ik} = T_{ik} = \left\| \begin{array}{ccc} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{array} \right\| = \\ = \left\| \begin{array}{ccc} (s_{11} + d_{11}) & (s_{12} + d_{12}) & (s_{13} + d_{13}) \\ (s_{21} + d_{21}) & (s_{22} + d_{22}) & (s_{23} + d_{23}) \\ (s_{31} + d_{31}) & (s_{32} + d_{32}) & (s_{33} + d_{33}) \end{array} \right\|. \quad (13)$$

**Шаровой тензор и девиатор.** Шаровым тензором называется такой, у которого все три главных значения одной величины. Девиатором называется тензор, линейный инвариант которого равен нулю —  $I_1 = 0$ . Любой тензор можно разложить на девиатор и шаровой тензор. Этим разложением широко пользуются при характеристике напряженного состояния деформируемых тел. Если тензор выразить через его главные значения  $t_{11} = t_1$ ;  $t_{22} = t_2$ ;  $t_{33} = t_3$ :

$$T_{ik} = \left\| \begin{array}{ccc} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{array} \right\|, \quad (14)$$

то первый инвариант  $I_1 = t_1 + t_2 + t_3$ .

Введем в рассмотрение величину  $t_n$ , пропорциональную первому инварианту:

$$t_n = \frac{1}{3} I_1, \quad (15)$$

которая широко используется в теории напряжений и деформаций. Теперь напишем формулу шарового тензора  $S_{ik}$ , главные значения которого равны  $t_n$ :

$$S_{ik} = \left\| \begin{array}{ccc} t_n & 0 & 0 \\ 0 & t_n & 0 \\ 0 & 0 & t_n \end{array} \right\|. \quad (16)$$

Вычитанием шарового тензора  $S_{ik}$  из исходного тензора  $T_{ik}$  мы получим также тензор  $D_{ik}$ , называемый девиатором:

$$T_{ik} - S_{ik} = \left\| \begin{array}{ccc} (t_1 - t_n) & 0 & 0 \\ 0 & (t_2 - t_n) & 0 \\ 0 & 0 & (t_3 - t_n) \end{array} \right\| = D_{ik}. \quad (17)$$



Согласно определению девиатора, его первый инвариант равен нулю. Убедимся в этом:

$$I_1(D_{ik}) = (t_1 - t_n) + (t_2 - t_n) + (t_3 - t_n) = \frac{3t_1 - t_1 - t_2 - t_3}{3} + \frac{3t_2 - t_1 - t_2 - t_3}{3} + \frac{3t_3 - t_1 - t_2 - t_3}{3} = \frac{3t_1 - 3t_1 + 3t_2 - 3t_2 + 3t_3 - 3t_3}{3} = 0. \quad (18)$$

Девиатор напряжений будет определен ниже в связи с рассмотрением тензора напряжений.

**Умножение тензоров.** Умножение тензора на скаляр заключается в умножении на этот скаляр каждой из компонент тензора. Умножить можно и на целое число, и на дробь, т. е. разделить.

Существует тензорное умножение двух тензоров. Оно заключается в том, что выписываются все возможные произведения компонент одного тензора на компоненты другого. В итоге такого перемножения двух тензоров 2-го ранга получается тензор 4-го ранга — величина, которая в тектонофизике до сих пор не использовалась.

**Свертывание тензоров.** Суммирование таких компонент одного тензора, у которых два индекса являются одинаковыми, называется свертыванием. Эта операция производится с тензорами 2-го ранга и выше. В итоге свертывания получается величина на два ранга ниже по сравнению с рассматриваемым тензором. Иными словами, свертывание тензора 2-го ранга дает скаляр, который является первым инвариантом.

## ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЯ

Большинство геологов в той или иной мере использует в своей работе представление о напряжениях в горных породах, считая напряжением вектор силы, действующей на единицу площади мысленного сечения геологического тела. Между тем в физике и технике уже давно используется более общее и содержательное представление о напряженном состоянии в точке, которое рассматривается в качестве тензорной величины. Тензор напряжений является одним из главных исходных понятий в тектонофизике. Поэтому именно на нем стоит произвести подробный разбор смысла тензора.

Рассмотрим напряженное состояние внутри массива сплошной среды, в частности горных пород в окрестности любой выбранной точки  $O$ . Примем точку  $O$  за начало координат и три любых взаимно перпендикулярных проходящих через нее линии за оси координат  $x, y, z$  (рис. 67).

Говоря о напряжении «в данной точке массива», мы должны указывать конкретные бесконечно малые площадки, проходящие через эту точку. Для определенности пусть это будут прямоугольные площадки, расположенные в координатных плоскостях, со сторонами  $dx, dy$  и  $dz$  — бесконечно малыми отрезками, отложенными от точки  $O$  в направлениях координатных осей. Будем под  $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$  подразумевать векторы напряжений на площадках, нормальных осям  $x, y$  и  $z$  соответственно. Чтобы представить наглядно картину воздействия сил, отвечающих этим напряжениям на некоторый объем, примыкающий к точке  $O$ , вырежем из массива бесконечно малый параллелепипед, три грани которого совпадают с указанными площадками (см. рис. 67, а).

Вектор  $\vec{p}$  напряжения — сила, приходящаяся на единицу площади, — на каждой грани может оказаться ориентированным наносясь к этой грани и иметь различную величину. Мы вправе разложить вектор сначала на две составляющие, одна из которых нормальна к грани параллелепипеда и при этом параллельна одной из осей координат, а другая совпадает с плоскостью грани параллелепипеда и в общем

случае непараллельна ни одной из оставшихся двух осей координат. Эту вторую (касательную) составляющую мы в свою очередь заменяем такими двумя составляющими, лежащими в плоскости грани, одна из которых параллельна одной оси координат, а другая — другой оси координат.

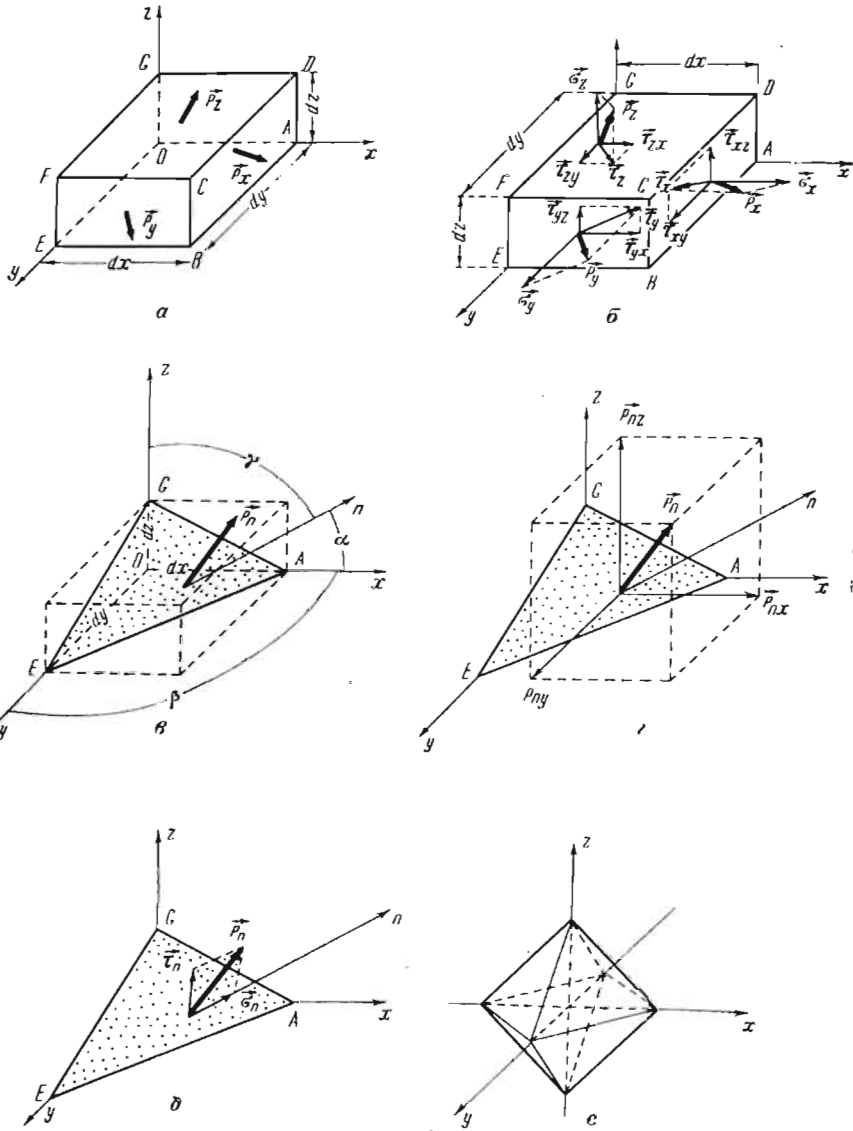


Рис. 67. Схемы последовательного рассмотрения тензора напряжений. Пояснения в тексте

На рис. 67, б изображены векторы напряжений  $\vec{p}_x$ ,  $\vec{p}_y$  и  $\vec{p}_z$  и их составляющие. Заметим, что так как последние заведомо параллельны координатным осям, для полного их определения требуется задание лишь модуля и знака, т. е. их можно уже рассматривать как скалярные проекции. Так, проекции вектора  $\vec{p}_x$  определяются скалярными величинами  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  (см. рис. 67, б), проекции  $\vec{p}_y$  — величинами  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ , проекции  $\vec{p}_z$  — величинами  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$ . Часто именно эти вели-

чины и называют напряжениями;  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  — нормальными, а  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  — касательными.

Первый индекс указывает, какой оси координат перпендикулярна площадка действия данного напряжения, второй индекс указывает, какой оси координат напряжение параллельно.

Укажем, что на рис. 67, б к читателю обращены не грани параллелепипеда, проходящие через точку  $O$ , а бесконечно к ним близкие. Строго говоря, к этим граням приложены напряжения, отличающиеся от  $p_x, p_y, p_z$  на бесконечно малые величины. Пока речь идет об иллюстрации, этими приращениями напряжений можно пренебречь, однако при составлении уравнений равновесия или движения этого элементарного объема такое пренебрежение окажется недопустимым.

Мы не будем в дальнейшем составлять упомянутые уравнения, отсылая читателя к многочисленным курсам теории упругости, а лишь укажем на одно важное для нас следствие, вытекающее из этих уравнений: на двух соседних взаимно перпендикулярных гранях касательные напряжения, перпендикулярные линии пересечения этих граней, равны между собой по величине (принцип взаимности или парности касательных напряжений:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}$ ).

Остановимся еще на правиле знаков. Нормальное напряжение на грани какого-либо выделенного объема считают положительным, если его направление совпадает с направлением внешней нормали к этой грани. Так, например, на грани  $ABCD$  параллелепипеда, изображенного на рис. 67, б, если  $\sigma_x$  положительно, это направление вектора в данном случае совпадает с положительным направлением оси  $x$ . На грани  $OEFG$  будет наоборот: вектор, отвечающий положительному значению  $\sigma_x$ , должен быть направлен в сторону отрицательной оси  $x$ . Это соответствует правилу — положительными нормальными напряжениями считаются растягивающие. На рис. 67, б указаны направления векторов, отвечающих положительным величинам касательных напряжений на гранях  $ABCD, BEFC$  и  $CFGD$ , на которых направления внешних нормалей совпадают с положительными направлениями координатных осей. На остальных гранях положительным величинам  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  отвечают векторы обратных направлений.

Предположим, что нам известны проекции напряжений, параллельные трем осям координат и соответствующие трем площадкам, которые нормальны к осям координат. Совокупность этих проекций запишем в виде следующей таблицы, имеющей вид матрицы тензора 2-го ранга:

$$\begin{array}{c} \sigma_x \tau_{xy} \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \sigma_y \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \tau_{zy} \sigma_z \end{array}$$

В силу взаимности касательных напряжений таблица является симметричной и полностью определяется не 9-ю, а 6-ю величинами. Покажем, что знания содержащихся в ней проекций достаточно для нахождения вектора напряжений  $p_n$  на любой как угодно ориентированной в пространстве площадке, проходящей через точку  $O$  (ориентировку площадки будем характеризовать направлением перпендикулярной к ней линии  $n$ ).

Для доказательства проведем бесконечно близко от точки  $O$  плоскость  $AEG$ , параллельную той, в которой располагается интересующая нас площадка. Эта плоскость  $AEG$  и три координатные плоскости ограничат бесконечно малый тетраэдр, ребра которого совпадают с координатными осями и имеют бесконечно малые длины. Последние можно, как и стороны рассматривавшегося ранее параллелепипеда, обозначить  $dx, dy, dz$  (см. рис. 67, в). Напряжения, действующие на грани тетра-

эдра и совпадающие с координатными плоскостями, нам известны — это  $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ . Найдем напряжения на четвертой наклонной грани  $AEG$ , используя уравнения равновесия приложенных к тетраэдру сил.

Силу, действующую на определенную грань, мы будем представлять в виде трех составляющих, каждая из которых равна составляющей соответствующего напряжения, помноженной на площадь этой грани. На грань  $OEG$ , перпендикулярную оси  $x$  и имеющую площадь  $dF_x$ , действуют силы, величины которых равны:

$$\sigma_x dF_x; \tau_{xy} dF_x; \tau_{xz} dF_x. \quad (1)$$

На перпендикулярную оси  $y$  грань  $AOG$  с площадью  $dF_y$  действуют силы:

$$\sigma_y dF_y; \tau_{yx} dF_y; \tau_{yz} dF_y. \quad (2)$$

Перпендикулярная оси  $z$  грань  $AOE$  с площадью  $dF_z$  подвержена действию сил:

$$\sigma_z dF_z; \tau_{zx} dF_z; \tau_{zy} dF_z. \quad (3)$$

У всех перечисленных напряжений приняты положительные знаки. Соответствующие векторы и их проекции изображены на рис. 67, б.

Наконец, на четвертую грань тетраэдра  $AEG$ , перпендикулярную произвольно выбранному нами направлению  $n$  и имеющую площадь  $dF_n$ , действует сила, величина которой равна  $P = p_n dF_n$ , где  $p_n$  есть величина вектора напряжения на наклонной грани  $AEG$  (см. рис. 67, в).

Вектор  $\vec{p}_n$  (по аналогии с напряжениями, действующими на других гранях) мы можем разложить на три составляющие — вектора, параллельные трем осям координат. Обозначим эти составляющие  $\vec{p}_{nx}, \vec{p}_{ny}$  и  $\vec{p}_{nz}$ , первый индекс  $n$  указывает площадку, на которой действует данное напряжение, второй ( $x, y$  или  $z$ ) — на направление данной составляющей (см. рис. 67, г). Ясно, что в общем случае напряжения  $\vec{p}_{nx}, \vec{p}_{ny}, \vec{p}_{nz}$  не являются ни нормальными, ни касательными по отношению к площадке их действия. Проекции силы, приложенной к грани  $AEG$ , соответствующие этим напряжениям, также параллельны осям координат и имеют величины:

$$p_{nx} dF_n; p_{ny} dF_n; p_{nz} dF_n. \quad (4)$$

Теперь напишем три уравнения равновесия, выражающие требование равенства нулю сумм проекций на оси  $x, y, z$  всех приложенных к тетраэдру сил.

Проектируя все силы на ось  $x$ , получим в сумме

$$p_{nx} dF_n - \sigma_x dF_x - \tau_{yx} dF_y - \tau_{zx} dF_z = 0, \quad (5)$$

откуда

$$p_{nx} dF_n = \sigma_x dF_x + \tau_{yx} dF_y + \tau_{zx} dF_z. \quad (6)$$

Аналогичным образом получаются два остальных уравнения равновесия тетраэдра:

$$p_{ny} dF_n = \tau_{xy} dF_x + \sigma_y dF_y + \tau_{zy} dF_z, \quad (7)$$

$$p_{nz} dF_n = \tau_{xz} dF_x + \tau_{yz} dF_y + \sigma_z dF_z. \quad (8)$$

Теперь обратим внимание на соотношения между площадями граней тетраэдра:  $dF_n, dF_x, dF_y, dF_z$ . Примем за исходную единицу площадь грани  $AEG$ , обозначенную  $dF_n$ . Обозначим косинус угла  $\alpha$  между осью  $x$  и линией  $n$  (нормальной к площади  $dF_n$ ) записью  $\cos(n, x) = n_x$ ; косинус угла  $\beta$  между линией  $n$  и осью  $y$  символом  $\cos(n, y) = n_y$

и косинус угла  $\gamma$  между линией  $n$  и осью  $z$  в виде  $\cos(n, z) = n_z$ . Величины этих трех косинусов (называемых направляющими) считаются известными (см. рис. 67, в). С их помощью выражается направление произвольно выбранной площадки  $AEG$ . Легко установить, что входящие в уравнения равновесия площади трех граней тетраэдра могут быть выражены через площадь грани  $AEG$ , если мы задались определенными величинами направляющих косинусов:

$$\left. \begin{aligned} dF_x &= dF_n \cos(n, x) = dF_n n_x \\ dF_y &= dF_n \cos(n, y) = dF_n n_y \\ dF_z &= dF_n \cos(n, z) = dF_n n_z. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Подставив эти выражения площадей трех граней  $dF_x, dF_y, dF_z$  в уравнения равновесия (6), (7) и (8) и сократив в них  $dF_n$ , мы получаем три уравнения, связывающие величины  $p_{nx}, p_{ny}$  и  $p_{nz}$  трех искоемых проекций вектора напряжений  $\vec{p}_n$  на произвольно ориентированной площадке  $AEG$  с известными нам величинами проекций напряжений на трех взаимноперпендикулярных площадках, проходящих через данную точку  $O$ :

$$\left. \begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ p_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ p_{nz} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Теперь предположим, что наклонная грань тетраэдра неограниченно приближается к точке  $O$ . Ясно, что в пределе площадка  $AEG$  стремится к площадке, имеющей ту же нормаль  $n$ , но проходящей через точку  $O$ . Следовательно, на  $p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}$ , определяющиеся по формулам (10), можно смотреть как на величины проекций напряжений именно на этой площадке.

Скалярную величину самого вектора напряжений  $\vec{p}_n$  на площадке с направляющими косинусами  $n_x, n_y, n_z$  найдем по формуле:

$$|\vec{p}_n| = \sqrt{p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2}. \quad (11)$$

Величину и направление вектора напряжений  $\vec{p}_n$  (используя векторную форму записи) найдем по формуле:

$$\vec{p}_n = p_{nx} \vec{i} + p_{ny} \vec{j} + p_{nz} \vec{k}, \quad (12)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — есть единичные векторы для осей  $x, y$  и  $z$ .

Итак, мы убедились в том, что знание составляющих касательных и нормальных напряжений, действующих на трех взаимно перпендикулярных площадках, является достаточным для того, чтобы вычислить величину полного напряжения на как угодно ориентированной площадке в окрестностях рассматриваемой точки  $O$ .

Используя приведенное выше решение можно показать (Кочин, 1951), что совокупность векторов  $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$  с изменением системы осей на новую  $x', y', z'$ , имеющую то же начало координат, преобразуется в совокупность векторов  $\vec{p}_{x'}, \vec{p}_{y'}, \vec{p}_{z'}$  по формулам, которым должны подчиняться вектора, образующие тензор. Наконец, из самой физической природы понятия напряженного состояния вытекает его инвариантность по отношению к преобразованиям координат. Таким образом, можно действительно сказать, что напряженное состояние в точке определяется тензором второго ранга, называемым тензором напряжений. Матрица этого тензора в силу закона парности напряжений, как уже указывалось, симметрична и была приведена выше. Часто говорят, что «напряжения образуют симметричный тензор второго ран-

га». Величины  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  называют компонентами тензора напряжений.

Если обозначить тензор напряжений  $T_\sigma$  запись его будет следующей:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (13)$$

В теории напряжений чисто математически устанавливается, что при любом тензоре напряжений можно найти такие единственные направления осей координат, при которых все касательные компоненты тензора на гранях параллелепипеда, перпендикулярных этим осям, оказываются равными нулю:  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0$ , и запись тензора содержит лишь три нормальных напряжения, действующих на гранях параллелепипеда:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Эти нормальные напряжения называются главными. Индексы 1, 2, 3 присваиваются им таким образом, чтобы  $\sigma_1$  являлось алгебраически максимальным,  $\sigma_3$  — минимальным, а  $\sigma_2$  — промежуточным по величине. Направления действия 1, 2 и 3 называются главными осями напряжений. Если за оси координат приняты главные оси напряжений, то эти оси часто обозначают 1, 2 и 3. Направление произвольно ориентированной площадки, расположенной наискось к осям 1, 2, 3, определяется заданными косинусами  $n_1, n_2, n_3$  углов между нормалью к площадке  $n$  и осями 1, 2, 3. Нормальная и касательная составляющие напряжений, действующих на площадке наклонной по отношению к главным осям напряжений, обозначаются  $\sigma_n$  и  $\tau_n$ . Вектор напряжений  $\vec{\rho}_n$  на этой площадке равен векторной сумме нормального и касательного напряжений. Кроме того, можно этот вектор представлять как векторную сумму трех составляющих  $\vec{\rho}_{n1}, \vec{\rho}_{n2}$  и  $\vec{\rho}_{n3}$ , действующих в направлениях, параллельных осям 1, 2 и 3. Простые формулы связывают проекции всех перечисленных напряжений с главными нормальными:

$$\rho_{n1} = \sigma_1 n_1; \quad \rho_{n2} = \sigma_2 n_2; \quad \rho_{n3} = \sigma_3 n_3. \quad (15)$$

Поскольку  $\rho_n = \sqrt{\rho_{n1}^2 + \rho_{n2}^2 + \rho_{n3}^2}$ , получается:

$$\rho_n = \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2}. \quad (16)$$

Величина нормальной составляющей равна (см. рис. 67, д):

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2. \quad (17)$$

Касательная составляющая  $\tau_n$  легко находится, если уже известны величины вектора  $\vec{\rho}_n$  и его нормальной составляющей  $\sigma_n$

$$\tau_n = \sqrt{\rho_n^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2}. \quad (18)$$

Особое значение в теории деформируемых и разрушающихся разрывами сред имеет оценка величины нормальных и касательных напряжений на площадках, одинаково наклоненных в четырех направлениях. Для наглядности их изображают проходящими не через начало координат, а окружающими его и образующими восьмигранный объем, называемый октаэдром (см. рис. 67, е). Такую форму нередко имеют

хорошо известные геологам кристаллы касситерита, циркона, торита (руды на олово, цирконий, торий — соответственно) и других минералов. Напряжения, действующие на площадках, параллельных граням октаэдра, называются октаэдрическими. Направляющие косинусы для этих площадок:

$$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (19)$$

Подстановка этих величин в формулу (17) дает для нормального напряжения на октаэдрических площадках  $\sigma_{oc}$ :

$$\sigma_{oc} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (20)$$

т. е. величину, равную всестороннему давлению  $\sigma_m$  (шаровому тензору). Касательные напряжения на октаэдрических площадках  $\tau_{oc}$ .

$$\tau_{oc} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (21)$$

Эта величина лишь постоянным множителем, стоящим перед корнем, отличается от второго инварианта девиатора тензора напряжений, которому придается большое значение в теории пластических деформаций и разрывов, а также в энергетическом анализе упругих и пластических деформаций.

Выше рассматривался вопрос об определении напряжений на площадках, имеющих любой наклон по отношению к известным главным нормальным напряжениям. Может быть решен и обратный вопрос: нахождение величины главных напряжений и их направление, если известны компоненты тензора напряжений при произвольном направлении осей координат. В учебниках сопротивления материалов (Беляев, 1953, Работнов, 1960, Феодосьев, 1960 и др.) обычно выводятся формулы для весьма важного частного случая — плоского напряженного состояния — когда одно из главных нормальных напряжений (например,  $\sigma_3 = \sigma_z$ ) равно нулю. Тогда

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad (22)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (23)$$

Здесь  $\sigma_{1,2}$  — искомые величины главных нормальных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , получаемые в зависимости от того, какой знак берется перед корнем;  $\alpha_{1,2}$  — величины двух углов, отличающихся один от другого на  $90^\circ$ ,  $\alpha_1$  — угол между осью  $x$  и направлением  $\sigma_1$ , а  $\alpha_2$  — между осью  $x$  и направлением  $\sigma_2$ ;  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  — нормальные напряжения на площадках, перпендикулярных осям  $x$  и  $y$ ;  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  — касательные напряжения на тех же площадках.

Перейдем теперь к инвариантам тензора напряжений, шаровому тензору и девиатору. Будем помнить, что величину, равную среднему значению из трех главных нормальных напряжений, принято называть всесторонним давлением  $\sigma_m$ :

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (24)$$

Первым инвариантом тензора напряжений  $I_1(T_\sigma)$  в соответствии с выше изложенным надо называть:

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_m. \quad (25)$$

Второй  $I_2(T_\sigma)$  и третий  $I_3(T_\sigma)$  инварианты:

$$I_2(T_\sigma) = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1), \quad (26)$$

$$I_3(T_\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (27)$$

в теории напряжений не используются. Тензор напряжений  $T_\sigma$  имеет смысл представлять в виде суммы шарового тензора, обозначаемого  $\sigma T_1$ , и тензора девиатора  $D_\sigma$ :

$$T_\sigma = \sigma T_1 + D_\sigma, \quad (28)$$

где  $T_1$  — так называемый единичный тензор.

В качестве единственной характеристики шарового тензора мы можем выбрать любую величину нормального напряжения. Наиболее целесообразно взять шаровой тензор, равный всестороннему давлению, т. е. принять  $\sigma = \sigma_m$ :

$$\sigma_m T_1 = \sigma_m \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{vmatrix}. \quad (29)$$

Тогда девиатором явится тензор:

$$D_\sigma = \begin{vmatrix} (\sigma_1 - \sigma_m) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_2 - \sigma_m) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_3 - \sigma_m) \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_m) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_m) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_m) \end{vmatrix}. \quad (30)$$

Первый  $I_1(D_\sigma)$ , второй  $I_2(D_\sigma)$  и третий  $I_3(D_\sigma)$  инварианты тензора девиатора напряжений имеют следующую величину:

$$I_1(D_\sigma) = 0, \quad (31)$$

$$I_2(D_\sigma) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \quad (32)$$

$$I_3(D_\sigma) = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m). \quad (33)$$

В теории напряжений большое значение имеет второй инвариант тензора девиатора напряжений  $I_2(D_\sigma)$ . Положительное значение квадратного корня из него называют *интенсивностью касательных напряжений*, которую мы будем обозначать  $\tau_i$ :

$$\tau_i = +\sqrt{I_2(D_\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (34)$$

Стоящие под корнем квадраты разностей главных нормальных напряжений являются квадратами удвоенных главных касательных напряжений, поэтому:

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(2\tau_3)^2 + (2\tau_1)^2 + (2\tau_2)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}. \quad (35)$$

Если главные напряжения не найдены и тензор напряжений дан в формуле (13), то интенсивность касательных напряжений выражается формулой:

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (36)$$

Величина интенсивности касательных напряжений при трехосном напряженном состоянии находится в интервале значений  $\tau_{\max} \leq \tau_i \leq$



$\leq \frac{2}{\sqrt{3}} \tau_{\max}$  и поэтому (с ошибкой не больше 7%) связана с максимальными касательными напряжениями  $\tau_2 = \tau_{\max}$  соотношением:

$$\tau_i \approx 1,08 | \tau_{\max} |. \quad (37)$$

В условиях чистого сдвига, когда  $\sigma_1 = \tau$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\tau$ , получается:

$$\tau_i = \tau = \tau_{\max}.$$

При одноосном растяжении:

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \tau_{\max} \approx 1,15 \tau_{\max}.$$

При одноосном сжатии:

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \tau_{\max} \approx 1,15 \tau_{\max}.$$

Величина  $\tau_i$  характеризует касательные напряжения с учетом всех трех главных нормальных напряжений, этим она выгодно отличается от максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}$ , зависящих лишь от двух из трех главных нормальных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ :

$$\tau_2 = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (38)$$

Остальные главные касательные напряжения:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (39)$$

В механике используется также связанная с  $I_2(D\sigma)$  величина  $\sigma_i$ , которая при одноосном растяжении численно равна растягивающему нормальному напряжению  $\sigma_i = \sigma_1$ . При трехосном напряженном состоянии

$$\sigma_i = \sqrt{3} \sqrt{I_2(D\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (40)$$

Всестороннее давление  $\sigma_m$  и интенсивность касательных напряжений  $\tau_i$ , пропорциональные первому инварианту тензора напряжений и второму инварианту девиатора тензора напряжений, считаются важнейшими характеристиками напряженного состояния в точке. Они широко используются в механике и имеют первостепенное значение для тектонофизики, так как являются величинами, характеризующими совокупное действие всех трех главных нормальных напряжений.

Укажем еще, что так называемая удельная энергия формоизменения, имеющая существенное значение при установлении критерия перехода тела в пластическое состояние, пропорциональна второму инварианту девиатора напряжений (с точностью до постоянного множителя).

## ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

### *Скалярное поле*

Часть пространства, в котором каждой точке соответствует определенное значение рассматриваемой скалярной величины, называется скалярным полем этой величины. Таковы важные для геологии распределения в недрах температуры, всестороннего давления, плотности, концентрации определенных химических элементов.

Объемным (пространственным) считается поле, точки которого заполняют трехмерную часть пространства. Если все точки лежат в одной плоскости, поле называется плоским. Если в объемном поле

значения скаляра не изменяются вдоль линий, параллельных некоторой прямой, то можно ограничиться изучением распределения скаляра в плоскости, перпендикулярной данной прямой. Такое поле называется плоско-параллельным. Наконец, при отсутствии изменений скаляра в любых направлениях поле называется однородным.

**Поверхности и линии уровня.** Если поле неоднородное, через точки с одинаковой величиной скаляра всегда можно провести поверхности. Они называются поверхностями уровня. В плоском и плоско-параллельном поле на чертеже изображаются линии уровня. Таковы, например, хорошо известные геологам изолинии высоты залегания пласта — стратонизогипсы, изотермы, изопакиты (линии равных мощностей), изолинии концентрации химических элементов в пределах и вокруг месторождений полезных ископаемых и т. п.

Если форма поверхностей (или линий) уровня является простой, ее можно выразить аналитическими уравнениями, как это говорилось относительно структурных поверхностей. Соответственно, поля классифицируются по их форме. Выделяются сферические, цилиндрические и другие поля с той или иной зависимостью величины скаляра от координат точки. На практике чаще приходится иметь дело со сложными по форме поверхностями и изолиниями, которые не имеет смысла описывать аналитически и рациональнее рассматривать геометрически. Как уже говорилось в связи с топографическими поверхностями, выраженные изолиниями пространственные распределения исследуемых величин можно складывать, вычитать, умножать, делить, дифференцировать и интегрировать.

**Градиент скалярного поля.** Основной характеристикой изменения скалярного поля в пространстве служит его градиент, который является вектором. Модуль градиента равен производной скалярного поля по тому направлению, в котором происходит наиболее быстрое изменение поля. Направление градиента (вектора) везде перпендикулярно к поверхностям уровня (или линиям уровня в плоском поле). Вектор градиента направлен в сторону возрастания значений скаляра.

Рассматривая поле скаляра  $\varphi$ , выбирают направление, отмечаемое единичным вектором  $\vec{l}$ , и три оси координат. Затем берут частные производные поля в направлениях осей координат и умножают их на косинусы углов между направлением  $\vec{l}$  и осями координат. Сумма этих произведений составляет производную скалярного поля в направлении  $\vec{l}$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(\vec{l}, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(\vec{l}, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(\vec{l}, z) = \vec{l} \cdot \text{grad } \varphi. \quad (1)$$

Последним написано скалярное произведение двух векторов — единичного  $\vec{l}$  и градиента. Производная скалярного поля по направлению его наибольшего изменения есть скаляр, который численно и по размерности совпадает с модулем градиента.

Из последней формулы получается выражение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = |\text{grad } \varphi| \cos(\vec{l}, \text{grad } \varphi). \quad (2)$$

Из него следует, что наибольшая величина производной соответствует направлению  $l$ , совпадающему с градиентом, когда косинус равен единице. Величину этого наибольшего изменения поля, равного модулю градиента, находят по формуле, содержащей скалярную сумму квадратов частных производных вдоль осей координат:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right| = |\text{grad } \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}. \quad (3)$$

Градиент выражается также через частные производные скалярного поля векторной суммой произведений этих частных производных на орты  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ :

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}. \quad (4)$$

Совокупность трех операций: взятие частных производных, их умножение на орты и векторное суммирование очень часто обозначается символом — «оператор  $\nabla$  (набла)» (оператор Гамильтона):

$$\nabla = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (5)$$

Поэтому градиент записывают также следующим образом:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \vec{i}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \quad (6)$$

В правой части мы видим одну из лаконичных форм записи векторной суммы слагаемых, получаемых при замене индекса  $k$  на 1, 2, 3.

Наконец, упомянем, что градиент может быть рассмотрен и в качестве объемной производной скалярного поля. Это значит, что составляющие градиента  $\frac{d\varphi}{dx}$ ,  $\frac{d\varphi}{dy}$  и  $\frac{d\varphi}{dz}$  мы сначала представляем себе как средние характеристики некоторого небольшого объема, окружающего выбранную точку пространства. Затем, уменьшая, стягиваем этот объем к данной точке. Тот предел, к которому стремится выражение для градиента при бесконечном уменьшении объема, и является строго определенным значением градиента.

На практике при рассмотрении скалярных полей, обычно изображенных линиями уровня, допускается, что изменение скаляра между соседними изолиниями происходит, следуя линейной закономерности. Поэтому разность между значениями уровня на соседних изолиниях ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) делят на расстояние между этими изолиниями  $l_{12}$ , т. е. относят разность к единице расстояния. Эту величину на практике принимают за модуль градиента:

$$|\text{grad } \varphi|_m = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l_{12}}. \quad (7)$$

Прямые скобки указывают на то, что речь идет о модуле градиента, а индекс  $m$  показывает на среднее значение этого модуля для отрезка  $l_{12}$ , которое, строго говоря, не является производной, как это требуется теоретически.

Так, например, вычисляется градиент скорости тектонических движений, играющий большую роль в тектонофизике при определении напряженного состояния земной коры, энергии тектонических процессов и сейсмической опасности (Гзовский, 1957, 1963, 1967, 1970). При этом градиент играет роль характеристики изменчивости в пространстве не всего вектора скорости движения, а только его величины (модуля), являющейся скаляром. Градиент, будучи вектором, характеризует скалярное поле.

Когда градиент входит в формулы, по которым производятся вычисления, используются следующие правила:

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } C &= 0; & \text{grad } (\varphi + \rho) &= \text{grad } \varphi + \text{grad } \rho; \\ \text{grad } C\varphi &= C \text{ grad } \varphi; & \text{grad } (\varphi\rho) &= \varphi \text{ grad } \rho + \rho \text{ grad } \varphi \text{ и др.} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $C$  — постоянная величина,  $\varphi$  и  $\rho$  — два скаляра, значения которых изменяются в пределах рассматриваемого скалярного поля.

## Векторное поле

Часть пространства, каждой точке которого соответствует определенный вектор рассматриваемой физической величины  $\vec{V}$ , называется векторным полем.

В геологии изучение векторных полей тектонических движений, в особенности современных, начало разворачиваться в широких масштабах. В Советском Союзе, благодаря активной деятельности Ю. Д. Буланже и Ю. А. Мещерякова, организовано измерение тектонических движений на многих геофизических полигонах. Результаты измерений регулярно публикуются. В ближайшем будущем начнется их обобщение. Поэтому сейчас исследователям тектонических движений чрезвычайно важно иметь понятие о том, какие главные представления существуют в давно развивающейся математической теории векторных полей. Эта теория, описывающая течения в жидкостях и газах, несомненно, будет полезна для начинающегося сейчас изучения потоков вещества в мантии и ядре Земли. Она поможет при исследовании деформаций в сильно текучих горных породах осадочного покрова (солях, глинах) и в массах пород, испытывающих региональный метаморфизм в глубине земной коры. Сложнейшие деформации слоев в гнейсах развивались при значительном перетекании масс, закономерности которого можно будет понять лишь опираясь на математическую теорию потоков в жидкостях. Наконец, та же теория требуется и для познания роли магматических расплавов в развитии тектонических процессов.

Все сказанное побудило автора включить в данную книгу краткое изложение основного смысла ряда важнейших понятий математической теории об элементах и свойствах тех векторных полей, которые изучаются геологами. Это необходимо сделать несмотря на то, что сегодня еще не все из поясняемых понятий используются в геологических исследованиях. Прежде всего важно знать, какими величинами может быть охарактеризовано векторное поле и какие признаки классификации полей существуют. Имеют значение и возможности проведения расчетов, связанных с изучением этих полей. При дальнейшем изложении мы будем иметь в виду, что векторное поле может являться пространственным, плоским и плоско-параллельным, как и скалярное поле.

**Векторные линии и трубки.** Первая важная характеристика векторного поля графически передает направление векторов, относящихся к различным точкам. Кривые, которые в каждой точке имеют касательную, совпадающую с направлением вектора, называются векторными линиями. Они могут иметь различную форму.

Выходящий из точки элемент векторной линии  $\vec{dr}$ , считающийся прямолинейным, совпадает с вектором поля  $\vec{V}$ , начинающимся в той же точке. Поэтому векторное произведение

$$\vec{dr} \times \vec{V} = 0.$$

Такова векторная форма дифференциального уравнения векторных линий. Интегрирование приводит к уравнениям векторных линий.

Через каждую точку поля может быть проведена только одна векторная линия определенного направления. Однако существуют особые точки и даже области, в которых направление векторных линий становится неопределенным и может считаться каким угодно. Особые точки и области являющиеся местами, куда сходятся противоположно или различно направленные линии. Это — так называемые точки и области стока. Особыми точками и областями являются также места, из которых выходят противоположно или различно направленные линии. Их

называют источниками. Многие особые области соответствуют местам, где вектор становится равным нулю, и поэтому его направление перестает быть определенным.

Если взять замкнутый контур и провести через его точки векторные линии, то они образуют поверхность, именуемую векторной трубкой.

**Поверхности и линии уровня модуля вектора.** Кроме направления, передаваемого линиями, необходимо охарактеризовать величину вектора в каждой точке поля. Для этого проводят поверхности или изолинии модуля определенной величины. В векторных полях соотношения между линиями направления вектора и изолиниями его величины могут быть самыми различными и заранее их предугадать нельзя. В одних случаях они взаимно перпендикулярны. Так, направление силы Ньютона взаимного притяжения масс и электростатической силы Кулона нормально к поверхностям равной величины силы (т. е. к поверхностям уровня). Однако при деформации сдвигания направление наибольшего сжатия ориентировано наискось к поверхностям его равной величины. При изгибании пластов, например, направление наибольшего сжатия ближе к вогнутой стороне пласта оказывается параллельным поверхностям равного сжатия. При перемещении горных пород, выдавливаемых вдоль слоистости, при нагнетании соляных масс в трещины, а также при внедрении магмы в тектонические разрывы векторные линии направления движения материала располагаются параллельно линиям и поверхностям уровня (т. е. равной величины или скорости перемещения). К вопросу об этих соотношениях мы еще вернемся в связи с принципами классификации векторных полей.

**Производная поля по времени.** Поле, в котором векторы, соответствующие определенным точкам пространства, с течением времени не изменяются, называется стационарным. В таком поле скорости движения векторные линии являются траекториями частиц. Если вектор в определенной точке изменяется во времени, поле считается нестационарным.

Отложим из точки два вектора: один  $\vec{V}_t$ , существовавший в момент времени  $t$ , и другой  $\vec{V}_{t+\Delta t}$  — в последующий момент времени  $(t + \Delta t)$ . Проведя линию от конца первого вектора к концу второго, мы получаем разность векторов — приращение вектора  $\Delta \vec{V}$ , происшедшее за время  $\Delta t$  (рис. 68, а). Предел отношения этих величин  $\frac{d\vec{V}}{dt}$  при бесконечном уменьшении времени является производной поля в данной точке по времени:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}_{t+\Delta t} - \vec{V}_t}{\Delta t}. \quad (1)$$

при  $\Delta t \rightarrow 0$

Производная поля по времени вызывает происходящие в одной точке изменения вектора, называемые локальными.

**Производная поля по направлению.** В векторном поле, удаляясь от рассматриваемой точки  $M_1$  в любом направлении  $l$ , мы можем заметить изменение направления и величины вектора по сравнению с тем вектором  $\vec{V}_1$ , который характеризует точку  $M_1$ . На небольшом расстоянии  $\Delta l$  от рассматриваемой точки в заданном направлении в точке  $M_2$  будет констатирован вектор  $\vec{V}_2$ . Воспроизводя его около точки  $M_1$  и соединив

конец вектора  $\vec{V}_1$  с концом воспроизведенного вектора  $\vec{V}_2$ , мы легко получаем разность двух векторов  $\Delta\vec{V}$  (см. рис. 68, б):

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1. \quad (2)$$

Предел отношения этой разности к расстоянию  $\Delta l$  между точками  $M_1$  и  $M_2$  (при стремлении расстояния  $\Delta l$  к нулю), является производной векторного поля в точке  $M_1$  по направлению  $l$ :

$$\frac{d\vec{V}}{dl} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\Delta l}. \quad (3)$$

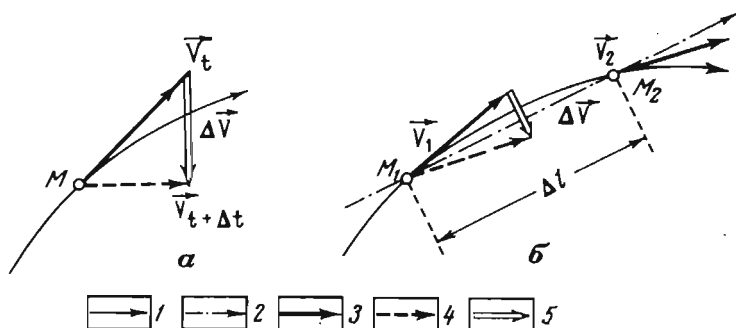


Рис. 68. Производные векторного поля в точках  $M$  и  $M_1$  по времени (а) и направлению (б).

1 — векторная линия; 2 — направление изменения вектора; 3 — первый вектор; 4 — второй вектор, отложенный от точек  $M$  и  $M_1$ ; 5 — приращение вектора  $\Delta\vec{V}$ . Пояснения в тексте

Приращение вектора  $\Delta\vec{V}$  вдоль направления вектора  $\vec{V}$  (вдоль векторной линии или траектории частицы) называется конвективным (переносным).

Общие изменения вектора  $\Delta\vec{V}$  в направлении векторной линии слагаются по правилам векторного суммирования из локального и конвективного приращений.

Через рассматриваемую точку можно провести бесконечное множество различных направлений, по каждому из которых имеется своя величина производной векторного поля. Совокупность этих производных представляет собой тензор 2-го ранга. Он является полной мерой неоднородности векторного поля. Однако на практике чаще используют две другие дифференциальные характеристики векторного поля — его дивергенцию и ротацию, о которых будет говориться ниже.

**Поток векторного поля.** В пределах векторного поля можно представить себе некоторую замкнутую или незамкнутую поверхность  $\Sigma$ . Ее разделяют на столь малые элементы площади, обозначенные  $d\sigma$ , что их допустимо считать плоскими. У каждого такого элемента площади есть свой орт нормали, обозначаемый  $\vec{n}$ . Кроме того, с центром каждого элемента связан определенный вектор  $\vec{V}$  данного поля (средний для этого элемента), который бывает различно направлен относительно элементарной площадки.

Потоком векторного поля через элементарную площадку называется скалярное произведение орта нормали  $\vec{n}$  на ее вектор  $\vec{V}$ , умноженное на площадь элемента  $d\sigma$ . Это произведение является скаляром. Обозначим его  $dq$ .

Потоком векторного поля через всю поверхность  $\Sigma$  называют интеграл по всей поверхности. Обозначим этот скаляр  $Q$ :

$$Q = \iint_{\Sigma} (\vec{n} \cdot \vec{V}) d\sigma. \quad (4)$$

Если вектор  $\vec{V}$  изображает скорость течения материала (например, пластичных горных пород), то  $Q$  является объемом материала, протекающим в единицу времени через выбранную поверхность  $\Sigma$ .

Если вектором  $\vec{V}$  обозначено перемещение, то вычисленный по (4) поток  $Q$  является равным объему материала, прошедшего через выбранную поверхность  $\Sigma$ .

Представление о потоке векторного поля относится к незамкнутым и замкнутым поверхностям. В последнем случае особо важным оказывается строгий учет знака орта нормали  $\vec{n}$  к поверхности. Принято за положительное считать направление внешней нормали, т. е. удаляющейся от области, ограниченной замкнутой поверхностью. Тогда векторы, направленные внутрь данной области, дают отрицательные произведения с ортами нормали, а векторы, выходящие из этой области, образуют положительные произведения. При интегрировании все эти произведения разного знака суммируются.

В итоге поток через замкнутую поверхность равен нулю, если в окруженную область втекает столько по объему материала, сколько вытекает из нее.

Если поток отрицателен, внутри ограниченной нами области происходит уплотнение материала — уменьшение его объема. Места уплотнения играют роль «стоков».

Если поток положителен, значит материал разуплотняется (увеличивается его объем). Места, в которых это происходит, аналогичны «источникам».

Таким образом величина потока вектора через замкнутую поверхность позволяет составить некоторое представление о поведении материала и о поле внутри выбранной поверхности.

Потоками через незамкнутую поверхность являются объемы тектонических поднятий и опусканий земной коры, которые были приведены выше в качестве примеров использования интегралов в тектонике.

**Дивергенция.** Одна из часто используемых дифференциальных характеристик векторного поля называется дивергенцией. Она представляет собой одно число и является скаляром, относящимся к определенной точке. Векторное поле в целом описывается скалярным полем дивергенции. Дивергенция отражает изменение величины вектора в непосредственной близости от рассматриваемой точки, причем учитываются изменения величины вектора во всех направлениях. Поэтому дивергенция относится к числу объемных производных векторного поля.

Находят дивергенцию следующим образом. Характеризуемая точка векторного поля окружается замкнутой поверхностью произвольной формы. Определяется поток  $Q$  вектора  $\vec{V}$  через данную поверхность  $\Sigma$ , т. е. интеграл скалярного произведения орта нормали  $\vec{n}$  на вектор, умноженного на элементарную площадь  $d\sigma$ :

$$Q = \iint_{\Sigma} (\vec{n} \cdot \vec{V}) d\sigma. \quad (5)$$

Поток  $Q$  делится на объем  $\theta$ , окруженный произвольной поверхностью  $\Sigma$ , и далее рассматривается отношение  $\frac{Q}{\theta}$ . Если теперь, стяги-

вая поверхность  $\Sigma$  к точке  $M$ , объем приближать к нулю, то предел, к которому стремится отношение  $\frac{Q}{\theta}$ , называется дивергенцией:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{Q}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \iint_{\Sigma} (\vec{n} \cdot \vec{V}) d\sigma. \quad (6)$$

Дивергенцию, в принципе, можно получить не для всякого поля. Она существует, если компоненты вектора и их частные производные по координатам в каждой точке поля непрерывны.

Дивергенцию можно определить как скалярную сумму производных от проекций вектора на оси декартовых координат  $v_x v_y v_z$ :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (7)$$

Это выражение получается, если подсчитать поток вектора  $\vec{V}$  через поверхность бесконечно малого параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям.

Последовательность двух операций: взятие частных производных от модулей компонент вектора по направлениям трех осей координат и суммирование этих производных обозначается уже упоминавшимся в связи с градиентом знаком набла  $\nabla$ , однако для подчеркивания скалярного суммирования и результата сложения за этим знаком ставится жирная точка ( $\cdot$ ). Таким образом, последнюю формулу заменяют тождественным выражением:

$$\operatorname{div} \vec{V} \equiv \nabla \cdot \vec{V} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_k}. \quad (8)$$

Центральная запись выглядит как произведение двух векторов, но произведение это скаляр и, соответственно, в операциях, обозначенных  $\nabla$ , подразумевается скалярное суммирование скалярных производных от проекций вектора  $\vec{V}$ .

Правая крайняя запись лаконично символизирует сумму частных производных трех проекций вектора по одноименным осям координат, при этом индекс  $k$  заменяется на 1, 2 и 3.

Для быстрой качественной оценки дивергенции в какой-либо дифференциально малой части векторного поля автор рекомендует: выделить вокруг точки  $M$  объем  $\theta$  в форме векторной трубки. Тогда на боковой поверхности трубки внешняя нормаль перпендикулярна вектору. Поэтому скалярное произведение вектора  $\vec{V}$  на орт нормали  $\vec{n}$  по всей боковой поверхности равно нулю. Для вычисления дивергенции остаются лишь входные и выходные поперечные сечения векторной трубки. Дивергенция определяется разностью между произведением одного вектора на площадь входного сечения трубки и произведением другого вектора, относящегося к выходному сечению, на площадь этого сечения. Произведения суммируются. Их знаки противоположны. Если эти произведения равны одно другому — дивергенция равна нулю. Если произведения для выходного сечения больше — дивергенция положительна (так как на этом сечении направление внешней нормали совпадает с направлением вектора и скалярное произведение  $\vec{n} \cdot \vec{V}$  положительно). Если больше произведение, относящееся к входному сечению, — дивергенция отрицательна: здесь орт нормали  $\vec{n}$  направлен противоположно вектору  $\vec{V}$ , и скалярное произведение  $\vec{n} \cdot \vec{V}$  отрицательно.



В плоско-параллельном поле на чертеже поперечные сечения векторной трубки выглядят в виде линий. Нормально к ним откладываются величины относящихся к ним векторов, показанных толстыми стрелками. Так, около каждого сечения получается покрытая точками площадь, равная произведению длины линии сечения на модуль вектора. Такие площадные эпюры строятся в направлении внешних нормалей к поперечным сечениям. У входного сечения эпюра считается отрицательной, у выходного — положительной. Знак суммы площадей эпюр является знаком дивергенции (рис. 69).

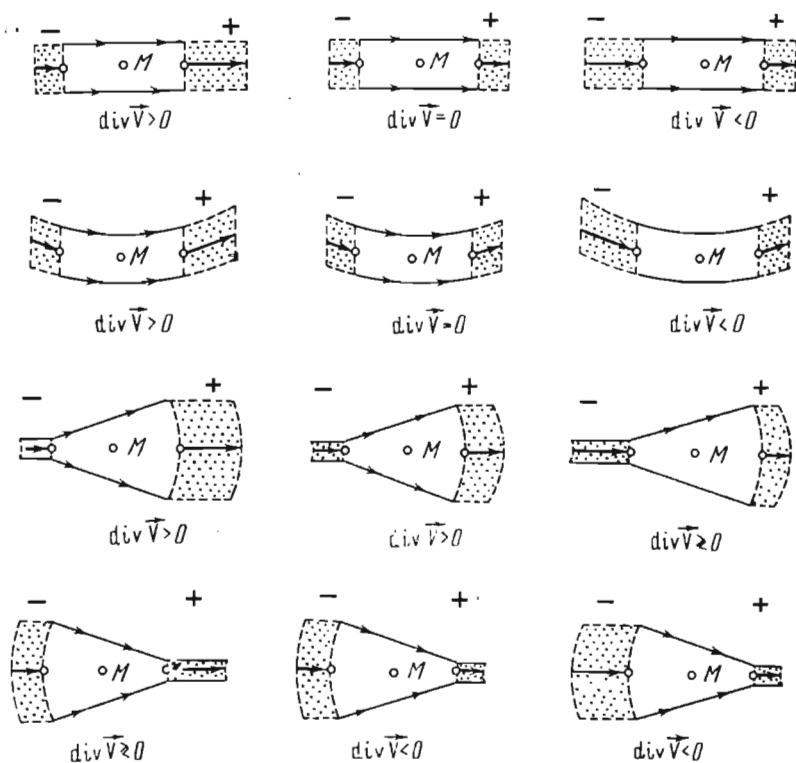


Рис. 69. Схемы соотношений между знаком дивергенции, расположением векторных линий (тонкие стрелки) и величинами векторов (толстые стрелки) вокруг рассматриваемой точки  $M$

Пользуясь изложенным приемом чтения графического изображения векторного поля, легко установить типичные соотношения.

При параллельных прямых и концентрических векторных линиях дивергенция положительна, если вектор на выходном сечении больше, чем на входном; дивергенция равна нулю, если на обоих сечениях векторы одинаковые; дивергенция отрицательна, если на входном сечении вектор больше, чем на выходном.

При векторных линиях, расходящихся в положительном направлении вектора, дивергенция положительна, если на выходном векторы больше, чем на входном или на обоих сечениях они одинаковы. Если же на входном сечении вектор больше, чем на выходном, дивергенция или отрицательна, или равна нулю, или даже положительна: все зависит от соотношения величин сечений и относящихся к ним векторов.

При сходящихся векторных линиях равенство векторов на обоих сечениях вызывает отрицательную дивергенцию. Она отрицательна и при превосходстве вектора на входном сечении над вектором для вы-

ходного сечения. Если же вектор на выходном сечении больше, чем на входном, то возможны все три случая: положительная, полевая и отрицательная дивергенция — это зависит от количественных соотношений между сечениями и их векторами.

Физический смысл дивергенции определяется физическим смыслом векторного поля.

Если векторное поле отражает перемещения материальных точек, то положительная дивергенция означает увеличение объема за счет растяжения и разуплотнения вещества. Отрицательная дивергенция указывает на уменьшение объема из-за сжатия и повышения плотности вещества.

Располагая векторным полем, изображающим скорость движения частиц среды, мы положительную дивергенцию понимаем как характеристику объема из-за растяжения и разуплотнения, а отрицательную дивергенцию — как характеристику скорости уменьшения объема вследствие сжатия и уплотнения среды.

Если объем частицы материала в определенный момент времени обозначить  $\theta_1$ , а спустя единицу времени —  $\theta_2$ , то дивергенция скорости  $\vec{V}$  движения вещества позволяет связать эти два объема формулой, в которой время  $t=1$ :

$$\theta_2 = \theta_1(1 + t \operatorname{div} \vec{V}). \quad (9)$$

Поле течения несжимаемой среды в каждой точке имеет дивергенцию равную нулю:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

Это соотношение соблюдается, если не происходит разрушения и образования разрывов — полостей. Значит последнее уравнение выражает условия сохранения сплошности, т. е. неразрывности.

Если векторное поле изображает силы тяготения, например силу тяжести, то неравенства нулю дивергенции, а также потока вектора через замкнутую поверхность указывают на существование внутри ограниченной нами области так называемых источников и стоков. Источник создает положительную дивергенцию. Он является объемом, усиливающим положительные силы. Сток создает отрицательную дивергенцию. Это — объем, усиливающий отрицательные силы. В гравитационном поле мы имеем дело лишь с отрицательными силами притяжения и сжатия. Стоки — это геологические тела с повышенной плотностью, усиливающие гравитационное притяжение. Источники — геологические тела с пониженной плотностью, ослабляющие гравитационное притяжение.

**Уравнение неразрывности.** С представлением о дивергенции векторного поля деформируемой среды связано имеющее большое значение в теории различных деформаций уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0. \quad (11)$$

Оно указывает, какими должны быть соотношения между изменением плотности  $\rho$  во времени  $t$ , т. е.  $\frac{d\rho}{dt}$ , и изменением скорости  $\vec{V}$  движения среды в пространстве, чтобы могла сохраняться сплошность материала; иначе говоря, чтобы разуплотнение поспевало за растяжением и увеличением объема материала (или уплотнение соответствовало сжатию и уменьшению объема). Если это условие не соблюдается, материал не способен к изменениям объема и плотности, при растяжении в нем могут появляться разрывы и открываться полости. Для та-

кого материала, обычно называемого несжимаемым, условием сохранения сплошности — неразрывности — служит указывавшееся выше уравнение:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

**Ротация.** Вторая (наряду с дивергенцией) важная дифференциальная характеристика векторного поля называется ротацией (ротором или вихрем). В отличие от скалярной дивергенции ротация является вектором. Исходное векторное поле описывается векторным же полем ротации. Ротация, название которой происходит от латинского слова «вращение», отражает вращение масс, возникающее в движущейся или деформируемой среде, если исходное векторное поле изображает перемещения или скорости движения точек среды. При вычислении ротации учитываются изменения вектора во всех направлениях от рассматриваемой точки  $M$ . Поэтому ротация является производной векторного поля по объему, как и дивергенция, но отличается от нее способом вычисления. Он заключается в следующем.

Рассматриваемая точка  $M$  векторного поля окружается замкнутой поверхностью  $\Sigma$  произвольной формы. Затем эта поверхность делится на бесконечно малые площадки  $d\sigma$ , которые можно считать плоскими. Для каждой площадки устанавливаются орт  $\vec{n}$  внешней нормали и относящийся к ней вектор  $\vec{V}$ . Теперь, в отличие от дивергенции, которая получалась скалярным умножением, ротация находится путем векторного умножения нормали орта  $\vec{n}$  на вектор  $\vec{V}$ , а затем умножения на скаляр  $d\sigma$ . Эти произведения интегрируются по всей поверхности  $\Sigma$  и результат относится к единице объема  $\theta$ , ограниченного введенной поверхностью. При стягивании поверхности  $\Sigma$  к находящейся внутри нее точке  $M$  и приближении объема  $\theta$  к нулю получается предел отношения поверхностного интеграла к объему, который и называется ротацией вектора  $\vec{V}$  в точке  $M$ :

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \int_{\Sigma} (\vec{n} \times \vec{V}) d\sigma. \quad (13)$$

Выражение, стоящее под интегралом, является вектором, который получается при умножении вектора (псевдовектора)  $\vec{n} \times \vec{V}$  на скаляр  $d\sigma$ . Это не изменяет направление псевдовектора. Псевдовектор, образуемый при векторном умножении двух векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{V}$ , ориентирован перпендикулярно плоскости, проходящей через  $\vec{n}$  и  $\vec{V}$ . Интегрирование, т. е. суммирование всех псевдовекторов и их деление на скалярную величину объема  $\theta$  (стремящуюся к нулю), приводит к получению псевдовектора  $\operatorname{rot} \vec{V}$ , относящегося к точке векторного поля. Три скалярные проекции этого вектора на оси координат обозначаются:  $\operatorname{rot}_x \vec{V}$ ,  $\operatorname{rot}_y \vec{V}$ ,  $\operatorname{rot}_z \vec{V}$ . Величины этих проекций связываются с проекциями вектора в точке  $M$  формулами:

$$\left. \begin{aligned} |\operatorname{rot}_x \vec{V}| &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}; \\ |\operatorname{rot}_y \vec{V}| &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}; \\ |\operatorname{rot}_z \vec{V}| &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Лаконичной формой записи этой системы служит:

$$\text{rot}_i \vec{V} = \frac{\partial v_l}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_l}, \quad (15)$$

где — индексы  $i, k, l$  составляют циклическую перестановку цифр 1, 2, 3, а оси координат обозначаются  $x = x_1; y = x_2; z = x_3$ .

Можно вектор  $\text{rot } \vec{V}$  записать и формулой, содержащей векторную сумму его составляющих вдоль координатных осей:

$$\text{rot } \vec{V} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (16)$$

Для обозначения ротации применяется также упоминавшийся в связи с градиентом и дивергенцией символ набла  $\nabla$ . Поскольку ротация получается с использованием векторного умножения и векторного сложения векторов, знак набла сопровождается обозначением векторного умножения ( $\times$ ):

$$\text{rot } \vec{V} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \iint_{\Sigma} (\vec{n} \times \vec{V}) d\sigma = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \iint_{\Sigma} \vec{n} d\sigma \times \vec{V} = \nabla \times \vec{V}. \quad (17)$$

Символический вектор  $\nabla$  обозначает векторную сумму первых производных по направлению координатных осей, умноженных на орты  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} = \vec{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (18)$$

Вследствие векторного (а не скалярного, как у дивергенции) умножения вектора набла на вектор  $\vec{V}$  (а не на скаляр, как у градиента) выражение  $\nabla \times \vec{V}$  равносильно приведенному выражению (16), содержащему разности производных (а не суммы, как для дивергенции).

Итак, символ набла в сочетании со знаками разных умножений изображает:

$$\left. \begin{array}{l} \text{вектор} - \text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi; \\ \text{скаляр} - \text{div } \vec{V} \equiv \nabla \cdot \vec{V} \\ \text{псевдовектор} - \text{rot } V \equiv \nabla \times \vec{V}. \end{array} \right\} \quad (19)$$

Для того чтобы, глядя на графическое изображение векторного поля, составить представление о существовании или отсутствии ротации и о ее знаке в дифференциально малом участке, автор прибегает к следующему приему. Вокруг оцениваемой точки  $M$  выделяется объем в форме векторной трубки. Тогда на входном и выходном сечениях трубки, где орт нормали  $\vec{n}$  и вектор поля  $\vec{V}$  коллинеарны, их векторные произведения равны нулю. Остается рассмотреть лишь боковую поверхность векторной трубки.

Для простоты ограничимся плоско-параллельным векторным полем, изображаемым на чертеже (рис. 70). Рассмотрим векторную трубку с прямоугольным поперечным сечением, таким, чтобы боковая поверхность трубки состояла из двух плоскостей, параллельных чертежу (верхней и нижней), и двух кривых поверхностей, перпендикулярных чертежу, имеющих высоту, равную единице. В силу плоско-параллельной структуры поля на плоских верхней и нижней частях поверхности распределение векторов одинаковое. Однако направление внешних нормалей противоположное. Поэтому суммы векторных произведений на верхней и нижней плоскостях получаются одинаковыми по модулю,

но противоположными по знаку. При интегрировании они дают ноль, и поэтому могут не рассматриваться в дальнейшем.

Итак, остаются только две кривые боковые поверхности, перпендикулярные чертежу. Они изображаются двумя соседними векторными

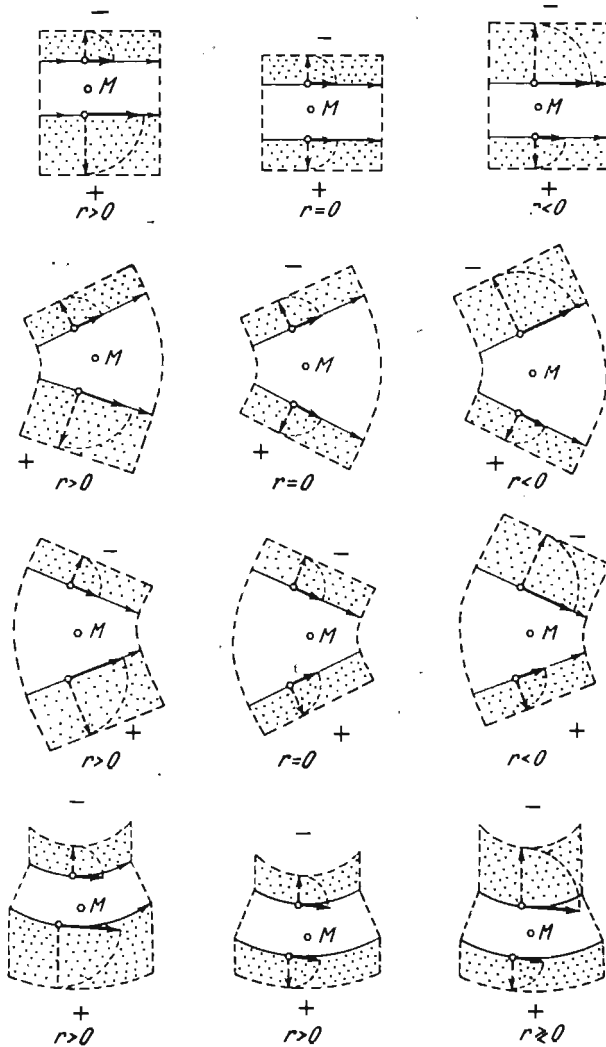


Рис. 70. Схема соотношений между знаком проекции ротации ( $r$ ), расположением векторных линий (тонкие стрелки) и величинами векторов (толстые стрелки) вокруг рассматриваемой точки  $M$

линиями. На каждой из них легко построить площадную эпюру, длина которой равна длине векторной линии, а ширина — величине вектора (на данной линии). Эти эпюры графически изображают векторные произведения ортов нормалей  $\vec{n}$  (равных 1) на векторы  $\vec{V}$ , скалярно умноженные на площади двух боковых поверхностей трубки, имеющие площади, численно равные их длине (так как высота равна 1). Каждое такое произведение является псевдовектором, направленным перпендикулярно плоскости чертежа, в которой лежат орт нормали  $\vec{n}$  и вектор поля  $\vec{V}$ . Положительные псевдовекторы (от  $\vec{n}$  к  $\vec{V}$  надо идти

против часовой стрелки) направлены вверх от чертежа, отрицательные — вниз. Величины псевдовекторов равны площадям эпюр. Для упрощения чертежа эпюры повернуты вокруг своих векторных линий до совмещения с плоскостью чертежа. Из-за противоположного направления ортов внешних нормалей на этих двух боковых поверхностях знаки двух эпюр противоположны. Значит, при интегрировании ротации проекция  $r$  ротации на положительное направление ее вектора окажется положительной, если положительная эпюра больше отрицательной; ротация равна нулю, если площади двух эпюр одинаковы; проекция ротации отрицательная, если площадь отрицательной эпюры больше, чем положительной (см. рис. 70).

Теперь отметим, что различие площадей эпюр может вызываться двумя причинами: кривизной векторных линий и различием величин векторов на соседних векторных линиях. Каждая из этих причин независимо может создавать ротацию любого знака и в итоге знак и величина суммарного вектора ротации определяются векторным сложением. Конкретизируем сказанное на примерах.

При параллельных прямых векторных линиях ротация положительна, если у правой (глядя вдоль вектора) векторной линии величина вектора больше, чем у левой. Одинаковая величина вектора на обеих линиях определяет ротацию, равную нулю. Если на левой линии модуль вектора больше, чем на правой, — ротация и ее проекция  $r$  отрицательны.

При векторных линиях в виде сходящихся или расходящихся прямых действительны те же правила.

При векторных линиях в форме концентрических дуг окружности ротация положительна и при большей величине вектора на правой линии (если она внешняя), и при равенстве векторов на обеих линиях. Это происходит из-за большей длины внешней линии (являющейся правой). Если левая линия является внешней, т. е. более удаленной от центра дуг, ротация приобретает противоположный знак.

В случае меньшей величины вектора на внешней кривой векторной линии величина и знак ротации могут быть различными в зависимости от количественных соотношений между длинами соседних линий и величинами относящихся к ним векторов.

Таким образом, наблюдая искривленные векторные линии или отмечая различие в величине векторов на соседних векторных линиях, мы должны ожидать отличную от нуля ротацию того или иного знака.

Векторные линии поля ротации  $\text{rot } \vec{V}$  называются вихревыми линиями. Вихревые линии, проходящие через произвольный замкнутый контур, лежат на поверхности, именуемой вихревой трубкой. Поток вихря (ротации) через сечение вихревой трубки одинаков для всех сечений (теорема Гельмгольца).

**Ротация поля скоростей вращающегося твердого тела.** Точки абсолютно твердого, т. е. недеформирующегося тела, вращающегося вокруг постоянной оси, движутся по концентрическим окружностям, которые являются векторными линиями поля скоростей  $\vec{V}$ . Вектор линейной скорости движения  $\vec{V}$  в произвольной точке  $M$  равен векторному произведению мгновенной угловой скорости  $\vec{\omega}$  (вектор) на расстояние  $\vec{r}$  (радиус-вектор) от точки  $M$  до оси вращения:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (20)$$

С удалением от оси вращения скорость  $\vec{V}$  увеличивается. Ротация поля скорости движения:

$$\text{rot } \vec{V} = \text{rot } (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (21)$$

Компоненты вектора скорости  $\vec{V}$  имеют модули  $v_x, v_y, v_z$ , равные:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — модули компонент вектора угловой скорости;  $x, y, z$  — координаты точки  $M$ , в которой рассматривается скорость. Начало координат совмещено с осью вращения и плоскостью, в которой вращается точка  $M$ .

Компоненты ротора скорости  $\vec{V}$  имеют проекции:

$$\left. \begin{aligned} |\text{rot}_x \vec{V}| &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ |\text{rot}_y \vec{V}| &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ |\text{rot}_z \vec{V}| &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Подставим в формулы (23) предыдущие (22). Сделаем это полностью лишь для первой компоненты  $|\text{rot}_x \vec{V}|$ . С остальными поступают аналогично:

$$\begin{aligned} |\text{rot}_x \vec{V}| &= \frac{\partial (\omega_x y - \omega_y x)}{\partial y} - \frac{\partial (\omega_z x - \omega_x z)}{\partial z} = \frac{\omega_x \partial y}{\partial y} - \frac{\omega_y \partial x}{\partial y} - \frac{\omega_z \partial x}{\partial z} + \\ &+ \frac{\omega_x \partial z}{\partial z} = \omega_x \left( \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) = 2\omega_x. \end{aligned} \quad (24)$$

В этих преобразованиях  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  вынесены за знак дифференциала, так как они не зависят от координат  $x, y, z$  и постоянны для всего вращающегося тела. Далее ясно, что:

$$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1. \quad (25)$$

А величины:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (26)$$

так как в них переменные  $x, y, z$  не являются зависимыми одна от другой.

Аналогичным образом находят

$$|\text{rot}_y \vec{V}| = 2\omega_y; \quad |\text{rot}_z \vec{V}| = 2\omega_z. \quad (27)$$

Следовательно, в целом вектор ротации скорости  $\text{rot } \vec{V}$  равен удвоенному вектору мгновенной угловой скорости  $\vec{\omega}$ :

$$\text{rot } \vec{V} = 2\vec{\omega}. \quad (28)$$

**Вторые объемные производные.** Поле градиента является векторным. Поэтому естественно ставить вопрос о его дивергенции и ротации. Рассмотрим векторную трубку плоско-параллельного поля градиента. Его дивергенция может быть найдена так, как указывалось выше. Но при определении ротации, эпюры которой берутся лишь на боковых стенках трубки, оказывается, что при равенстве площадей этих стенок (если на них градиент одной величины) знаки эпюр противоположны (так как противоположно направление нормалей). Ротация оказыва-

ется равной нулю. Если векторы градиента на боковых стенках разной величины, то соответственно этому изменяется длина этих стенок, поскольку направление градиента перпендикулярно поверхностям уровня, образующим поперечные сечения трубки. В итоге эпюры ротации на обеих боковых стенках оказываются обязательно одинаковой величины и разных знаков. Поэтому ротация градиента равна нулю:

$$\text{rot grad } \varphi = 0. \quad (29)$$

Другим векторным полем является поле ротации. Его векторы для плоско-параллельного поля вектора  $\vec{V}$  перпендикулярны плоскости векторной трубки типа изображенных на рис. 70. Для нахождения дивергенции поля ротации мы получим отличные от нуля, но равные по величине интегралы для верхней и нижней поверхностей трубки. В сумме они дают ноль. Остаются боковые и поперечные стенки трубки, на которых орты нормалей перпендикулярны векторам ротации. Поскольку эти векторы перемножаются скалярно, их произведения равны нулю. В итоге всегда дивергенция ротации равна нулю.

$$\text{div rot } \vec{V} = 0. \quad (30)$$

Остальные вторые объемные производные не равны нулю.

**Основная теорема векторного анализа.** С именем Стокса связана одна важнейшая теорема, согласно которой любое векторное поле  $\vec{V}$ , имеющее дивергенцию и ротацию, можно разложить на два составляющих его поля, т. е. на два слагаемых, обозначаемых  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$ , таким образом, что в одном поле не будет ротации, а в другом — дивергенции. Следовательно, в любой точке пространства:

$$\left. \begin{aligned} \vec{V} &= \vec{V}_1 + \vec{V}_2; \\ \text{rot } \vec{V} &= \text{rot } \vec{V}_2; \quad \text{rot } \vec{V}_1 = 0; \\ \text{div } \vec{V} &= \text{div } \vec{V}_1; \quad \text{div } \vec{V}_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Исходное поле должно быть непрерывным в рассматриваемой области и в бесконечности исчезать (превращаться в ноль вместе с дивергенцией и вихрем).

**Типы векторных полей.** Выше уже говорилось о возможности разделения векторных полей на объемные или пространственные (у которых составляющие изменяются по всем направлениям), на плоско-параллельные, имеющие одно направление, в котором они не изменяются, и на плоские, обладающие векторами, лежащими в одной плоскости.

Большое значение для классификации полей имеют их важнейшие дифференциальные характеристики — ротация и дивергенция. Они позволяют различать четыре главных типа полей.

Первый тип — векторные поля, обладающие и ротацией и дивергенцией. Формула поля:

$$\text{rot } \vec{V} \neq 0; \quad \text{div } \vec{V} \neq 0. \quad (36)$$

Это — наиболее общий тип поля, который часто встречается в тектонофизике.

Второй тип — векторное поле, во всех точках которого ротация отсутствует (равна нулю). Его формула:

$$\text{rot } \vec{V} = 0; \quad \text{div } \vec{V} \neq 0. \quad (37)$$



Такое поле называют потенциальным. Оно обладает интересными и практически важными свойствами.

Во-первых, оказывается, что векторы потенциального векторного поля  $\vec{V}$  можно рассматривать в качестве градиента некоторого второго поля скалярной величины  $\varphi$ , называемой потенциалом. Изолинии равной величины этого скаляра во втором поле должны располагаться нормально к направлению своего градиента, т. е. к векторным линиям первого поля  $\vec{V}$ . Поскольку градиент является дифференциальной (разностной) характеристикой, потенциал данного векторного поля в каждой его точке определяется с точностью до некоторой постоянной величины, называемой аддитивной постоянной. Проекции вектора  $\vec{V}$ , обозначаемые  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ , в потенциальном поле связаны с потенциалом соотношением:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (38)$$

Во-вторых, в полях с однозначным потенциалом, т. е. при известной величине аддитивной постоянной для всего поля, значение интеграла произведения вектора на путь не зависит от пути интегрирования и определяется лишь координатами точек начала и конца пути. Такие интегралы имеют большое значение, так как к ним, например, относится работа, совершаемая в поле силы тяжести при перемещении тела из одной точки в другую. Поле силы тяжести (гравитационное) потенциально. Для вычисления работы сил гравитационного поля достаточно знать разность потенциалов в начальной и конечной точках пути. Если поле скорости текущей жидкости потенциально, сильно упрощается решение многих связанных с ним математических задач.

Интеграл от вектора в потенциальном поле по замкнутому пути (циркуляция) равен нулю.

Перечисленные важнейшие свойства относятся к таким полям или их частям, которые представляют собой односвязные области. Что это значит — поясняется ниже.

Третий тип — векторное поле, во всех точках которого дивергенция равна нулю. Его формула:

$$\text{rot } \vec{V} \neq 0; \quad \text{div } \vec{V} = 0. \quad (39)$$

Такое поле называется соленоидальным. Вектор этого поля  $\vec{V}$  может быть рассмотрен в качестве ротации некоторого второго векторного поля  $\vec{W}$ , именуемого векторным потенциалом.

При изучении плоского поля скорости течения несжимаемой жидкости имеет место соленоидальное поле. Равенство дивергенции нулю вытекает из допущения несжимаемости жидкости. В этом поле векторным потенциалом является вектор, равный по величине функции тока. Последней называют такую функцию, которая вдоль векторных линий первого поля  $\vec{V}$  сохраняет постоянное значение. В таком поле уравнение неразрывности:

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (40)$$

В соленоидальном поле увеличение поперечного сечения трубки в некоторое число раз сопровождается уменьшением вектора  $\vec{V}$  в такое же число раз. Поток вектора  $\vec{V}$  вдоль трубки постоянен. Поэтому векторные трубки не могут ни начинаться, ни кончаться в пределах соле-

ноидального поля. Их концы находятся на границах или за границами поля. Трубки в соленоидальном поле могут быть замкнутыми.

Четвертый тип — векторное поле, в котором равны ноль и ротация, и дивергенция. Его формула:

$$\operatorname{rot} \vec{V} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (41)$$

Оно называется лапласовым. Это поле позволяет находить значения исследуемой функции в любой точке внутри рассматриваемого объема, если известны значения функции на поверхности, ограничивающей данный объем.

Примером лапласова поля может служить поле с точечным источником (или стоком), называемое полем Ньютона, если речь идет о гравитационном притяжении, или полем Кулона — при рассмотрении электрических и магнитных сил притяжения или отталкивания.

В таком поле точечный источник силы, изображаемый вектором, совмещается с началом координат. В любой точке поля сила направлена к началу координат — центру, если это сила притяжения, или от центра, если речь идет об отталкивании. Величина силы считается зависимой от расстояния точки поля от центра, которое обозначается  $r$ . Если координаты точки поля  $x, y, z$ , то расстояние до центра:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (42)$$

Постулируется, что величина силы пропорциональна  $\frac{1}{r^2}$ . В этом случае через сферу, окружающую центр, независимо от ее радиуса проходит один и тот же поток, определяемый величиной  $q$ , характеризующей точечный источник (или сток). Таким образом, в каждой точке поля величина (модуль) вектора  $\vec{V}$  составляет

$$|\vec{V}| = q \frac{1}{r^2}. \quad (43)$$

Для того чтобы в записи фигурировало и направление вектора, вводится вектор  $\vec{r}$ , соединяющий центр поля с рассматриваемой точкой поля. Тогда уравнением поля оказывается:

$$\vec{V} = \frac{q}{r^3} \vec{r}. \quad (44)$$

В знаменателе показатель степени повышен до 3, поскольку вектор  $\vec{r}$  можно представить как произведение скаляра  $r$  на единичный вектор  $\vec{i}$ :

$$\vec{r} = r \cdot \vec{i}. \quad (45)$$

Тогда снова получаем пропорциональность вектора  $\vec{V}$  величине  $\frac{1}{r^2}$ . Эта закономерность, первоначально предположенная Ньютоном, нашла широкое экспериментальное подтверждение. Она составляет основу закона всемирного тяготения, небесной механики, теории движения спутников и других космических аппаратов, а также теории гравитационных аномалий, которые имеют большое значение и для разведки месторождений, и для тектонофизического анализа глубинных геологических процессов.

Во всех точках поля Ньютона (кроме начала координат) дивергенция равна ноллю:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (46)$$

Поток через любую замкнутую область, не включающую начало координат, равен нулю.

Поток векторного поля через поверхность, окружающую начало координат, равен:

$$Q = 4\pi q. \quad (47)$$

Величину  $Q$  называют мощностью (обильностью, или интенсивностью) источника или стока. Используя последнее обозначение, обсуждаемое поле записывают уравнением:

$$\vec{V} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{r}. \quad (48)$$

Потенциал данного поля  $\varphi$ :

$$\varphi = -\frac{q}{r}. \quad (49)$$

**Связность областей.** В теории полей большое значение имеет представление о связности рассматриваемой области. Односвязной называется область, в которой любой замкнутый контур может быть стянут в точку непрерывным образом, не пересекая границу этой области. Односвязными являются, например: вся плоскость, внутренняя часть плоскости, ограниченная непересекающейся замкнутой кривой, и непрерывная область внутри сплошного трехмерного тела.

Если из внутренней части плоскости или трехмерного тела изъять какую-нибудь часть (создать полость), эта плоскость или тело превращаются в двухсвязные области. Двухсвязным, например, является кольцо. Бывают трехсвязные и многосвязные области.

При математическом решении задач в теории деформаций и напряжений связность области имеет большое значение. Многие задачи, решаемые для односвязных областей, не могут быть математически решены для двух- и многосвязных областей. Увеличение связности областей происходит при возникновении тектонических разрывов. Поэтому теоретическое изучение деформаций и напряжений в телах, разбитых разрывами, чрезвычайно затруднено и часто невозможно. Такие вопросы с успехом могут решаться методом физического моделирования.

### *Тензорное поле 2-го ранга*

Часть пространства, каждой точке которого однозначно соответствует определенный тензор 2-го ранга, является тензорным полем 2-го ранга. Описание такого поля производится согласно тем же принципам, которые лежат в основе описания полей тензоров нулевого (скаляры) и первого (векторы) ранга. Однако практическая их реализация осложняется тем, что число величин, характеризующих тензор 2-го ранга в каждой точке поля, составляет 9 (или 6 у симметричных тензоров 2-го ранга), тогда как у поля вектора таких величин только 3, а у поля скаляра лишь 1.

**Траектории главных направлений.** Прежде всего нужно описать в каждой точке тензорного поля 2-го ранга направления трех взаимно перпендикулярных осей тензора. Если существует проходящая через все поле плоскость, которой параллельны в каждой точке поля две из трех осей тензора, чертеж совмещается с этой плоскостью. На чертеже изображается два семейства взаимно ортогональных линий, являющихся в каждой точке плоскости касательными к двум из трех осей тензора. Эти линии нередко называются траекториями. Третья ось тен-

зора в каждой точке рассматриваемой плоскости перпендикулярна чертежу.

При наличии одного направления, в котором компоненты тензора не изменяются, поле рассматривается в качестве плоско-параллельного. Для его характеристики достаточно описать траектории в одной плоскости, перпендикулярной этому направлению. Если нельзя подобрать одну удобную плоскость из-за пространственной кривизны траекторий, приходится проектировать их на плоскость, представляющуюся наиболее выгодной для изображения поля. Таких плоскостей может быть несколько. На каждой плоскости проекции траекторий могут пересекаться под различными углами и даже проекции траекторий двух семейств местами бывают параллельны друг другу. Всего на чертеже могут изображаться проекции всех трех семейств траекторий, каждое из которых соответствует одной из трех осей тензора. В таких случаях автор на чертеже дополнительно помещает круговые стереографические диаграммы, объемно изображающие направление трех осей тензора в характерных местах поля. На проекциях траекторий при этом ставятся стрелки, указывающие направление наклона осей тензора (рис. 71, а). Этот прием нашел применение у ряда исследователей тектонических полей напряжений (А. В. Михайловой, Ма Цзинь, Л. Д. Кноринга, Сунь Вэн-пэн, М. И. Пугачева, Д. Хираяма, В. Д. Парфенова, В. С. Милеева и др.).

Важно запомнить, что на проекциях траекторий осей тензора 2-го ранга часто нет смысла указывать стрелками направления векторов (как это делается в векторном поле). Тензор 2-го ранга более сложное понятие и у него с каждым направлением совпадают два противоположно направленных вектора. Вот почему на траекториях направления главных нормальных напряжений стрелки не ставятся. Однако на траекториях максимальных касательных напряжений имеет смысл ставить по две противоположно направленных стрелки.

**Уровни главных значений и инвариантов.** Описание тензорного поля 2-го ранга должно содержать характеристику величин главных значений тензора в каждой точке. Теоретически для этого достаточно изобразить три семейства поверхностей равной их величины (или изолинии в плоско-параллельном поле). Но на практике часто имеет больший смысл изображать на чертежах не три, а две величины, пропорциональные первому инварианту тензора 2-го ранга и второму инварианту его деватора.

Так, при изучении тензорного поля напряжений большой интерес с точки зрения физики процессов, обусловленных напряженным состоянием, представляет распределение в пространстве всестороннего давления (оно равно  $1/3$  первого инварианта тензора напряжений) и интенсивности касательных напряжений (пропорциональной квадратному корню из второго инварианта деватора).

Выше уже отмечалось, что максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max}$  с ошибкой до 7% равны  $1,08 \tau_i$  — интенсивности касательных напряжений. Весьма важно, что энергия упругого изменения формы единицы объема  $u_{ef}$  и пластического его изменения  $u_{pf}$  прямопропорциональны второму инварианту деватора напряжений  $I_2(D_{\sigma})$ :

$$\left. \begin{aligned} u_{ef} &= \frac{1}{2G} I_2(D_{\sigma}); \\ u_{pf} &= \frac{t}{\eta} I_2(D_{\sigma}), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $G$  — модуль сдвига,  $\eta$  — коэффициент вязкости,  $t$  — время.

Для описания тензорного поля деформаций большое значение имеют величины, связанные с первым инвариантом тензора  $I_1(T)$  и вто-

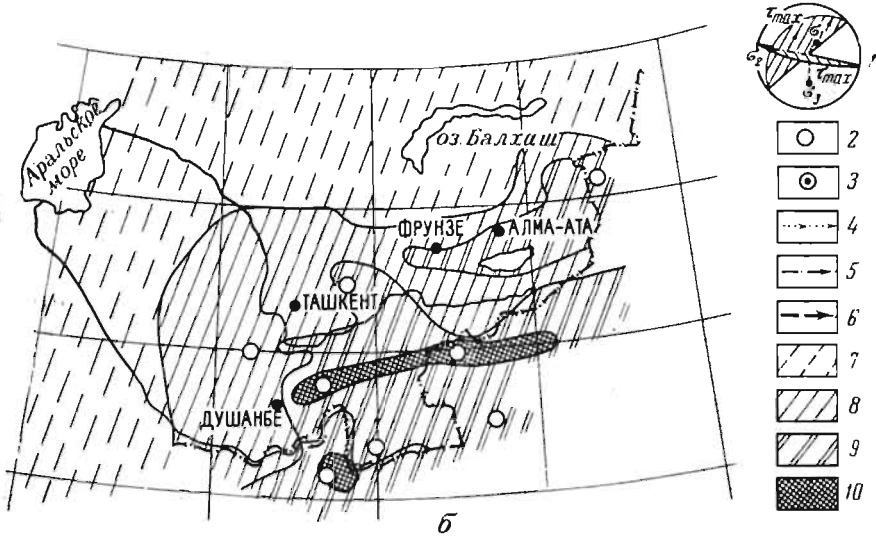
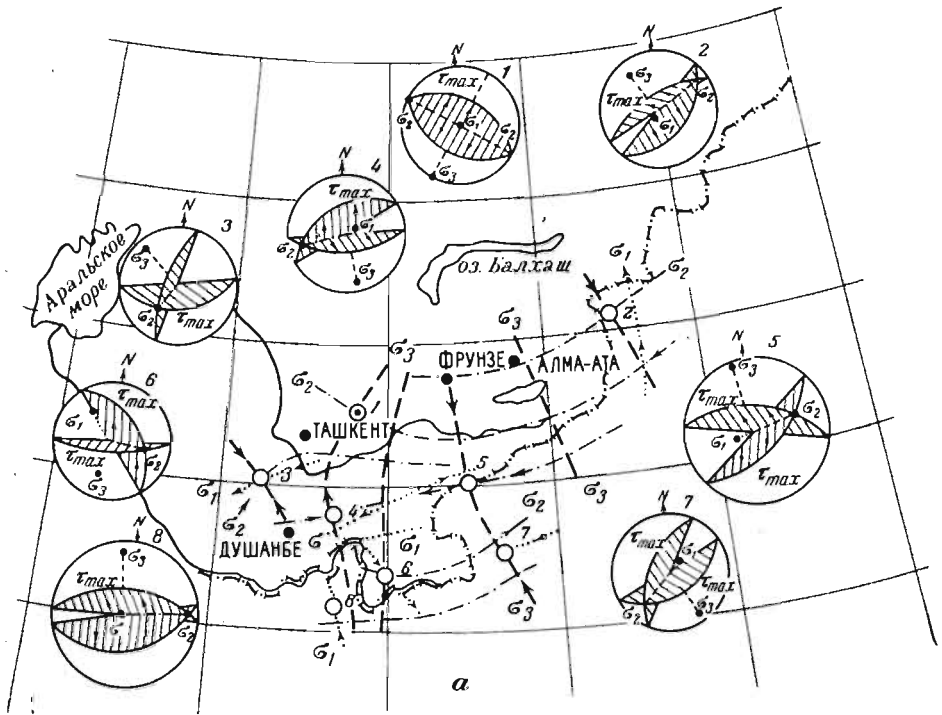


Рис. 71. Тензорное поле современных тектонических напряжений в земной коре Средней Азии с 1951 по 1965 г.

а — направления главных напряжений; б — приближенная наибольшая величина касательных напряжений; 1 — стереографическая диаграмма ориентировки главных нормальных ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) и касательных ( $\tau_{max}$ ) напряжений в очагах землетрясений, по данным А. В. Введенской, А. И. Захаровой и Е. И. Широковой; большие диаграммы — энергия землетрясения  $10^{15}$  Дж и более, малые диаграммы — энергия менее  $10^{15}$  Дж; 2 — участки, к которым относятся стереографические диаграммы и их номера; 3 — участки с вертикальным направлением  $\sigma_1$ ; 4 — траектории алгебраически максимальных главных нормальных напряжений ( $\sigma_1$ ); 5 — траектории алгебраически промежуточных главных нормальных напряжений ( $\sigma_2$ ); 6 — траектории алгебраически минимальных главных нормальных напряжений ( $\sigma_3$ ); 7 — касательные напряжения до  $100 \pm 50$  кг/см<sup>2</sup>, 8 — касательные напряжения до  $400 \pm 200$  кг/см<sup>2</sup>, 9 — касательные напряжения до  $700 \pm 350$  кг/см<sup>2</sup>, 10 — касательные напряжения до  $1000 \pm 500$  кг/см<sup>2</sup>. Указанные касательные напряжения рассматриваются в качестве максимальных значений средней величины для вертикального сечения всей земной коры

рым инвариантом девиатора  $I_2(D_\sigma)$  деформаций, которые выражаются сходным образом с только что перечисленными характеристиками напряжений. Они содержат главные удлинения  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и сдвиги  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  и несколько отличаются по виду от формул  $I_2(D_\sigma)$  из-за того, что главные касательные напряжения вычисляются по формуле, содержащей множитель  $\frac{1}{2}$ :

$$\tau_i = \frac{1}{2}(\sigma_k - \sigma_l), \quad (2)$$

тогда как в формулах для главных сдвигов множителя  $\frac{1}{2}$  нет:

$$\gamma_i = \varepsilon_k - \varepsilon_l. \quad (3)$$

Итак, графическое изображение тензорного поля напряжений или деформаций может содержать поверхности или изолинии уровня величин, пропорциональных шаровому тензору и квадратному корню из девиатора (см. рис. 71, б). В некоторых случаях траектории главных направлений удастся совмещать на одном чертеже с изображением распределения величин, связанных с шаровым тензором или девиатором, или некоторых из главных значений тензора напряжений.

**Характеристики изменчивости поля в пространстве.** По аналогии со скалярным и векторными полями следует и для тензорного поля 2-го ранга предусматривать характеристики его изменчивости в пространстве — типа градиента и дивергенции, рассмотренных ранее.

Потоком тензора 2-го ранга через поверхность называется являющийся вектором поверхностный интеграл  $\vec{P}$ , взятый от скалярного произведения тензора  $T$  на вектор нормали

$$\vec{P} = \int_{\Sigma} T \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (1)$$

Заметим, что поток векторного поля скаляр, а не вектор. Поток тензора напряжений через поверхность равен силе, равнодействующей всем напряжениям на этой поверхности, т. е. вектору.

Дивергенция тензорного поля 2-го ранга является вектором. Она равна пределу отношения потока  $\vec{P}$  через замкнутую поверхность  $\Sigma$  к окруженному ею объему  $\theta$ , при стягивании поверхности к точке и стремлении объема к нулю:

$$\operatorname{div} T = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\vec{P}}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \int_{\Sigma} T \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (2)$$

Дивергенцию тензора 2-го ранга записывают так:

$$\operatorname{div} T = \nabla \cdot T. \quad (3)$$

Бесконечная совокупность производных тензора 2-го ранга по всем возможным направлениям определяется тензором 3-го ранга, содержащим 27 величин. Пользоваться ими практически неудобно.

Операция, соответствующая нахождению ротации векторного поля, по отношению к тензорным полям 2-го ранга вообще не применима.

\* \*  
\*

Выше говорилось, что описание векторных полей нередко может быть упрощено и сведено к рассмотрению скалярных, если заранее

оговорено однообразное направление векторов. Также и тензорные поля, при соответствующих оговорках, поддаются описанию с помощью векторных или скалярных полей.

### ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СКАЛЯРНЫХ, ВЕКТОРНЫХ И ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ В ГЕОТЕКТОНИКЕ И ТЕКТОНОФИЗИКЕ

**Скалярные поля.** Многие геологические данные как по обширным территориям, так и по отдельным месторождениям изображаются в виде карт и профилей с линиями равных значений различных скалярных величин, т. е. в форме скалярных полей.

Структура земной коры на месторождениях и в любых по величине регионах часто передается стратоизогипсами — линиями равной высоты залегания, отсчитываемой от уровня моря. Поскольку для всех точек карты отсчет ведется в одном вертикальном направлении от одного и того же уровня, остается указать лишь единственное скалярное число — высоту. На тектонических картах СССР, Европы, Евразии такие изолинии проведены для различных структурных поверхностей. Разведка и разработка нефтяных, угольных и многих других месторождений в настоящее время немыслима без составления и многократного уточнения детальных структурных карт данного типа.

Градиент скалярного поля на структурных картах измеряет наибольший наклон слоев в безразмерных единицах — тангенсе угла наклона.

Перемещения земной коры, происходившие в течение прошлых геологических периодов, эпох и веков, В. В. Белоусов (1938, 1948, 1962) и многие другие исследователи уже давно приближенно характеризуют картами с изолиниями мощности (толщины) отложений, образовавшихся в течение рассматриваемого времени. Перемещение — вектор, но исследователи обсуждают лишь его вертикальную составляющую. Поэтому ограничиваются указанием лишь величины (модуля) вектора, т. е. скаляра.

Скорость тектонических движений, если для всех точек поля указывается лишь одна определенная ее составляющая, обычно вертикальная, поскольку она преобладает и легче поддается измерению, описывается одним числом — скаляром (модулем вектора). Таковы несколько редакций карты современных тектонических движений за последние десятилетия, составленные для европейской части СССР. Для древних тектонических движений карты этого типа пока составляются редко.

Градиент скорости тектонических движений является вектором, но для его модуля — скаляра — уже стали составляться детальные карты отдельных районов (Гзовский и др., 1956; Рейснер, 1959, Никонов, 1970), а также для всей территории СССР (Гзовский, 1967; Н. И. Николаев, Г. А. Шенкарева, 1967).

Градиент скорости тектонических движений имеет размерность, обратную времени, т. е.  $\frac{1}{\text{время}}$ . Автор неоднократно обращал внимание на большую важность градиента скорости движений для тектонофизики, поскольку он характеризует скорость деформации коры (Гзовский, 1957, 1963, 1967).

Энергия тектонических процессов, которую можно сопоставлять с энергиями самых различных геофизических и геохимических процессов при развитии теории глубинных явлений, определяющих все геологическое развитие Земли, также представляет собой скаляр. Первые предварительные оценки этой величины были изображены на карте СССР в форме скалярного поля (Гзовский, 1967, 1970; Gzovsky, 1966, 1967).

Нет надобности разъяснять исключительно большое практическое и теоретическое значение перечисленных скалярных полей, составляемых в процессе геотектонических и тектонофизических исследований.

**Векторные поля.** По мере расширения и совершенствования изучения тектонических движений появляется необходимость считаться со всеми составляющими перемещений и скорости.

В некоторых районах в определенные промежутки времени большое значение имеют горизонтальные составляющие перемещений и скорости.

Такие данные имеются для современных движений ряда районов Японии и Калифорнии (Barford, 1965, 1966; Муатуга, 1964). В Советском Союзе накапливаются результаты измерения современных горизонтальных движений на нескольких геофизических полигонах. Во многих регионах имеются следы различно направленных горизонтальных перемещений масс земной коры в древних геологических периодах (Буртман и др., 1963; Лукьянов, 1964, 1965; Трифионов, 1963; Копп и др., 1964; Расцветаев, 1966; Парфенов, Кондратов, 1966; Войтович, 1969 и др.).

Изображение горизонтальных перемещений и их скорости разной величины и по различным азимутам достигается с помощью векторных полей.

На рис. 72 приведен пример горизонтальных смещений, происшедших в районе известного разрыва Сан-Андреас и Берегового хребта в Калифорнии за 20 лет с 1930 по 1951 г., по данным Р. О. Барфорда (Barford, 1965). Векторы указывают направление и величину в сантиметрах горизонтальных перемещений пунктов триангуляционных наблюдений. Рассматривая эту карту, мы можем выделить в ее пределах три качественно различных области.

В юго-западной области направление перемещений ориентировано по прямым сходящимся векторным линиям, причем поперек этих линий величина перемещения мало изменяется. Следовательно, ротация практически невелика. Однако вдоль векторных линий перемещение сильно уменьшается, что указывает на значительную отрицательную дивергенцию. В итоге юго-западную область можно отнести к векторным полям второго типа — потенциальным.

В средней области, между разрывами Ринконада и Сан-Андреас, бросается в глаза значительное и закономерное изменение направления векторов — искривленность векторных линий. Поперек них величина векторов (идя от внутренних к внешним) то возрастает, то уменьшается. Во всяком случае ясно, что эта область обладает значительной ротацией. Изменения величины векторов вдоль векторных линий не-

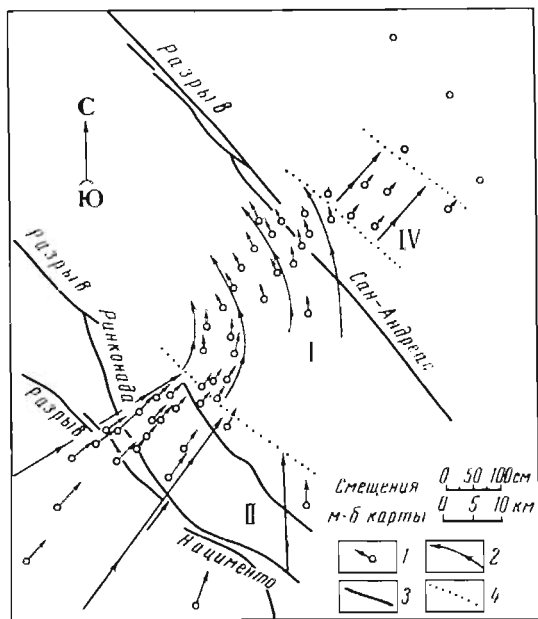


Рис. 72. Векторное поле горизонтальных смещений триангуляционных пунктов с 1932 по 1951 г. в Калифорнии (по Барфорду, 1965)  
1 — пункты измерения и векторы смещения; 2 — векторные линии; 3 — тектонические разрывы; 4 — границы областей с различными типами поля, I, II, IV — типы поля



лики, но все же имеются. Значит, некоторая дивергенция существует. Поэтому данную область нужно отнести к первому типу полей — с ротацией и дивергенцией, отличными от нуля.

Здесь и ротация, и дивергенция малы и поле приближается к четвертому типу — лапласову.

Таким образом, рассматриваемую территорию можно разделить на три области с существенно разными типами векторного поля.

Разбиение векторного поля требует данных как о направлении, так и о величине векторов в многочисленных точках наблюдений.

**Тензорные поля 2-го ранга.** Основные для тектонофизики представления о деформированном и напряженном состоянии горных пород в пространстве выражаются тензорными полями 2-го ранга. Поэтому использование тензорных полей в тектонофизике имеет первостепенное значение.

Поле пластических деформаций выявляется при анализе различных деформаций горных пород во многих точках. Деформации могут оцениваться макроскопически по морфологии складок, по искажению формы окаменелостей, галек и других тел, первоначальная форма которых известна. Особенно наглядно и полно поле деформации выявляется при микроскопическом петротектоническом изучении горных пород. Благоприятны для этого породы, содержащие такие широко распространенные минералы, как кварц и кальцит. Наиболее наглядно поле деформации проявляется в оолитовых и псевдоолитовых известняках, частицы которых до деформации имеют форму шариков, а после деформации становятся эллипсоидами. Чем больше различие в величине большей и меньшей осей эллипсоида, тем сильнее деформация. Легко вывести формулу, связывающую приближенную величину деформации с соотношением длин осей эллипсоида. Деформацию описывает тензор 2-го ранга  $\xi$ :

$$\xi = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Не претендуя на высокую точность, будем рассматривать длины осей эллипсоида в плоскости шлифа, отличающегося наибольшей разностью этих длин. Деформацию считаем плоской, т. е. величину промежуточного главного удлинения равной нулю:

$$\varepsilon_2 = 0,$$

а промежуточную ось (радиус эллипсоида в этом направлении) неизменившейся и равной первоначальному радиусу шарика  $r_0$ .

При пластической деформации объем приближенно рассматривается постоянным (хотя, строго говоря, это неточно), и, опять же приближенно, равное нулю изменение объема связывается с главными удлинениями известной формулой:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0. \quad (2)$$

Учитывая, что  $\varepsilon_2 = 0$ , получаем

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = \varepsilon. \quad (3)$$

Значит, длинная полуось эллипсоида  $a$ :

$$a = r_0 + \Delta r, \quad (4)$$

короткая полуось  $c$ :

$$c = r_0 - \Delta r. \quad (5)$$

Здесь  $r_0$  обозначает первоначальную величину радиуса шарика,  $\Delta r$  — ее изменение вследствие деформации. Первоначальный радиус можно найти, зная длину полуосей  $a$  и  $c$  по формуле

$$\frac{1}{2}(a + c) = \frac{1}{2}(r_0 + \Delta r + r_0 - \Delta r) = r_0 = 1. \quad (6)$$

Взаимно вычитая левые и правые стороны последних равенств (4) и (5), получаем, что разность полуосей эллипсоида равна удвоенному изменению радиусов шарика  $\Delta r$ :

$$a - c = 2\Delta r; \quad \frac{1}{2}(a - c) = \Delta r. \quad (7)$$

Теперь вспомним, что главные удлинение  $\epsilon_1$  и укорочение  $\epsilon_3$  равны отношению изменения длины радиуса  $\Delta r$  и его первоначальной величине  $r_0$ :

$$\epsilon = \epsilon_1 = -\epsilon_3 = \frac{\Delta r}{r_0} = \frac{a - c}{a + c}. \quad (8)$$

Теперь примем в качестве единицы реально наблюдаемую в микроскопе длину большой полуоси эллипсоида  $a$ , и с ней (как с масштабной единицей) сравним величину короткой полуоси эллипсоида  $c$ . По последней формуле получается, что значениям  $c$ : 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1 соответствуют следующие величины деформации  $\epsilon$ : 5, 10, 18, 25, 33, 43, 54, 66, 82.

При изучении шлифов приведенные числа следует округлять до десятков процентов, так как точность измерений и вывода невелики, однако для практических приближенных оценок вполне достаточны.

На рис. 73 приведена фотография шлифа из изучавшегося автором верхнемелового псевдооолитового известняка в хребте Петра Первого на Северном Памире. Измерение размеров



Рис. 73. Микрофотография деформированного оолитового верхнемелового известняка. Хребет Петра Первого

деформированных зерен показывает, что эти известняки претерпели деформацию, равную приблизительно 30% (как удлинения, так и укорочения). В прошлом Э. Клоос (Cloos, 1947) провел такие измерения в Аппалачах в большом числе пунктов и составил схемы, отражающие направление наибольшего удлинения и укорочения в породах, и оценил величину деформации в различных участках. Составленные им схемы являются изображением тензорных полей 2-го ранга. Бывшие сперва сферическими, деформированные частицы породы приобретают форму эллипсоида деформации, который не является тензорным эллипсоидом (тензорной поверхностью), упоминавшимся выше, так как у него обратное расположение осей. Заметим, что при различии в знаках главных удлинений тензорная поверхность не бывает эллипсоидом.

При изучении моделей складок, в которых поле деформаций заведомо является плоско-параллельным, А. В. Михайлова пользовалась следующим методом. На боковой поверхности модели изображались окружности исходного радиуса  $r_0$ . В результате образования складки

они превращались в различно вытянутые эллипсы. На каждой стадии развития складки на модели измерялась величина длинной  $a_n$  и короткой  $c_n$  полуоси каждого эллипса. Величина относительного наибольшего удлинения  $\varepsilon_1$  и наибольшего укорочения  $\varepsilon_3$  эллипса для определенной стадии процесса (по сравнению с началом деформирования) вычислялась по формуле

$$\varepsilon_1 = \frac{a_n - r_0}{r_0}; \quad \varepsilon_3 = \frac{c_n - r_0}{r_0}. \quad (9)$$

Разность этих величин считается относительным сдвигом  $\gamma_2$ :

$$\gamma_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3. \quad (10)$$

В связи с большой величиной деформаций и их суммированием на протяжении многих стадий, эти характеристики бывают менее удобными, чем логарифмические выражения для деформаций. Поэтому для измерения приращения деформации при переходе от одной стадии ( $n$ ) к следующей ( $n+1$ ) сначала находили величины логарифмические — удлинения и укорочения за все время деформирования, т. е.

$$\left. \begin{aligned} e_{1,n} &= \ln \left( 1 + \frac{a_n - r_0}{r_0} \right); & e_{3,n} &= \ln \left( 1 + \frac{c_n - r_0}{r_0} \right); \\ e_{1,(n+1)} &= \ln \left( 1 + \frac{a_{n+1} - r_0}{r_0} \right); & e_{3,(n+1)} &= \ln \left( 1 + \frac{c_{n+1} - r_0}{r_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Затем брались разности одноименных удлинений и укорочений для следующих одна за другой стадий, которые и считались приращениями логарифмических деформаций  $\Delta e_1$  и  $\Delta e_3$  за соответствующий дифференциал времени деформирования:

$$\Delta e_1 = e_{1,(n+1)} - e_{1,n}; \quad \Delta e_3 = e_{3,(n+1)} - e_{3,n}. \quad (12)$$

Соответствующей им логарифмической величиной сдвига  $g_2$  считалась разность:

$$g_2 = \Delta e_1 - \Delta e_3. \quad (13)$$

Логарифмические деформации  $e_1$ ,  $e_3$  и  $g_2$  за большие промежутки времени получаются либо суммированием одноименных величин для нескольких стадий процесса, либо непосредственным сопоставлением размеров эллипса в начале и конце рассматриваемого промежутка времени с использованием формул (11). Указанные относительные и логарифмические характеристики деформации, а также величины поворотов и перемещений, относящиеся к многочисленным исследованным точкам модели, наносят на чертежи. На них строят изолинии величины каждой из характеристик деформации, поворота и перемещения, как для очередной стадии процесса (дифференциальные), так и для суммарного результата с начала деформирования модели. Изображают траектории направлений деформаций и перемещений. Рассмотрение и последующая интерпретация таких чертежей приводят к важным представлениям о физике образования складок в земной коре.

**Тектоническое поле напряжений** должно описываться как тензорное поле 2-го ранга. С 1954 г. автор публикует результаты систематического изучения древних и современных тектонических полей напряжений, начатого на территории СССР (Гзовский, 1954, 1963, 1970; Gzovsky, 1959, 1966, 1967). Сейчас опубликованы итоги ряда исследований тектонических полей напряжений в районах рудных, угольных, нефтяных и других месторождений СССР (Трипольская, 1958; Мельников, 1962; Скарятин, Москалев, Устинова, Цзян Цзу-ци, 1961; Кузнецко, 1966; Трифионов, 1964; Букринский, Михайлова, 1963; В. И. Букрин-

ский, М. И. Пугачев (1966); М. И. Пугачев (1967); Токовенко, 1967; Михайлова, 1968; Парфенов, Кондратов, 1966; Милеев, 1967; Калачева, Кноринг, 1967; Кноринг, 1968; Ахмедов, 1969; Ананян, 1968; Филатов, 1968; Кулкашев, Фомичев, 1969; Григорьев, 1969 и др.).

Следует различать четыре основных типа исследований тектонических полей напряжений, отличающихся полнотой и достоверностью данных об этих тензорных полях.

Первый тип исследований сводится к определению во многих точках только трех главных направлений тензора напряжений. При изучении древних полей в любом районе могут быть использованы всегда поддающиеся сбору данные о трещиноватости горных пород. Автор предложил метод нахождения направлений осей напряжений по диаграммам трещиноватости (Гзовский, 1954, 1960<sub>2</sub>, 1963<sub>1</sub>).

Направления осей для характерных мест точно изображают на стереографических диаграммах. На всю площадь карты или профиля наносятся проекции траекторий этих осей. В итоге получаются наглядные изображения полей напряжений. Таким образом были изучены качественно различные поля напряжений, действовавших в различное время во многих районах. При этом была установлена большая неравномерность напряженного состояния коры в пространстве и времени.

В сейсмологии уже давно развиваются методы выявления направлений осей современных напряжений, вызывающих землетрясения. Это делается путем интерпретации сейсмограмм, записанных на станциях, окружающих эпицентр землетрясения со всех сторон (Byerly, 1928, 1955; Кейлис-Борок и др., 1950, 1960; Введенская, 1959, 1960; Балакина и др., 1962, 1967; Широкова, 1967 и др.). Сейсмологи на картах показывают проекции осей напряжений. Автор считает целесообразным обязательно изображать на картах, кроме того, и стереографические круговые диаграммы, а также проекции траекторий, как это сделано на рис. 71, а.

Второй тип исследований приводит к составлению карт и профилей, отражающих величину какой-то части компонент тензора и не дающих представления о направлениях его осей. Такие карты, например, были составлены для современной величины максимальных касательных напряжений в земной коре на территории СССР, которая связана приближенной пропорциональностью с первым инвариантом девиатора тензора напряжений (Гзовский, 1963<sub>3</sub>, 1967). Эти карты получались путем интерпретации скорости современной и новейшей пластической деформации земной коры, которая находилась по градиенту скорости движений.

Третий тип исследований характеризуется тем, что выявляют и показывают на картах главные направления тензора — траектории главных напряжений с круговыми диаграммами — и весьма приближенные оценки компонент тензора. Часто наибольший интерес представляет девиаторная часть тензора напряжений, характеризующаяся максимальными касательными напряжениями. Бывают важны также оценки знака и величины алгебраически максимальных главных нормальных напряжений. Практическое значение для поисков жильных месторождений имеет выделение мест, где эти напряжения положительны (растягивающие), и указания, насколько они велики.

Предложенная автором физическая теория тектонических разрывов (Гзовский, 1954, 1960<sub>2</sub>, 1963<sub>1</sub>) ставит число односторонних разрывов в зависимости от величины напряжений, вызывающих разрушения. Отсюда возникает возможность решения обратной задачи — по числу разрывов приближенно судить о величине напряжений. Эта же теория позволяет для оценки величины напряжений использовать повторяемость во времени землетрясений определенной энергии. Кроме того, и максимальная энергия происшедших в исследуемом районе земле-

трясений в совокупности с другими данными дает возможность приближенной оценки величины напряжений. Первые такие оценки выполнены для различных районов территории СССР и показаны на карте в качестве тензорного поля (Гзовский, 1967; Gzovsky, 1966, 1967).

Четвертый тип исследований отличается точностью и достоверностью всех основных характеристик тензорного поля напряжений. Такие исчерпывающие данные прежде всего стали получаться при изучении моделей поляризационно-оптическим методом. Сначала мы исследовали только упруго деформировавшиеся модели, затем нами был разработан метод испытания и пластически деформируемых моделей (Гзовский, 1954, 1958, 1963; Осокина, 1960, 1963).

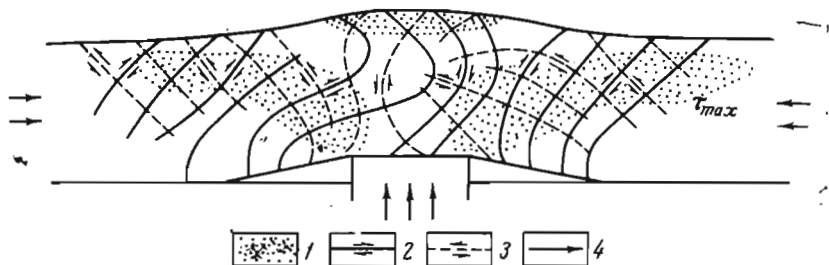


Рис. 74. Тензорное поле напряжений в модели поднятия земной коры, возникающего при действии вертикальных и дополнительных горизонтальных сжимающих сил (результат поляризационно-оптического изучения модели): 1 — области действия большого девиатора напряжений (максимальные касательные напряжения больше  $12 \text{ г/см}^2$ ); 2 — траектории правых максимальных касательных напряжений; 3 — траектории левых максимальных касательных напряжений; 4 — силы, деформирующие модель

На рис. 74 приведен пример модели, воспроизводящей деформацию мощного осадочного покрова земной коры под действием вертикального давления со стороны поднимающейся жесткой глыбы фундамента, в условиях одновременного горизонтального двустороннего сжатия. На модели надежно установлены направления главных нормальных и максимальных касательных напряжений, а также пространственное распределение величины максимальных касательных напряжений, вызывающих образование разрывов внутри земной коры и возникновение землетрясений.

Недавно точные измерения всех компонент современного напряженного состояния земной коры стали выполняться в горных выработках месторождений — шахтах и штольнях (Кузнецов и Слободов, 1950; Nast, 1958; Турчанинов, Марков, 1967 и др.). Накапливающиеся данные скоро позволят получать достоверные тензорные поля 2-го ранга, всесторонне характеризующие современное напряженное состояние земной коры.

Наиболее полное и точное изображение тензорных полей напряжений и деформаций может быть получено в итоге математических расчетов этих величин. В настоящее время (благодаря появлению электронно-вычислительных машин и в силу других причин) математическое решение тектонофизических задач стало развиваться быстрыми темпами. Большая работа в этом направлении ведется в Институте физики Земли АН СССР А. С. Григорьевым с сотрудниками в лаборатории тектонофизики, А. М. Кочетковым (1968), а также в ряде других научных коллективов (см., например, Гутерман, 1968). Из зарубежных наибольшее значение имеют работы М. А. Био (Biot, 1957, 1965) и Г. Рамберга (Ramberg, 1963). Математические решения тектонических задач не заменяют ни полевых исследований, ни моделирования, так как расчеты связаны с рядом упрощений исследуемого про-

цесса и предположений. Почти все решенные задачи характеризуют лишь начало тектонической деформации и не отражают влияния возникающих разрывов на последующее развитие деформаций и распределение напряжений. Для дальнейшего развития расчетов тектонических полей напряжений, относящихся к сильно деформированным слоям, необходимо уметь описывать складки различной формы с помощью уравнений. Выше было показано, что эта задача вполне разрешима. Поэтому аналитическому описанию складок должно быть уделено значительное внимание. В данной книге математическая сторона упомянутых исследований по механике тектонических процессов не рассматривается, поскольку она требует привлечения ряда физических представлений и поэтому будет более уместной в тектонофизической работе.

Изображаемые в форме тензорных полей данные о древнем и современном напряженном состоянии земной коры имеют большое теоретическое значение в связи с познанием причин тектонических процессов. Существенное значение они имеют и для практики, так как помогают предвидеть места скопления полезных ископаемых на глубине, выбирать наименее опасную и наиболее продуктивную систему разработки месторождений, оценивать сейсмическую опасность в местах проектируемого строительства и решать другие инженерные задачи. Все эти вопросы рассматриваются тектонофизикой.

Таким образом, в тектонофизике назрела необходимость использования всего арсенала теоретических представлений, связанных не только со скалярными и векторными, но и с тензорными полями 2-го ранга.

## IV. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИКИ В ГЕОТЕКТОНИКЕ И ТЕКТОНОФИЗИКЕ

Геотектоника обобщает многие геологические и геофизические данные. В ней выводятся закономерности строения и развития коры и мантии Земли. Эти обобщения призваны не только объяснять многие из глубинных процессов, но и способствовать совершенствованию инженерных методов решения задач геологического производства: поисков, разведки и разработки месторождений, оценке инженерно-геологических условий строительства, прогнозу сейсмической опасности и т. д.

В геотектонике систематизируются данные об особенностях морфологии отдельных участков земной коры, что приводит к классификации складок, разрывов и других структурных элементов коры. Обобщаются данные о направлении, скорости, распределении в пространстве и во времени тектонических движений. Из этого следуют выводы о типах режимов тектонических движений. Путем анализа тектонических данных исследователи стремятся выявить причины тектонических процессов.

Известно, что в геотектонике многие выводы являются дискуссионными и представляют собой классификации и гипотезы, которые одним кажутся достоверными, а другим — несостоятельными.

Тектонисты в своих обобщениях часто исходят из двух представлений. Во-первых, считается, что на каждый вопрос, относящийся к геотектонике, в принципе существует однозначный ответ типа «да» или «нет». Во-вторых, многие тектонисты считают возможным давать такой однозначный ответ сейчас даже при небольшом количестве сведений по рассматриваемому вопросу. В итоге нередко появляются субъективные тектонические обобщения и непонимание друг друга тектонистами, категорически высказывающими концепции, из которых одна исключает другую. Достаточно вспомнить вертикалистов и горизонталистов, мобилистов и фиксиков, сторонников циклического развития Земли и противников этого представления и т. д. Субъективность и разноречивость во мнениях очень вредят попыткам использовать данные геотектоники в других науках и в практике.

Развитие математического подхода в геотектонических обобщениях абсолютно необходимо, так как оно повысит объективность и достоверность обобщений и исключит многие возникающие сейчас недоразумения.

**Принципы построения классификаций.** В геотектонике и тектонофизике большое значение имеют обобщения данных по многим объектам в форме различных классификаций (складок, разрывов, полей напряжений и т. д.) Сейчас стало ясно, что составители классификаций должны придерживаться определенных общенаучных принципов, имеющих логико-математические основания. Специальные исследования, посвященные этому вопросу (Воронин, 1963, Воронин и др., 1964), показали, что в распространенных в геологии классификациях имеется много несоответствий логико-математическим принципам. Поэтому,

приступая к построению классификации, необходимо уделить внимание соответствующей математической теории. При создании классификации важная группа вопросов бывает связана с выбором наблюдаемых признаков, позволяющих отнести исследуемый объект к тому или иному классу. Другая группа вопросов возникает потом в процессе использования классификации, когда исследуемый объект уже отнесен к определенному классу и на основании этого надо сделать следующие выводы об ожидаемых пока еще не установленных свойствах данного объекта. В тектонофизике такими выводами могут быть, например, важные при поисках и разведке указания на то, в каких участках на глубине существовали наиболее благоприятные условия для формирования полезных ископаемых. Возможен также прогноз мест, в которых проходка горных выработок сопряжена с наибольшей опасностью. Чем больше классификация позволяет делать выводов прогнозного характера, тем она ценнее. Формулировки прогноза должны в максимальной мере отражать его достоверность. Этого можно достичь, привлекая обсуждаемые ниже представления о вероятности и оценках истинности.

**Математическая статистика.** Многочисленные объекты исследования тектониста, даже при значительном сходстве их между собой, всегда обладают рядом индивидуальных специфических особенностей. Строго говоря, почти нет одинаковых складок, одинаковых разрывов, одинаковых геосинклиналей, одинаковых платформ и так далее. Математическая статистика дает тектонисту объективные методы выявления того, что является общим и наиболее типичным для многих объектов исследования. Вместе с тем математическая статистика позволяет описать существующие в природе отклонения от наиболее распространенных характеристик исследуемых объектов. Она содержит критерии для выделения различных классов среди изучаемых объектов. Представления о *средних величинах* и *дисперсии* необходимо широко использовать в геотектонических обобщениях.

Чрезвычайно важно для тектонистов развитое в математической статистике понятие о *корреляционных связях* между природными явлениями. Однозначное соответствие между количественными характеристиками двух объектов, называемое функциональной связью, является частным крайним случаем корреляционной связи. Гораздо чаще представители двух явлений лишь в среднем обладают определенным количественным соотношением. В каждом конкретном случае возможно то или иное отклонение от среднего соотношения.

Объективной количественной характеристикой связи между явлениями служит вычисляемый по особым формулам коэффициент корреляции. При однозначной функциональной связи между двумя явлениями коэффициент корреляции равен единице. При коэффициенте более 0,5 связь между явлениями существенна, но не вполне однозначна. Коэффициент корреляции менее 0,5 указывает на слабую связь между явлениями. Полное отсутствие взаимной зависимости между явлениями выражается коэффициентом корреляции, равным нулю.

Коэффициент корреляции вычисляется не только при количественных, но и при качественных сопоставлениях явлений. Если мы обобщаем соотношения между двумя явлениями, например, типом складок и типом связанных с ними разрывов, можно использовать коэффициент корреляции. Он равен единице, если во всех складках одного типа обязательно присутствуют разрывы определенного типа. Если разрывы этого типа встречаются не во всех складках и могут быть различными, коэффициент корреляции становится меньше единицы.

Таким образом, вместо однозначного ответа «да» или «нет» о связи между типом складки и типом разрыва появляется возможность



более гибкого объективного количественного выражения связи разрывов со складками.

Особенно важно для тектоники, что математическая статистика дает представление исследователю, в какой мере достоверны его выводы, если он имеет данные не о всех существующих в природе исследуемых объектах, а только о какой-то их части. Статистикой устанавливается, какое число объектов следует изучить, чтобы можно было сделать выводы с определенной достоверностью.

В математической статистике хорошо разработаны методы подбора математической модели, которую имеет смысл привлечь для описания определенного реального явления, например структуры месторождения или скопления точек на эмпирическом графике. Так, метод наименьших квадратов позволяет определить наиболее целесообразное место для проведения осредняющей линии (на профиле или графике) и до ее построения вычислить коэффициенты уравнения данной линии (Крылов, 1950).

В связи со складками отмечалось, что один и тот же природный объект можно описать с помощью различных математических моделей. Например, для описания антиклинали, изображенной на рис. 26, *a*, на первый взгляд пригодны и гипербола, и парабола, и синусоида. Используя имеющуюся в математической статистике теорию корреляции, можно количественно оценить, какую из этих трех кривых удастся провести наиболее близко к изображенной на профиле частной складке. Таким образом, математическая статистика содержит методы для выбора наиболее удачных математических моделей (Лукомский, 1961).

**Типы соотношений между понятиями.** В качестве наиболее важных понятий в работе тектониста фигурируют комплекс тектонических признаков структурных элементов и комплекс свойств, которыми обладают эти элементы. Свойствами могут быть определенные полезные ископаемые, сейсмическая опасность, специфичный магматизм, особое происхождение тектонических движений и т. п.

В математической логике признается возможность существования пяти типов соотношений в каждой паре, состоящей из понятий *S* и *P*. Под *S* можно подразумевать признаки, а под *P* — свойства тектонических объектов.

1. Первое понятие (*S*) тождественно совпадает со вторым (*P*), т. е. оба понятия в равной мере справедливы по отношению к одним и тем же участкам (объектам). Запись этого соотношения:

$$S \equiv P. \quad (1)$$

2. Первое понятие (*S*) шире, чем второе (*P*), т. е. первое понятие относится к большему числу участков, чем второе. Запись того, что *S* включает в себя *P*:

$$S \supset P. \quad (2)$$

3. Первое понятие (*S*) уже, чем второе (*P*), соответственно первое распространяется на меньшее число участков, чем второе. Запись того, что *S* включено в *P*:

$$S \subset P. \quad (3)$$

4. Первое понятие (*S*) и второе (*P*) лишь частично перекрываются одно другим, поэтому есть участки, на которых справедливо только первое понятие; есть участки, где оба понятия верны, и, наконец, существуют участки, для которых справедливо только второе понятие. Это так называемое перекрещивание понятий. Его запись:

$$S \supset \subset P. \quad (4)$$

5. Первое понятие ( $S$ ) существует независимо от второго ( $P$ ), оба понятия несовместимы. Значит, нет таких участков, на которых были бы справедливы оба понятия. Запись несовместимости понятий:

$$S \neq P. \quad (5)$$

Эти соотношения представляют собой пять качественно различных возможных ответов на вопрос о связи между двумя явлениями. В число таких ответов входят «да» и «нет», которыми нередко ограничиваются в геотектонике. Введение в геотектонику пяти возможных ответов вместо двух повысит объективность геотектонических обобщений.

При использовании тектонических признаков встречаются все перечисленные типы соотношений.

Первый тип, например, является идеалом соотношений между тектоническими признаками ( $S$ ) и фактическим распределением полезных ископаемых ( $P$ ). Второй тип обычно реализуется при правильном прогнозе полезных ископаемых. Третий, к сожалению, еще имеет место при неудачном прогнозном районировании.

Особенно часто приходится констатировать четвертый тип — соотношения перекрещивания. Такими, например, оказываются соотношения между сейсмологическими и тектонофизическими комплексами признаков сейсмической опасности. Это значит, что существуют участки с сейсмологическими признаками определенной опасности, в которых тектонические признаки такой опасности не наблюдаются. Вместе с тем, во многих участках устанавливается одинаковая опасность, вытекающая как из сейсмологических, так и тектонофизических признаков. Наконец, имеются такие участки, где определенная сейсмическая опасность вытекает только из тектонофизических признаков и не подтверждается сейсмологическими признаками.

При любом исследовании, указывая типы соотношений между понятиями, мы повысим четкость всех представлений и исключим многие недоразумения и ошибки.

**Вероятностные оценки.** При решении многих задач, когда нам известны признаки  $S$  отдельных участков и на этом основании требуется предсказать практически важные свойства  $P$  этих участков, оказывается необходимым не только указать тип соотношений между  $S$  и  $P$ , но требуется также количественно охарактеризовать, насколько вероятно, что участок, имеющий признак  $S$ , будет обладать свойствами  $P$ . Способы получения таких характеристик разработаны в теории вероятностей. Вероятностная оценка указывает, какое число случайно выбранных участков будет обладать интересующими нас свойствами  $P$ . Безусловной вероятностью называют безразмерную величину  $\mathcal{P}$  равную отношению числа  $N_P$  участков, обладающих свойствами  $P$ , к общему числу  $N$  участков, из которых производится выбор:

$$\mathcal{P} = \frac{N_P}{N}. \quad (6)$$

Условной называют такую вероятность, при определении которой выбор производится не из любых участков, а из обладающих определенными признаками  $S$ . Если общее число участков с признаками  $S$  обозначим  $N_S$ , то условная вероятность того, что случайно выбранный среди них участок будет обладать свойствами  $P$ , обозначим  $\mathcal{P}_{S \rightarrow P}$ . Нижний индекс читается: «если  $S$ , то и  $P$ ». Такая условная вероятность вычисляется по формуле

$$\mathcal{P}_{S \rightarrow P} = \frac{N_P}{N_S}. \quad (7)$$

Бывает полезна и обратная постановка вопроса, при которой определяется уже другая условная вероятность  $\mathcal{P}_{P \rightarrow S}$ . Ее индекс: «если  $P$ ,

го и  $S$ ». Она указывает, какая часть участков со свойствами  $P$  (например, с 9-бальными землетрясениями) обладает определенными признаками (скажем, тектонофизическими). Ее надо вычислять по формуле

$$\mathcal{P}_{P \rightarrow S} = \frac{N_{P \wedge S}}{N_P}. \quad (8)$$

Здесь  $N_{P \wedge S}$  обозначает число участков, в которых совместно констатируются и свойства  $P$ , и признаки  $S$ . Величина  $N_P$  обозначает общее число участков, обладающих свойствами  $P$ .

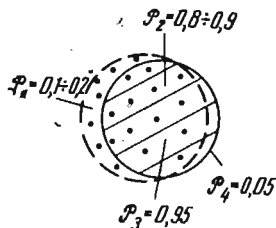


Рис. 75. Схема соотношений между районами, признающими сейсмически опасными по тектоническим данным (точечная штриховка) и районами фактического возникновения землетрясений (линейная штриховка). Цифры указывают условные вероятности для Средней Азии

$\mathcal{P}_1 = 0,1 \pm 0,2$  — отсутствие землетрясений в зонах, считающихся опасными;  $\mathcal{P}_2 = 0,8 \pm 0,9$  — возникновение землетрясений в таких же зонах;  $\mathcal{P}_3 = 0,95$  — расположение случившегося землетрясения в зоне, где оно ожидалось;  $\mathcal{P}_4 = 0,05$  — расположение случившегося землетрясения в зоне, где оно не ожидалось

Азии были вычислены следующие условные вероятности того, что:

в районе, опасном по тектонофизическим признакам, сильного землетрясения не будет:  $\mathcal{P}_1 = 0,1 \pm 0,2$ ;

в районе, опасном по тектонофизическим признакам, произойдет сильное землетрясение:  $\mathcal{P}_2 = 0,8 \pm 0,9$ ;

сильное землетрясение произойдет в районе с тектонофизическими признаками высокой опасности:  $\mathcal{P}_3 = 0,95$ ;

сильное землетрясение произойдет в районе, не имеющем тектонофизических признаков высокой опасности:  $\mathcal{P}_4 = 0,05$ .

Ответы на различные научные и инженерные вопросы, в том числе прогнозирование месторождений и оценку сейсмической опасности, весьма желательно сопровождать вероятностными оценками. Для их получения должна проводиться обработка фактических данных по правилам математической статистики. Статистически найдя условные вероятности для отдельных понятий, можно затем по формулам теории вероятности найти вероятности более сложных суждений, которые выводятся как следствия из исходных понятий.

**Алгоритмы.** В тех случаях, когда определенный район рассматривается с инженерной точки зрения и требуется четкий ответ о его перспективах на полезные ископаемые или о сейсмической опасности, необходимо располагать ясной схемой получения этого ответа. Такая схема должна в максимальной мере соответствовать современным достижениям науки. Ее нужно построить так, чтобы при определенных

исходных фактических данных различные исследователи давали только один объективный ответ. Схемы такого рода называются алгоритмами.

Ответы, получаемые при использовании алгоритма, являются условно точными. Они точны в том смысле, что исходные фактические данные приводят к одному определенному ответу, как того требует инженерная задача. Однако ответ является условным, поскольку он сохраняет свою однозначность лишь при условии использования выбранного нами алгоритма. В связи с развитием науки алгоритм в дальнейшем может быть изменен. Тогда за счет привлечения дополнительных данных станет возможным получение другого ответа. Поэтому составление алгоритма, соответствующего уровню знаний для определенного момента времени, не означает того, что можно прекратить дальнейшие научные исследования. Алгоритм — это практический итог лишь одного из этапов продолжающегося научного исследования.

В качестве примера используем оценку сейсмической опасности. Различные исследователи фактически используют различные схемы, которые до сих пор не назывались алгоритмами. Этот вопрос был рассмотрен В. И. Бунэ, Н. А. Введенской, М. В. Гзовским (1968) на материале Средней Азии. Ими же была предложена и применена наиболее полная схема совместного использования сейсмологических и тектонических данных с целью оценки сейсмической опасности. Сейчас на более детальном материале можно сделать вывод о целесообразности применения следующей общей схемы оценки сейсмической опасности.

#### Общий алгоритм

*I этап — разбиение территории на квазиоднородные участки:*

*a — по сейсмологическим данным;*

*b — по тектонофизическим данным;*

*c — по совокупности сейсмологических и тектонофизических данных.*

*II этап — оценка сейсмогенности каждого участка:*

*a — по сейсмологическим данным;*

*b — по тектонофизическим данным;*

*c — по совокупности сейсмологических и тектонофизических данных.*

*III этап — учет распространения сильнейших упругих колебаний за границами участка:*

*a — по сейсмологическим данным;*

*b — по тектонофизическим данным;*

*c — по совокупности сейсмологических и геологических данных.*

*IV этап — инженерно-сейсмологическое уточнение сейсмической опасности:*

*a — по сейсмологическим данным;*

*b — по геологическим данным;*

*c — по совокупности сейсмологических и геологических данных.*

Каждый пункт этого общего алгоритма требует подробной алгоритмической разработки.

**Логические формулы.** В целях четкости, наглядности и лаконичности алгоритма последовательность многих составляющих его умозаключений имеет смысл записывать в виде логических формул, которые в математической логике называются булевыми функциями. В виде формул могут записываться три главных элемента решения любой задачи:

1) совокупность современных знаний о различных геологических и геофизических особенностях районов, для которых известно решение рассматриваемой задачи;

2) установленные в исследуемом районе геологические и геофизические признаки ( $S$ );

3) порядок перехода от установленных признаков к ожидаемым свойствам данного района ( $P$ ).

Примером использования логических формул может служить запись одной из наиболее ответственных и часто дискуссионных операций: операции  $IIc$  из общего алгоритма инженерной оценки сейсмической опасности. В этой операции, используя оценки сейсмогенности

рассматриваемого участка по сейсмологическим и тектонофизическим данным, следует установить сейсмическую опасность участка, выраженную в баллах.

Между сейсмологической ( $S$ ) и тектонофизической ( $T$ ) оценками опасности мы констатируем соотношения перекрещивания. Поэтому во многих районах две оценки имеют одинаковую величину:

$$\left. \begin{array}{l} S = i \\ T = i \end{array} \right\} S = T. \quad (9)$$

В некоторых районах сейсмологическая оценка оказывается выше тектонофизической:

$$\left. \begin{array}{l} S = j \\ T = i \end{array} \right\} S > T; \quad (i < j). \quad (10)$$

Существуют также районы, в которых сейсмологическая оценка ниже тектонической:

$$\left. \begin{array}{l} S = i \\ T = j \end{array} \right\} S < T; \quad (i < j). \quad (11)$$

Алгоритмическая операция  $\Pi$  с должна обеспечить однозначное нахождение оценки опасности ( $D$ ), основанной на совокупности всех данных.

На практике используются различные принципы получения оценки  $D$ . Их выражение с помощью логических формул следующее.

В одних работах исследователи находят  $D$ , исходя из одной только сейсмостатистики. Формула этого решения:

$$D \equiv S. \quad (12)$$

Если  $S = i$ , то и  $D = i$ .

Если  $S = j$ , то и  $D = j$ .

Здесь буквы  $i$  и  $j$  обозначают какие-либо числа сейсмических баллов, причем  $i < j$ .

Изредка предпочтение отдается оценке опасности по тектонофизическим данным и принимается, что

$$D \equiv T. \quad (13)$$

Если  $T = i$ , то и  $D = i$ .

Если  $T = j$ , то и  $D = j$ .

Так, например, приходится поступать при отсутствии достаточно полной сейсмостатистики. В других, наиболее удачных случаях, когда оценки  $S$  и  $T$  оказываются одинаковыми, исследователи без сомнений признают такой же и оценку  $D$ , используя принцип «логического умножения». Согласно этому принципу, записываемому

$$D \equiv S \wedge T, \quad (14)$$

величина  $D$  приравнивается  $i$  только при условии, что оба логических множителя имеют одинаковую величину  $S = i$ ,  $T = i$ . Тогда признается, что  $D = i$ . Если  $S$  не равно  $T$ , величина  $D$  остается неопределенной.

Если имеется достаточно данных для получения  $S$  и  $T$  и эти оценки не равны одна другой, на практике часто используется принцип «логического сложения»:

$$D \equiv S \vee T. \quad (15)$$

Он состоит в том, что  $D$  приравнивается  $j$ , если этой величины достигает либо одна  $S$ , либо одна  $T$ , либо обе они равны  $j$ . Иначе это можно записать как равенство  $D$  той из оценок  $S$  и  $T$ , которая имеет максимальную величину

$$D = \max(S, T). \quad (16)$$

Наконец, оценка  $D$  в ряде случаев выносилась как средняя арифметическая между  $S$  и  $T$ :

$$D = \frac{S+T}{2}. \quad (17)$$

Сейсмическую опасность мы оцениваем с точностью до 1 балла. Поэтому в случаях различия  $S$  и  $T$  в 1 балл последняя формула дает одинаковый результат с предпоследней.

В данной работе мы не будем углубляться в обсуждение достоинств и недостатков перечисленных принципов получения оценки  $D$ . В процессе разработки алгоритма инженерной оценки сейсмической опасности предстоит большой труд по составлению логических формул для различных вариантов решения многих вопросов.

**Значение истинности.** Используемые нами геотектонические и тектонофизические понятия имеют существенно разную достоверность. Если понятие может быть выражено числом, например, место эпицентра передаваемого координатами, амплитуда разрыва, запасы месторождения и т. п., обычно указывается возможная ошибка измерения. Эпицентры, определенные с точностью  $\pm 1$  км, отделяются от установленных с точностью  $\pm 5$  км, от выявленных с точностью  $\pm 25$  км и т. д.

Для многих понятий такой способ оценки достоверности применить не удастся. Тогда может быть использована оценка истинности понятия, разработанная в математической логике. Для этого вводится классификация истинности понятий, каждый класс которой обозначается числом.

В простейшем случае так называемой двузначной логики различают лишь два класса: истина (обозначается  $+1$ ) и ложь (обозначается  $0$ ). В трехзначной логике выделяют классы: истина ( $+1$ ), неизвестно ( $0$ ), ложь ( $-1$ ). Для геологических и геофизических исследований оценки двух- и трехзначной логики явно недостаточны, и оказывается необходимой по меньшей мере пятизначная логика.

В геотектонике и тектонофизике предложено пять классов истинности понятий (Гзовский, Никонов, 1968). Обозначим их большой греческой буквой гамма с индексом 5, т. е.  $\Gamma_5$ . В итоге истинность записывается следующим образом:

$\Gamma_5 = +2$  — *общепризнанное понятие*, установлено достоверно, признается всеми исследователями, за исключением единиц.

$\Gamma_5 = +1$  — *обоснованное предположение*, имеет серьезное фактическое основание, но многими исследователями не признается.

$\Gamma_5 = 0$  — *интуитивная догадка*, фактами не обоснована, либо остается невыясненной, либо вытекает из общих представлений данного исследователя.

$\Gamma_5 = -1$  — *неоправдывающееся разумное предположение*, в принципе могло бы быть, но в действительности неверно, так как опровергается фактами.

$\Gamma_5 = -2$  — *абсурд* — в принципе неверно и опровергается фактами.

Используемые в качестве условных обозначений числа (в данном случае от  $+2$  до  $-2$ ) в математической логике принято называть *значениями истинности*.

В наиболее тесно связанных с практикой разведочных геологических и геофизических работах, выявляющих запасы полезных ископаемых, в СССР используется специальная классификация значений истинности, каждый класс которой обозначается не числом, а буквой с индексом. В нее входят так называемые категории запасов, соответствующие положительным значениям истинности. Категория  $A$  — наиболее точно определенные запасы — используются для планирования добычи ( $A_1$ ) и для обоснования технических проектов и капиталовложений в строительство горных предприятий ( $A_2$ ). Категория  $B$  — менее

точно определенные запасы, берутся за основу при разработке проектных заданий на строительство горных предприятий. Категория С — наименее точно определенные запасы, принимаются во внимание при ассигнованиях на геологоразведочные работы ( $C_1$ ) и при перспективном планировании геологоразведочных работ ( $C_2$ ).

Таким образом, в промышленной геологии уже давно используется пять положительных значений истинности. Этот опыт пора использовать при геотектонических заключениях и в тектонофизике.

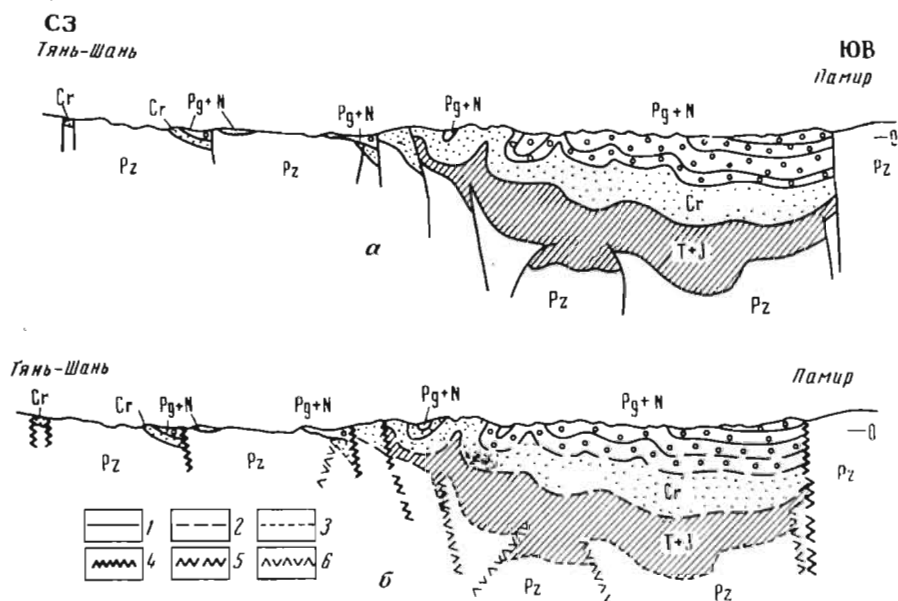


Рис. 76. Два изображения одного геологического профиля от Южного Тянь-Шаня до Северного Памира в Гариском районе:

а — профиль без указания значения истинности; б — с указанием значения истинности. Значения истинности: 1 — стратиграфические границы с  $\Gamma_s = +2$ ; 2 — стратиграфические границы с  $\Gamma_s = +1$ ; 3 — стратиграфические границы с  $\Gamma_s = 0$ ; 4 — разрывы с  $\Gamma_s = +2$ ; 5 — разрывы с  $\Gamma_s = +1$ ; 6 — разрывы с  $\Gamma_s = 0$ . Латинскими буквами обозначен возраст пород по международной системе

Выше речь шла о значении истинности какого-либо одного понятия. Часто высказываются суждения, основанные на нескольких понятиях, каждое из которых имеет свое значение истинности. Тогда возникает вопрос, как определить значение истинности такого сложного суждения. Ответ дает математическая логика, но для этого сложное суждение должно быть записано в виде логической формулы. Если сложное суждение получается путем «логического сложения», значение истинности суммы равно максимальному из значений слагаемых. Если сложное суждение является результатом «логического умножения», значение истинности произведения равно минимальному из значений истинности множителей.

Оценки значений истинности могут принести большую пользу. Они должны непосредственно графически выражаться на геологических профилях и разнообразных картах.

Например, оценками опасности по сейсмологическим данным, основанным на статистике сильных землетрясений, можно приписывать значение истинности  $+2$ . Оценки опасности, вытекающие из статистики одних лишь слабых землетрясений, не могут иметь значение истинности выше  $+1$ .

Тектонически аргументированные оценки сейсмической опасности могут иметь истинность  $+2$  в случае регистрации геоморфологических

следов сильных землетрясений недавнего прошлого, а также при инструментальном подтверждении достаточно высокой скорости деформации коры в настоящее время.

Оценивая опасность по совокупности всех данных, мы примем значение истинности +2, если и сейсмологические, и тектонофизические материалы приводят к одинаковой опасности с максимальным значением истинности. Разбор других случаев станет возможным после того, как будут приняты определенные логические формулы оценки опасности по совокупности данных.

Для поисков и разведки месторождений полезных ископаемых чрезвычайно важно указывать значение истинности изображения структуры, а также различных геотектонических и тектонофизических выводов. В качестве примера на рис. 76 приведены два варианта геологического профиля от Северного Памира до Южного Тянь-Шаня в Гармском районе. В первом варианте (а) — обычном для геотектонистов — почти все линии выглядят одинаково достоверными. Во втором варианте (б) дано четкое разделение линий в соответствии с их значением истинности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в книге примеры математического рассмотрения тектонических вопросов показывают, что математика может с успехом дополнить существующие методы геотектонических исследований. Большое значение математики состоит в объективности и количественной форме описания тектонических явлений.

**Характеристика величины** структурных элементов земной коры может быть достигнута путем измерения определенных габаритных размеров складок, разрывов, антиклинорий, синклинорий, синтекториев и т. п. Предложенные определения структурных элементов дают основу для получения однозначных результатов таких измерений.

**Приближенная характеристика формы** структурных элементов земной коры получается с помощью безразмерных габаритных коэффициентов, отражающих соотношение между главными размерами и другими количественными показателями формы каждого структурного элемента.

**Аналитическая характеристика формы и величины** структурных элементов земной коры является наиболее полной и точной. В книге показана возможность описания формы структурных элементов с помощью различных уравнений. Вид уравнения дает основное качественное представление о форме. Параметры уравнения количественно завершают описание.

**Сопоставление формы и величины** структурных элементов земной коры необходимо при решении многих теоретических и практических задач. Оно требуется для распространения на природные объекты выводов, полученных при испытаниях моделей. Сопоставление формы и величины структурных элементов, содержащих месторождения полезных ископаемых, с формой и величиной элементов, лишенных месторождений, имеет значение для направления поисковых и разведочных работ. Объективными признаками для сравнения форм и величины структурных элементов различных районов, а также для сопоставления моделей и природных объектов, могут служить уравнения с их параметрами, габаритные коэффициенты и размеры.

**Рациональная основа морфологической классификации** структурных элементов земной коры может быть создана лишь с использованием математических принципов описания формы геологических тел.



**Характеристики тектонических движений** оказываются наиболее содержательными, если они выражаются количественно в виде скоростей и объемов движений, т. е. потоков. При этом большое значение имеют представления дифференциального и интегрального исчислений.

**Особенности проявления тектонических движений в пространстве** получают объективное количественное описание при рассмотрении их в качестве векторных величин. Теория векторного поля имеет большое значение для развития представлений о тектонических движениях.

**Деформации и напряжения** в земной коре, связанные с тектоническими процессами, выражаются тензорными величинами. Распределение деформаций и напряжений в пространстве выявляется в форме тензорных полей.

**Энергия тектонических процессов** является важнейшей обобщающей характеристикой, которая позволяет выяснять соотношения этих процессов с геофизическими и геохимическими. Знание энергии тектонических процессов необходимо для объяснения их причин. Определение энергии требует привлечения дифференциального, интегрального и векторного исчислений.

**Геотектонические обобщения** будут формулироваться значительно полнее, содержательнее, точнее и более объективно, когда тектонисты станут шире использовать математические представления. Чрезвычайно важно формулировать выводы после статистической обработки исходного фактического материала. Сопоставляя тектонические явления, необходимо иметь в виду существующие в математической логике пять типов соотношений между двумя понятиями. Объективное отражение связи между тектоническими явлениями требует ее количественного вероятностного выражения. Для всевозможных прогнозов практического содержания, основанных на тектонических данных, предстоит выработать четкие схемы умозаключений — алгоритмы, которые обеспечат однозначные результаты прогнозов. Большое значение для развития геотектоники и ее приложений в других науках и практике имеет широкое внедрение оценок истинности. Они должны даваться для частных выводов структурного и исторического содержания и для широких обобщений.

Возможности использования математики обсуждены в этой книге далеко не полностью. Основное внимание было уделено первоочередным задачам и общим направлениям математизации геотектоники. Возможные конкретные приложения математики в геотектонике весьма многочисленны. Из-за ограниченности объема книги автору пришлось остановиться лишь на первых относительно простых разделах математики. В связи с этим весьма важные вопросы использования математики при геотектонических обобщениях не удалось рассмотреть в необходимой мере. Автор надеется восполнить этот пробел в следующей книге.

Математику можно и нужно применять в геотектонике. Это должно стать обычным в работе тектониста.

## ЛИТЕРАТУРА

- ✓ Ажгирей Г. Д. Структурная геология. Изд-во МГУ, 1966.
- Ананян Э. В. Тектонофизические исследования разрывных нарушений (на примере Кафанского р-на Арм. ССР). Изв. АН Арм. ССР, «Наука о Земле», 1968, № 3.
- Артемьев М. Е. Некоторые закономерности распределения изостатических аномалий в области альпийских складчатых сооружений Западной Европы. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1962, № 9.
- ✓ Артемьев М. Е. Нарушения изостатического равновесия и их связь с новейшими и современными тектоническими движениями. В сб. «Проблемы неотектоники». М., изд-во МГУ, 1964.
- ✓ Артемьев М. Е. О связи нарушений изостатического равновесия с новейшими и современными тектоническими движениями. МГК XXII сессия, Докл. сов. геол., пробл. 12. Изостазия, 1964, М., изд-во АН СССР.
- ✓ Артемьев М. Е., Артюшов Е. В. Изостазия и тектоника. «Геотектоника», 1967, № 5.
- Ахмедов П. У. Некоторые специфические особенности трещинных коллекторов. Тр. Геол. совещ. нефтяников Ферганы. Ташкент, 1969.
- Балакина Л. М. Общие закономерности в направлениях главных напряжений в очагах землетрясений Тихоокеанского сейсмического пояса. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1962, № 11.
- Балакина Л. М., Введенская А. В., Мишарина Л. А., Широкова Е. И. Напряженное состояние в очагах землетрясений и поле упругих напряжений Земли. Изв. АН СССР, серия «Физика Земли», 1967, № 6.
- Беляев Н. М. Сопротивление материалов. Изд. 8-е. М., Гостеортехиздат, 1953.
- Беляевский Н. А. Глубинное строение территории СССР. «Советская геология», 1967, № 10.
- Богданов А. А., Зайцев Ю. А., Мазарович О. А., Максимов Л. А., Тихомиров В. Г., Четверикова Н. П. Тектоническое районирование палеозойского массива Центрального Казахстана. «Вестн. МГУ», серия геолог., 1963, № 5.
- Бончковский В. Ф. Некоторые обобщения результатов наблюдений наклонов земной поверхности. Тр. Ин-та физики Земли АН СССР, № 7, 1959.
- Борисенко А. И., Таранов И. Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М., изд-во «Высшая школа», 1966.
- ✓ Борисов А. А. Глубинная структура территории СССР. М., изд-во «Недра», 1967.
- ✓ Бронгулеев В. В. Мелкая складчатость платформы. Материалы к познанию геолог. строения СССР. Бюлл. МОИП, нов. серия, т. 18, вып. 14, 1951.
- Бронгулеев В. В. Проблема складкообразования в земной коре. М., изд-во «Недра», 1967.
- Букринский В. А., Михайлова А. В. Изучение связи трещиноватости с тектоническими структурами горных пород. Моск. ин-т радиоэлектроники и горной электромеханики. М., 1963.
- Букринский В. А., Пугачев М. И. Прогнозирование тектонических разрывов и зон интенсивной трещиноватости. Вопросы геометризации, физ.-техн. и горно-геол. показателей месторождений для моделирования на ЦВМ. М., 1966.
- Бунэ В. И., Введенская Н. А., Гзовский М. В. Методические основы сейсмического районирования. Сб. «Сейсмическое районирование СССР». М., изд-во «Наука», 1968.
- Бунэ В. И., Гзовский М. В., Запольский К. К. и др. (под ред. Ю. В. Ризниченко). Методы детального изучения сейсмичности. Тр. Ин-та физики Земли АН СССР, изд. АН СССР, 1960, № 9.
- Буртман В. С. Талассо-Ферганский сдвиг. Тр. Геолог. ин-та АН СССР, вып. 104, М., изд-во «Наука», 1964.
- Буртман В. С., Лукьянов А. В., Пейве А. В. и др. Горизонтальные перемещения по разломам и некоторые методы их изучения. Сб. «Разломы и горизонтальные движения земной коры». Тр. Геолог. ин-та АН СССР, вып. 80. М., изд-во «Наука», 1963.
- Введенская А. В. О поле смещений при разрывах сплошности упругой среды. Изв. АН СССР, серия геофиз. 1959, № 4.

Введенская А. В. Об определении напряжений, действующих в очагах землетрясений, по наблюдениям сейсмических станций. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 4.

Введенская А. В. Исследование напряжений и разрывов в очагах землетрясений при помощи теории дислокации. М., изд-во «Наука», 1969.

Вистелиус А. Б. Основные типы математических решений задач современной геологии. «Разведка и охрана недр», 1964, № 6.

Вировлянский Г. М. Выявление характера и плана деформации при анализе структуры рудных полей. Сб. «Проблемы тектонофизики». Госгеолтехиздат, 1960.

Войтович В. С. Природа Джунгарского глубинного разлома. Тр. Геолог. ин-та АН СССР, вып. 183, М., изд-во «Наука», 1969.

Воларович М. П. Исследования физических свойств горных пород при высоких давлениях и температурах. Сб. «Электрические и механические свойства горных пород при высоких давлениях». М., изд-во «Наука», 1966.

Воларович М. П., Гзовский М. В., Левыкин А. И., Осокина Д. Н. Корреляционная зависимость между декрементом затухания и модулями упругости горных пород. «Физика Земли», 1969, № 12.

Воларович М. П., Фан Вэй-цин. Исследование упругих свойств горных пород статическими и динамическими методами при высоких всесторонних давлениях. Тр. ин-та Физики Земли АН СССР № 23 (190). Сб. «Физические свойства горных пород при высоких давлениях». М., изд-во АН СССР, 1962.

Вольфсон Ф. И. Структуры эндогенных рудных месторождений. Сб. «Основные проблемы в учении о магматогенных рудных месторождениях». М., изд-во АН СССР, 1953.

Воронин Ю. А. К математико-логическому освоению геологических классификаций. «Геология и геофизика», 1963, № 9.

Воронин Ю. А., Гольдин С. В., Гольдина Н. А. и др. Опыт анализа и построения геологических классификаций на основе представлений конечной математики. Тр. Ин-та геол. и геоф. СО АН СССР. Новосибирск, 1964.

Гзовский М. В. Цифровая характеристика складчатости. Сб. «Вопросы теоретической прикладной геологии», № 6, 1948.

Гзовский М. В. Волнистость простираания крупных тектонических разрывов. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1953, № 2.

Гзовский М. В. О задачах и содержании тектонофизики. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1954, № 3.

Гзовский М. В. Основные вопросы классификации тектонических разрывов. «Советская геология», сб. 41. М., Госгеолтехиздат, 1954.

Гзовский М. В. Тектонические поля напряжений. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1954, № 5.

Гзовский М. В. Моделирование тектонических полей напряжений и разрывов. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1954, № 6.

Гзовский М. В. Соотношения между тектоническими разрывами и напряжениями в земной коре. «Разведка и охрана недр», 1956, № 11.

Гзовский М. В. Механизм формирования крупных тектонических разрывов. «Разведка и охрана недр», 1956, № 7.

Гзовский М. В. Тектонофизическое обоснование геологических критериев сейсмичности, ч. 1 и 2. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1957, № 2 и 3.

Гзовский М. В. Метод моделирования в тектонофизике. «Советская геология», 1958, № 4.

Гзовский М. В. Основные вопросы тектонофизики и тектоника Байджансайского антиклинория. М., изд-во АН СССР, ч. I и II, 1959.

Гзовский М. В. Тектонофизика и проблемы структурной геологии. МГК XXI сессия, докл. сов. геологов, проблема 18. Структура земной коры и деформации горных пород. М., изд-во АН СССР, 1960.

Гзовский М. В. Физическая теория образования тектонических разрывов. Сб. «Проблемы тектонофизики», М., Госгеолтехиздат, 1960.

Гзовский М. В. Новейшая тектоника и геофизика Тянь-Шаня. В кн. «Неотектоника СССР», Рига, изд-во АН Латв. ССР, 1961.

Гзовский М. В. Новое направление изучения складок. Сб. «Складчатые деформации земной коры, их типы и механизм образования». М., изд-во АН СССР, 1962.

Гзовский М. В. Проблемы магнетизма и тектонофизика. Сб. «Вопросы вулканизма». Тр. I Всес. вулканолог. совещ. М., изд-во АН СССР, 1962.

Гзовский М. В. Основные вопросы тектонофизики и тектоника Байджансайского антиклинория, ч. III и IV. М., изд-во АН СССР, 1963.

Гзовский М. В. Использование новейших и современных тектонических движений при детальном сейсмическом районировании нового типа. Сб. «Современные движения земной коры», № 1, М., изд-во АН СССР, 1963.

Гзовский М. В. Геофизическая интерпретация данных о новейших и современных глубинных тектонических движениях. Сб. «Современные движения земной коры», № 1, М., изд-во АН СССР, 1963.

Гзовский М. В. Тектонофизика и проблема происхождения магм различного

- химического состава. Сб. «Проблемы магмы и генезиса изверженных горных пород». М., изд-во АН СССР, 1963.
- Гзовский М. В. Перспективы тектонофизики. МГК, XXII сессия. Докл. сов. геологов, проблема 4, М., изд-во «Наука», 1964.
- Гзовский М. В. Градиент скорости движений, напряженное состояние коры, энергия тектонических процессов новейшего времени. Сб. «Тектонические движения и новейшие структуры земной коры». М., изд-во «Недра», 1967.
- Гзовский М. В. Тектонофизическая оценка напряжений в земной коре. Материалы к Всес. конфер. по механике горных пород. Кольский филиал АН СССР, 1970.
- Гзовский М. В. Развитие новых направлений в тектонофизике. Изв. АН СССР. «Физика Земли», 1970, № 5.
- Гзовский М. В., Крестников В. Н., Рейснер Г. И. Геологические методы количественной характеристики среднего градиента скорости вертикальных тектонических движений (измененный наклон) земной коры и некоторые результаты их применения. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1959, № 8.
- Гзовский М. В., Никонов А. А. Количественные характеристики современных и молодых тектонических движений в областях с разными тектоническими режимами и сейсмичностью. «Физика Земли», 1968, № 10.
- Гзовский М. В., Михайлова А. В. Энергетика тектонических процессов. Сб. «Энергетика геологических процессов». М., изд-во МОИП, 1971.
- Гзовский М. В., Леонов Н. Н. Принципы глубинно-структурного районирования земной коры. Изв. АН СССР, «Физика Земли», 1970, № 7.
- Гзовский М. В., Никонов А. А. Сопоставление количественных характеристик тектонических движений в областях с разным тектоническим режимом и сейсмичностью. Тр. Междуна. конфер. по современным движениям. М., изд-во АН Латв. ССР, 1969.
- Геология и математика. Новосибирск, изд-во «Наука», 1967.
- Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. М., 1961.
- Горшков Г. П. О причинах землетрясений. Вестн. МГУ, 1967, № 5.
- Горшков Г. П., Шенкарева Г. А. Карта удельной энергии землетрясений. Сб. «Тектонические движения и новейшая структура земной коры». М., изд-во «Недра», 1967.
- Григорьев С. С. О трещинно-разрывной тектонике южной части Сахалина. Докл. АН СССР, т. 184, № 1, 1969.
- Грэвиль В. и Лузин Н. Элементы дифференциального и интегрального исчисления. М.—Л., 1931.
- Гутерман В. Г. Механизм формирования соляных структур платформенного типа. «Геофизический сборник», вып. 25. Киев, изд-во «Наукова думка», 1968.
- Девдарианн А. С. Математический анализ в геоморфологии. М., изд-во «Недра», 1967.
- Дедеев В. А., Жабрив И. П., Наливкин В. Д. и др. Проект классификации тектонических структур платформенного чехла. Л., ВМИГРИ, 1963.
- Деменецкая Р. М. Основные черты строения коры Земли по геофизическим данным. Гостоптехиздат, 1961.
- Дубнов Я. С. Основы векторного исчисления, ч. I и II. М.—Л. Гос. изд. техн.-теорет. литер., изд. 4-е, 1950.
- Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. М., Гос. изд-во техн.-теорет. литер., 1955.
- Забродин А. С. Опыт поисков смещенной части угольного пласта в нарушенных месторождениях, ч. I—II. М., Углетехиздат, 1951.
- Калачева В. Н., Кноринг Л. Д. Трещиноватость как показатель характера формирования тектонической структуры. «Геотектоника», 1967, № 6.
- Кейлис-Борок В. И. Определение динамических характеристик очагов землетрясений. Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, № 9, 1950.
- Кейлис-Борок В. И., Малниновская А. Н., Павлова Г. И. и др. Очаги землетрясения. Сб. «Методы детального изучения сейсмичности». Тр. Ин-та физики Земли. М., изд-во АН СССР, 1960.
- ✓ Кноринг Л. Д. О связи направлений трещин с элементами тектонических структур. Сб. «Вопросы математической геологии». М., изд-во «Наука», 1968.
- ✓ Кноринг Л. Д. Математические методы при изучении механизма образования тектонической трещиноватости. Л., изд-во «Недра», 1969.
- Количко А. В., Рац М. В. Трещиноватость нижнекаменноугольных известняков района Токтогульской ГЭС и ее влияние на инженерно-геологические условия строительства. Тр. «Гидропроекта», сб. 14, М., 1966.
- Копп М. Л., Расцветаев Л. М., Трифионов В. Г. Тектонические трещины, образовавшиеся при голоценовых землетрясениях Центрального Копетдага и его предгорий. Изв. АН СССР, серия геолог., 1964, № 7.
- Королев А. В., Шехтман П. А. Методы разведки рудных месторождений. Госгеолтехиздат, 1964.
- Косминская И. П. Развитие основ метода глубинного сейсмического зондирования земной коры. М., изд-во «Наука», 1968.

Косыгин Ю. А. Некоторые фундаментальные понятия структурной геологии. «Геотектоника», 1965, № 1.

Косыгин Ю. А. Тектоника. М., изд-во «Недра», 1969.

Косыгин Ю. А., Воронин Ю. А., Соловьева В. А. Опыт формализации некоторых тектонических понятий. «Геология и геофизика», 1964, № 1.

Косыгин Ю. А., Башарин А. К., Башарина Н. П. и др. Опыт объемного районирования земной коры на примере Сибири и Дальнего Востока. «Геология и геофизика», СО АН СССР, 1964, № 5.

Кочетков А. М. О напряженном и деформированном состоянии зарождающейся складки. Изв. АН СССР, «Физика Земли», № 4, 1968.

Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, изд. 7-е. М., изд-во АН СССР, 1951.

Крейтер В. М. Поиски и разведка месторождений полезных ископаемых, ч. 1 и II. Госгеолтехиздат, 1961.

Кропоткин П. Н. Основные вопросы энергетики тектонических процессов. Изв. АН СССР, серия Геол., 1948, № 5.

Кропоткин П. Н. Соотношения между поверхностными и глубинными структурами и общими характеристиками тектонических движений. Сб. «Структура и развитие земной коры». М., изд-во «Наука», 1964.

Куземко В. Н. Условия формирования нижнепалеозойских структур Михайловского рудного поля (Восточное Забайкалье). Геол. сб. Львов. геолог. об-ва, № 10, 1966.

Кузнецов Г. Н., Слободов М. А. Определение методом разгрузки напряжений, действующих в междокамерных целиках каменной соли в Артемовских рудниках. В сб. «Исследования по вопросам горного и маркшейдерского дела», № 22, М., «Углетехиздат», 1950.

Кулкашев Н. Т., Фомичев В. И. О структурных условиях локализации оруденения в Саякском рудном районе. Изв. АН Каз. ССР, серия геолог., № 2, 1970.

Кушнарев И. П. Определение направлений и амплитуд перемещений по разрывам. В кн. «Структуры рудных полей и месторождений». М., Госгеолтехиздат, 1960.

Кушнарев И. П. Глубины образования эндогенных рудных месторождений. М., изд-во «Недра», 1969.

Лазарев Ю. И. Методы структурного анализа в литологических исследованиях. Сб. «Проблемы осадочной геологии докембрия». М., изд-во «Недра», 1966.

Лебедева Н. Б. Опыт моделирования складчатой зоны. «Советская геология», 1966, № 2.

Левыкин А. И. Исследование поглощения упругих волн образцами горных пород при высоких всесторонних давлениях. Тр. Ин-та физики Земли, № 23 (190). Сб. «Физические свойства горных пород при высоких давлениях». М., изд-во АН СССР, 1962.

Лукин Л. И., Чернышев В. Ф., Кушнарев И. П. Микроструктурный анализ. М., изд-во «Наука», 1965.

Лукомский Я. И. Теория корреляции и ее применение к анализу производства. М., Госгеолтехиздат, 1961.

Лукьянов А. В. Горизонтальные движения по разломам при современных катастрофических землетрясениях. В кн. «Активизированные зоны земной коры, новейшие тектонические движения и сейсмичность». М., изд-во «Наука», 1964.

Лукьянов А. В. Структурные проявления горизонтальных движений земной коры. Тр. Геолог. ин-та АН СССР, вып. 136. М., изд-во «Наука», 1965.

Люстих Е. Н. Проблема энергетического баланса Земли в геотектонических гипотезах. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1951, № 3.

Магницкий В. А. Внутреннее строение и физика Земли. М., изд-во «Недра», 1965.

Матцкова В. А. Уточненная карта скорости современных вертикальных движений земной коры на западе европейской части СССР и некоторые соображения о периоде этих движений. Сб. «Современные движения земной коры», № 1. М., изд-во АН СССР, 1963.

Матцкова В. А. О периоде современных движений и качественной характеристике кривой скорости движений. В сб. «Современные движения земной коры», № 2. Тарту, 1965.

Мельников Н. В. Некоторые закономерности расположения трещин в антиклинальной складке. Материалы по геолог., гидрогеол., геофиз. и полезным ископ. Западной Сибири. Тр. СНИИГГИМС, вып. 27, 1962.

Мещеряков Ю. А. Вековые движения земной коры. Сб. «Современные движения земной коры», № 1. М., изд-во АН СССР, 1963.

Мещеряков Ю. А. Изучение современных движений земной коры и проблема прогноза землетрясений. Сб. «Современные движения земной коры», № 3. М., ВИНТИ, 1968.

Милеев В. С. Условия формирования складчатой структуры протерозойского Майтубинского антиклинория (Центральный Казахстан). Вестн. МГУ, «Геология», 1967, № 6.

Михайлов А. Е. Разрывы Сарысу-Тенизского водораздела. Изв. вузов, «Геология и разведка», 1959, № 12.

**Михайлов А. Е.** Основы структурной геологии и геологического картирования. 2-е изд. М., изд-во «Недра», 1968.

Михайлова А. В. Связь трещиноватости с разрывами и складчатыми структурами в Кадиевском районе Кузбасса. Вопросы маркшейдерско-геологической службы. Тр. Моск. горного ин-та. М., изд-во «Недра», 1968.

Михайлова А. В. Методика изучения больших деформаций в пластически деформируемых моделях. Тр. Совещ. по экспериментальной тектонике. Новосибирск, изд-во «Наука», СО АН СССР, 1969.

Молчанов И. А. Геологический анализ поступательных дизъюнктивов. Маркшейдерский сборник. Зап.-Сиб. геол. трест, т. II, 1935.

Молчанов И. А. Геометрический метод исследования дизъюнктивов и его применение для поисков смещенной части месторождения. Изв. Томского индустр. ин-та, т. 60, 1939.

Николаев Н. И., Шенкарева Г. А. Карта градиентов скорости новейших тектонических движений территории СССР. Сб. «Тектонические движения и новейшие структуры земной коры». М., изд-во «Недра», 1967.

Расцветаев Л. М., Разрывы Копетдага и их связь со складчатой структурой. «Геотектоника», 1966, № 1.

Раутиан Т. Г. Энергия землетрясений. Сб. «Методы детального изучения сейсмичности». Тр. Ин-та физики Земли, № 9 (176). М., изд-во АН СССР, 1960.

Резанов И. А. Зависимость мощности земной коры от возраста складчатости и интенсивности новейших движений. Изв. вузов, «Геология и разведка», № 8, 1968.

Рейснер Г. И. Построение карт градиентов скорости вертикальных тектонических движений земной коры на примере Северного Тянь-Шаня. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 9.

Ризниченко Ю. В. Сейсмическая активность и энергия максимальных землетрясений. «Проблемы геофизики Средней Азии и Казахстана». М., изд-во «Наука», 1966.

Романовский В. И. Элементарный курс математической статистики. Госплан-издат, 1939.

Ронов А. Б. История осадконакопления и колебательных движений европейской части СССР. Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, № 3, 1949.

Ронов А. Б. Некоторые общие закономерности развития и колебательных движений материков (по данным объемного метода). Сб. «Проблемы тектоники». М., Госгеолтехиздат, 1961.

Ронов А. Б., Хаин В. Е. История осадконакопления в среднем и верхнем палеозое в связи с герцинским этапом тектонического развития земной коры. «Советская геология», сб. 58, 1957.

Рыжов П. А. Геометрия недр. М., изд-во «Недра», 1964.

Савинский Д. В., Боярский А. Я., Громыко Г. Л. и др. Общая теория статистики, вып. I и II. М., изд-во МГУ, 1960.

Сафьян Л. М., Мирошниченко В. М., Наумочкин И. А. К формированию складчатости промежуточного типа на примере локальных структур южной части Таджикской депрессии. Сб. «Проблемы нефтегазоносности Таджикистана», вып. I. Душанбе, изд-во «Ирфон», 1969.

Скарятин В. Д., Москалев Н. П., Устинова З. С. и др. Характеристика макротрещиноватости мезозойских карбонатных пород Дагестана в связи с их нефтегазоносностью. «Новости нефтяной и газовой техники», серия геол., № 9, М., ГОСИНТИ, 1961.

Складчатые деформации земной коры, их типы и механизм образования. Сборник под ред. В. В. Белоусова. М., изд-во АН СССР, 1962.

Слободов М. А. Руководство по применению метода разгрузки для определения напряженного состояния в глубине горных массивов. Л., Углетехиздат, 1960.

Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. I, изд. 12-е, 1951; т. II, изд. 10-е, 1951; т. III, изд. 5-е, 1951; т. IV, изд. 2-е, 1951; т. V, изд. 1-е, 1947.

Смирнов В. И. Геология полезных ископаемых. М., изд-во «Недра», 1969.

Соболевский П. К. О смещениях. Тр. Общесибирского маркшейдерского съезда. Томск, 1925.

Соболевский П. К. Современная горная геометрия. «Социалистическая реконструкция и наука», 1932, № 7.

Соловьев С. Л. Общий обзор сейсмичности СССР. В кн. «Землетрясения в СССР». М., изд-во АН СССР, 1961.

Сорский А. А. Об условиях формирования полной складчатости в осевой зоне Восточного Кавказа. Сб. «Складчатые деформации земной коры, их типы и механизм образования». М., изд-во АН СССР, 1962.

Сорский А. А. Типы геосинклинальной складчатости Кавказа и условия их формирования. Сб. «Складчатые области Евразии». М., изд-во «Наука», 1964.

Страхов Н. М. Основы исторической геологии, т. I—II. Госгеолиздат, 1948.

Суворов А. И. Успенская зона Центрального Казахстана и ее некоторые аналоги. Изв. АН СССР, серия геол., 1961, № 8.

Суворов А. И. К характеристике Актаасской зоны разломов в Центральном Казахстане. Изв. АН СССР, серия геол., 1962, № 3.

- Токовенко В. С. Реконструкция тектонического поля напряжений Горловской антиклинали (Донбасс). Геологичнй журнал АН УРСР, т. 27, вып. 3, 1967.
- Толстов Г. П. Ряды Фурье. М.-Л., Гостехиздат, 1951.
- Трипольская М. И. Геологична будова зони зчленування Донецького кряжа з Приазовським кристалічним масивом. Вид-во АН УРСР, 1958.
- Трифонов В. Г. Морфология Саякской мульды в Центральном Казахстане (взаимоотношение сдвигов со складчатой структурой). Изв. вузов, «Геология и разведка», 1963, № 9.
- Трифонов В. Г. Ассоциация верхнепалеозойских структур Северного Прибалхашья. В кн. «Складчатые области Евразии». М., изд-во «Наука», 1964.
- Трофимов А. А. Об определении направления перемещения угольных пластов по тектоническому разрыву. Тр. Всес. научно-технич. совещ. по маркшейдерскому делу. Углетехиздат, 1958.
- Трофимов А. А. Моделирование и геометризация рудников и месторождений полезных ископаемых. «Советская геология», 1968, № 8.
- Турчанинов И. А., Марков Г. А. Влияние новейшей тектоники на напряженное состояние пород в Хибинских апатитовых рудниках. Изв. АН СССР, серия «Физика Земли», 1966, № 8.
- Удинцев Г. Б. Новые данные о строении дна Индийского океана. «Океанология», 1965, № 6.
- Удинцев Г. Б. Рельеф и структура дна Тихого океана. В сб. «Океанологические исследования», № 13, М., изд-во АН СССР, 1965.
- Филатов Е. И. Пример реконструкции плана деформаций отдельных этапов формирования структуры рудного поля (в Вост. Забайкалье). Изв. вузов, «Геология и разведка», № 4, 1969.
- Флинт Е. Е. Практическое руководство по геометрической кристаллографии. Госгеолтехиздат, 1956.
- Хаин В. Е. Геотектонические основы поисков нефти. Баку, Азнефтеиздат, 1954.
- Цзян-Цзу-ци. Тектоническая трещиноватость карбонатных пород Дагестана. Матер. научн. конфер. студентов и младших научных работников геолог. фак. МГУ, 1961.
- Шатский Н. С., Штилле Г., Богданов А. А. и др. (редакторы). Международная тектоническая карта Европы. М., 1962.
- Широкоев Е. И. Общие закономерности ориентации главных напряжений в очагах землетрясений. Средиземноморско-Азиатского сейсмического пояса. Изв. АН СССР, серия «Физика Земли», 1967, № 1.
- Шолпо В. Н. Типы и условия формирования складчатости Сланцевого Дагестана. М., изд-во «Наука», 1964.
- Эз В. В., Гафт Д. Е., Кузнецов Б. И. Морфология и условия образования голоморфной складчатости на примере Зилаирского синклиория Южного Урала. М., изд-во «Наука», 1965.
- Эз В. В. О роли изоклиальной складчатости в структуре беломорид. Геотектоника, 1967, № 3.
- Эз В. В. Особенности складчатости структуры ультраметаморфических толщ на примере беломорского комплекса Балтийского щита. МГК, XXIII сессия. Докл. сов. геологов, проблема 4, 1968.
- Яковлев К. П. Математическая обработка результатов измерений. М. Гос. изд-во техн.-теор. литер., 1953.
- Яншин А. Л. (главный редактор). Тектоническая карта Евразии. М., 1966.
- Belousov V. V., Gzovsky M. V. Experimental tectonics. Physics and Chemistry of the Earth, vol. 6, Pergamon Press, London, 1965.
- Benioff H. Measurements of strain in the Earth's crust. Annals of the International Geophysical Year. v. XXX, Pergamon Press, Oxford—London—New York—Paris, 1965, pp. 281—289.
- Bhattacharji S. Theoretical and experimental investigation on crossfolding. Jour. Geol., v. 66, 1958, pp. 625—766.
- Biot M. A. Folding instability of a layered viscoelastic medium under compression. Proc. Geol. Soc., Amer. A., v. 242, 1957, pp. 444—454.
- Biot M. A. Theory of similar folding of the first and second kind. Geol. Soc. Amer. Bull., c. 76, N 7, 1965, pp. 251—259.
- Burford R. O. Strain analysis across the San Andreas Fault and Coast Ranges of California. Stanford University School of Earth Sciences. Department of Geology. Stanford, California, USA, 1965.
- Byerly P. The Nature of the First Motion in the Chilean Earthquake of November, 11, 1928. Amer. Jour. Sci., ser. 5, 16, pp. 232—236, 1928.
- Byerly P. Nature of Faulting as deduced from Seismograms. Geol. Soc. Amer., Special Paper, 62, 1955.
- Cloos E. Oolite deformation in the South Mountain Fold, Maryland. Bull. Geol. Soc. Amer., v. 58, N 9, 1947.
- Ghost S. K., Ramberg H. Buckling experiments on intersecting fold patterns. Tectonophysics, v. 5, N 2, 1968.
- Gzovsky M. V. Method of modelling in tectonophysics. Union geoph. et geodet.

Intern. Assoc. seismol. et physique de l'inter de la Terre. Trav. Sci., ser. A, fasc 20, Toulouse, 1959.

G z o v s k y M. V. The use of scale models in tectonophysics. Intern. Geology Review v. 1, N 4, Washington, 1959<sub>2</sub>.

G z o v s k y M. V. Tectonophysics and the forecast of earthquakes. Bull. Seismol. Soc. Amer., N 3, 1962.

G z o v s k y M. V. Tectonophysics and the study of the upper mantle. «Tectonophysics», N 1, 1964.

G z o v s k y M. V. Scheme of stress of Earth's crust and energy of tectonic processes connected with upper mantle of USSR territory. Ann. Acad. Sci. Fennicae, A. III. 90, Helsinki, 1966.

G z o v s k y M. V. A state of Stress in the Earth's Crust and the Energy of Tectonic Processes associated with the Upper Mantle. Geophys. J. R. Astr. Soc. 14, London, 1967, pp. 331—339.

G z o v s k y M. V., K u z n e c o v a I. M., O s o k i n a D. N. Die Charakterisierung tectonischer Spannungsfelder in Verbindung mit Problemen des Gebirgsdruckes. Freiberger Forschungshefte, C—81, Geophysik, Akademie — Verlag, Berlin, 1960.

G o g u e l l J. Observation sur la deformation d un calcaire metamorphique. Bull. Soc. Geol. France, serie 5, t. 18, 1948.

H a s t N. The measurement of rock pressure in mines. Sveriges Geologiska Undersokning, Arsbok 52, N 3. Stockholm, 1958.

H i r a y a m a J. On the method for Analyzing and Modelling of Tectonic Stress Fields. The Jour. of the Geol. Soc. of Japan, v. 72, N 3, 1966.

K a k i m i T., H i r a y a m a J., K a g e y a m a K. Tectonic Stress-Fields deduced from the Minor Fault Systems in the Northern Part of the Miura Peninsula. Jour. of the Geol. Soc. of Japan, v. 72, N 10, 1966

M i y a m u r a S. Types of Crustal Movements accompanied with Earthquakes. I Intern. Symposium on Recent Crustal Movements, Leipzig, 1962.

R a m b e r g H. Fluid dynamics of viscous bucking applicated to folding of layered rocks. Amer. Ass. Petr. Geol. Bull., v. 47, 1963, pp. 484—505.

R a m b e r g H. Strain distribution and geometry of folds, Bull. Geol. Uppsala, 42, 1963.

R a m s a y J. G. The deformation of early linear structures in areas of repeated folding. Jour. Geol. v., 68, № 1, 1960.

R a m s a y J. G. Interference patterns produced by the superposition of folds of similar type. Jour. Geol., v. 70, № 4, 1962<sub>1</sub>.

R a m s a y J. G. The geometry and mechanics of formation of «similar» type folds. Jour. Geol., v. 70, № 3, 1962<sub>2</sub>.

R a m s a y J. G. Folding and fracturing of rocks. Mc-Graw-Hil Company. New York, London, 1965.

S h i m a z u Y a s u o Thermodynamics of tectogenesis. Earth Sci. Journ. Assoc. Geol. Collab. in Japan, № 58, 1962.

S h i m a z u Y a s u o. Energy analysis of geological phenomena. Jour. of Earth Sci., Nagoya Univ., v. 12, № 1, 1964.

S u t t o n J. Some structural problems in the Scottish Highlands. Internat. Geol., Congr. Reports of XXI Session, p. XV111, 1960.

S u t t o n J. Moine Series of Scotland. II. Structure. Sci. Progress, v. 50, № 197, 1962.

T u r n e r F. J., W e i s s L. E. Structural analysis of metamorphic tectonites, New York — San Francisco — Toronto — London, 1963.

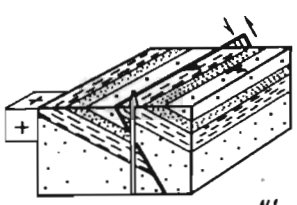
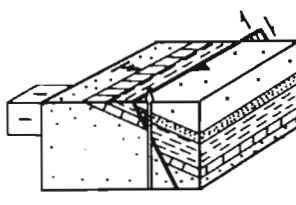
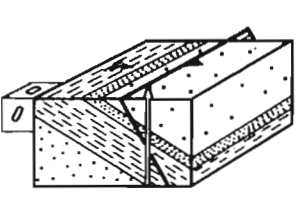
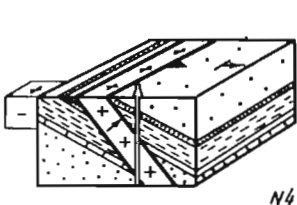
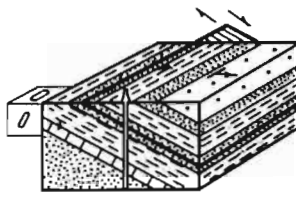
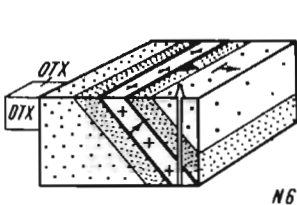
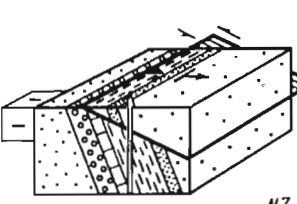
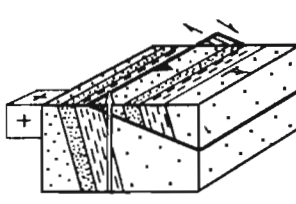
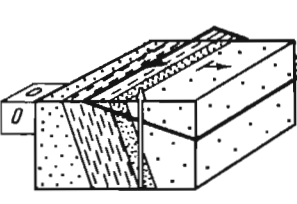
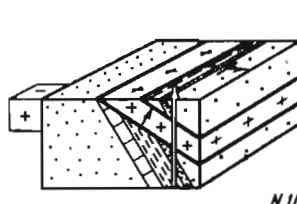
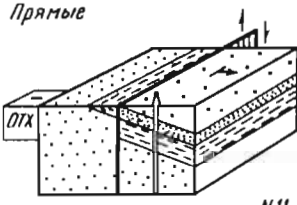
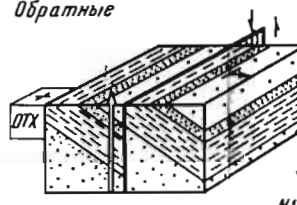
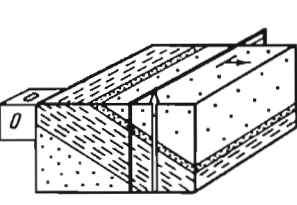
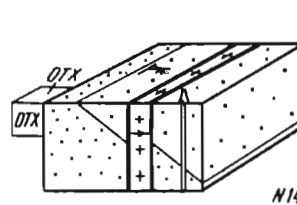
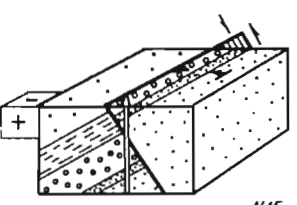
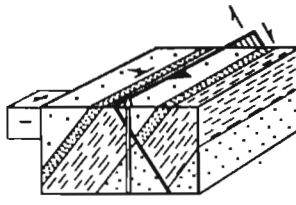
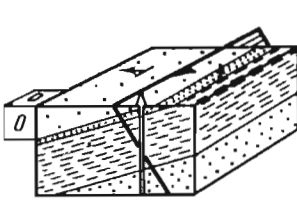
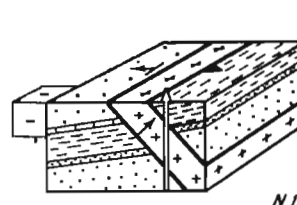
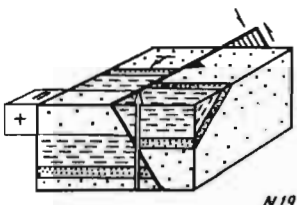
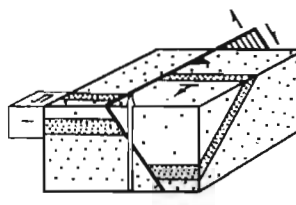
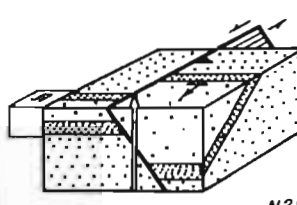
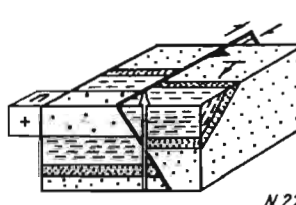
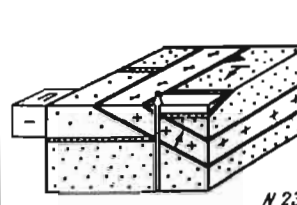
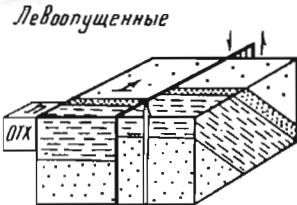
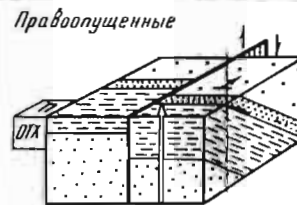
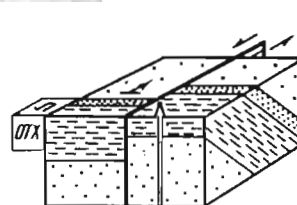
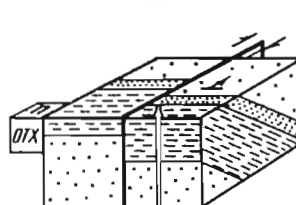
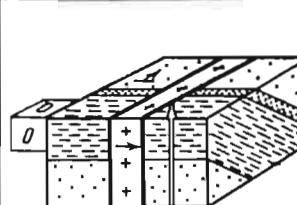
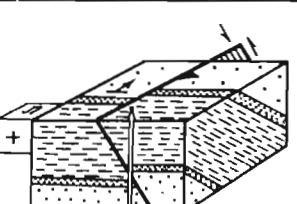
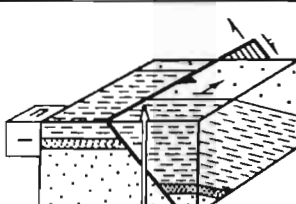
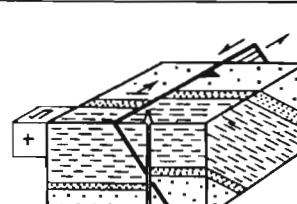
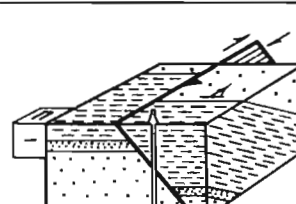
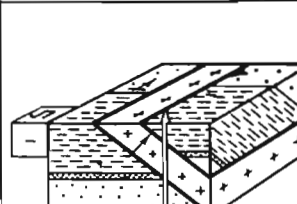
V a n H i s e C. R. Principles of North American Pre-Cambrian geology. U. S. Geol. Surv., 16, the Ann. Report, 1894.

W e i s s L. E. Geometry of superposed folding. Bull. Geol. Soc. Am., v. 70, № 1, 1959.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>I. Геометрия при изучении структуры земной коры</b> . . . . .	5
<b>Структурные элементы земной коры</b> . . . . .	—
<b>Внутрикоровые структурные элементы</b> . . . . .	8
<b>Складки</b> . . . . .	—
Основные представления о складках . . . . .	9
Определение складки (9). Элементы складок (11). Безразмерные габаритные коэффициенты складок (16) . . . . .	20
Складки на профиле . . . . .	23
Задачи аналитического описания складок (23). Координаты и их преобразования (24). Аппроксимация складок линиями первого порядка (33). Аппроксимация складок линиями второго порядка (43). Аппроксимация складок степенными, показательными и тригонометрическими кривыми (66). Описание асимметричных складок (81) . . . . .	83
Складки в пространстве . . . . .	83
Аналитическое описание складок (83) . . . . .	83
Описание складок топографическими поверхностями (89). Описание наложенных складок (91) . . . . .	93
<b>Разрывы</b> . . . . .	94
Основные представления о разрывах . . . . .	94
Определение разрывов (94). Строение разрыва (97). Элементы разрыва (99). Безразмерные габаритные коэффициенты разрыва (102) . . . . .	104
Измерение истинной амплитуды разрыва . . . . .	110
Геометрические типы отдельных разрывов . . . . .	112
Описание множества разрывов . . . . .	119
<b>Общекоровые структурные элементы</b> . . . . .	—
Океанические части коры . . . . .	—
Материковые части коры . . . . .	—
<b>II. Дифференциальное и интегральное исчисления при изучении структуры и тектонических движений земной коры</b> . . . . .	127
<b>Элементы дифференциального исчисления</b> . . . . .	—
Бесконечно малая и бесконечно большая величины (127). Ничтожно малая и очень большая величины (128). Предел функции (129). Первая производная функции (130). Дифференциал (137). Вторая производная функции (140). Приложения производных (143) . . . . .	145
<b>Примеры использования дифференциального исчисления в геотектонике и тектонофизике</b> . . . . .	145
Скорость тектонических движений (147). Градиент скорости тектонических движений (152) . . . . .	156
<b>Элементы интегрального исчисления</b> . . . . .	156
Неопределенный интеграл (156). Определенный интеграл (159) . . . . .	162
Примеры использования интегрального исчисления в геотектонике и тектонофизике . . . . .	162
Объемная характеристика тектонических движений (163). Логарифмическая деформация горных пород (164). Энергия тектонических процессов (166) . . . . .	171
<b>III. Векторное и тензорное исчисления при изучении тектонических движений, деформаций и напряжений земной коры</b> . . . . .	—
<b>Скаляры, векторы, тензоры</b> . . . . .	—
Математические действия с векторами (174). Математические действия с тензорами 2-го ранга (179) . . . . .	184
<b>Тензор напряжений</b> . . . . .	192
Элементы математической теории поля . . . . .	192
Скалярное поле (192). Векторное поле (195). Тензорное поле 2-го ранга (210) . . . . .	214
Примеры использования скалярных, векторных и тензорных полей в геотектонике и тектонофизике . . . . .	222
<b>IV. Применение математики в геотектонике и тектонофизике</b> . . . . .	231
<b>Заключение</b> . . . . .	231
<b>Литература</b> . . . . .	233

Положение разрыва по отношению к направлению движения	Направление перемещения по разрыву	Висячее крыло перемещено по падению разрыва - сбросы	Перемещение параллельно простиранию разрыва - сдвиги		Перемещение перпендикулярно разрыву - раздвижки	
			левые	правые		
Согласные	опережающие	 N1	 N2	 N3	 N4	
	последние		 N5		 N6	
	отстающие	 N7	 N8	 N9	 N10	
Вертикальные		Прямые  N11	Обратные  N12	 N13	 N14	
	несогласные	 N15	 N16	 N17	 N18	
Поперечные	левопадающие	 N19	 N20	 N21	 N22	 N23
	вертикальные	Левопущенные  N24	Правопущенные  N25	 N26	 N27	 N28
Поперечные	правопадающие	 N29	 N30	 N31	 N32	 N33

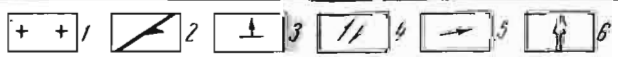
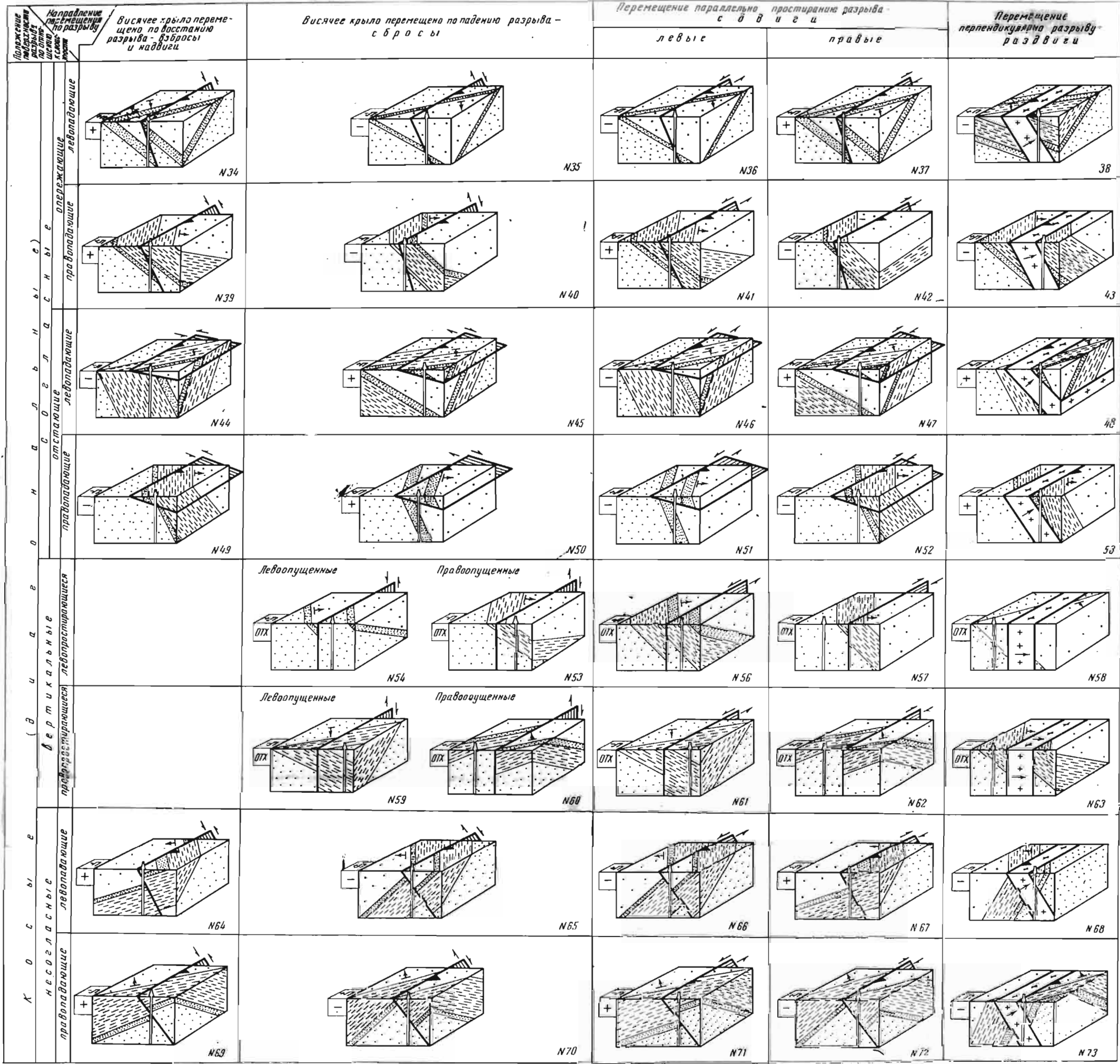


Рис. 48. Основные морфологические типы разрывных смещений

Смещения выходов слоев в плане: вкост простирания слоистости и на разрезе—вдоль вертикальной линии: (+) — сдвиг; (-) — зияние; Смещения выходов слоев в плане вдоль простирания разрыва: П — правое, Л — левое, О — случаи, когда разрыв не влияет на выходы слоев в плане или на разрезе. ОТХ — отход, 1 — породы, заполняющие шов разрыва; 2 — направление падения шва разрыва; 3 — направление падения слоев; 4 — направление относительного перемещения по разрыву типа скола; 5 — то же по разрыву типа отрыва; 6 — буровые скважины